



سلسلة عروض رفعة الرياضيات

أ. روان القضاة

رياضيات 3

رياضيات 3

أ/ روان تيسير أحمد القضاة

سلسلة عروض رفعة (رياضيات 3)

رقم الايداع 1443/2844

تاريخ 15/03/1443 هـ

رقم الردمك 978-603-03-9312-1

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين،

أما بعد:

نبذة تعريفية لمجموعة رفعة :

هي مجموعة تُدار من قبل معلمي ومعلمات الرياضيات من جميع أنحاء المملكة، وهي قائمة على التطوير المهني لجميع المعلمين والمعلمات، وابتكار الأفكار الإبداعية للتعليم العام، والإنتاج الموثق لكل ما يخص الرياضيات والتعليم العام. ويهدف التسهيل والتيسير لمادة الرياضيات، تقدم مجموعة رفعة بين أيديكم هذا العمل ضمن "سلسلة عروض رفعة"

رياضيات 3: هو عبارة عن عروض جذابة وشاملة لجميع دروس منهج رياضيات 3 للصف الثاني الثانوي

والله ولي التوفيق



[Snapchat](#)



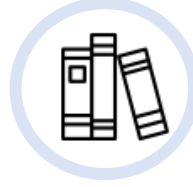
[Instagram](#)



[Twitter](#)



[You Tube](#)



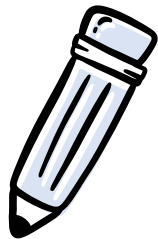
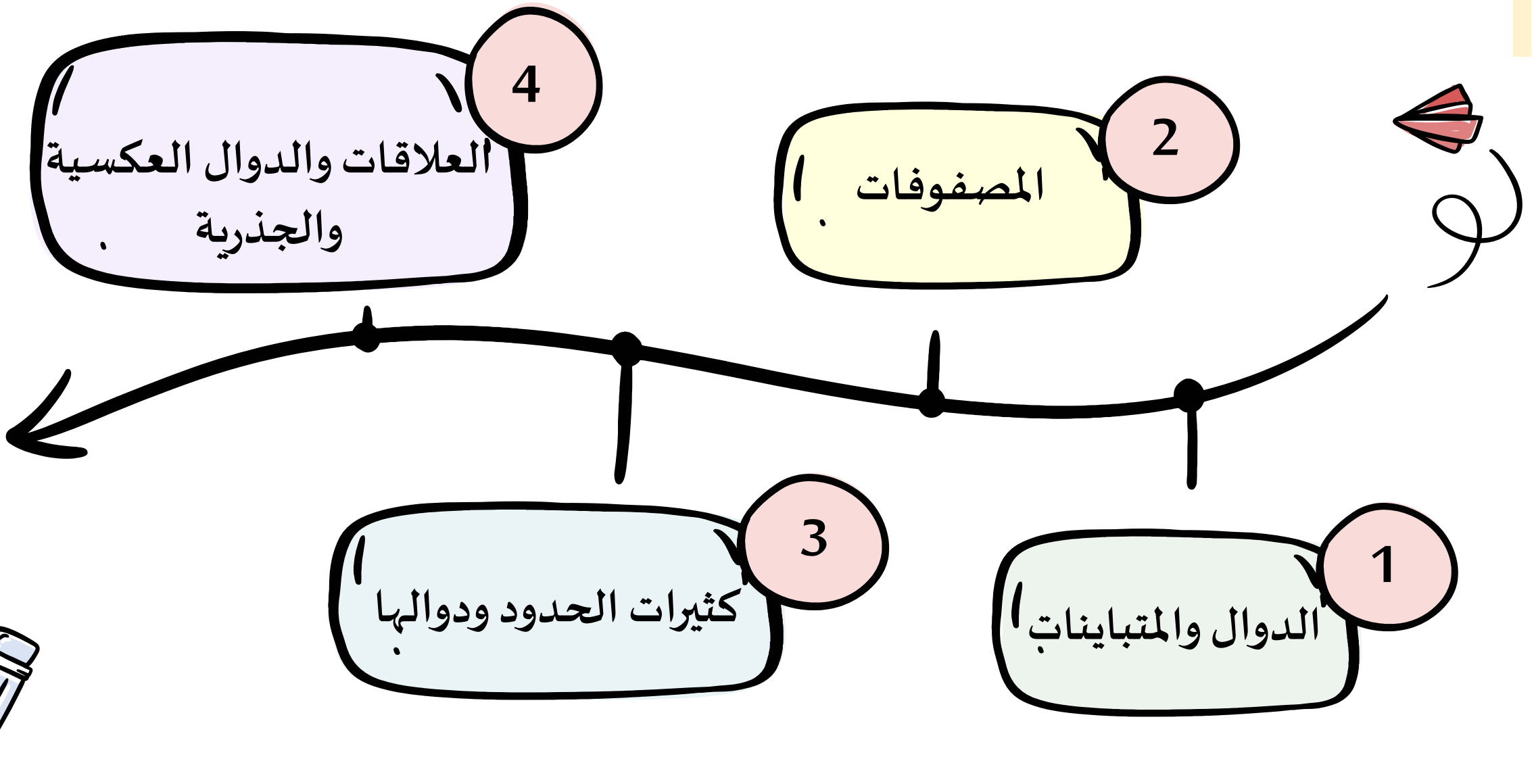
[المكتبة](#)



[قناة رياضيات 3](#)



تنبيه: كل الحقوق محفوظة ، نسختة الكترونية مجانية لا تباع عند إزالة شعار المجموعة أو اسم المؤلفه سوف يعرضك للمسائلة القانونية.



الفصل الاول : الدوال والمتباينات

1. خصائص الاعداد الحقيقية
2. العلاقات والدوال
3. دوال خاصة
4. تمثيل المتباينات الخطية و متباينات القيمة المطلقة بيانيا
5. حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيا
6. البرمجة الخطية

الفصل الثاني : المصفوفات

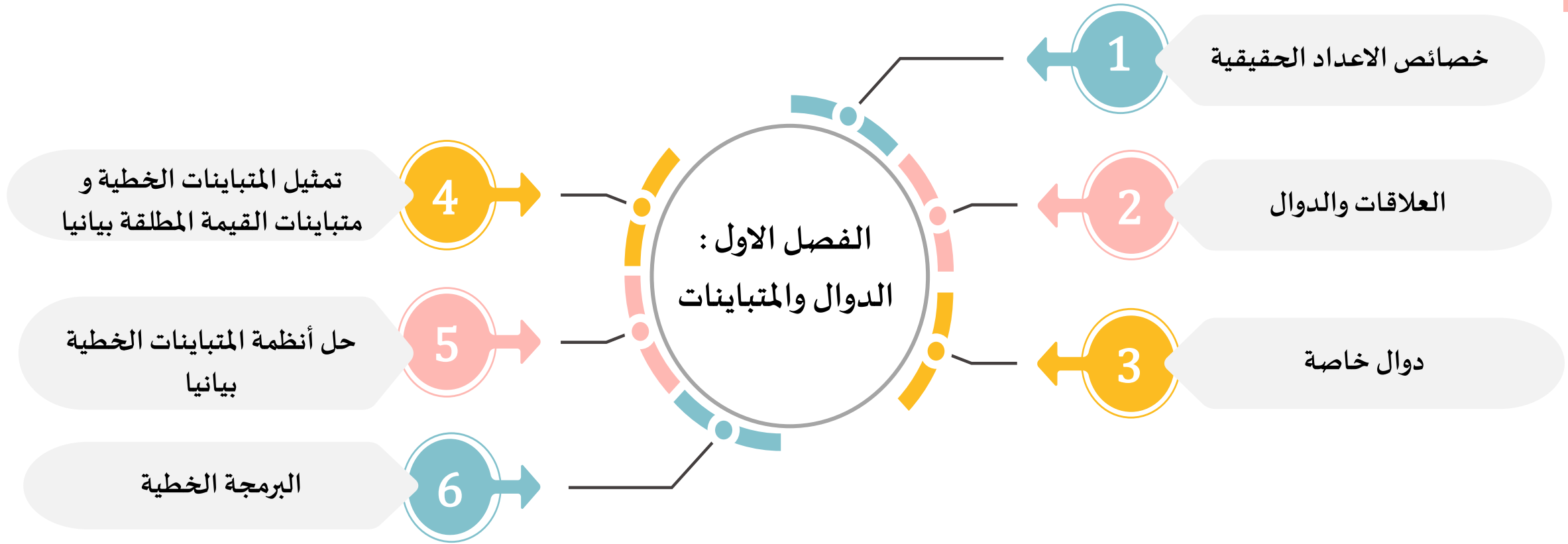
1. مقدمة المصفوفات
2. العمليات على المصفوفات
3. ضرب المصفوفات
4. المحددات وقاعدة كرامر
5. النظير الضربي للمصفوفة و أنظمة المعادلات الخطية

الفصل الثالث : كثيرات الحدود ودوالها

1. الاعداد المركبة
2. القانون العام والمميز
3. العمليات على كثيرات الحدود
4. قسمة كثيرات الحدود
5. دوال كثيرات الحدود
6. حل معادلات كثيرات الحدود
7. نظريتا الباقي والعوامل
8. الجذور والاصفار

الفصل الرابع : العلاقات والدوال العكسية والجذرية

1. العمليات على الدوال
2. العلاقات والدوال العكسية
3. دوال ومتباينات الجذر التربيعي
4. الجذر النوني
5. العمليات على العبارات الجذرية
6. الاسس النسبية
7. حل المعادلات والمتباينات الجذرية





تطوير - إنتاج - توزيع

الدرس الاول

خصائص الاعداد الحقيقية

المفردات

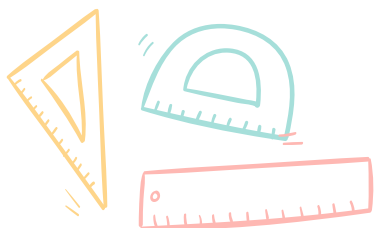
1. الاعداد الحقيقية .
2. الاعداد النسبية .
3. الاعداد غير النسبية .
4. الاعداد الصحيحة .
5. الاعداد الكلية .
6. الاعداد الطبيعية .

درست الاعداد الحقيقية
والعمليات عليها

فيما سبق

1. تصنيف الاعداد الحقيقية
2. استعمال خصائص الاعداد الحقيقية
لتبسيط قيم العبارات الجبرية .

الاهداف



أ.روان القضاة





يبيع محل للأدوات الرياضية 3 أنواع من الكرات بالسعر نفسه. إن شراء عدة أنواع لكل منها السعر نفسه يسهل عليك إيجاد المبلغ الإجمالي للشراء، وذلك باستعمال خاصية توزيع الضرب على الجمع.

أسئلة التعزيز

1. كم سعر كل صنف ؟
2. كم سعر الأصناف الثلاثة معا ؟
3. اكتب تعبيرا باستعمال خاصية التوزيع يمكن استعماله لحساب سعر كرتي سله و كرة قدم ؟

إرشادات للدراسة

تصنيف الأعداد

يمكن أن ينتمي العدد إلى أكثر من مجموعة أعداد، فمثلاً يُعد أي عدد طبيعي عدداً كلياً وصحيحاً، ونسبياً، وحقيقياً.

الأعداد الحقيقية: تتضمن **الأعداد الحقيقية** مجموعات مختلفة من الأعداد منها:

- **الأعداد النسبية** هي الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$ ، حيث a و b عددان صحيحان، والعدد b لا يساوي صفراً. وتكون الصورة العشرية للعدد النسبي إما عدداً عشرياً منتهياً أو دورياً.
- **الأعداد غير النسبية** وتكون الصورة العشرية للعدد غير النسبي ليست منتهية وليست دورية. لذا فإن الجذور التربيعية للأعداد التي ليست مربعات كاملة هي أعداد غير نسبية.
- مجموعة **الأعداد الصحيحة** هي: $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ ، ومجموعة **الأعداد الكلية** هي: $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. ومجموعة **الأعداد الطبيعية** هي: $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ، وكل منها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية؛ وذلك لأن كل عدد صحيح n يمكن كتابته على الصورة $\frac{n}{1}$.

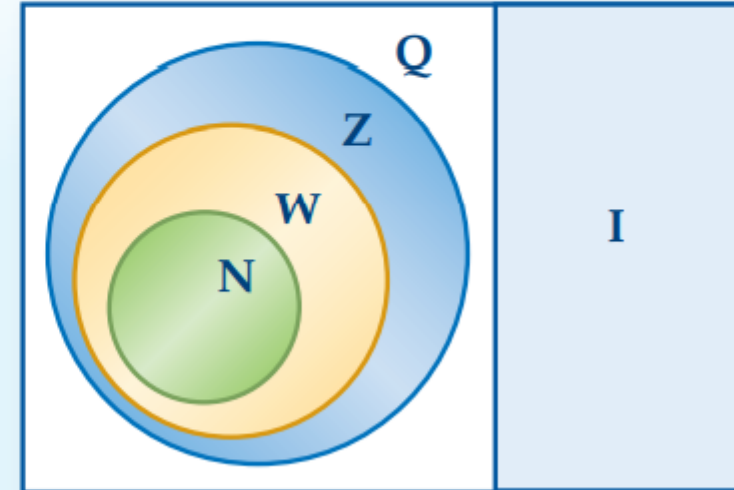
أضف إلى

مطوبتك

الأعداد الحقيقية (R)

مفهوم اساسي

الأعداد الحقيقية R



الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.66...$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi = 3.14159...$ $\sqrt{3} = 1.73205...$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$2, 96, 0, \sqrt{36}$
N	الأعداد الطبيعية	$3, 17, 6, 86$

تحقق من فهمك

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

$-\frac{7}{8}$ (1D)

$\sqrt{95}$ (1C)

$-\sqrt{49}$ (1B)

-185 (1A)

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

تأكد

(4) -12

(3) $\sqrt{11}$

(2) $\frac{5}{4}$

(1) 62

تدرب وحل المسائل

(25) $\sqrt{17}$

(24) $\frac{21}{7}$

(23) $-\sqrt{144}$

(22) $\frac{9}{3}$

خصائص الأعداد الحقيقية: يلخص الجدول الآتي بعض خصائص الأعداد الحقيقية:

ملخص المفهوم		
خصائص الأعداد الحقيقية		
لأي أعداد حقيقية a, b, c فإن:		
الخاصية	الجمع	الضرب
التبديلية	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
التجميعية	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
العنصر المحايد	$a + 0 = a = 0 + a$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
النظير	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a, a \neq 0$
الانغلاق	$(a + b)$ عدد حقيقي	$(a \cdot b)$ عدد حقيقي
التوزيع	$a(b + c) = ab + ac, (b + c)a = ba + ca$	

تمييز خصائص الأعداد الحقيقية

تحقق من فهمك

ما الخاصية الموضحة في: $2(x + 3) = 2x + 6$ ؟

ما الخاصية الموضحة في كل مما يأتي؟

تأكد

$$7(9 - 5) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 5 \quad (6)$$

$$(6 \cdot 8) \cdot 5 = 6 \cdot (8 \cdot 5) \quad (5)$$

$$(12 + 5)6 = 12 \cdot 6 + 5 \cdot 6 \quad (8)$$

$$84 + 16 = 16 + 84 \quad (7)$$

$$8\sqrt{11} + 5\sqrt{11} = (8 + 5)\sqrt{11} \quad (27)$$

$$-7y + 7y = 0 \quad (26)$$

تدرب وحل المسائل

$$\left(\frac{22}{7}\right)\left(\frac{7}{22}\right) = 1 \quad (29)$$

$$(16 + 7) + 23 = 16 + (7 + 23) \quad (28)$$

يمكنك إيجاد كل من النظير الجمعي والضربي لأي عدد حقيقي لا يساوي الصفر.

إرشادات للدراسة

النظير الجمعي

والنظير الضربي

إشارة النظير الجمعي

لعدد هي عكس إشارة

ذلك العدد، أما إشارة

النظير الضربي لعدد

فهي ذاتها إشارة ذلك

العدد.

تحقق من فهمك

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لـ

$$2\frac{1}{2} \quad (3B)$$

$$1.25 \quad (3A)$$

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

تأكد

(12) $\sqrt{5}$

(11) 3.8

(10) $\frac{4}{9}$

(9) -7

تدرب وحل المسائل

(33) $\frac{6}{13}$

(30) -8

أ.روان القضاة

تتطلب الكثير من التطبيقات الحياتية التعامل مع الأعداد الحقيقية.

تحقق من فهمك

خاصية التوزيع

(4) **أعمال:** يتقاضى كمال 20 ريالاً عن كل ساعة عمل في محل تجاري. فإذا كانت ساعات عمله في أحد الأسابيع هي 4, 3, 2.5, 3, 4 ، فما المبلغ الذي حصل عليه كمال في ذلك الأسبوع؟



الصنف	السعر (بالريال)
قميص	40
بنطال	60
ثوب	100
معطف	200

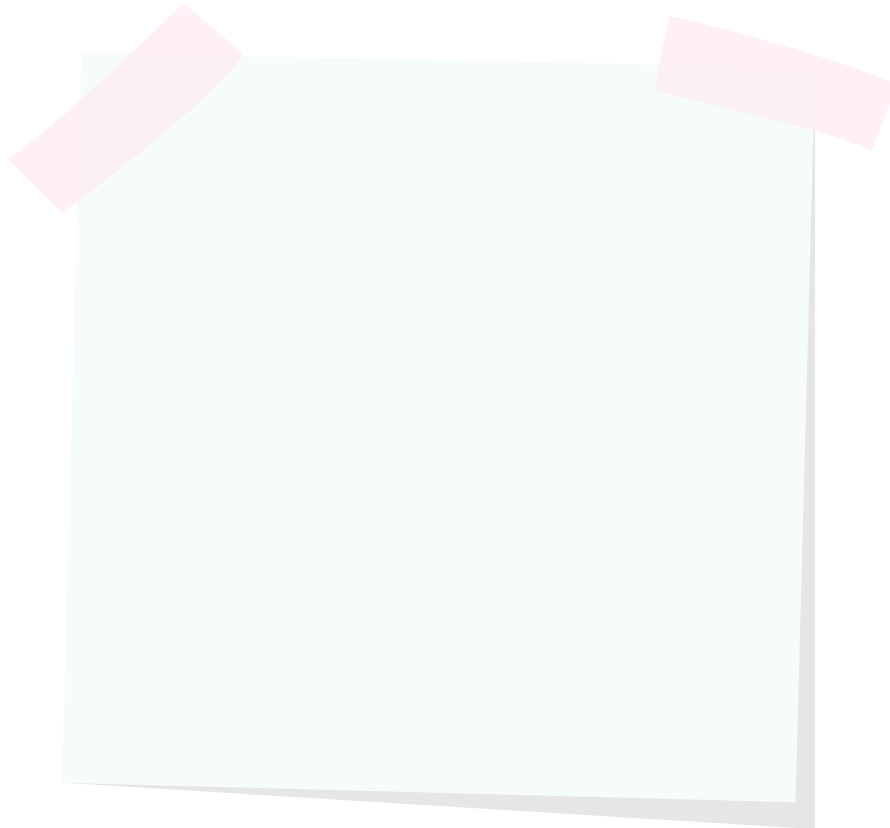
(13) تخفيضات: يبين الجدول المجاور أسعار أربعة أصناف من الملابس في أحد العروض. فإذا زاد السعر الأصلي لكلٍّ منها بنسبة 8% فأوجد قيمة هذه الزيادة.



بسّط العبارة:

تحقق من فهمك

$$3(4x - 2y) - 2(3x + y) \quad (5)$$



$$-2a + 9d - 5a - 6d \quad (38)$$

تدرب وحل المسائل

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$5(3x + 6y) + 4(2x - 9y) \quad (14)$$

تأكد

(51) ما العدد المختلف عن باقي الأعداد؟ وضح إجابتك.

$$\sqrt{81}$$

$$\sqrt{67}$$

$$\sqrt{35}$$

$$\sqrt{21}$$

(53) **اكتشف الخطأ:** بسّطت كلٌّ من فاطمة وخديجة العبارة: $4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$. فهل أيٌّ منهما تبسيطها صحيح؟ وضح إجابتك.

خديجة

$$4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$$

$$56a - 40b - 6a - 24b$$

$$50a - 64b$$

فاطمة

$$4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$$

$$56a - 40b - 6b + 24a$$

$$80a - 46b$$

(58) ما أبسط صورة للعبارة: $2(x - y) - 3(y - 2x)$ ؟

$-4y$ **C**

$5x - 8y$ **A**

$-4x - 5y$ **D**

$8x - 5y$ **B**



تطوير - إنتاج - توثيق

الدرس الثاني

العلاقات والدوال

المفردات

1. الدالة المتباينة
2. العلاقة المتصلة
3. العلاقة المنفصلة
4. اختبار الخط الراسي
5. المتغير المستقل
6. المتغير التابع
7. رمز الدالة .

درست تحديد كل من مجال ومدى
علاقة معطاة .

فيما سبق

1. تحليل العلاقات والدوال .
2. استعمال معادلات العلاقات والدوال

الاهداف



أروان القضاة



يبين الجدول أدناه المعدل الشهري التقريبي لأعلى درجة حرارة وأدناها في مدينة الرياض، لاحظ أن معدل كل من درجتَي الحرارة الدنيا والعليا لكل شهر يمكن تمثيله بزوج مرتب. فعلى سبيل المثال، يمكن تمثيل معدلي درجات الحرارة لشهر يناير بالزوج المرتب (9, 20).

معدل درجات الحرارة الشهرية (°C) في مدينة الرياض												
الشهر	يناير	فبراير	مارس	إبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
الدنيا	9	11	15	20	26	28	29	29	26	21	15	11
العليا	20	23	27	33	39	42	43	43	40	35	27	22

أسئلة التعزيز

1. ما معدل أدنى درجة حرارة في شهر مايو ؟
2. كيف تعبر عن معدلي درجتَي الحرارة الكبرى و الصغرى لشهر نوفمبر في صورة زوج مرتب ؟
3. لماذا تكون متأكدا من أن العدد الثاني في الزوج المرتب لهذه البيانات يكون دائما أكبر من أو يساوي العدد الأول دائما؟

العلاقات والدوال: تذكر أن الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

الدالة المتباينة

المجال

1
2
3

المدى

D
B
A

الدالة المتباينة: هي دالة يرتبط فيها كل عنصر من المجال بعنصر مختلف من المدى، وهذا يعني أنه لا يمكن أن يرتبط عنصران من المجال بالعنصر نفسه من المدى.

إرشادات للدراسة

العلاقة: تمثل العلاقة عادة على شكل أزواج مرتبة (x, y) ، كما يمكن وصفها بعدة طرق أخرى، منها المخطط السهمي، والجدول، والتمثيل البياني.

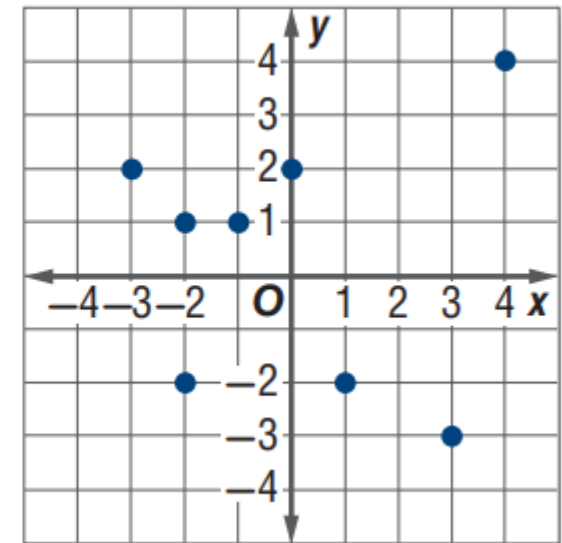
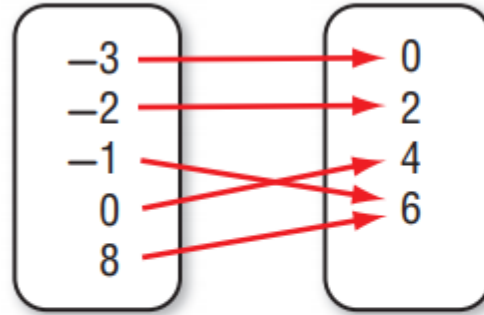
المجال: مجموعة إحداثيات x في الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة.

المدى: مجموعة إحداثيات y في الأزواج المرتبة الممثلة للعلاقة.

تحقق من فهمك

المجال والمدى

حدّد مجال كلّ علاقة فيما يأتي ومداهما، وبَيِّن ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا؟

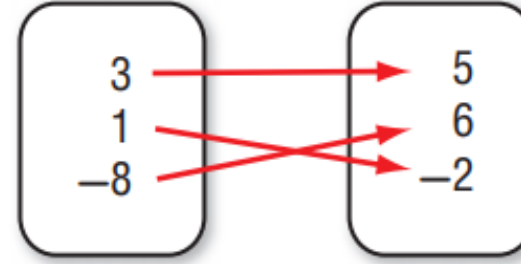


أروان القضاة

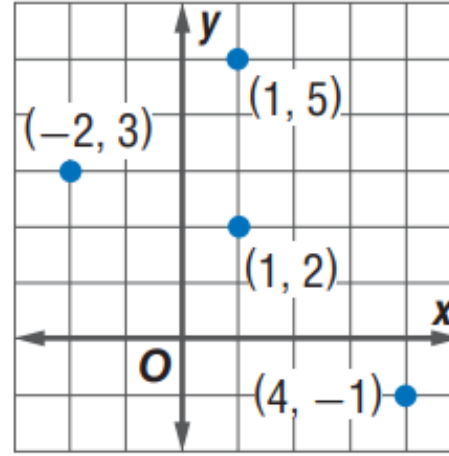
تأكد

حدّد مجال كل دالة فيما يأتي ومداها، وبيّن ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

(1)



(2)



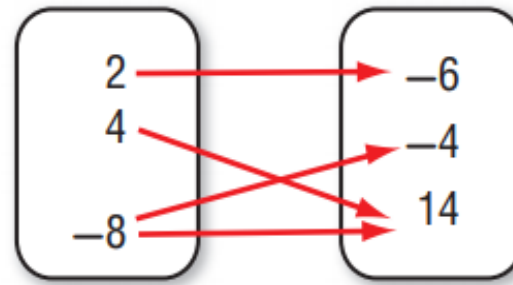
(3)

x	y
-2	-4
1	-4
4	-2
8	6



حدّد مجال كل دالة فيما يأتي ومداها، وبيّن ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

(13) $\{(3, -4), (-1, 0), (3, 0), (5, 3)\}$



(12)

x	y
-0.3	-6
0.4	-3
1.2	-1

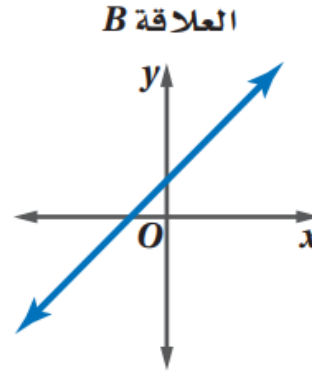
(11)

العلاقة التي يكون فيها المجال مجموعة من العناصر المنفردة، وتمثل بيانياً بنقاطٍ منفصلةٍ، مثل العلاقة A أدناه تسمى **علاقة منفصلة**. لاحظ أن تمثيلها البياني يتكون من نقاط غير متصلة، والعلاقة التي يكون مجالها فترة جزئية من الأعداد الحقيقية وأمكن تمثيلها بيانياً بمستقيم أو بمنحنى متصل مثل العلاقة B أدناه، فإنها تكون **علاقة متصلة**.

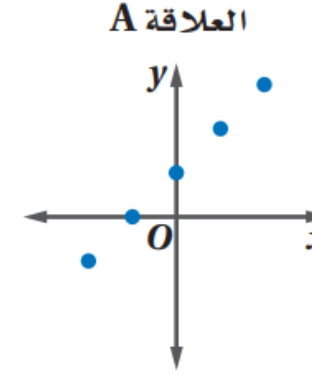
إرشادات للدراسة

العلاقة المتصلة

يمكنك تمثيل العلاقة المتصلة بيانياً دون رفع القلم عن الورقة.



علاقة متصلة



علاقة منفصلة

يمكنك استعمال **اختبار الخط الرأسي** مع كل من العلاقات المتصلة والمنفصلة لمعرفة إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

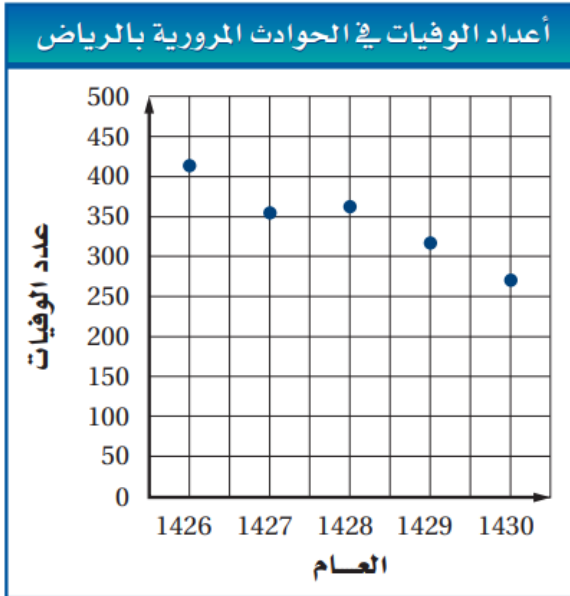
اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة، فالعلاقة دالة.

النموذج:

إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في أكثر من نقطة، فالعلاقة ليست دالة.

(2) **عمال:** إذا كان عدد العاملين في إحدى المؤسسات في الأعوام من 1424هـ إلى 1429هـ على الترتيب هو: 25, 28, 34, 31, 27, 29. مثل هذه البيانات بيانياً، وهل العلاقة التي تمثلها هذه البيانات منفصلة أم متصلة. وهل تمثل دالة؟



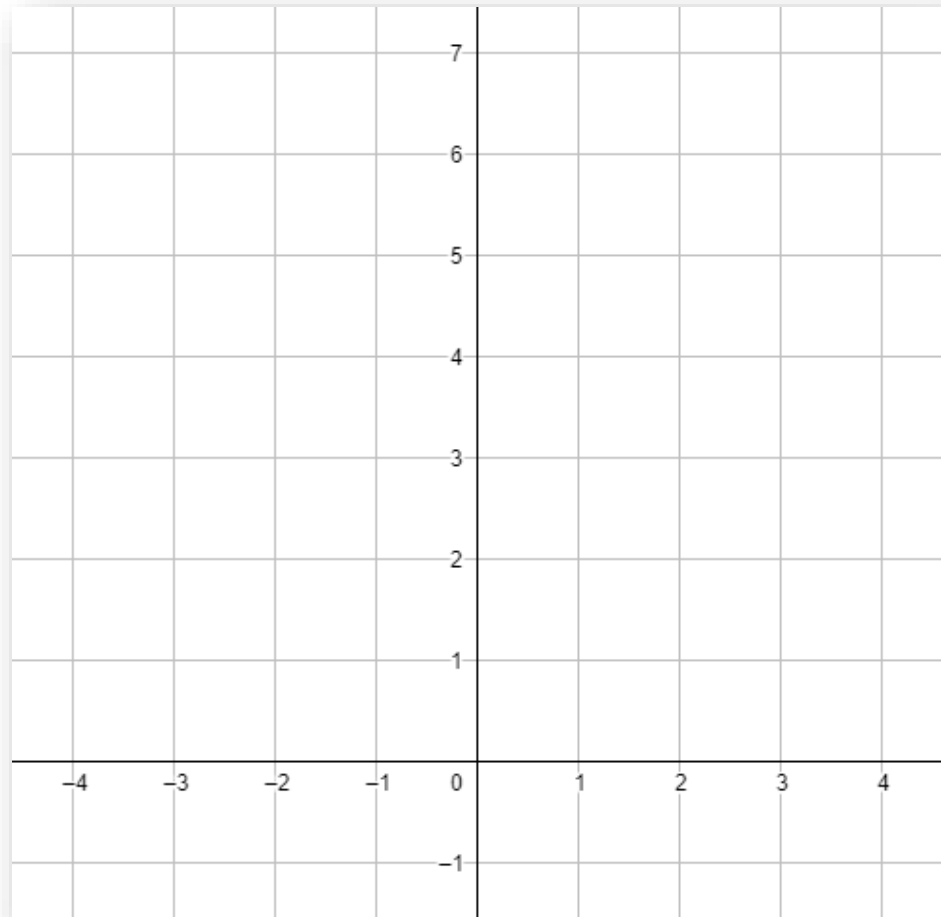
معادلات العلاقات والدوال: يمكنك تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات، وقيم المتغيرين x, y في المعادلة هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) التي تحقق المعادلة. ومن السهل في أغلب الأحيان تحديد إذا كانت المعادلة تمثل دالة من خلال تمثيلها البياني.

تحقق من فهمك

تمثيل العلاقة بيانياً

(3) مثل المعادلة $y = x^2 + 1$ بيانياً، ثم حدّد مجالها ومداها، وحدّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.

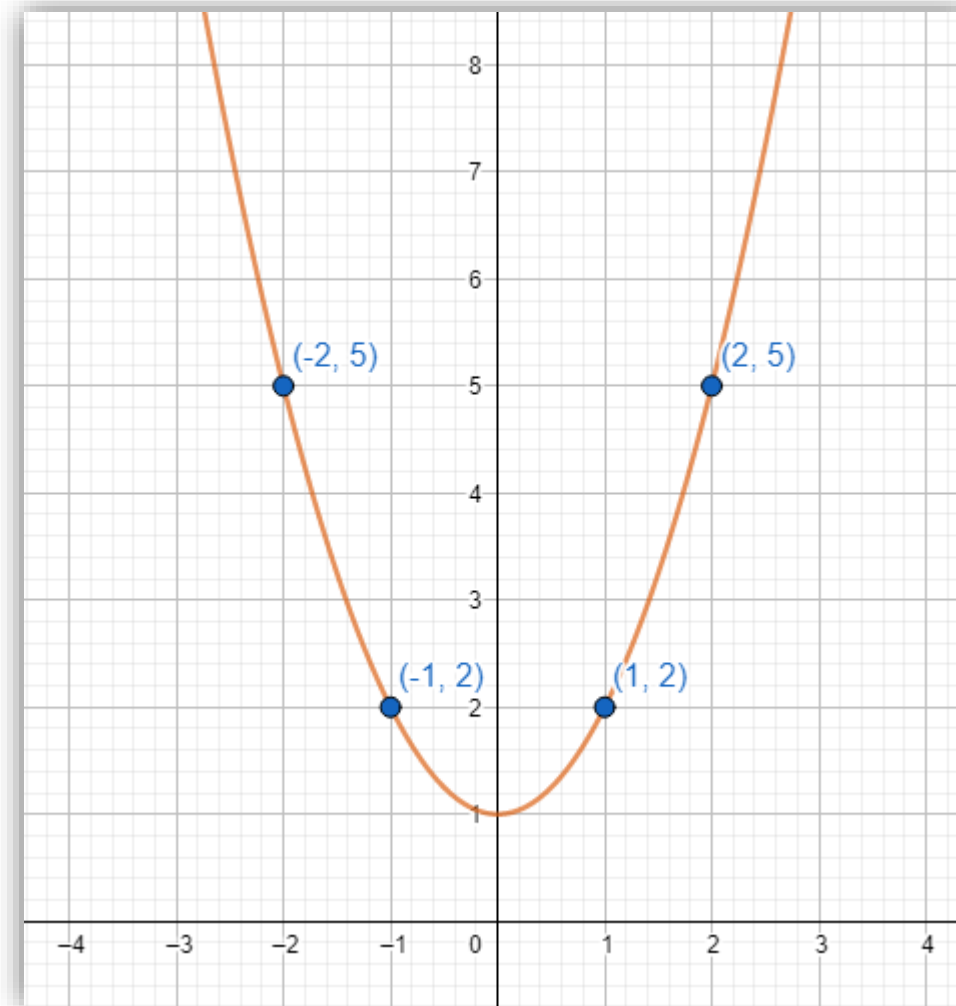
x				
y				



إرشادات للدراسة

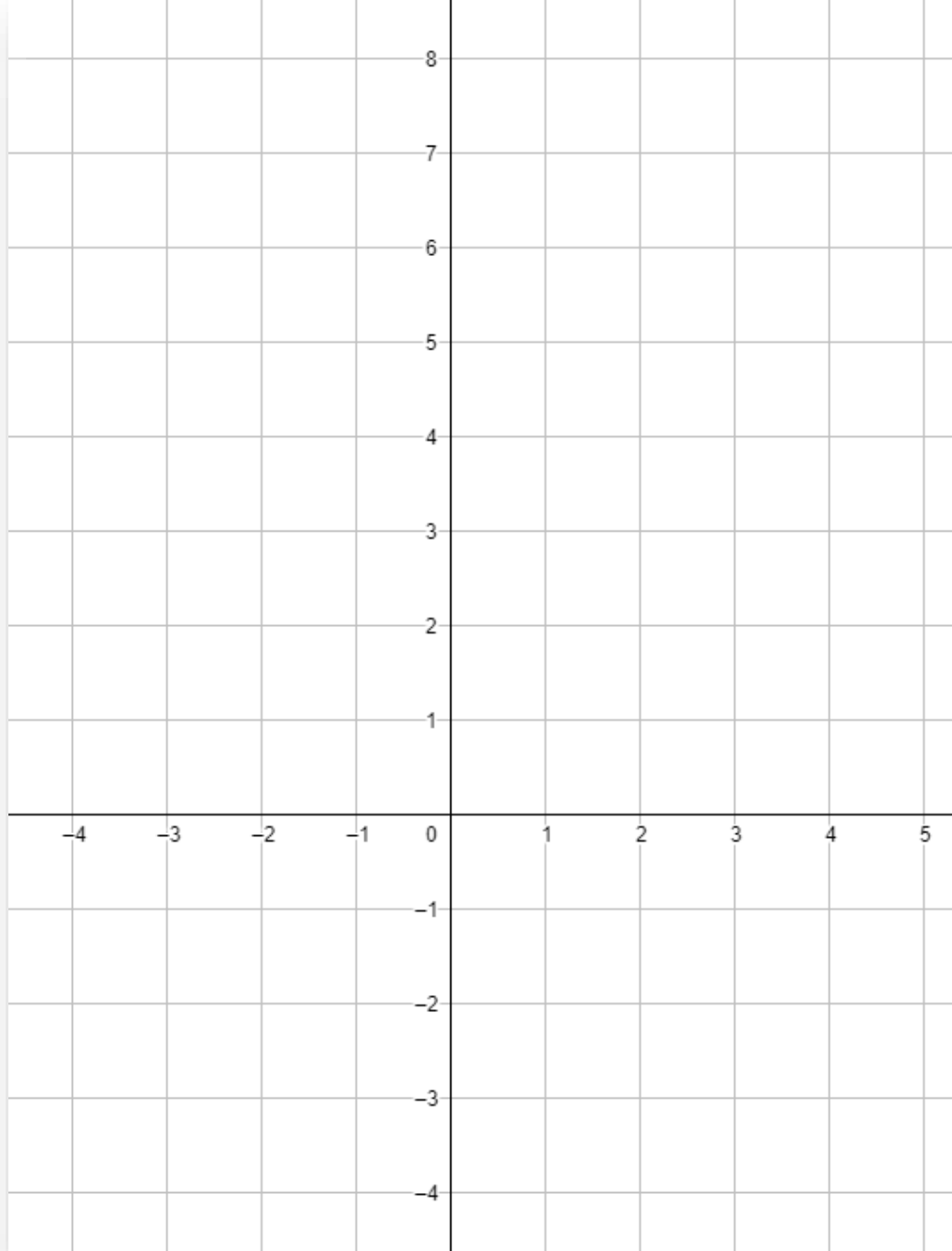
تمثيل الدالة بيانياً

لتمثيل دالة ما بيانياً، أولاً يجب أن تحدّد مجالها (جميع قيم x التي تكون عندها الدالة معرفة أي قيم x التي تكون عندها $f(x) \in \mathbb{R}$ ، وهذا يمكنك من معرفة بعض الأزواج المرتبة التي تسهل عليك تمثيل الدالة بيانياً. ثم تحدّد مداها (جميع قيم y التي تقابل قيم x) ويكون من السهل إيجاد المدى من التمثيل البياني، ومن الجدير بالذكر أن المجال والمدى لجميع الدوال الخطية هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

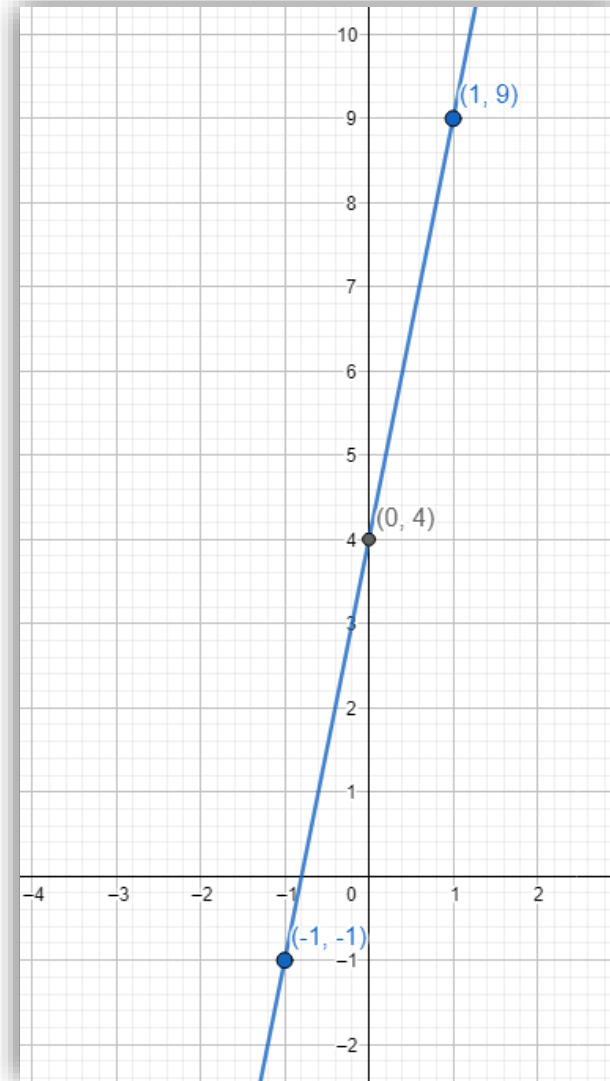


مثّل كلّ معادلة فيما يأتي بيانيًا، ثم حدّد مجالها، ومداهها، وحدّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدّد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

(5) $y = 5x + 4$



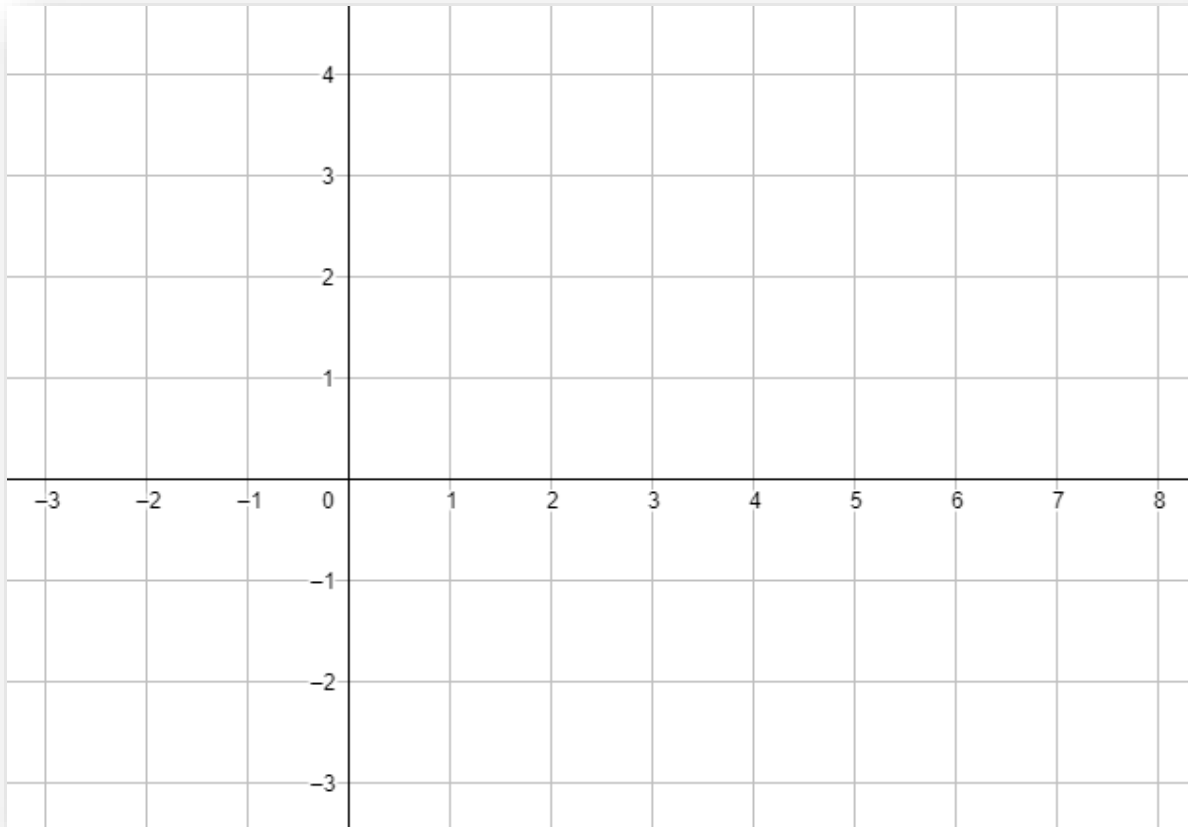
x				
y				

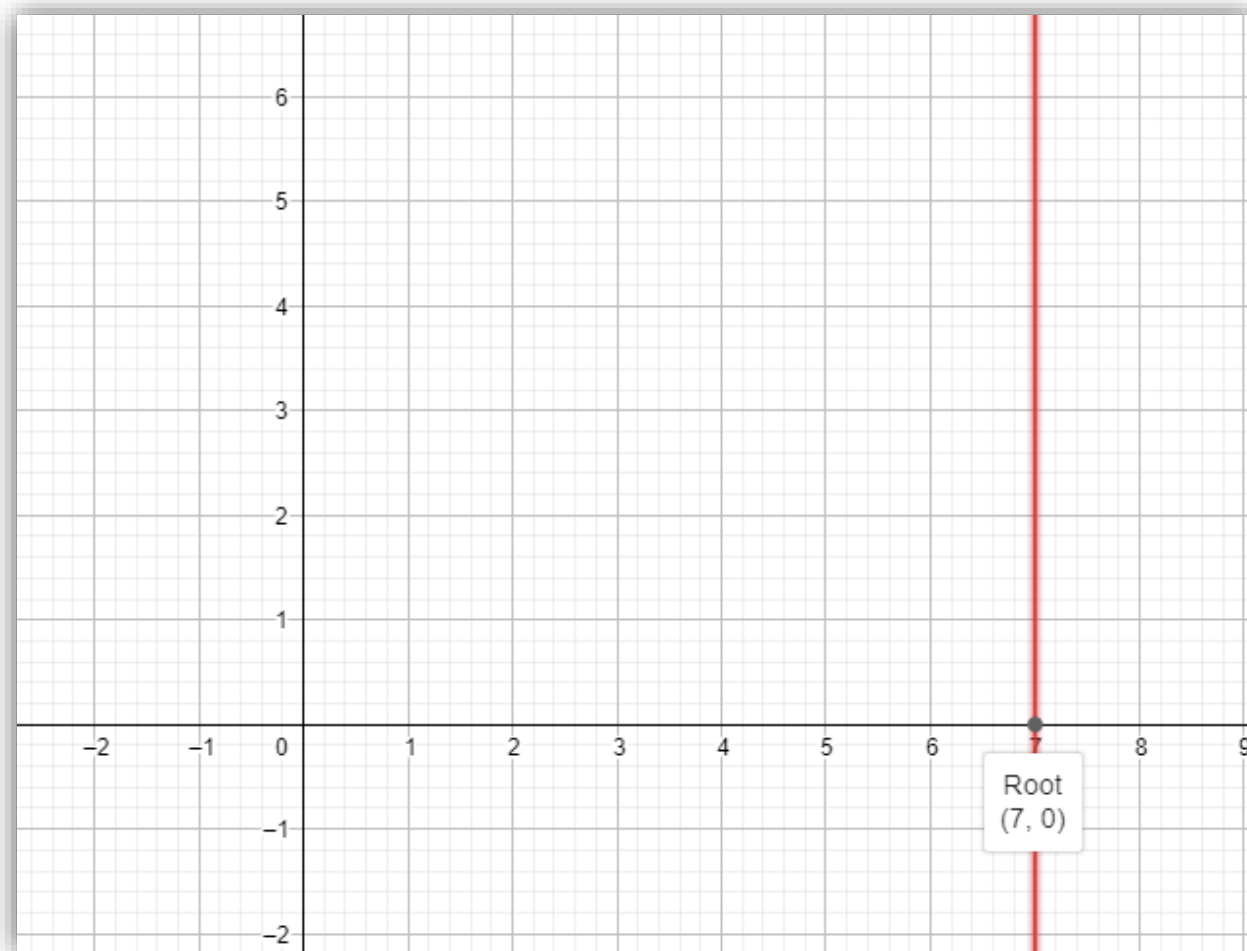


مثّل كلّ معادلة فيما يأتي بيانيّاً، ثم حدّد مجالها، ومداهها، وحدّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدّد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

(8) $x = 7$

تأكد







العمق (ft)	0	20	40	60	80	100
الضغط	1	1.6	2.2	2.8	3.4	4

(19) **غوص:** يبين الجدول المجاور مقدار الضغط الواقع

على الغواص عند أعماق معينة تحت سطح الماء:

(a) مثل العلاقة بيانياً.

(b) حدّد كلاً من مجال العلاقة ومداها، وهل هي منفصلة أم متصلة؟

(c) هل هذه العلاقة دالة أم لا؟ وضّح إجابتك.

قراءة الرياضيات

رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x)$ للدوال بدلاً من y ، ويُقرأ f لـ x ؛ حيث f هو اسم الدالة وليس متغيراً مضروباً في x .

إذا كانت المعادلة تمثل دالة، فإن المتغير من المجال (غالباً ما يكون x)، يسمى **المتغير المستقل**. والمتغير الثاني (غالباً ما يكون y)، يسمى **المتغير التابع** لأن قيمه تعتمد على قيم المتغير x .

المعادلات التي تمثل دوالاً تكتب عادة باستعمال **رمز الدالة**. فالمعادلة $y = 5x - 1$ يمكن كتابتها على الصورة $f(x) = 5x - 1$. وإذا أردنا إيجاد قيمة في المدى ترتبط بالعنصر -6 في مجال الدالة f ، فإن هذه القيمة هي $f(-6)$ ويمكن إيجادها بالتعويض عن كل x في المعادلة بالعدد -6 ؛ لذا فإن $f(-6) = 5(-6) - 1 = -31$.

إيجاد قيمة الدالة

تحقق من فهمك

لتكن $g(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$ ، أوجد قيمة كل مما يأتي:

(4B) $g(4a)$

(4A) $g(2.8)$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

(9) $f(-3)$ إذا كانت $f(x) = -4x - 8$

(10) $g(5)$ إذا كانت $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$

(28) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من أحمد وخالد قيمة $f(3d)$ حيث $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$. فهل أيُّ منهما حله صحيح؟ وضح إجابتك.

خالد

$$\begin{aligned} f(3d) &= -4(3d)^2 - 2(3d) + 1 \\ &= 12d^2 - 6d + 1 \end{aligned}$$

أحمد

$$\begin{aligned} f(3d) &= -4(3d)^2 - 2(3d) + 1 \\ &= -4(9d^2) - 6d + 1 \\ &= -36d^2 - 6d + 1 \end{aligned}$$

33 إذا كان $g(x) = x^2$ ، فأى عبارة مما يأتي تساوي $g(x + 1)$ ؟

A 1

B $x^2 + 1$

C $x^2 + 2x + 1$

D $x^2 - x$

أي المجموعات الآتية تمثل دالة؟

A $\{(3, 0), (-2, 5), (2, -1), (2, 9)\}$

B $\{(-3, 5), (-2, 3), (-1, 5), (0, 7)\}$

C $\{(2, 5), (2, 4), (2, 3), (2, 2)\}$

D $\{(3, 1), (-3, 2), (3, 3), (-3, 4)\}$

الدرس الثالث

دوال خاصة

المفردات

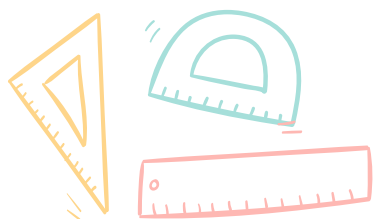
1. الدالة متعددة التعريف
2. الدالة المتعددة التعريف الخطية
3. الدالة الدرجية
4. دالة أكبر عدد صحيح
5. دالة القيمة المطلقة

درست حل معادلات
تتضمن القيمة المطلقة

فيما سبق

1. كتابة الدوال المتعددة التعريف وتمثيلها بيانيا .
2. كتابة الدوال الدرجية ودوال القيمة المطلقة وتمثيلها بيانيا .

الاهداف



أ.روان القضاة



نسب المصابات بالسمنة في المملكة حسب الفئة العمرية		
النسبة	إلى	من
19%	24	15
38%	34	25
53%	44	35
58%	54	45
49%	64	55

المصدر: مسح المعلومات الصحية في المملكة، وزارة الصحة، 1435 هـ.

السمنة حالة مرضية يمكن تعريفها طبيًا بأنها زيادة الدهون في الجسم، وتنتج السمنة عن أخذ مقدار طاقة أكبر من حاجة الجسم دون استهلاكها. ويبين الجدول المجاور نسب المصابات بالسمنة لفئات عمرية مختلفة في المملكة.

أسئلة التعزيز

1. ما نسبة المصابات بالسمنة في الفئة العمرية من 25 إلى 34

2. أي الفئات العمرية نسبة المصابات بالسمنة فيها 58%.

الدالة المتعددة التعريف: الدالة التي تربط بين العمر ونسبة المصابات بالسمنة ليست خطية؛ لأن كل فترة من مجال الدالة معرفة بعبار مختلفة، فالدالة التي تكتب باستعمال عبارتين أو أكثر تسمى **دالة متعددة التعريف**. وعند تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانياً توضع دائرة صغيرة مظلمة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي إلى التمثيل البياني، وتوضع دائرة غير مظلمة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي إلى التمثيل البياني.

خطوات رسم الدالة متعددة التعريف

1. نعيد كتابة الدالة على شكل جدول

المعادلة 1:	المعادلة 2:
نعوض نقطة الانفصال في المعادلة 1	نعوض نقطة الانفصال في المعادلة 2
نختار قيمة لـ x تحقق شرط المعادلة 1	نختار قيمة لـ x تحقق شرط المعادلة 1

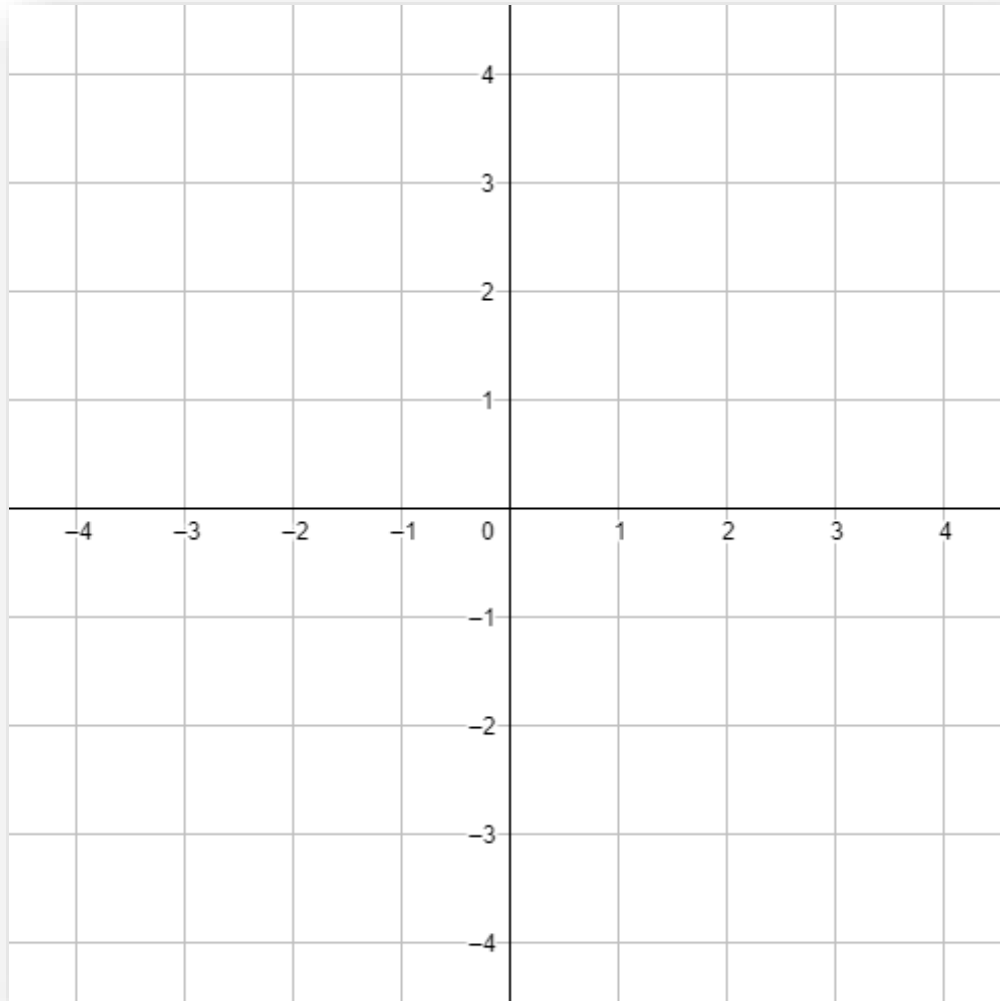
2. نقسم الأزواج المرتبة

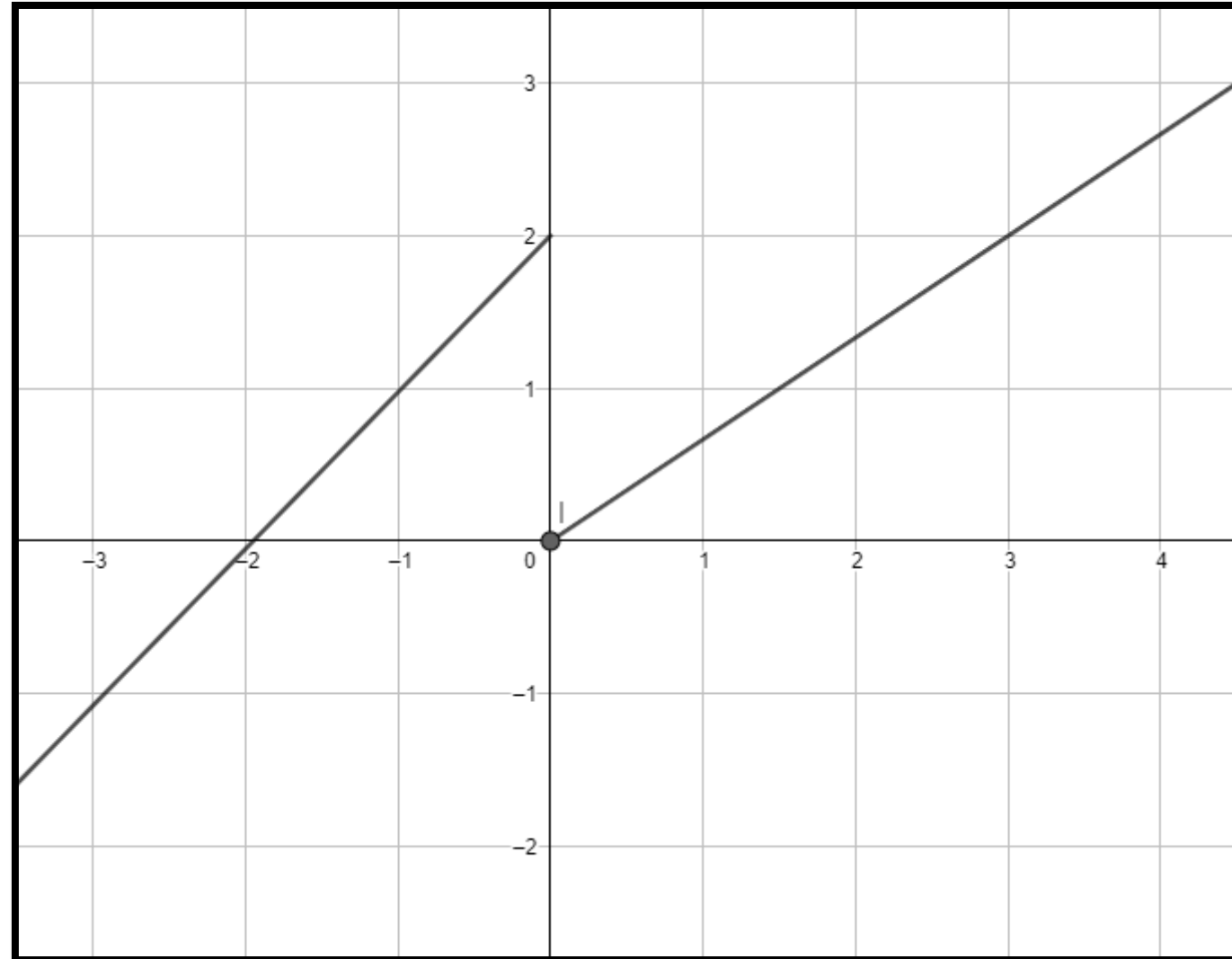
الأزواج المرتبة التابعة للمعادلة 1 نرسمها بخط مستقيم 1
الأزواج المرتبة التابعة للمعادلة 2 نرسمها بخط مستقيم 2

3. نمثل الأزواج ونصل الخط المستقيم بينها على المستوى البياني

4. نظل نقطة الانفصال عند الخط الذي يرتبط بالمعادلة التي يوجد في شرطها إشارة مساواة

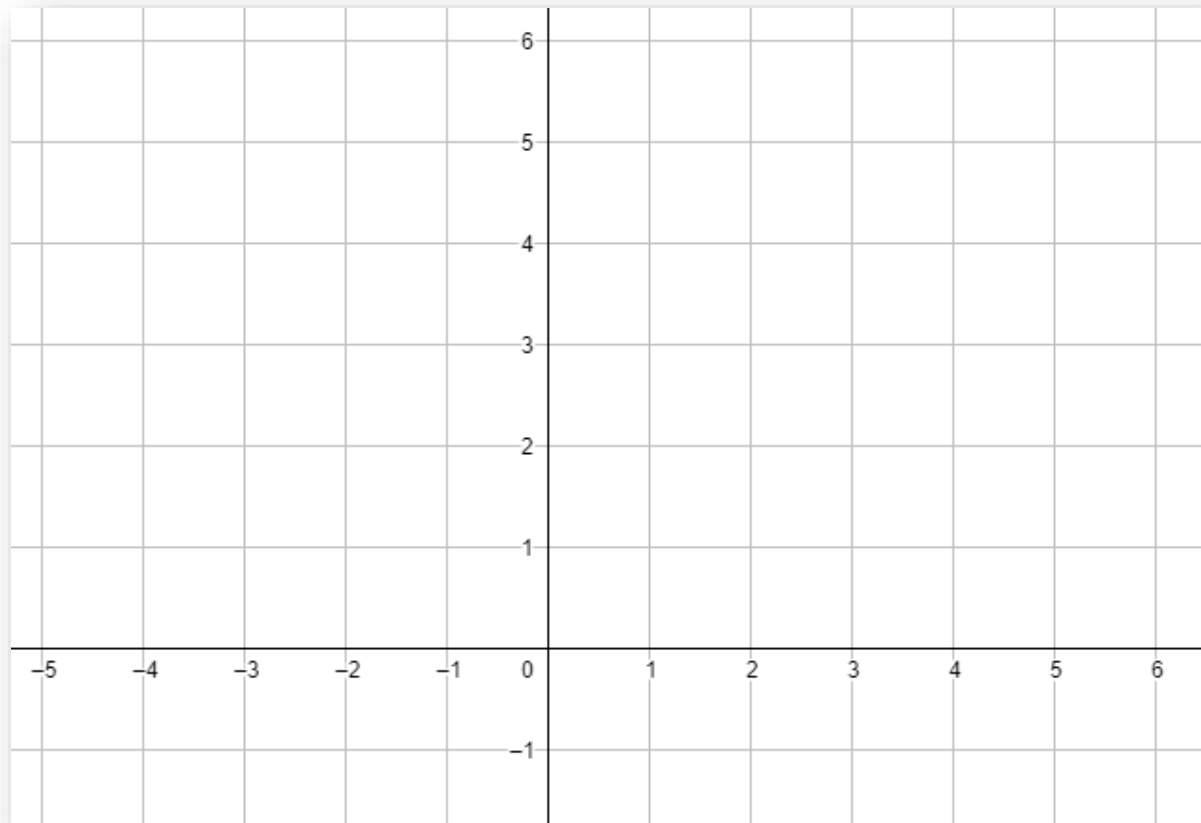
(1) مثل الدالة $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ بيانياً.



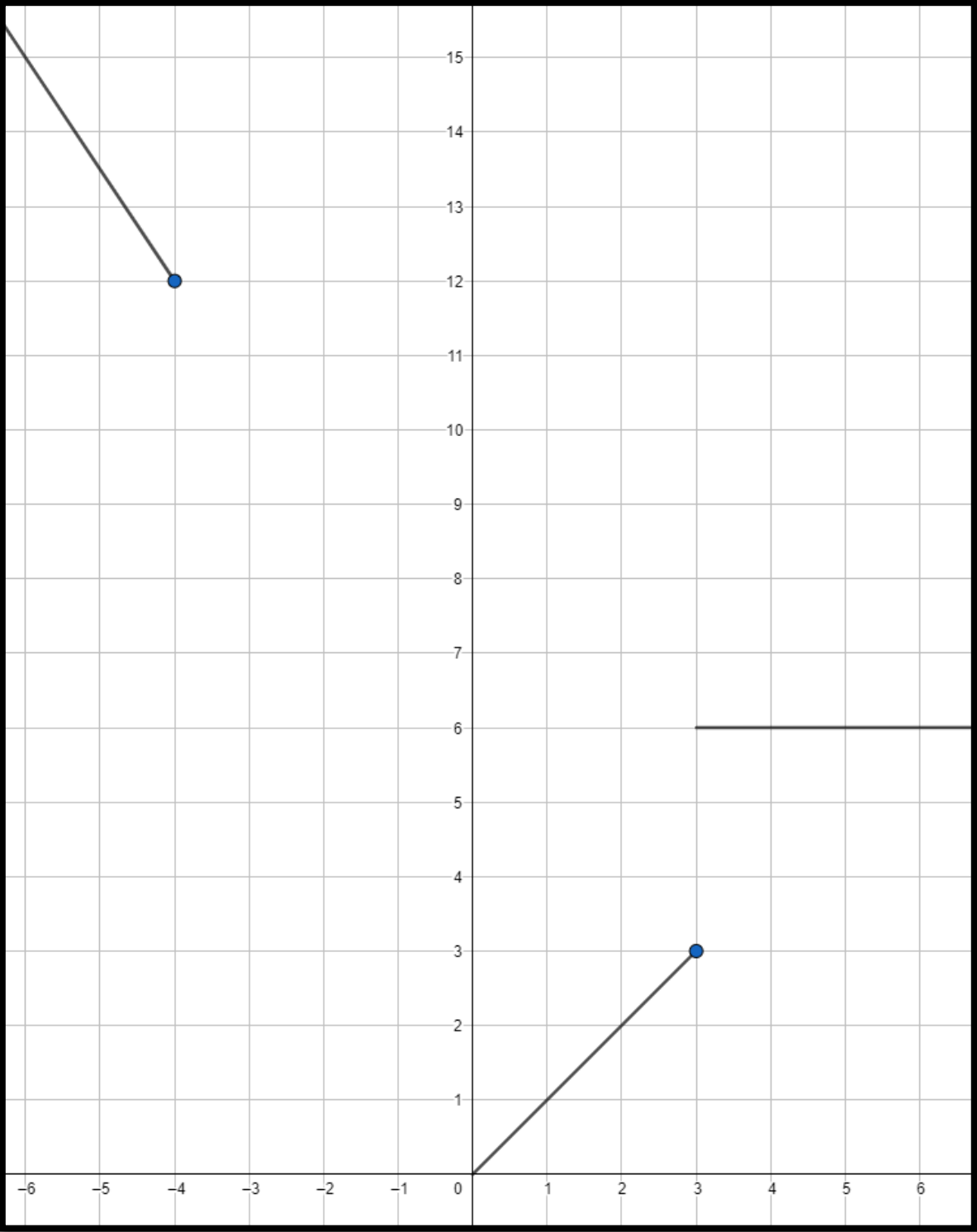


$$f(x) = \begin{cases} -3x, & x \leq -4 \\ x, & 0 < x \leq 3 \\ 8, & x > 3 \end{cases} \quad (12)$$

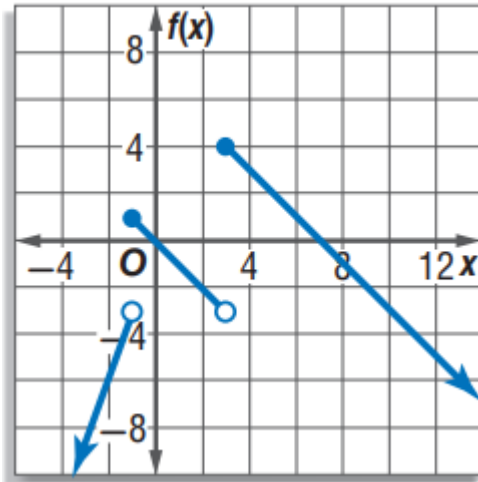
تدرب وحل المسائل



أ.روان القضاة



تمثل الدوال المتعددة التعريف غالباً بعدة دوال خطية. وتسمى حينئذٍ **الدالة المتعددة التعريف الخطية**.



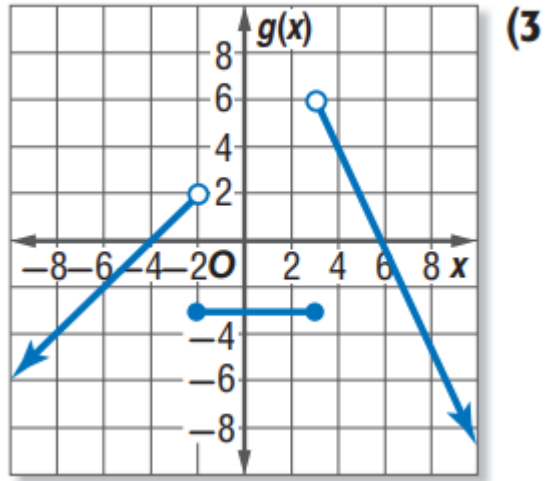
اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانياً في الشكل المجاور.

تحقق من فهمك

إرشادات للدراسة

تمثيل الدوال المتعددة
التعريف بيانياً
قد تكون الدوال المتعددة
التعريف متصلة أو غير
متصلة.

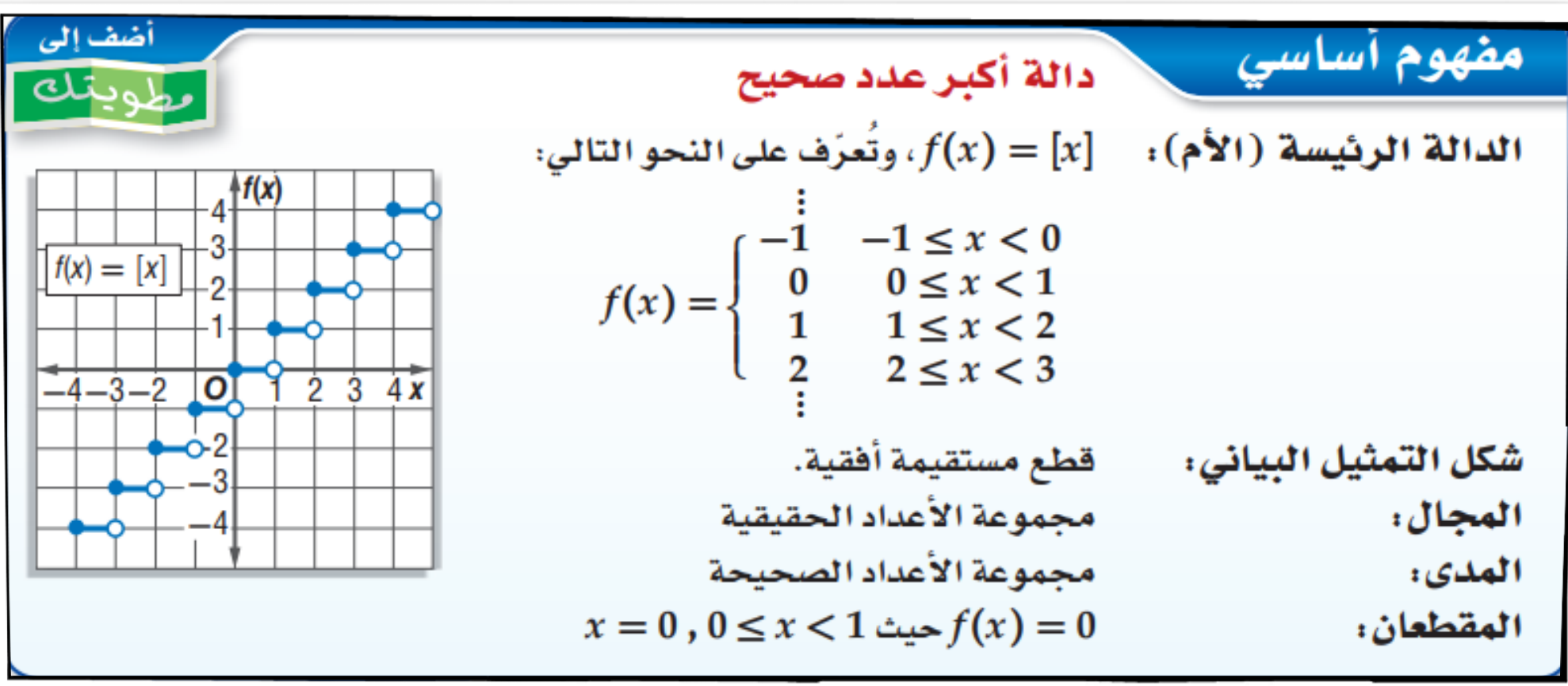
أروان القضاة



اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانياً

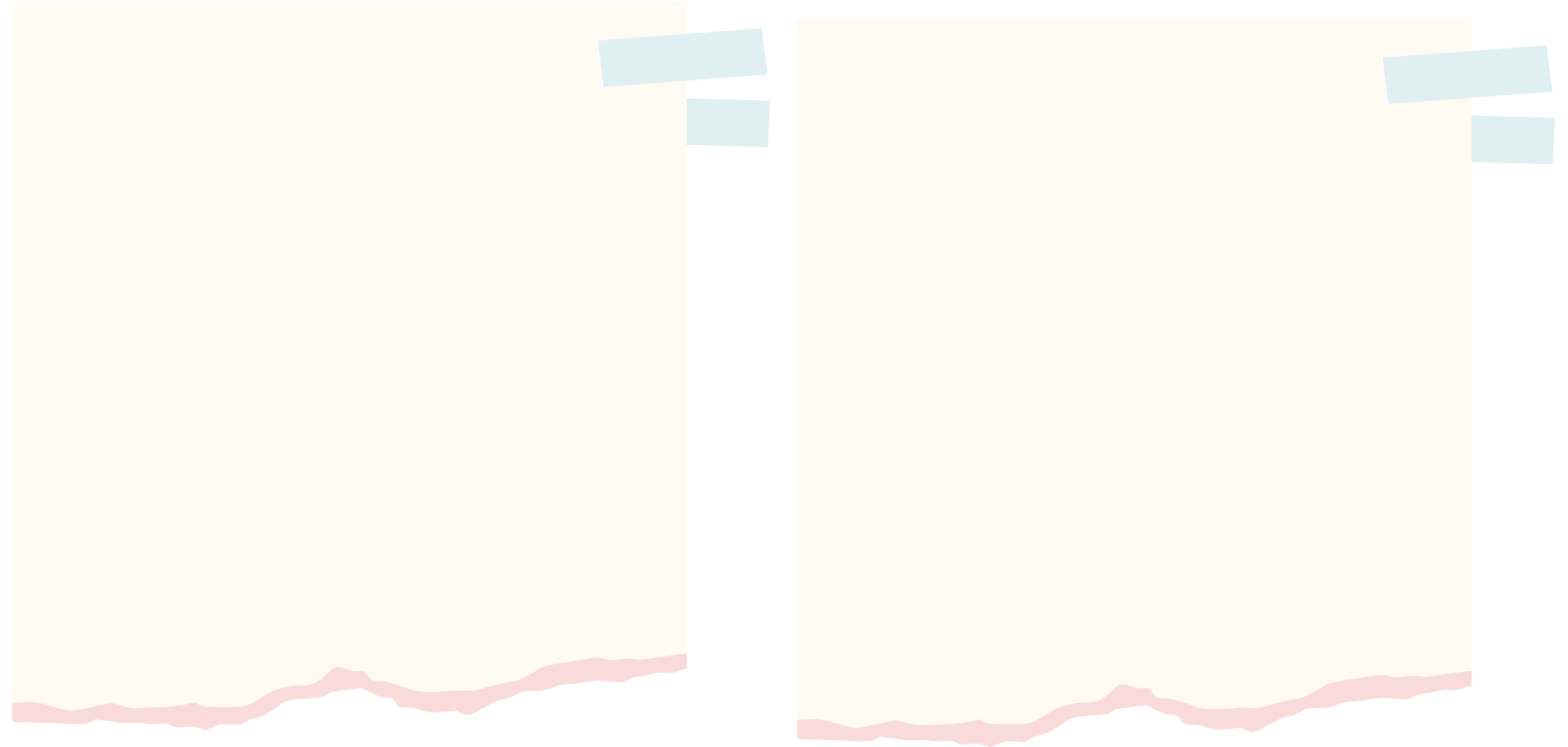
تأكد

الدالة الدرجية: من الدوال المتعددة التعريف الخطية الشهيرة **الدالة الدرجية** التي تتكون من قطع مستقيمة أفقية، وقد سُميت بهذا الاسم لأن تمثيلها البياني يشبه الدرج، كما أن **دالة أكبر عدد صحيح** التي تكتب على الصورة $f(x) = [x]$ ، هي مثال على الدالة الدرجية؛ حيث يعني الرمز $[x]$ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x . فعلى سبيل المثال: $[3.25] = 3$ وكذلك $[-4.6] = -5$.



تحقق من فهمك

(3) **إعادة تدوير الورق:** تدفع شركة لإعادة تدوير الورق 25 ريالاً عن كل صندوق من الورق يتم إحضاره للشركة ولا تدفع أي شيء مقابل أي صندوق غير ممتلئ بالكامل. اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف ومثلها بيانياً.

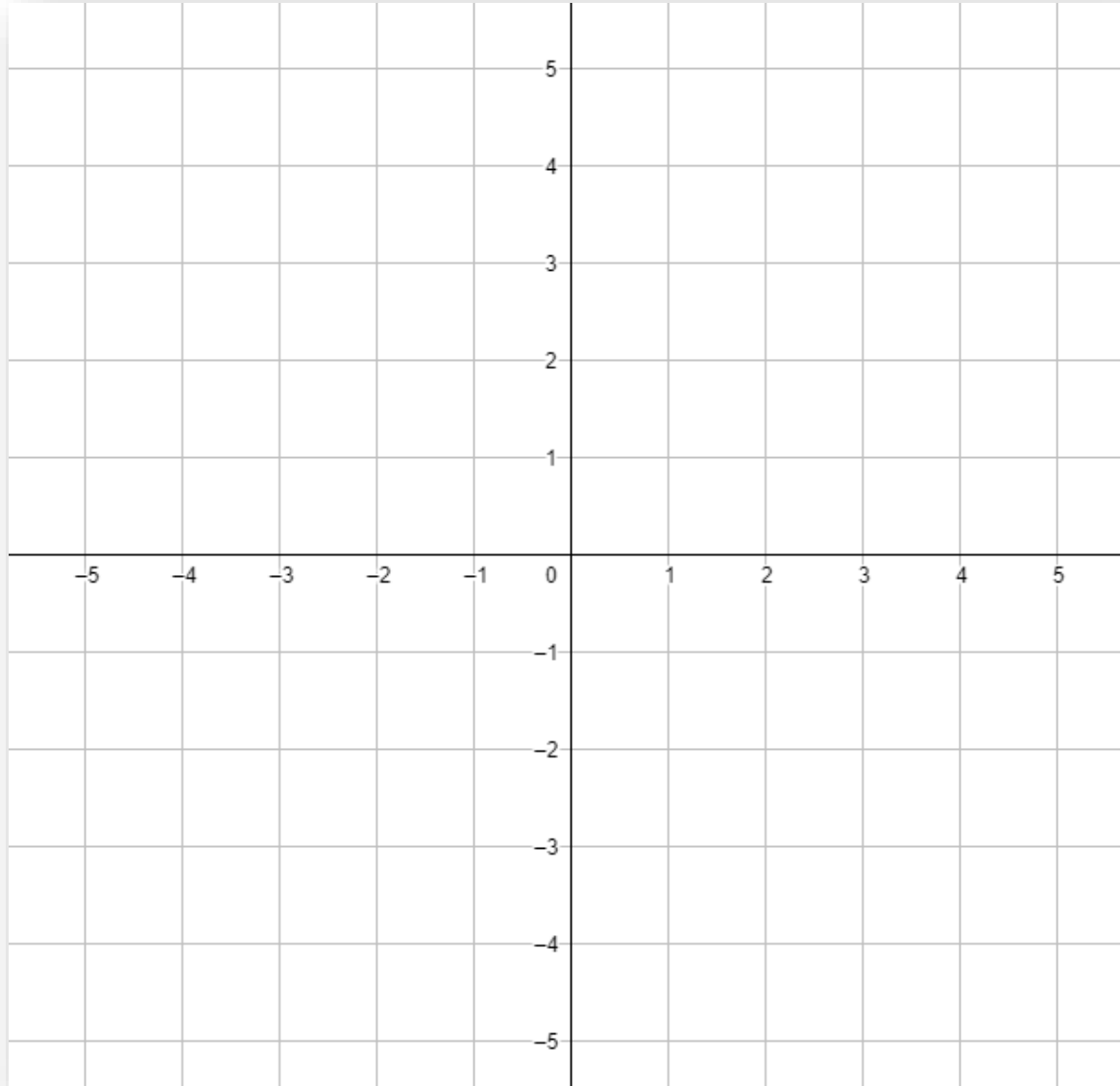


أ.روان القضاة

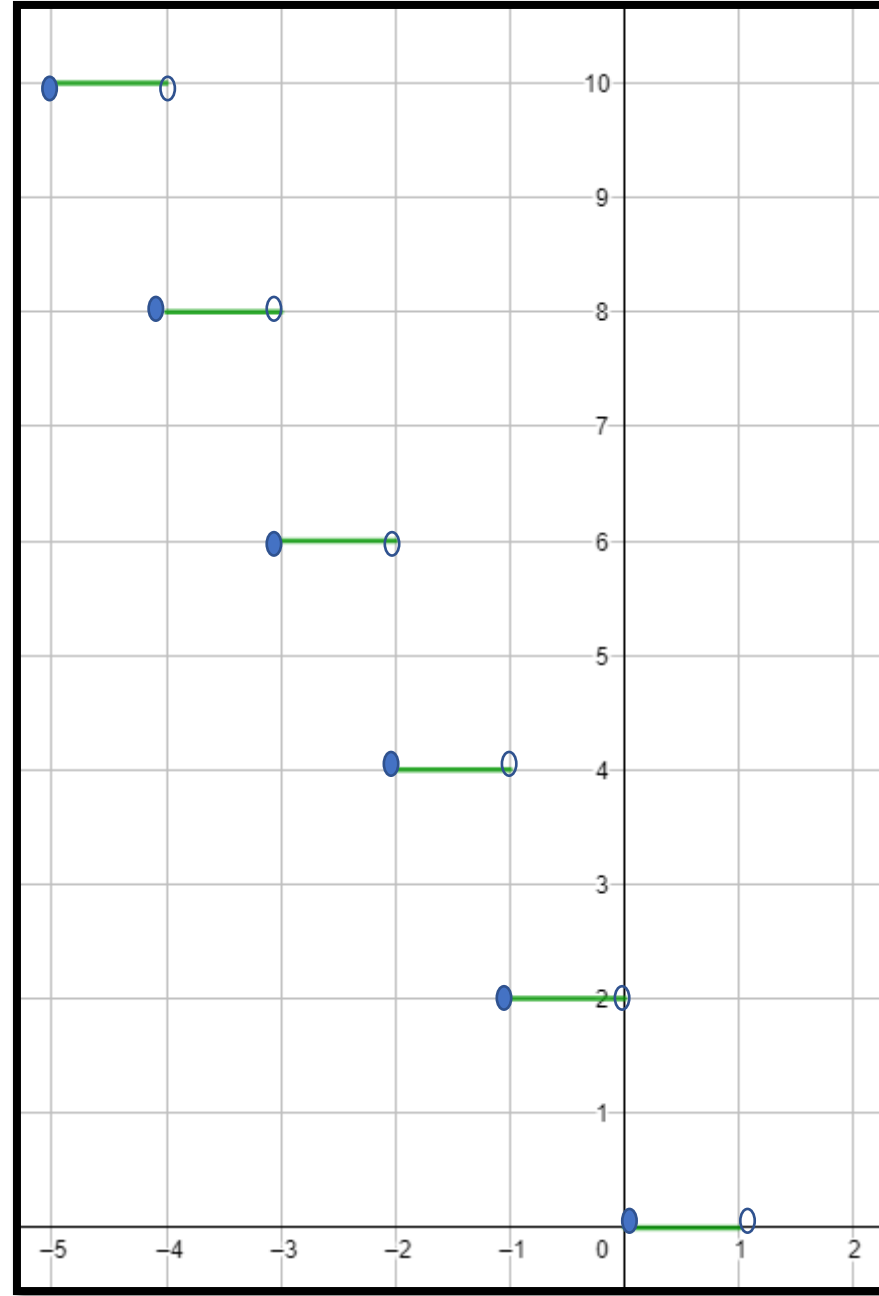
مثل كل دالة مما يأتي بياناً، ثم حدّد كلّاً من مجالها ومداهما:

تأكد

$$g(x) = -2[x] \quad (6)$$

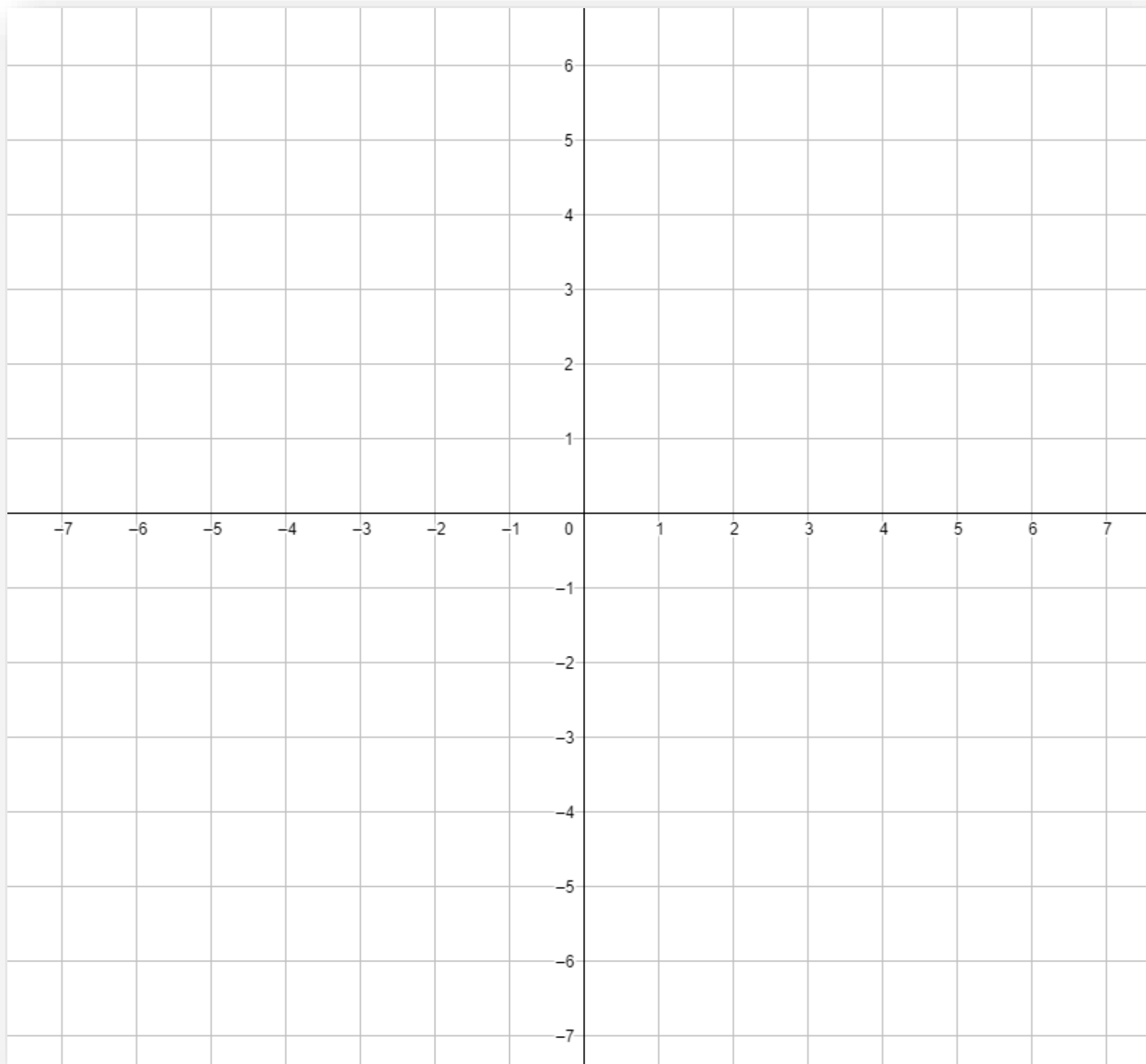


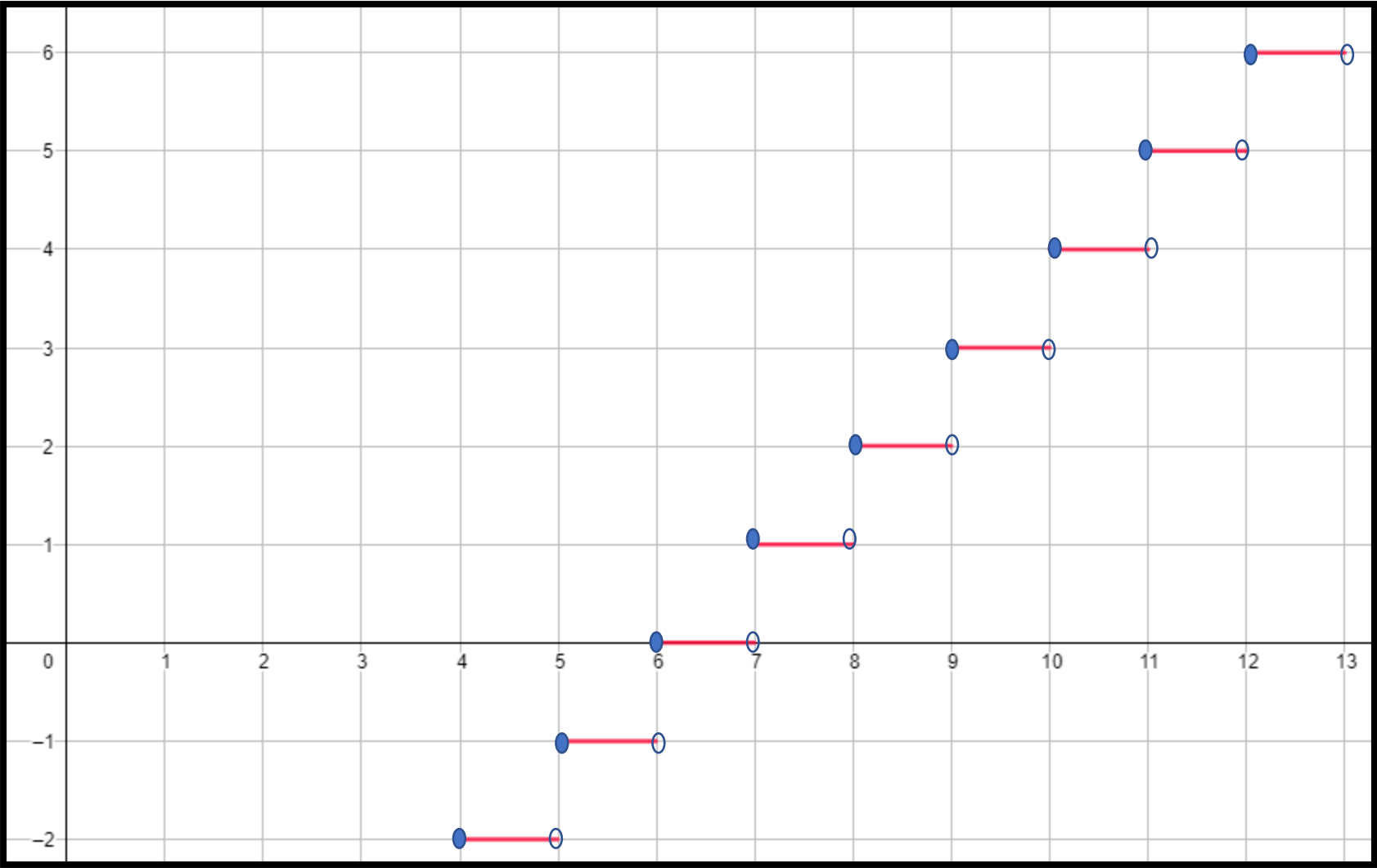
أ.روان القضاة



مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداهما:

$$f(x) = [x] - 6 \quad (18)$$





وهناك نوع آخر من الدوال المتعددة التعريف يسمى **دالة القيمة المطلقة** وهي الدالة التي تحتوي على عبارة جبرية يستعمل فيها رمز القيمة المطلقة.

مفهوم أساسي

دالة القيمة المطلقة

**أضف إلى
مطوبتك**

الدالة الرئيسية (الأم): $f(x) = |x|$ ، وتُعرف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

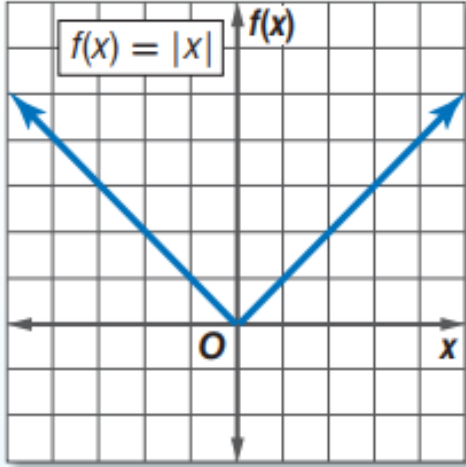
شكل التمثيل البياني: على شكل حرف V

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

المقطعان: $x = 0, f(x) = 0$

ولا يمكن أن تكون: $f(x) < 0$



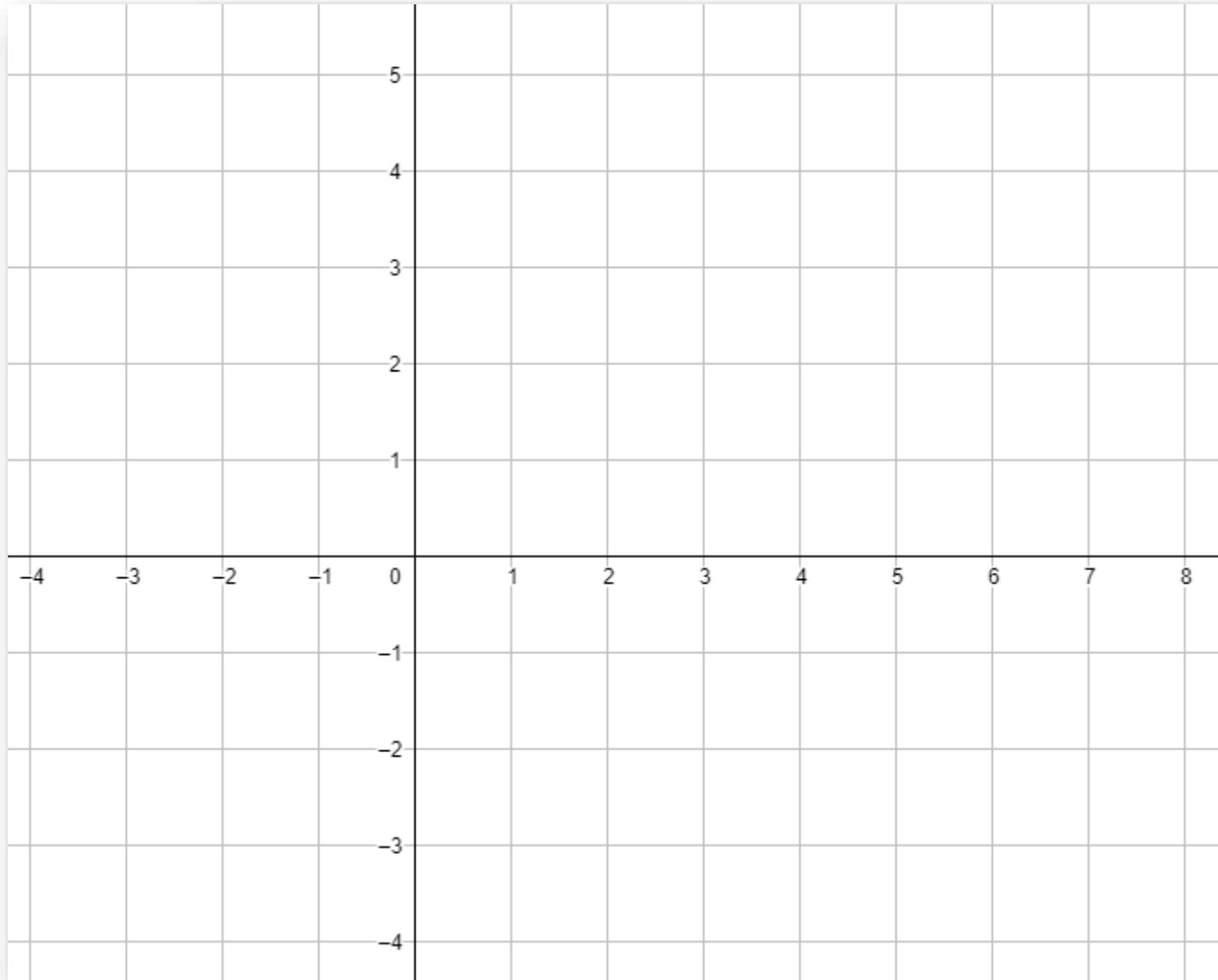
خطوات رسم دالة القيمة المطلقة

1. إيجاد صفر ما داخل المقياس
 2. نختار عدد أكبر من صفر الدالة ونعوضه في الدالة
 3. نختار عدد أصغر من صفر الدالة ونعوضه في الدالة
 4. نمثل الأزواج المرتبة
 5. شكل التمثيل النهائي V
- أروان القضاة

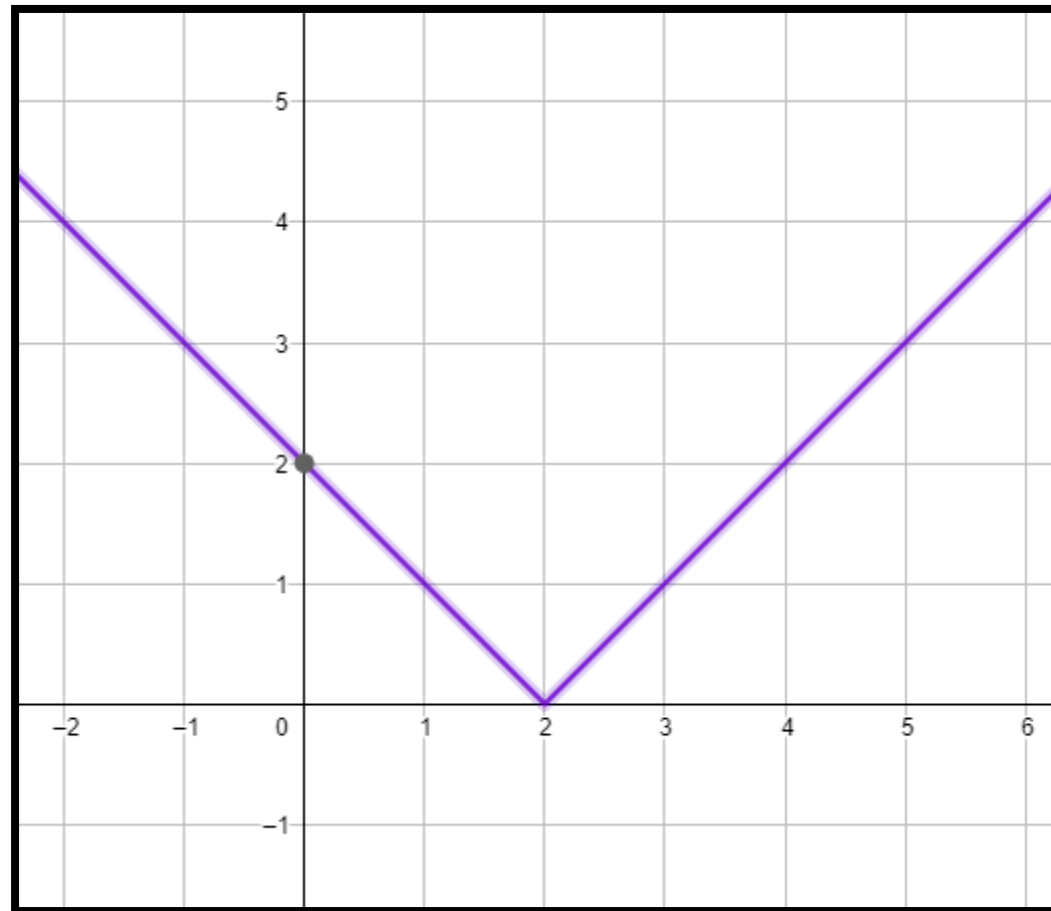
مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداهما:

تحقق من فهمك

$$f(x) = |x - 2| \quad (4A)$$



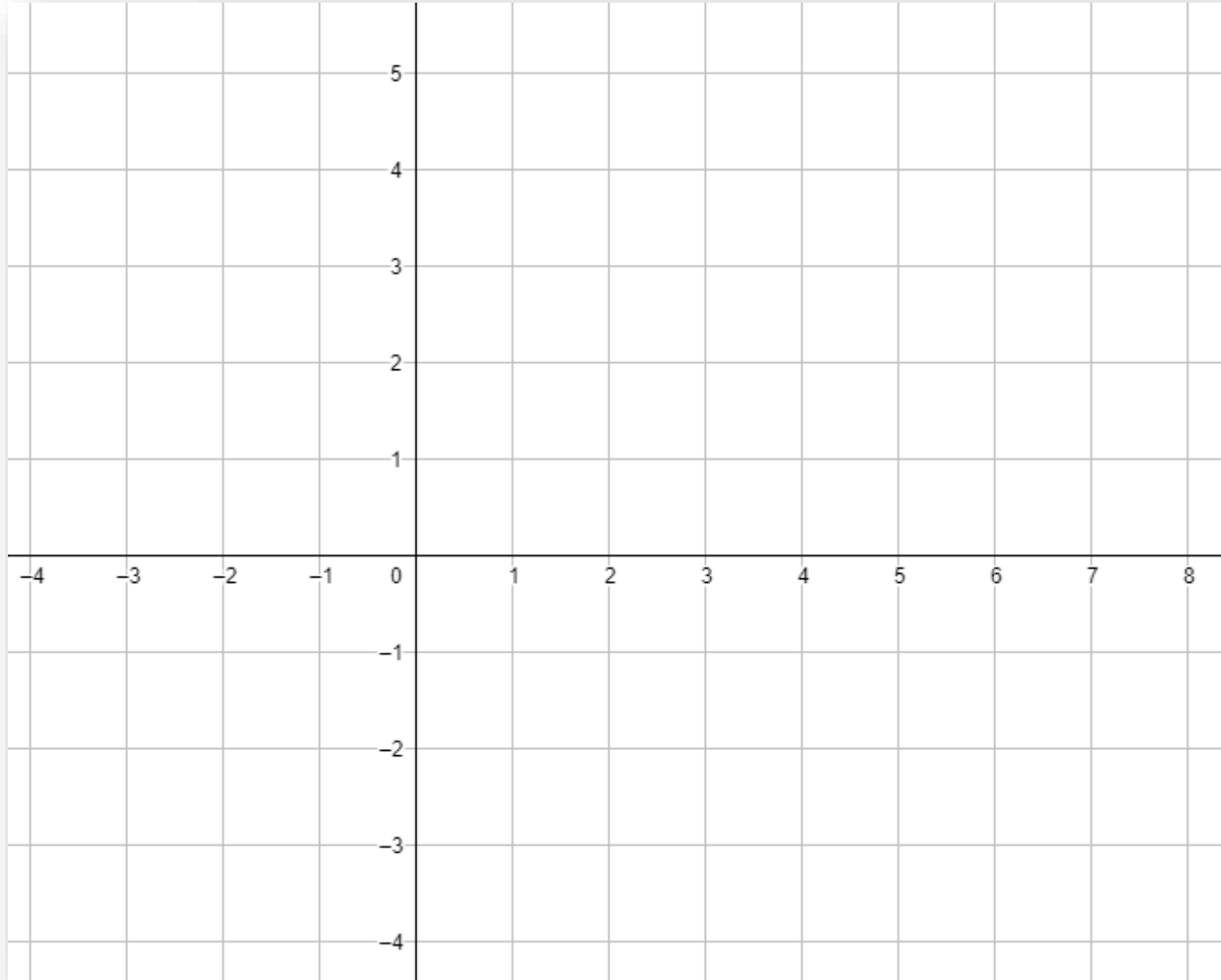
أروان القضاة



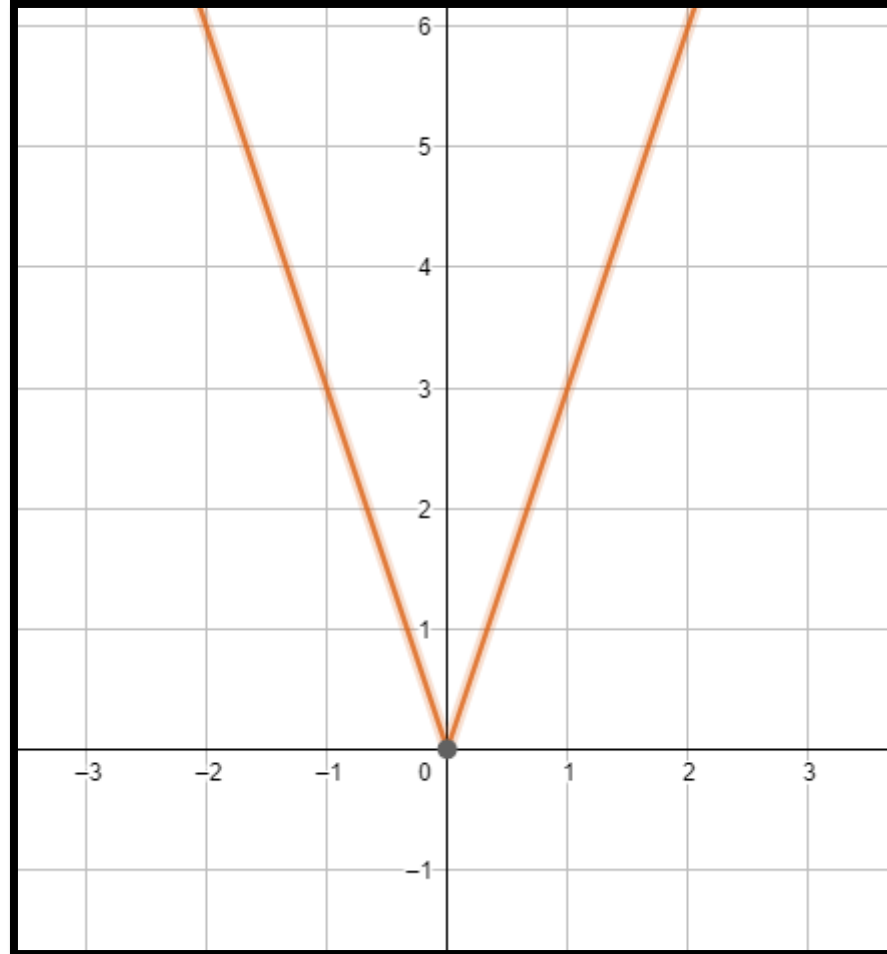
مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها:

تأكد

$$g(x) = |-3x| \quad (8)$$



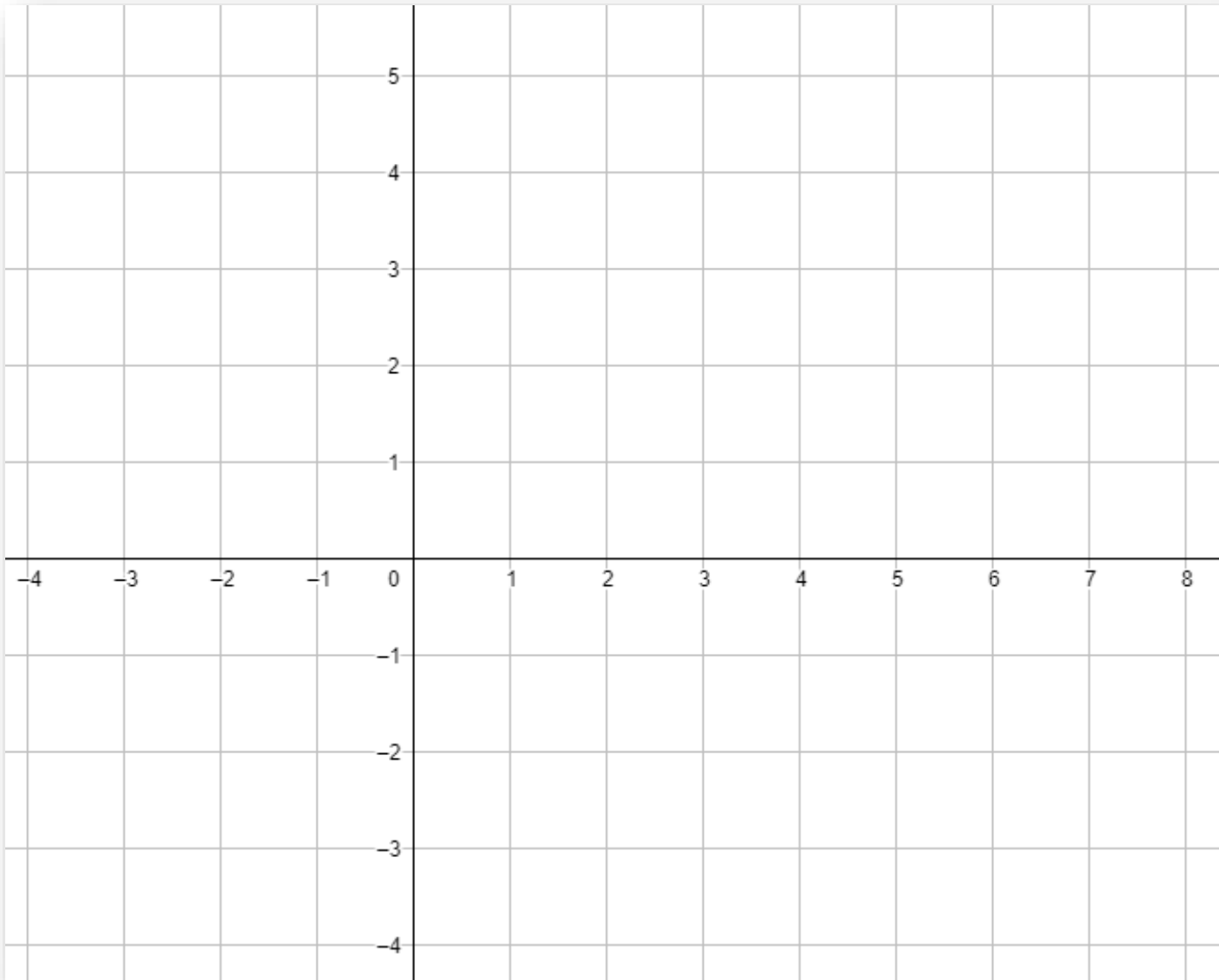
أروان القضاة

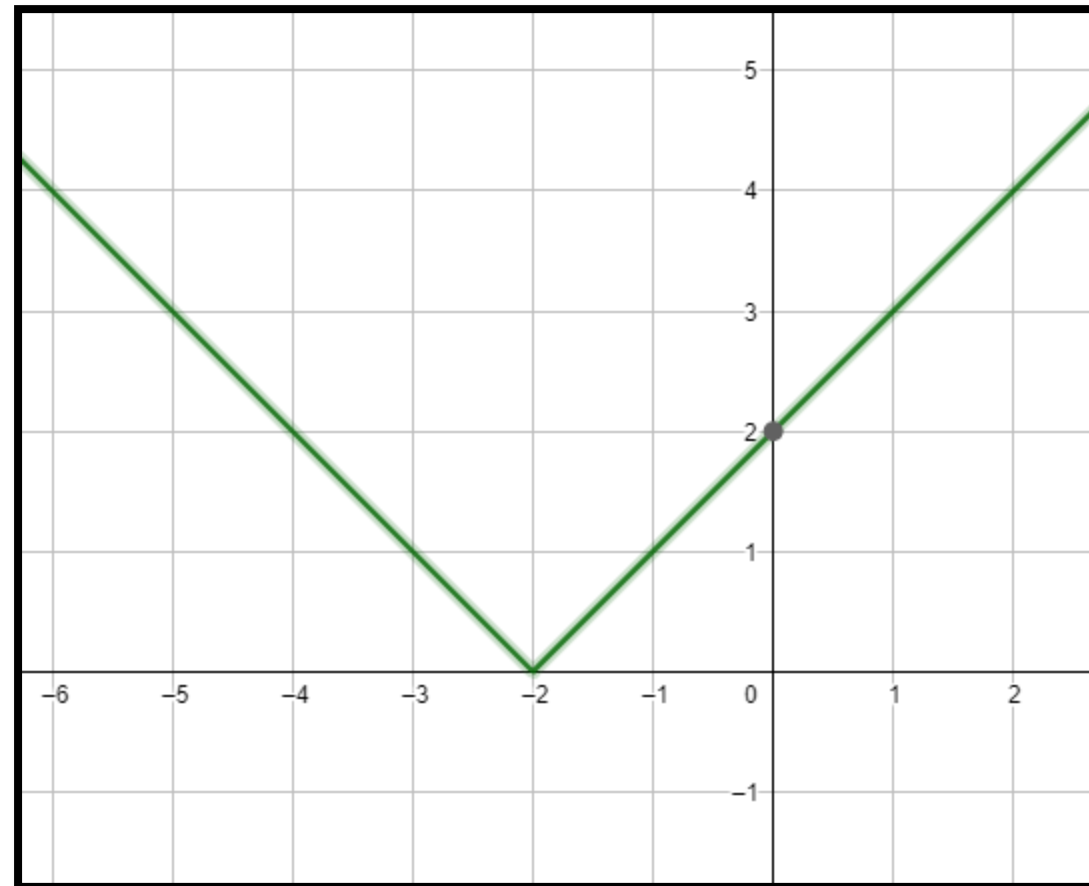


مثل كل دالة مما يأتي بيانًا، ثم حدّد كلاً من مجالها ومداه:

تدرب وحل المسائل

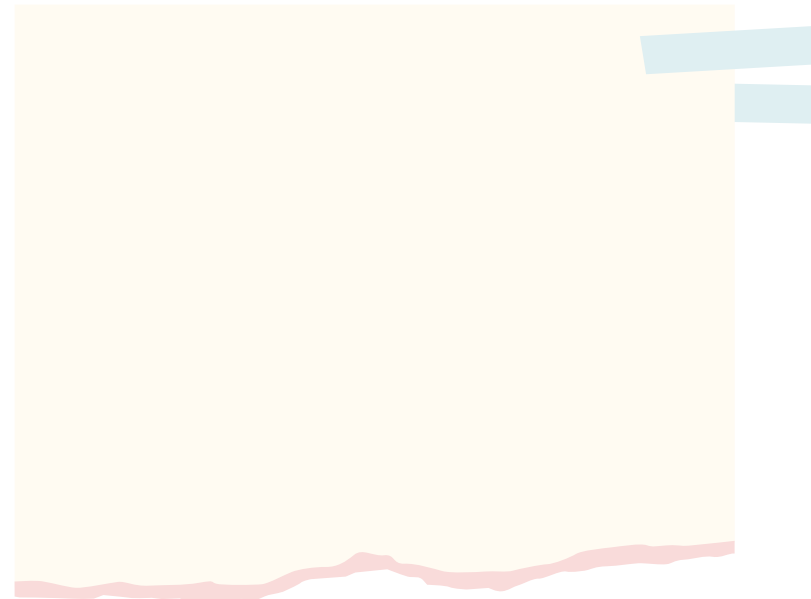
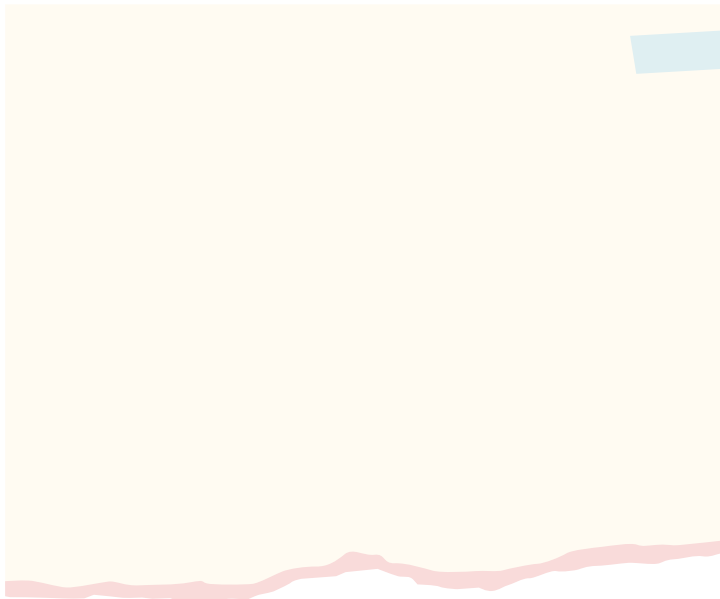
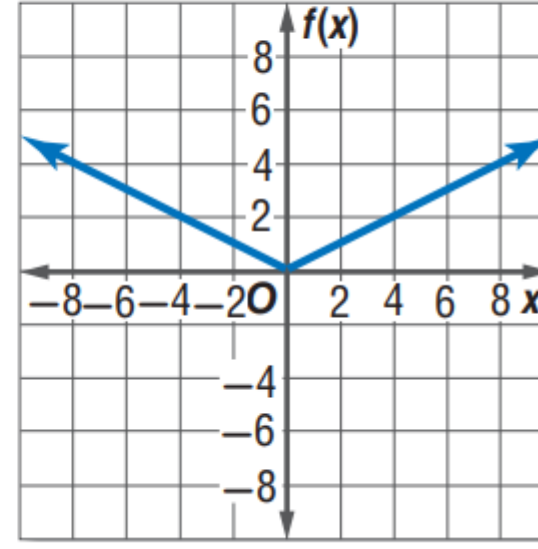
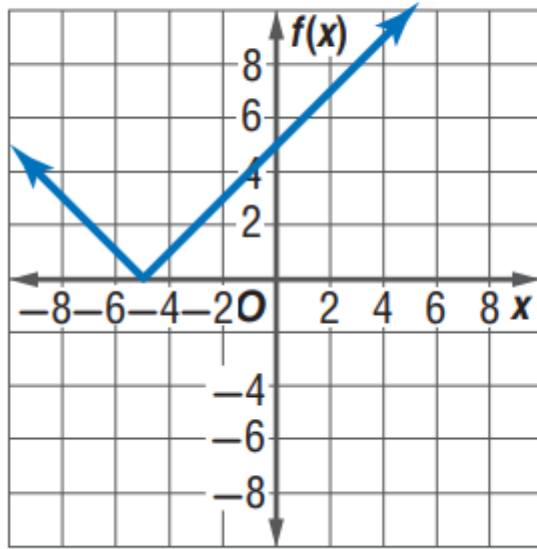
(21) $g(x) = |x + 2|$





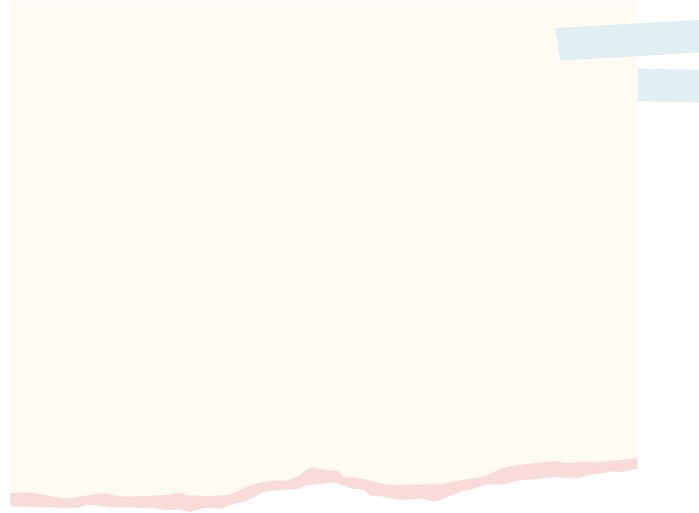
اكتب دالة القيمة المطلقة الممثلة بيانيًا في كلِّ ممَّا يأتي:

تدرب وحل المسائل



أ.روان القضاة

(33) تحد: مثل المعادلة $|y| = 2|x + 3| - 5$ بيانيًا.



تدريب على اختبار

(38) أيّ دالة مما يأتي يكون فيها $f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq -1$ ؟

C $f(x) = [x]$

A $f(x) = 2x$

D $f(x) = [2x]$

B $f(x) = |-2x|$



الدرس الرابع

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانيا

درست تمثيل الدوال الخطية

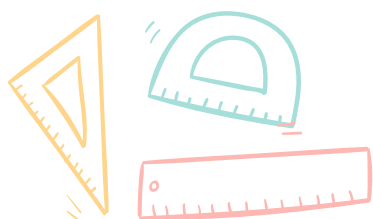
فيما سبق

المفردات

1. المتباينة الخطية
2. الحد

1. تمثيل المتباينات الخطية .
2. تمثيل متباينات القيمة المطلقة .

الاهداف



أ.روان القضاة





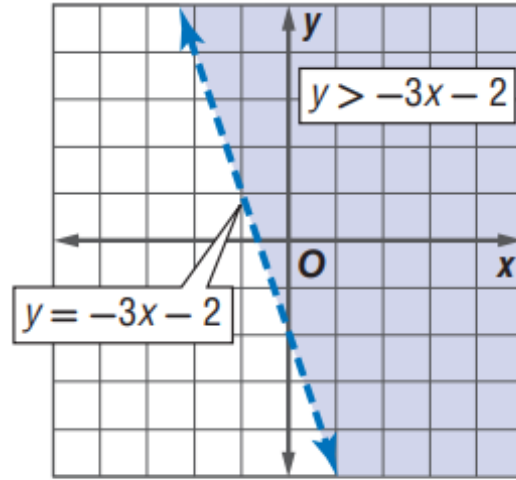
دعا تركي زملاءه إلى وجبة من الفطائر والعصير الطبيعي، ورصد لتلك الدعوة مبلغ 150 ريالاً فقط.

ويمكنه أن يستعمل المتباينة الخطية: $6p + 5d \leq 150$ حيث p عدد الفطائر و d عدد أكواب العصير؛ للتأكد من أن سعر عدد معين من الفطائر وأكواب العصير سيكون ضمن ميزانيته.

أسئلة التعزيز

1. اشرح ما تعنيه المتباينة $6p + 5d \leq 150$
2. هل لدى تركي المبلغ الكافي لشراء 10 فطائر و 20 كوب عصير؟

تمثيل المتباينات الخطية بيانياً: تشبه المتباينة الخطية المعادلة الخطية، فالفرق بينهما فقط هو وضع رمز المتباينة بدلاً من رمز المساواة. فمثلاً، $y > -3x - 2$ هي متباينة خطية، و $y = -3x - 2$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها.



التمثيل البياني للمتباينة $y > -3x - 2$ مبين في الشكل المجاور على صورة منطقة مظللة تسمى **منطقة الحل**، فكل نقطة في المنطقة المظللة تحقق المتباينة، والتمثيل البياني للمستقيم $y = -3x - 2$ هو **حد** منطقة الحل وقد رسم المستقيم بشكل متقطع ليدل على أنه لا يحقق المتباينة. أما إذا احتوت المتباينة على الرمز \leq أو \geq فإن النقاط الواقعة على الحد ستحقق المتباينة وعندئذ يكون تمثيل المستقيم خطاً متصلاً.

خطوات تمثيل متباينات الخطية

1. نحول المتباينة الى معادلة

2. حل المعادلة بدلالة y

3. نختار قيم x (عددين)

4. نرسم خط المتباينة (الحد)
متصل (فيه إشارة مساواة في المتباينة)
متقطع (لا يوجد إشارة مساواة في المتباينة)

5. منطقة الحل (التظليل) :

التعويض

صحيح : نظل المنطقة التي تحوي الزوج المرتب

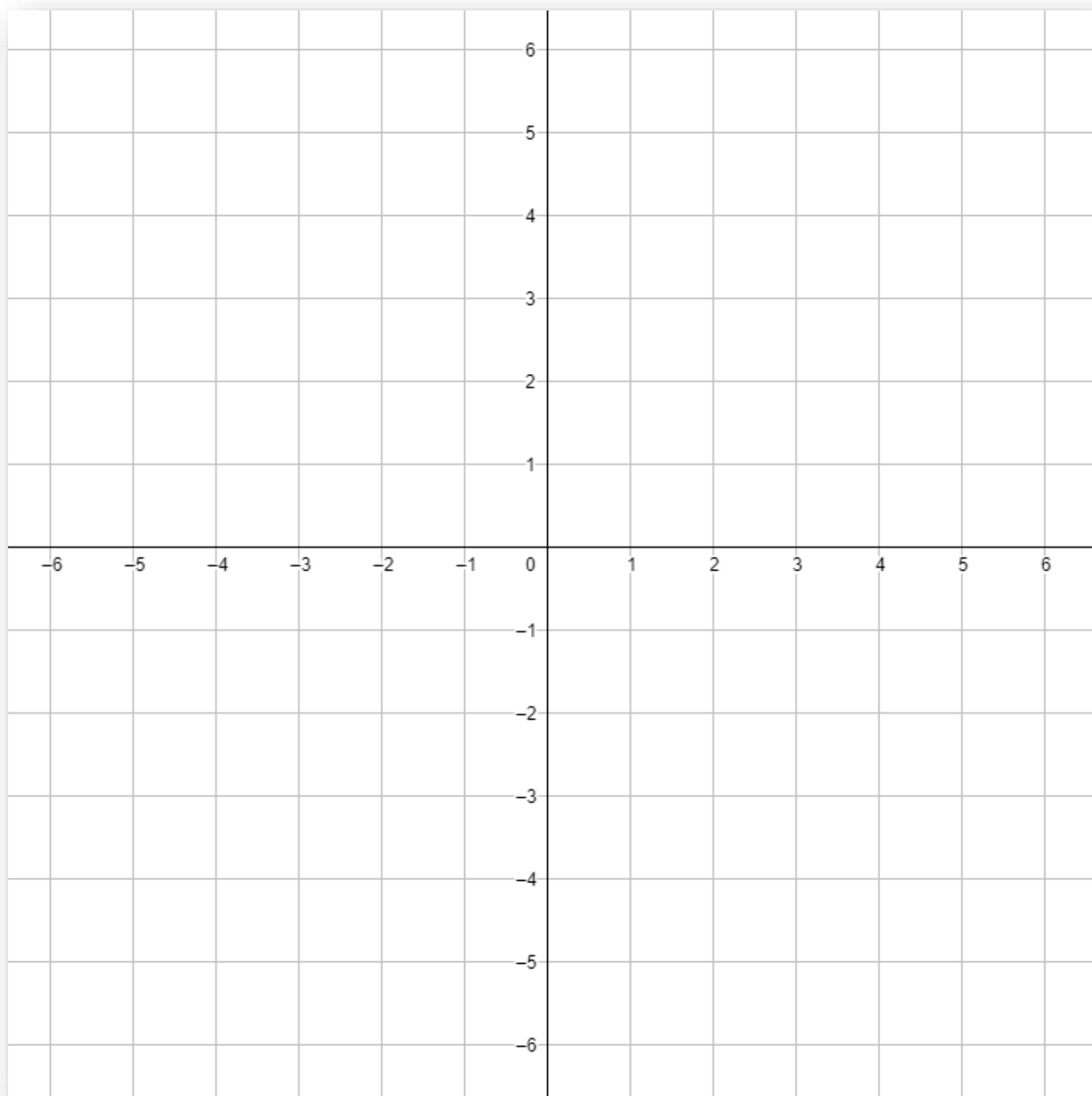
خطأ : نظل المنطقة التي لا تحوي الزوج المرتب

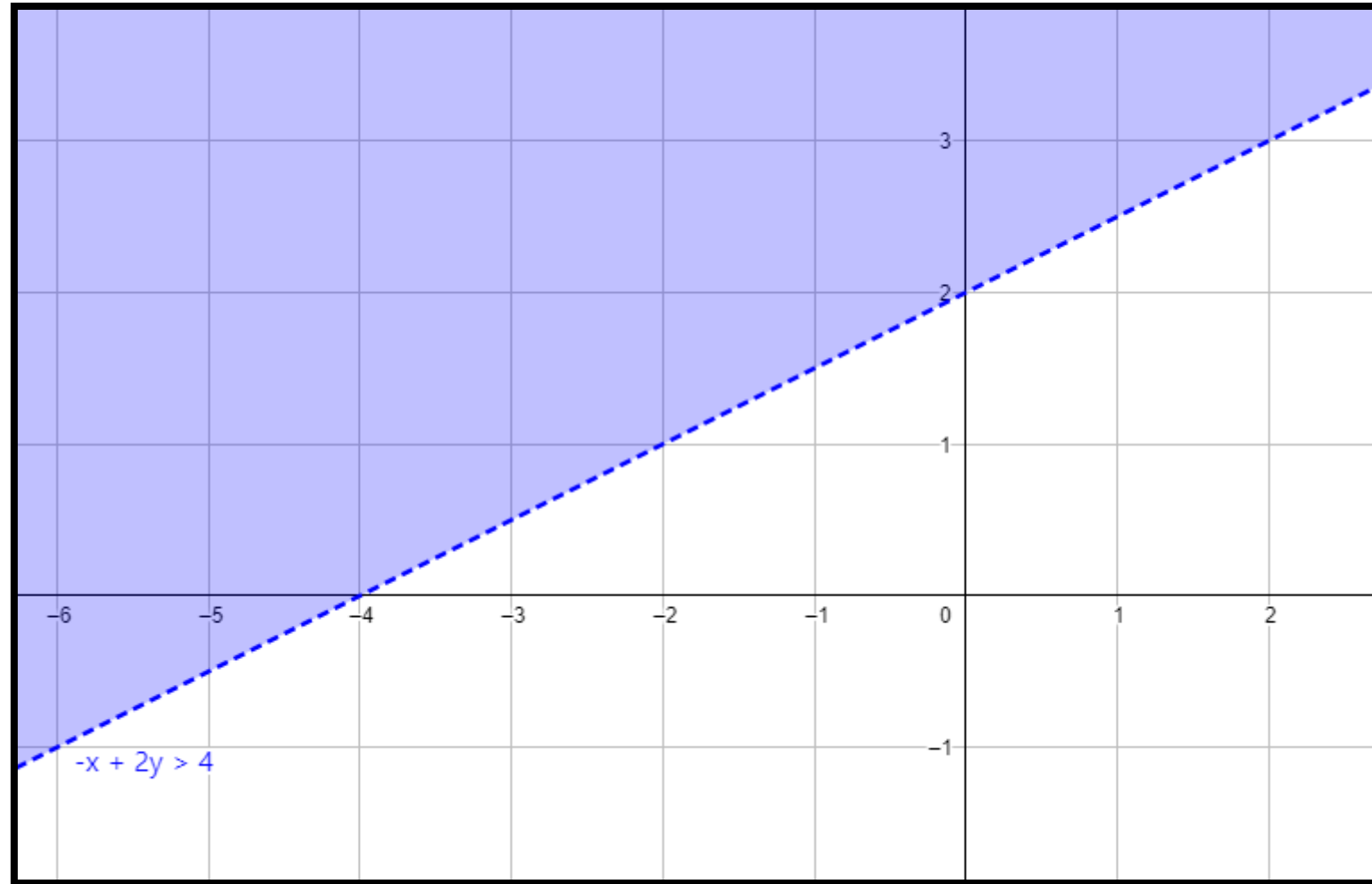
أروان القضاة

تحقق من فهمك

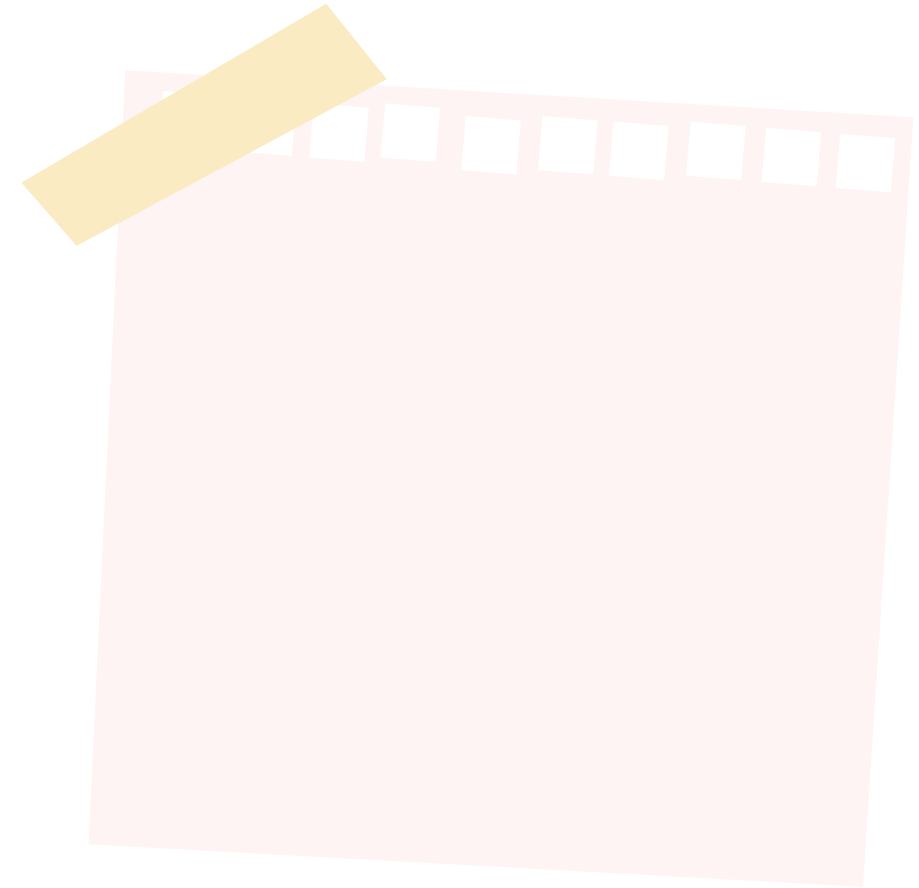
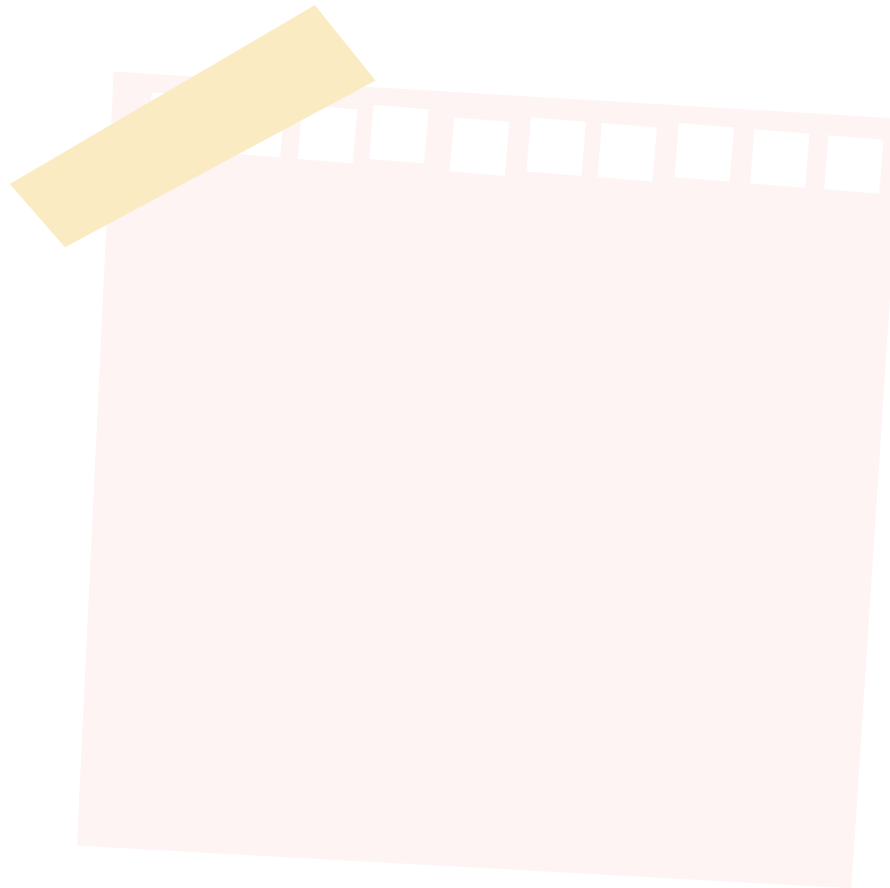
الحد المتقطع

مثّل المتباينة بيانيًا. **(1B)** $-x + 2y > 4$





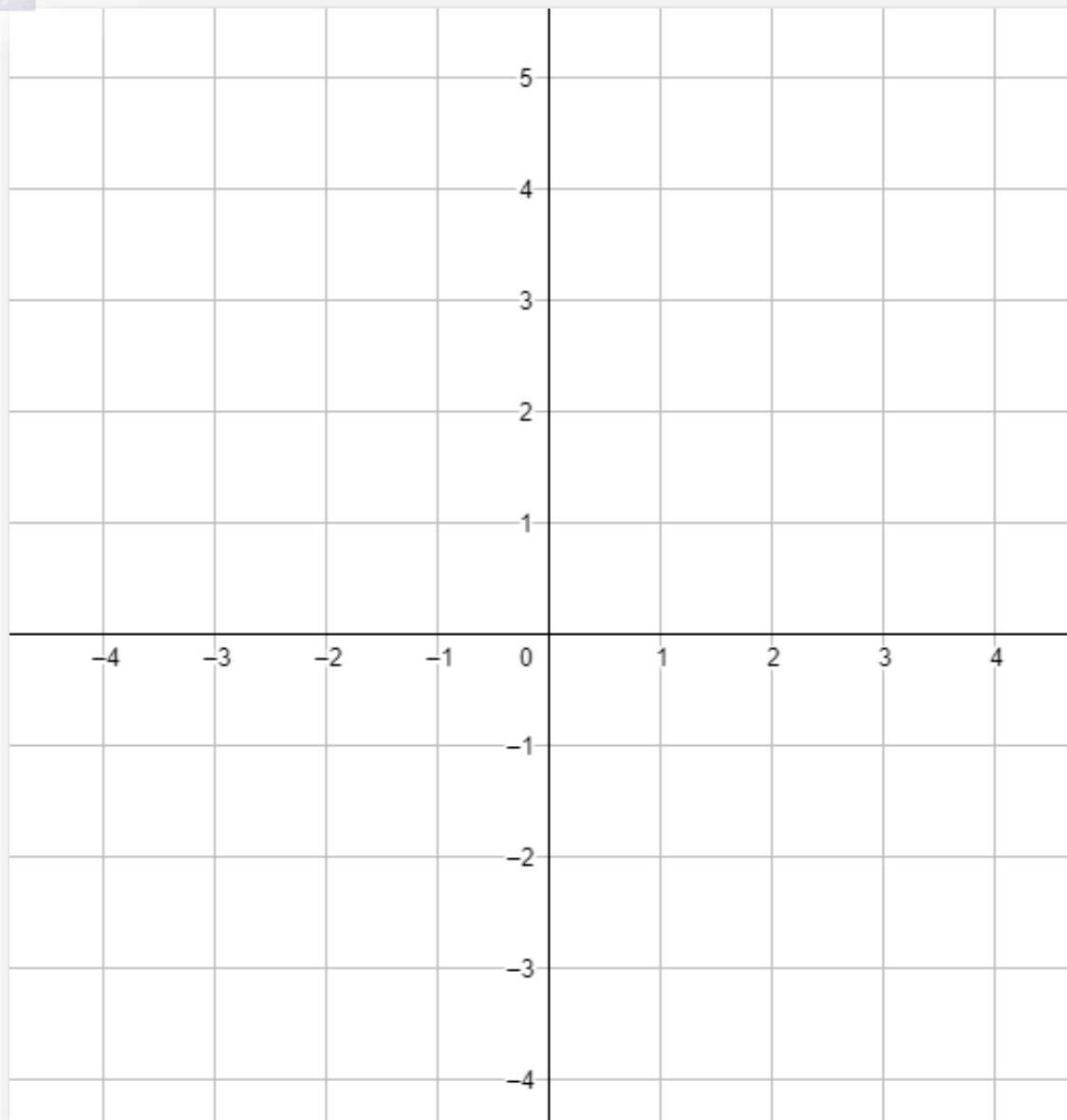
(2) ألعاب: مع صالح 60 ريالاً يستطيع إنفاقها في مدينة الألعاب. فإذا كان ثمن تذكرة الألعاب الإلكترونية 5 ريالات، وثمان تذكرة كل لعبة عادية 6 ريالات. فاكتب متباينة تصف هذا الموقف، ثم مثلها بيانياً .



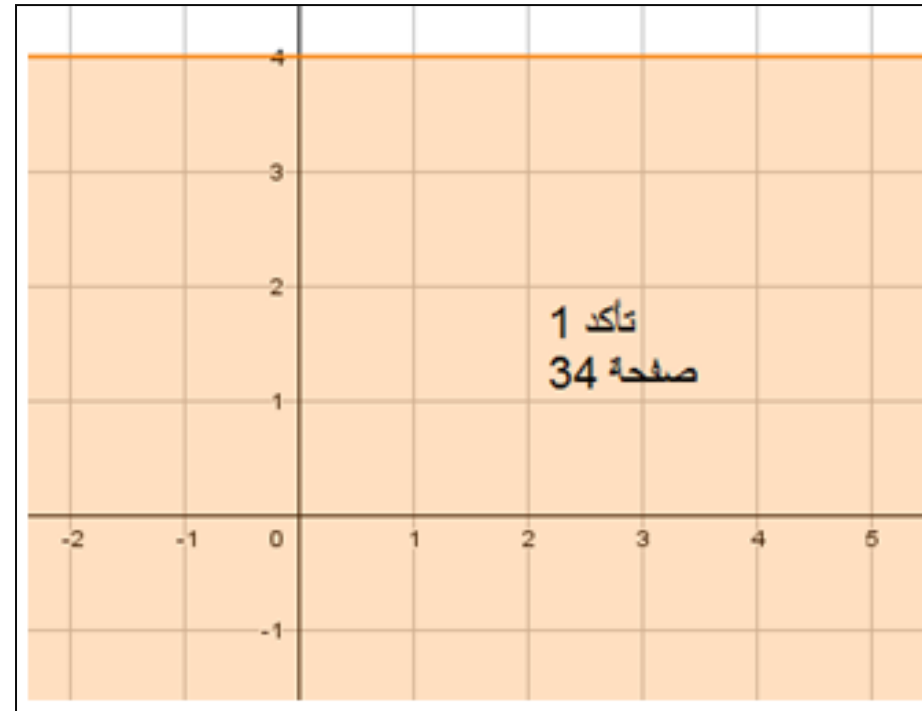
مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانًا:

تأكد

(1) $y \leq 4$



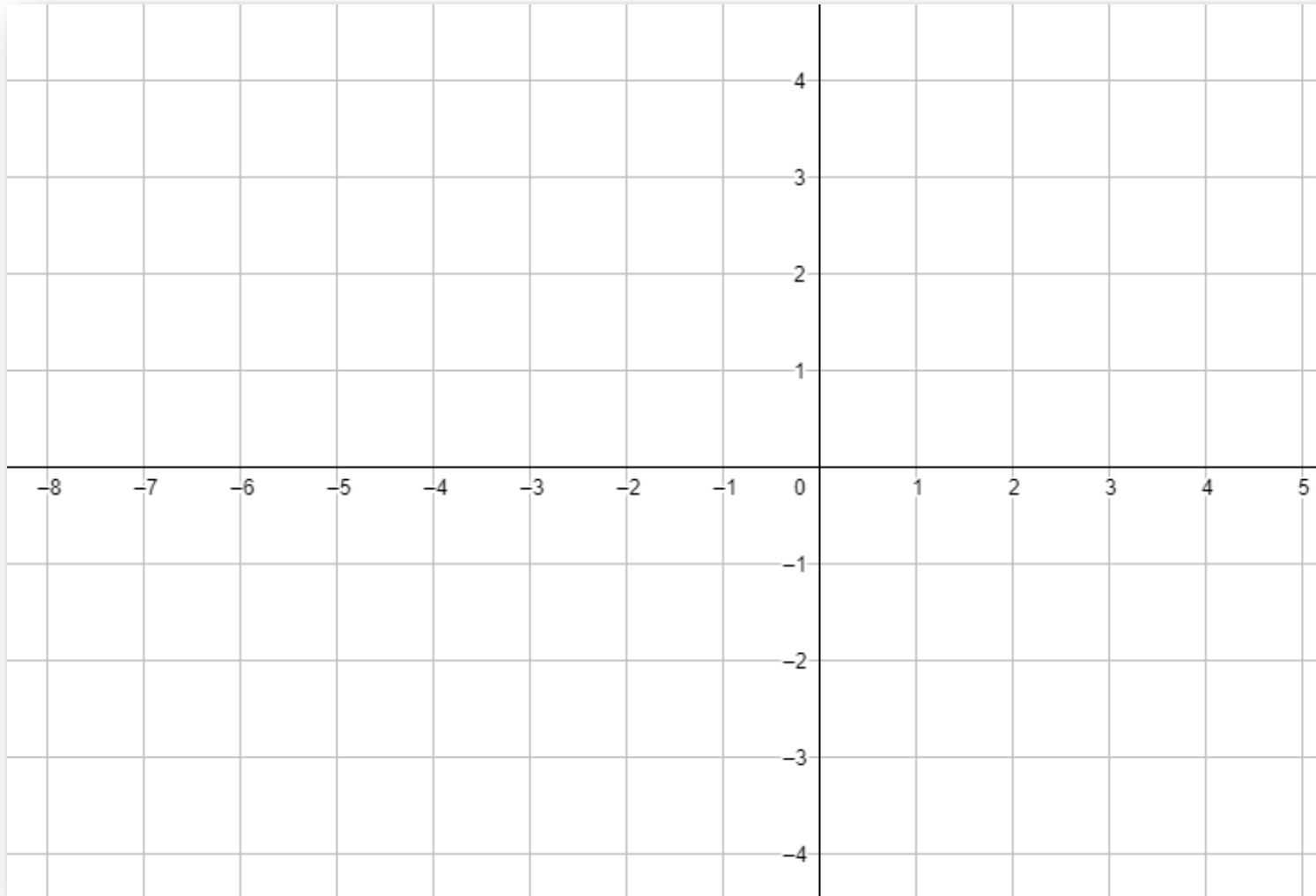
أروان القضاة



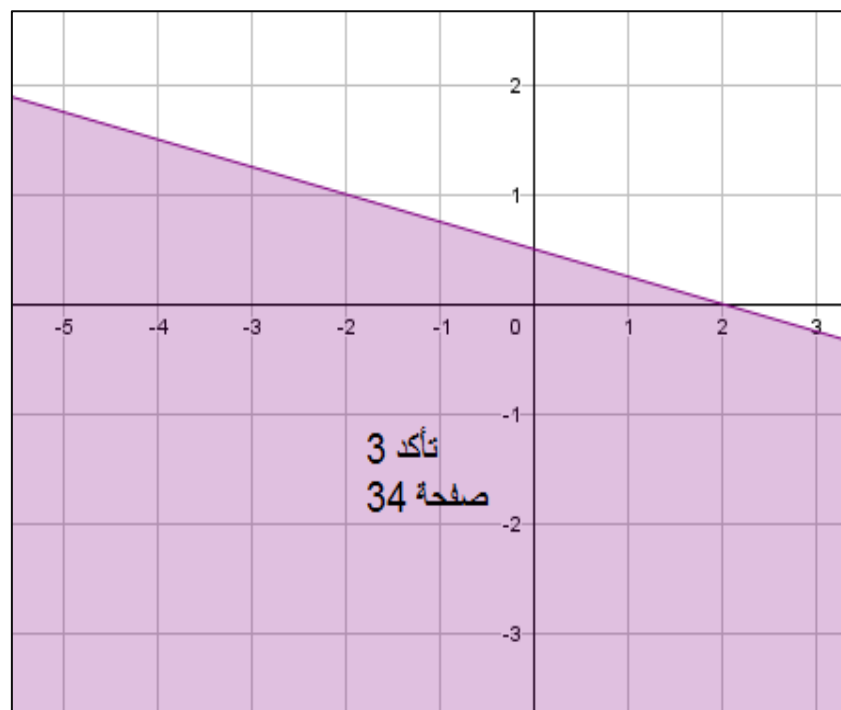
مثل كل متباينة فيما يأتي بيانًا:

تأكد

$$(3) \quad x + 4y \leq 2$$



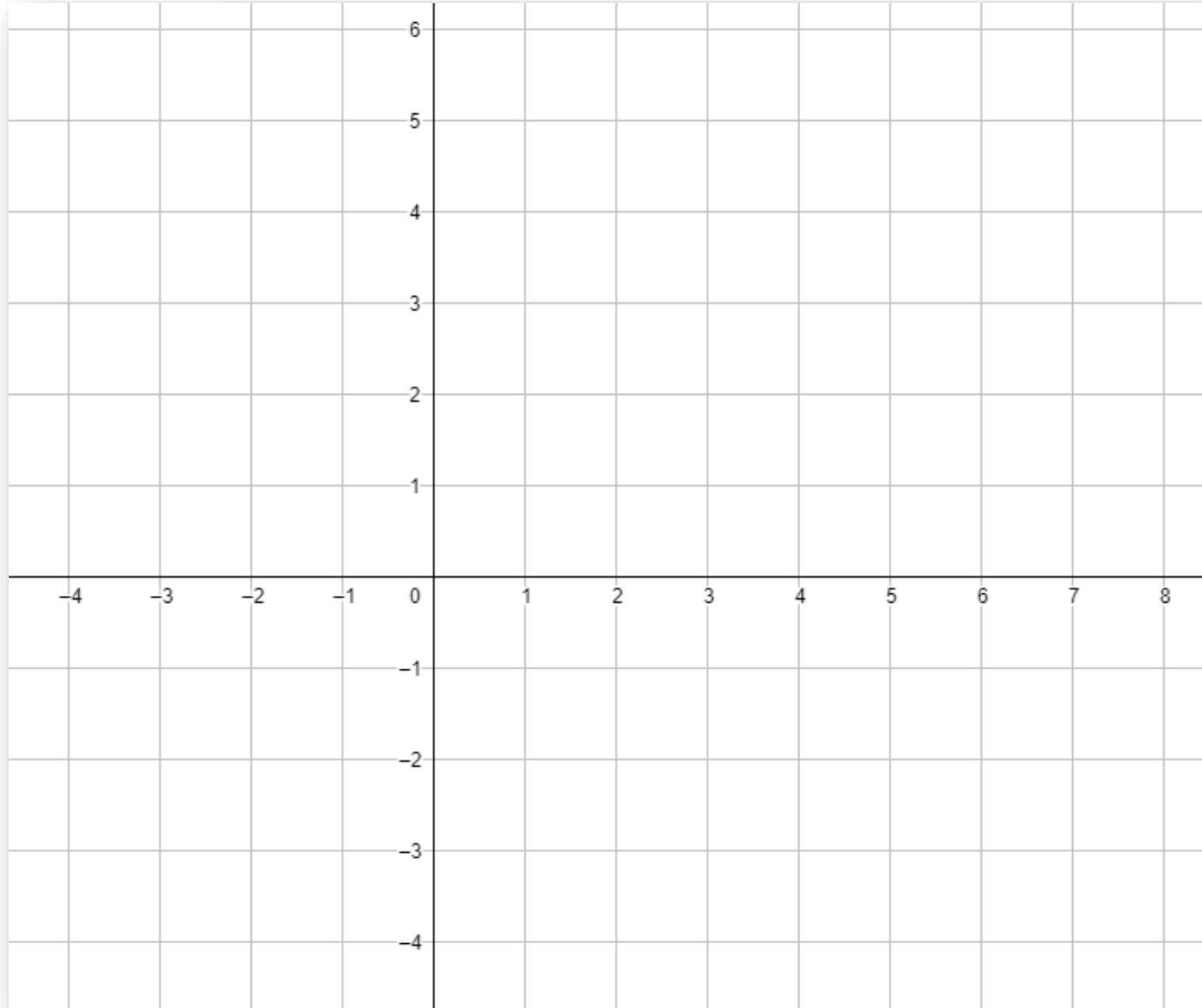
أ.روان القضاة

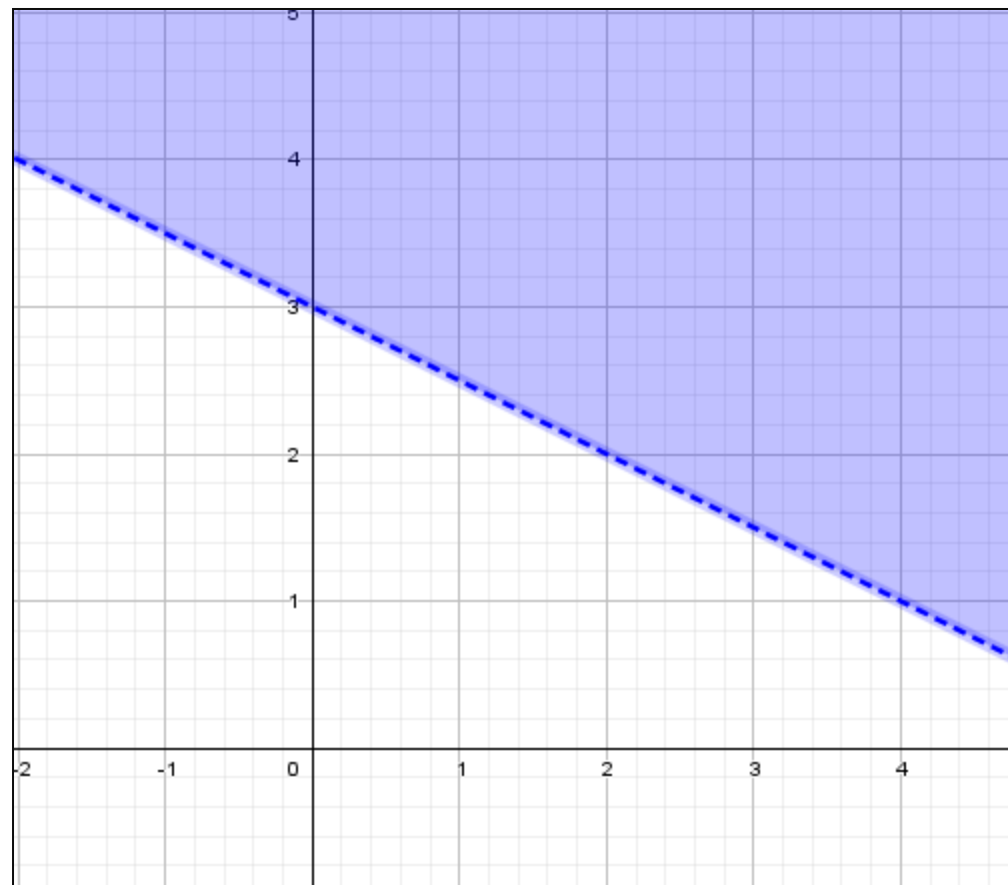


مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

$$(8) \quad x + 2y > 6$$

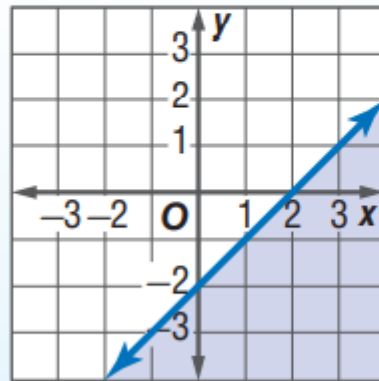
تدرب وحل المسائل



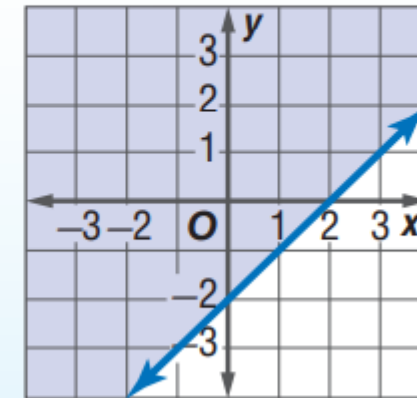


31) اكتشف الخطأ: مثل كل من زيد ومصعب المتباينة $x - y \geq 2$ بيانياً. فأيهما تمثيله صحيح؟ فسّر إجابتك.

مصعب



زيد



34) أي النقاط الآتية تقع في منطقة حل المتباينة $y + 3x > -2$ ؟

A $(-3, 1)$

B $(1, -7)$

C $(0, 0)$

D $(-4, 0)$

تدريب على اختبار

خطوات تمثيل متباينات القيمة المطلقة

1. نحول المتباينة الى معادلة
2. نجد صفراً داخل المقياس ثم نجد قيمة Y عنده

3. نختار قيم x لـ (عددان)
 - ❖ عدد أكبر من صفر الدالة
 - ❖ عدد أصغر من صفر الدالة

4. نرسم خط المتباينة (الحد)

- ❖ متصل (فيه إشارة مساواة في المتباينة)
- ❖ متقطع (لا يوجد إشارة مساواة في المتباينة)

5. منطقة الحل (التظليل) :
نختار أي زوج مرتب ونعوضه في المتباينة الأصلية

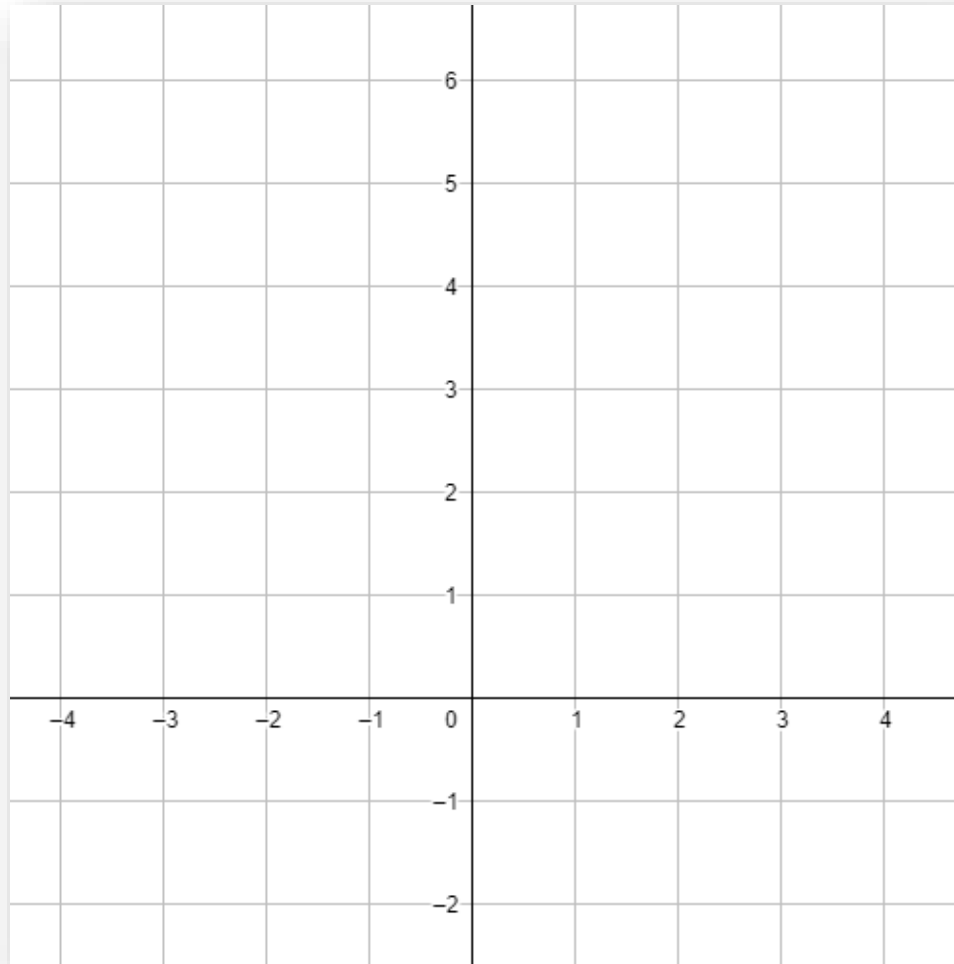
التعويض

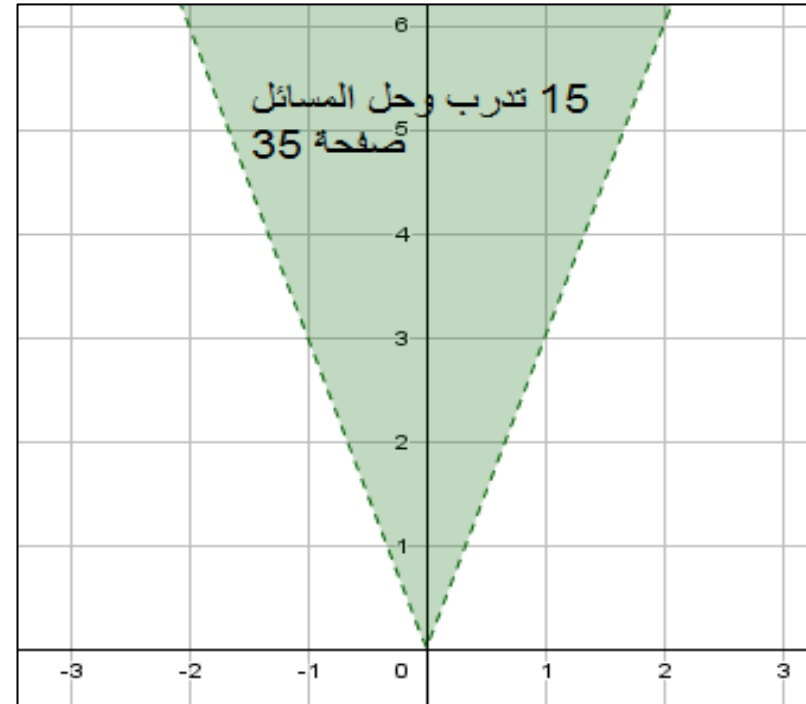
- ❖ صحيح : نظل المنطقة التي تحوي الزوج المرتب
- ❖ خطأ : نظل المنطقة التي لا تحوي الزوج المرتب

مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

(15) $y > |3x|$

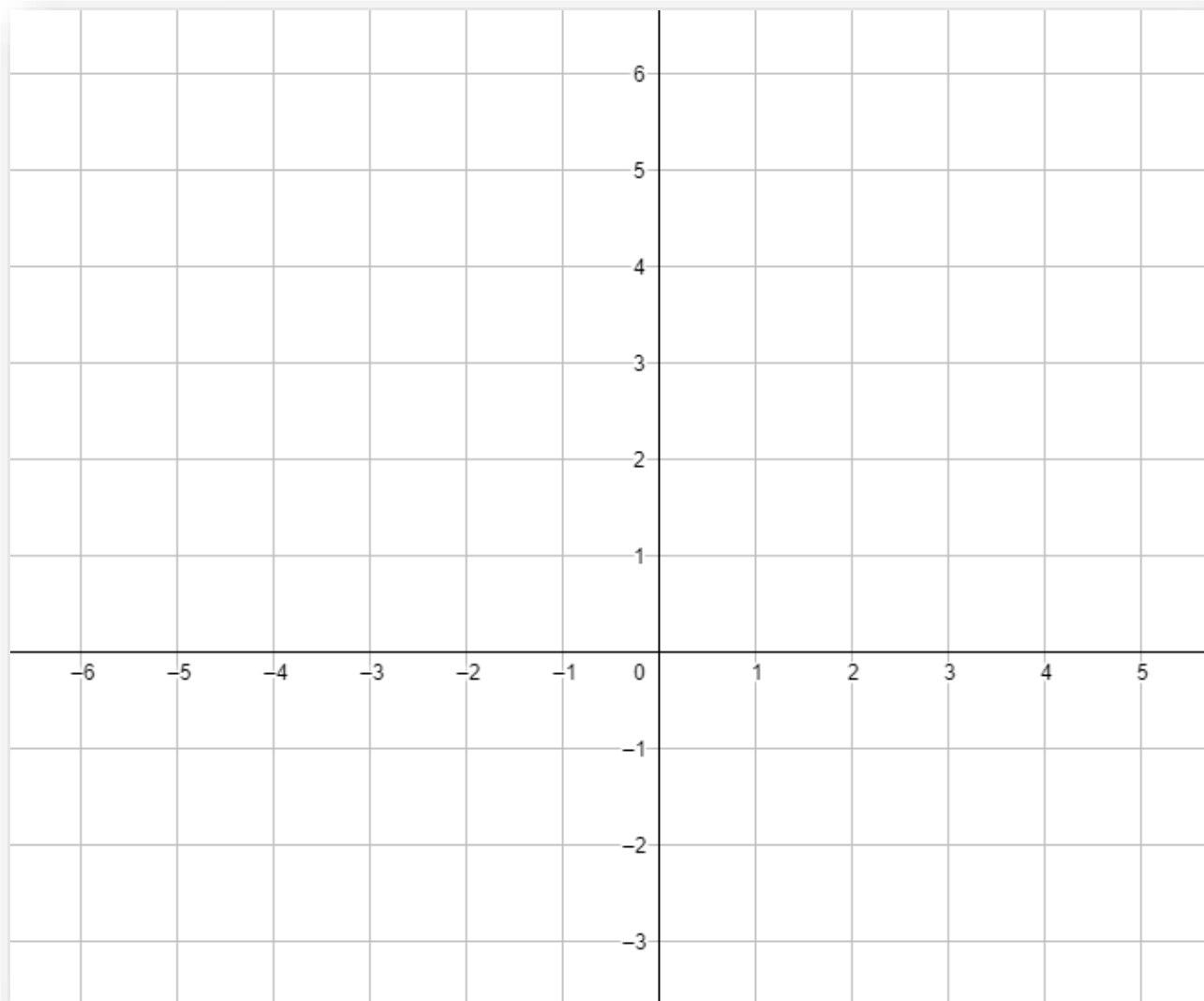
تدرب وحل المسائل



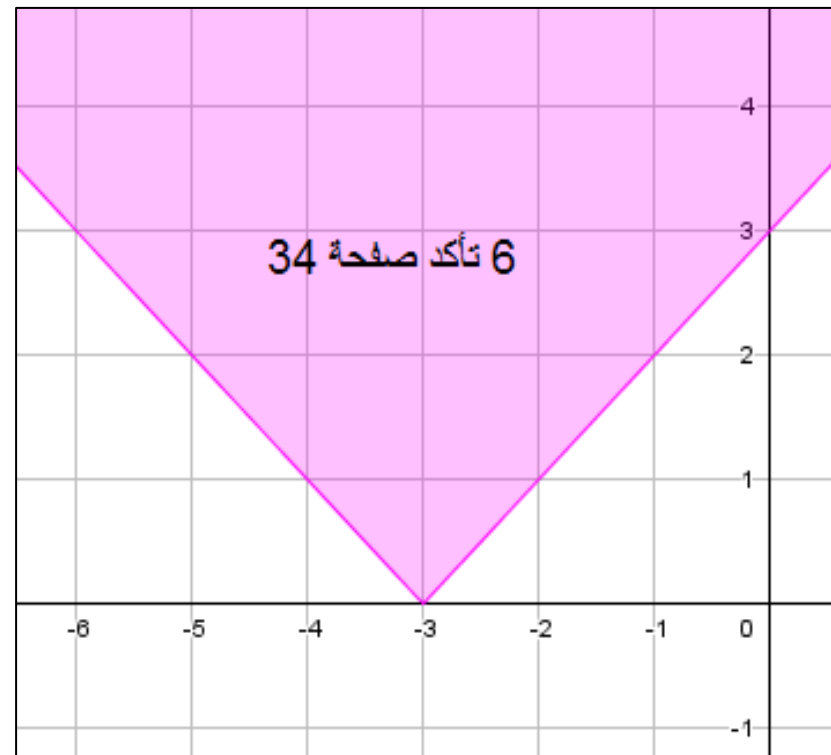


مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:

$$(6) \quad y \geq |x + 3|$$



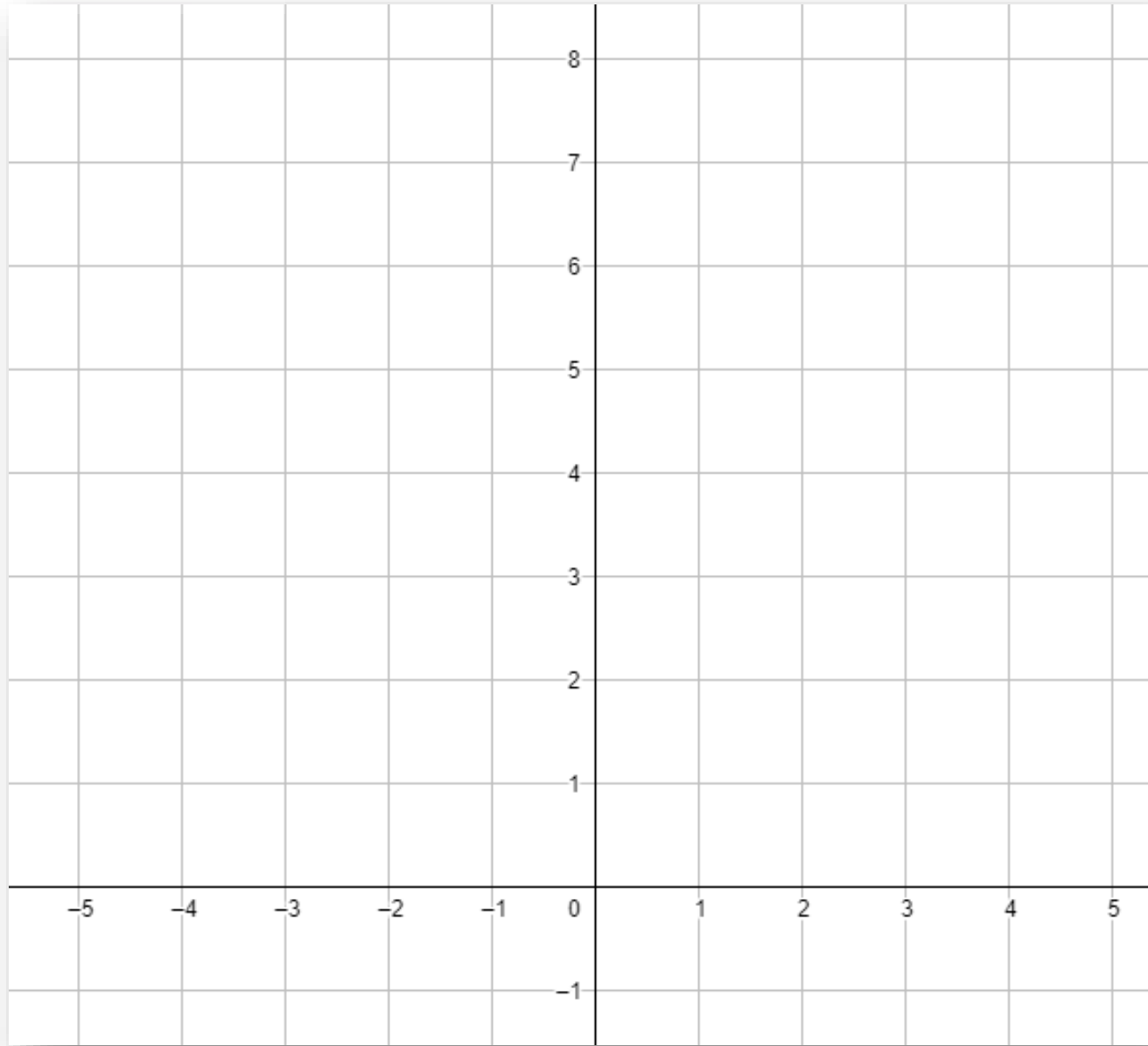
أ.روان القضاة

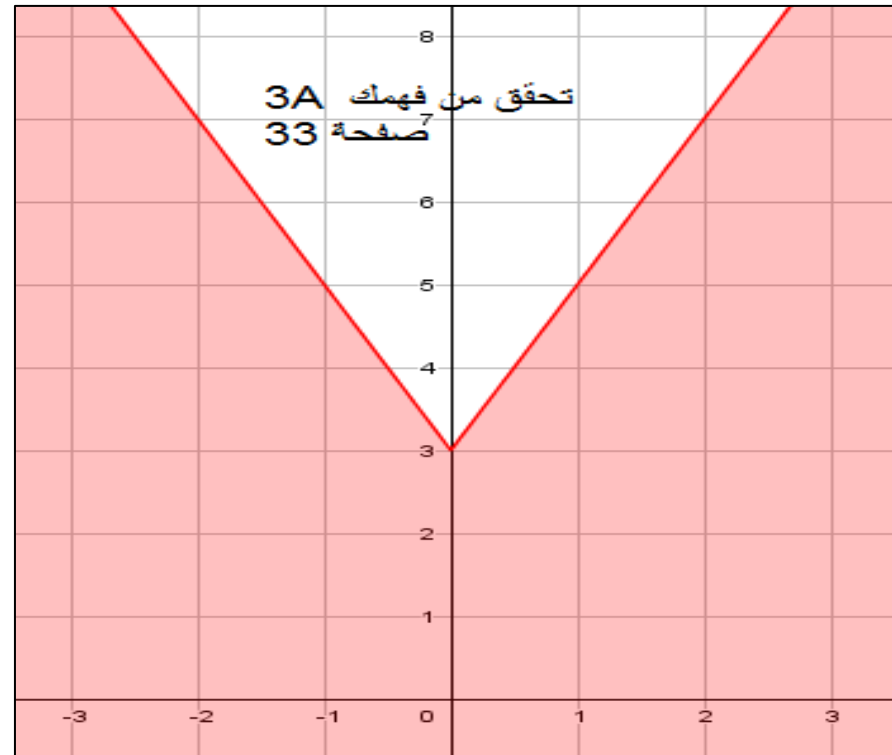


مثّل كل متباينة فيما يأتي بيانيًا:

$$y \leq 2|x| + 3 \quad (3A)$$

تحقق من فهمك





14) مشتريات: مع سعاد 200 ريال. وتريد أن تشتري عددًا من الأطباق. وعددًا من الكؤوس؛ لتجهز لمناسبة

اجتماعية، فإذا كان سعر الطبق 15 ريالاً وسعر الكأس 5 ريالات، فأجب عمّا يأتي:

(a) اكتب متباينة تمثل العدد الممكن شراؤه من الأطباق والكؤوس، ثم مثلها بيانياً.

(b) هل تستطيع سعاد شراء 10 أطباق و 10 كؤوس؟





تطوير - إنتاج - توثيق

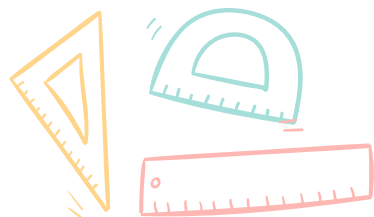
الدرس الخامس حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيا

المفردات

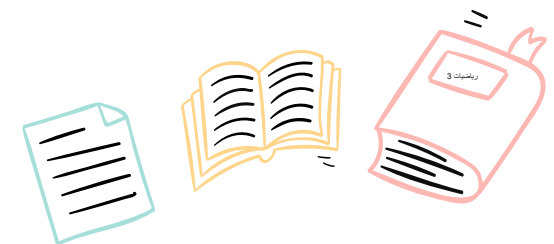
1. نظام المتباينات الخطية

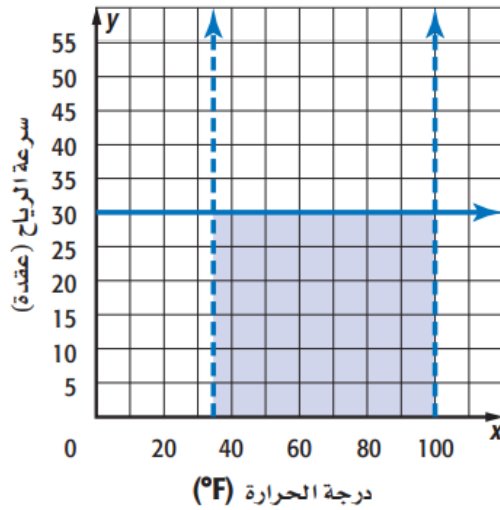
درست حل نظام من معادلتين
خطيتين بيانيا
فيما سبق

الاهداف
1. حل نظام متباينات خطية بيانيا .
2. تحديد إحداثيات النقاط التي تمثل رؤوس المنطقة الناتجة عن التمثيل
البياني لنظام من المتباينات الخطية .



أ.روان القضاة





تؤخذ الحالة الجوية بالاعتبار عند إطلاق المركبات الفضائية، فيجب أن تكون درجة الحرارة بين 35°F و 100°F ، وأن لا تزيد سرعة الرياح على 30 عقدة. ويمكن تمثيل هذه الشروط بنظام من المتباينات الخطية كما في الشكل المجاور.

أسئلة التعزيز 1. ماذا يعني الحرف F

2. لماذا لم يمثل المستقيم الافقي بخط منقط

نظام المتباينات الخطية: حل نظام المتباينات الخطية يعني إيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام.

أضف إلى
مطوبتك

حل أنظمة المتباينات الخطية

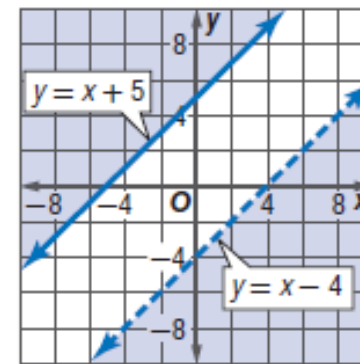
مفهوم أساسي

- الخطوة 1** مثل كل متباينة في النظام بيانياً.
- الخطوة 2** حدّد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام.

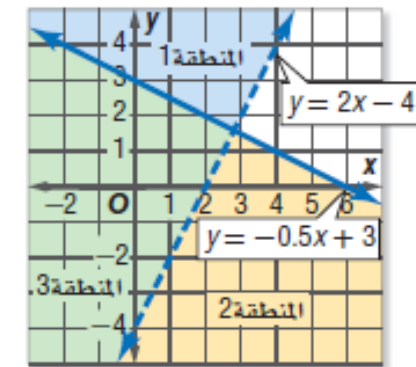
مناطق الحل غير المتقاطعة

مناطق الحل المتقاطعة

مثال 2



مثال 1



إرشادات للدراسة

حد المتباينة

إذا احتوت المتباينة على رمز $<$ أو $>$ ، فإن الحد لا يدخل ضمن منطقة الحل، ويمثل بخط متقطع.

قراءة الرياضيات

المجموعة الخالية

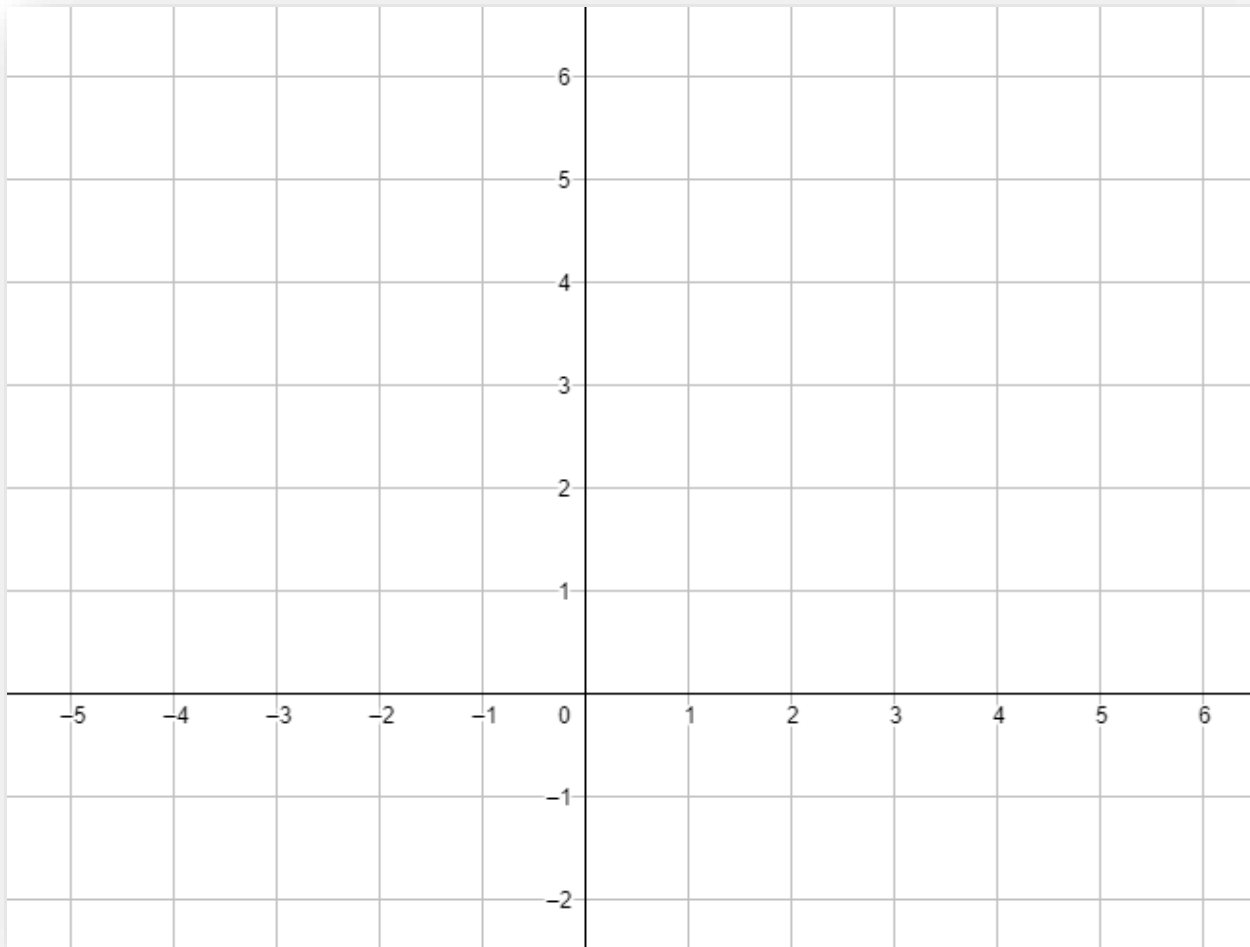
هي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر، ويرمز إليها بأحد الرمز \emptyset أو $\{ \}$.

حل كل نظام مما يأتي بيانيًا:

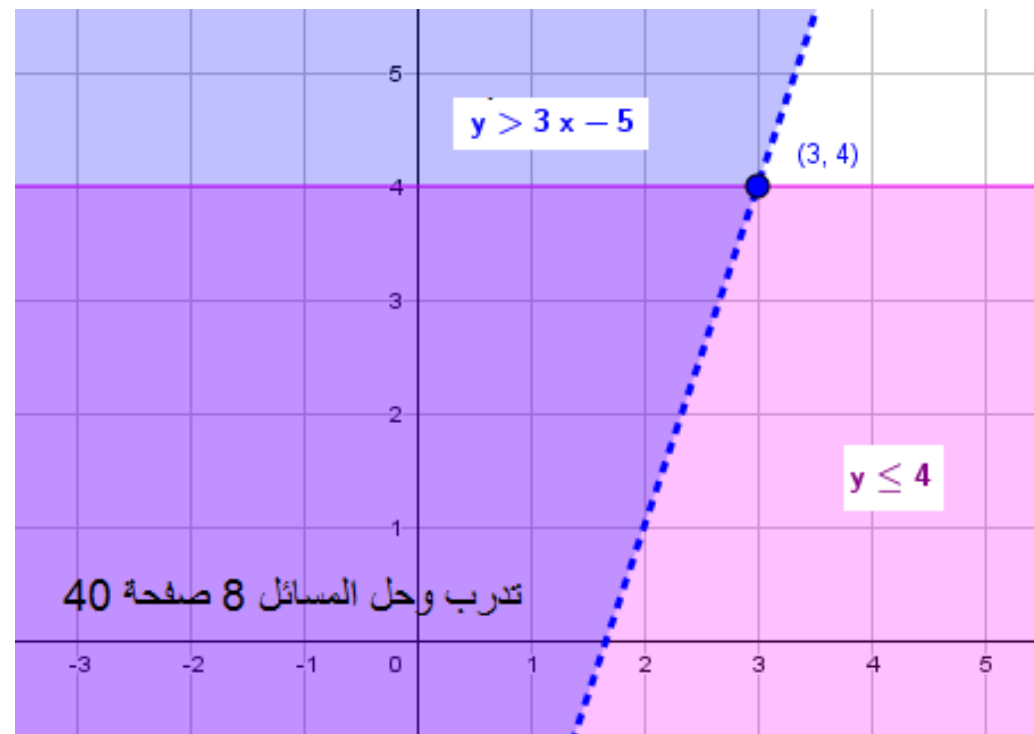
تحقق من فهمك

$$y > 3x - 5 \quad (8)$$

$$y \leq 4$$



أ.روان القضاة

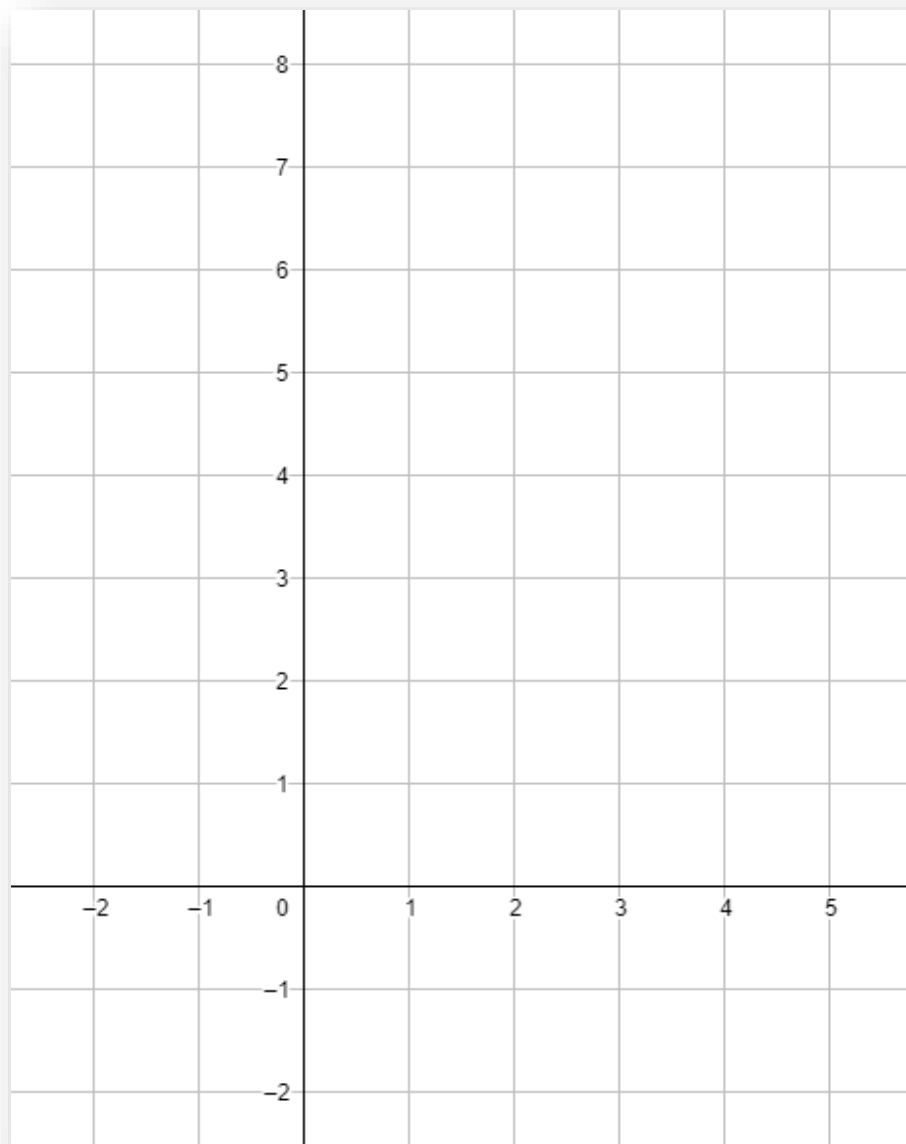


حل النظام الآتي بيانيًا:

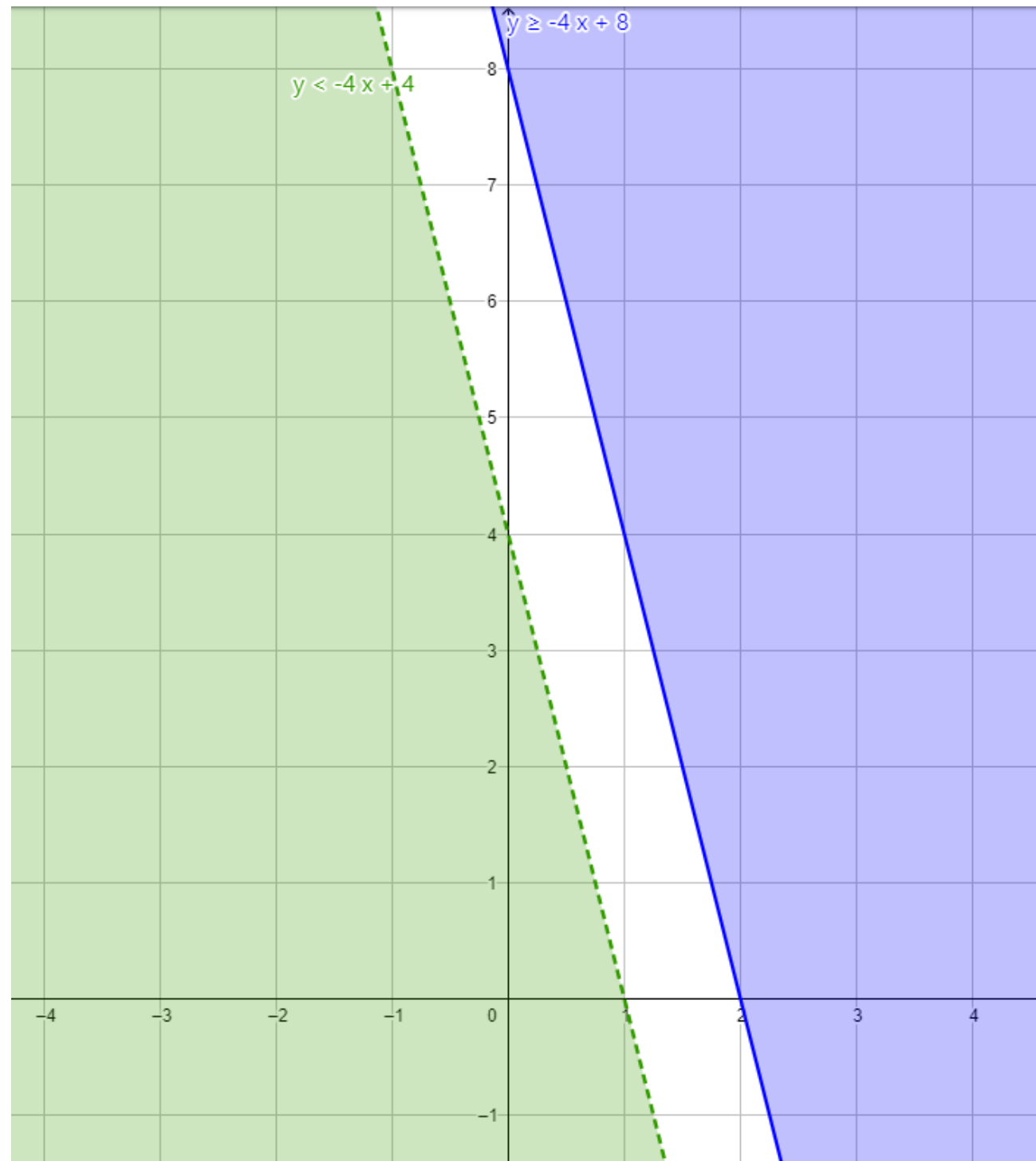
تحقق من فهمك

$$y \geq -4x + 8 \quad (2A)$$

$$y < -4x + 4$$



أ.روان القضاة

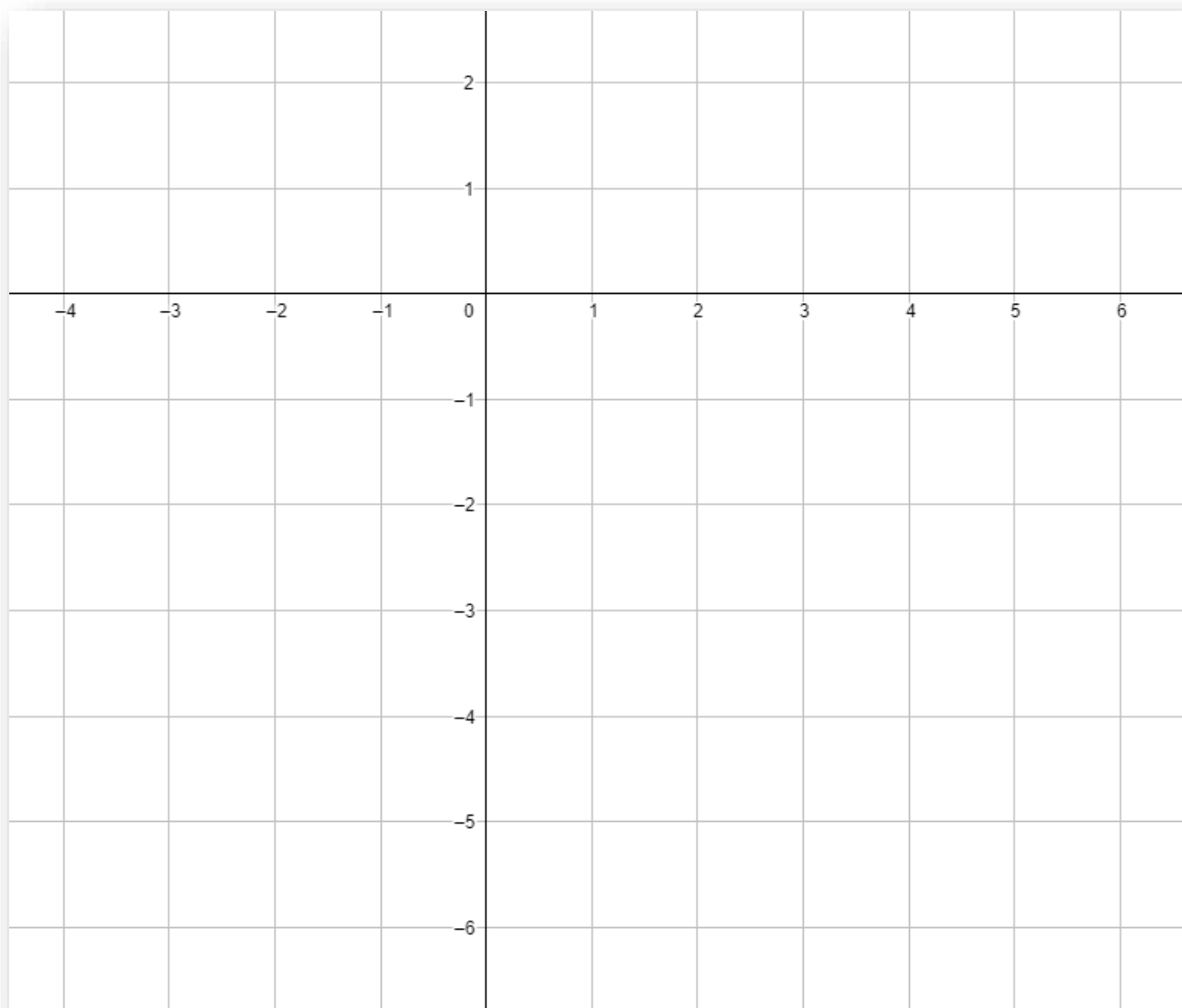


تدرب وحل المسائل

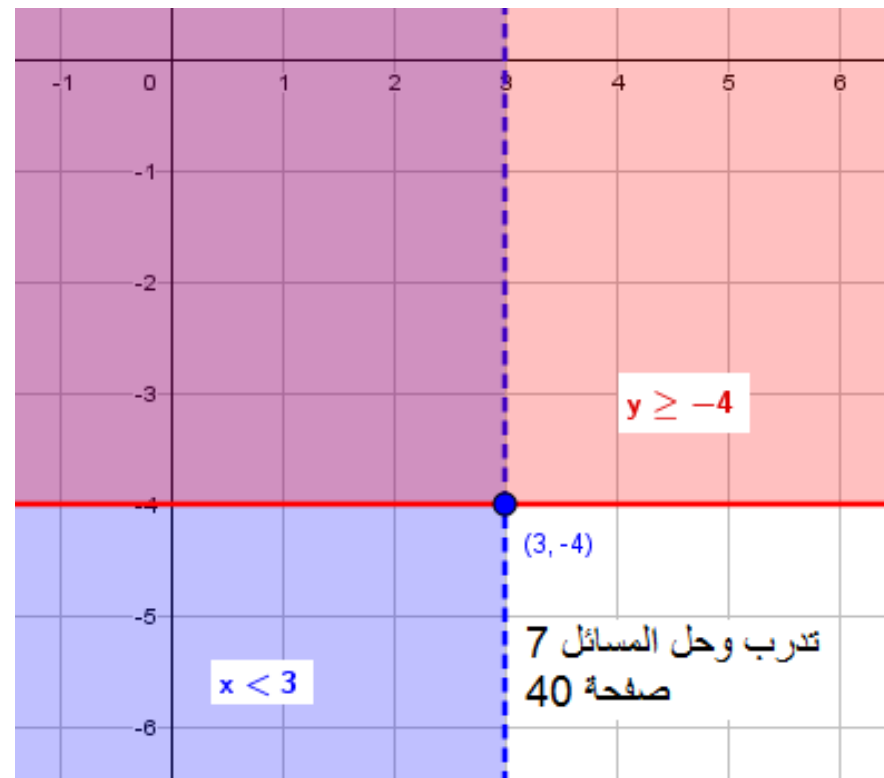
حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

$$(7) \quad x < 3$$

$$y \geq -4$$



أ.روان القضاة

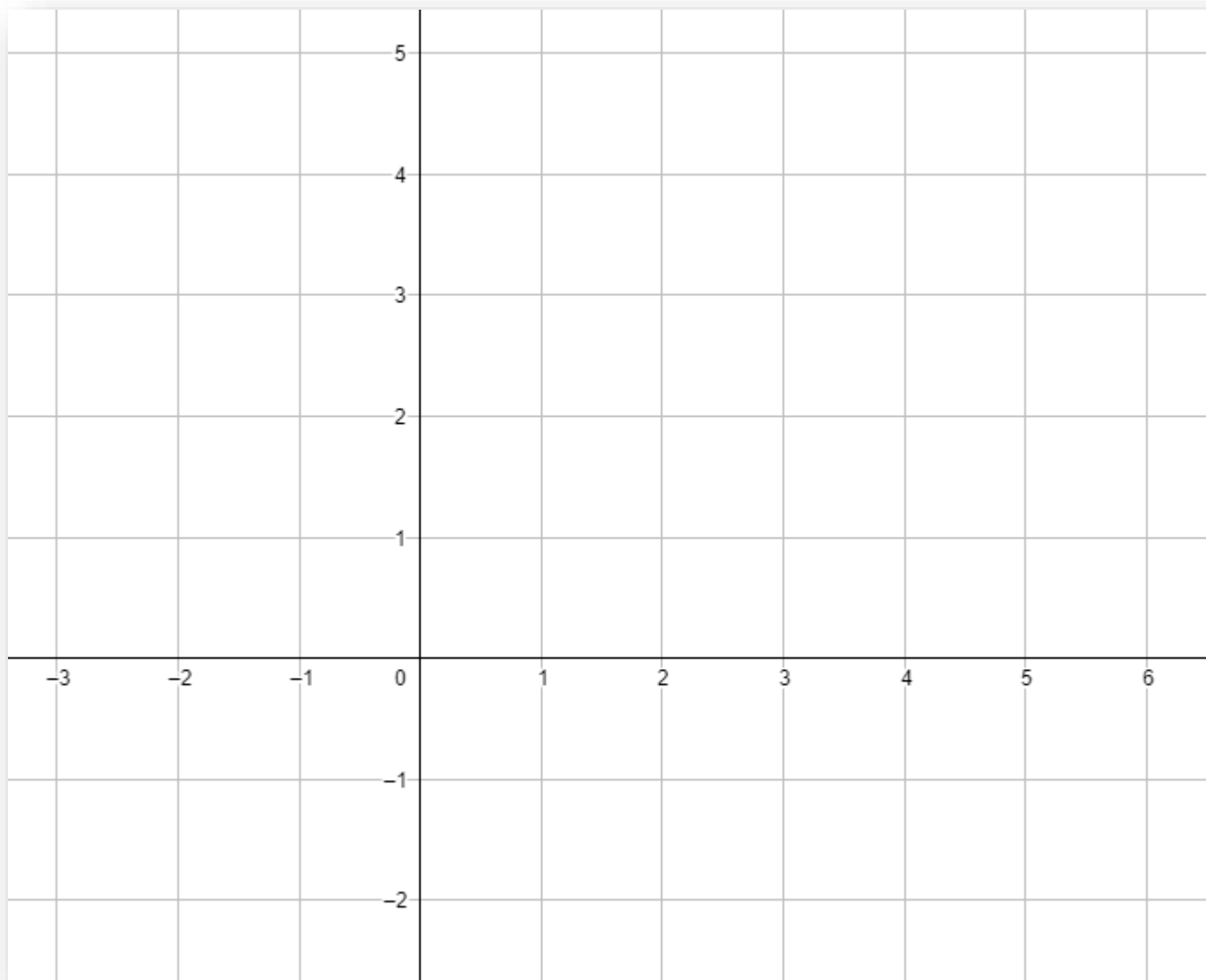


$$y \geq 0 \quad (10)$$

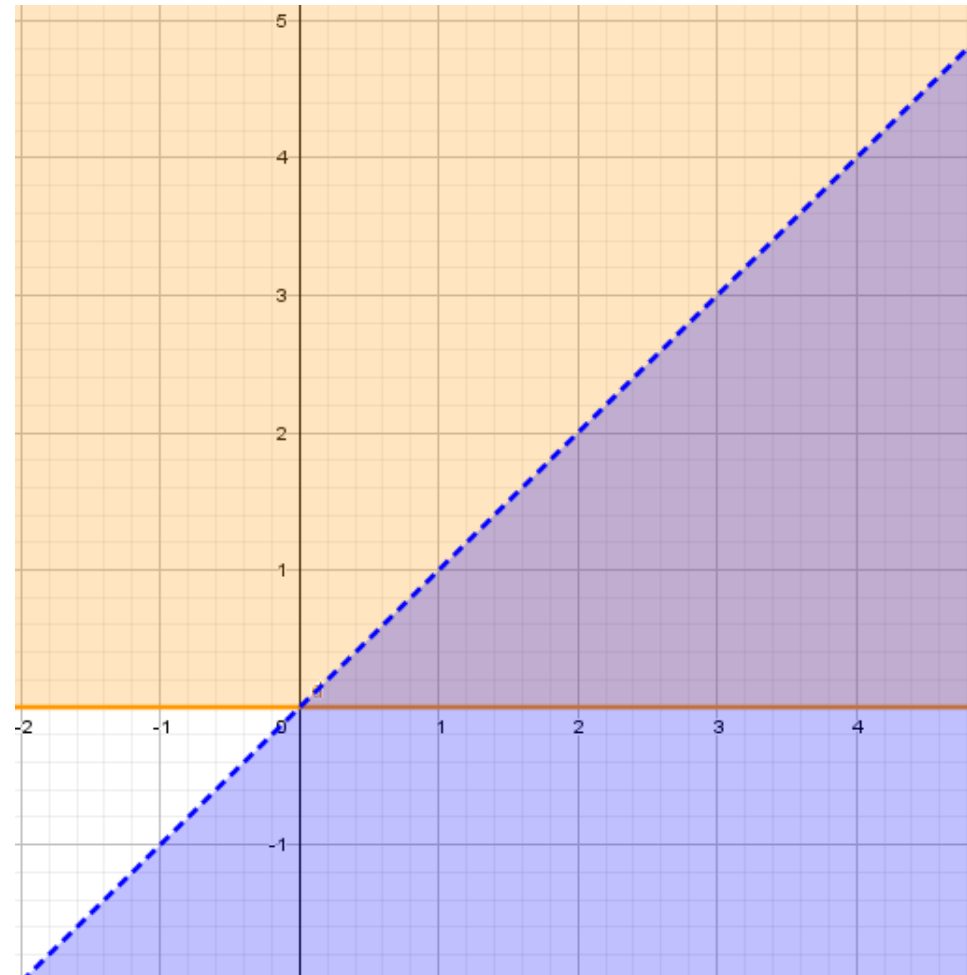
$$y < x$$

حل كل نظام مما يأتي بيانيًا:

تدرب وحل المسائل



أ.روان القضاة

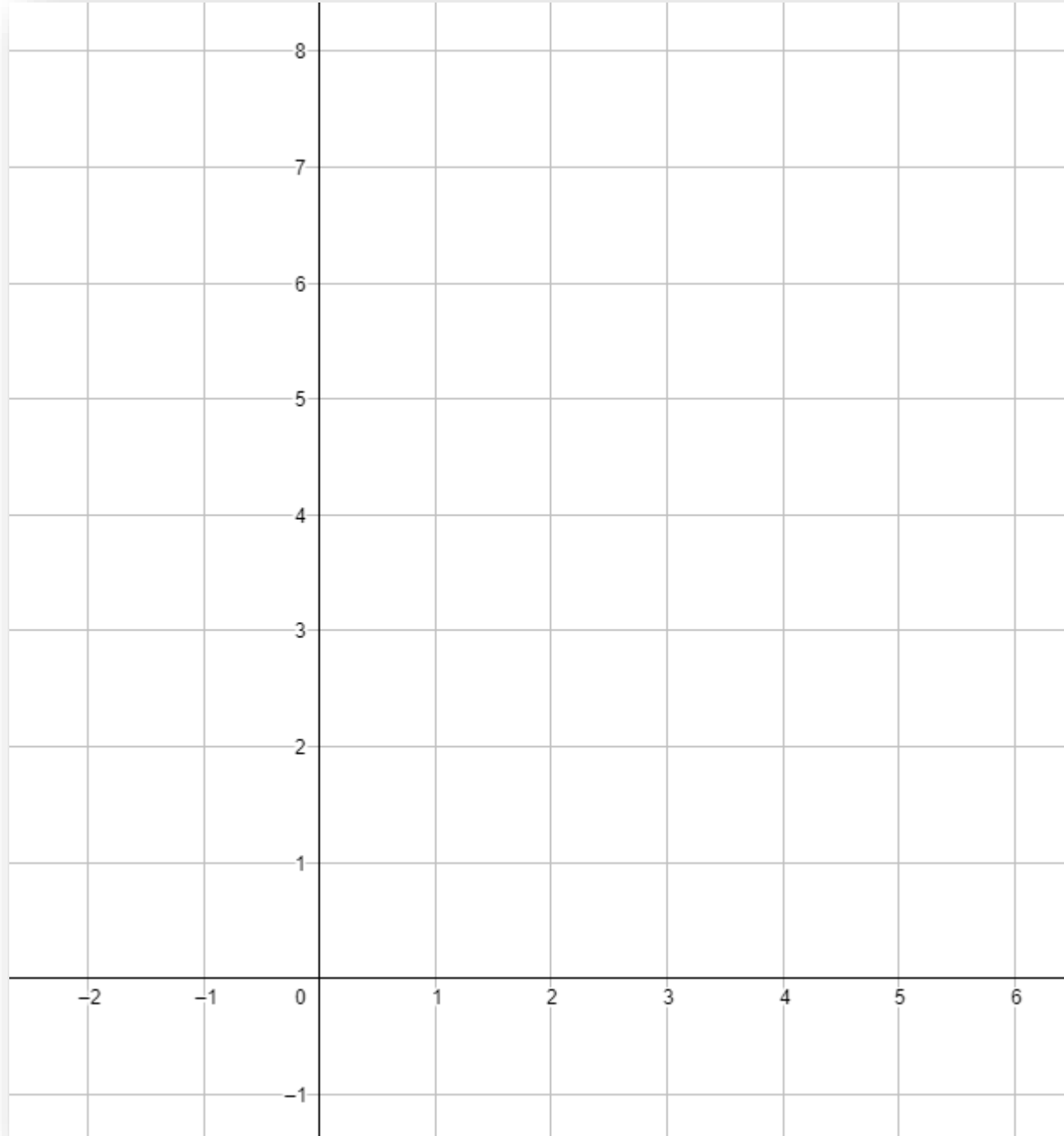


تأكد

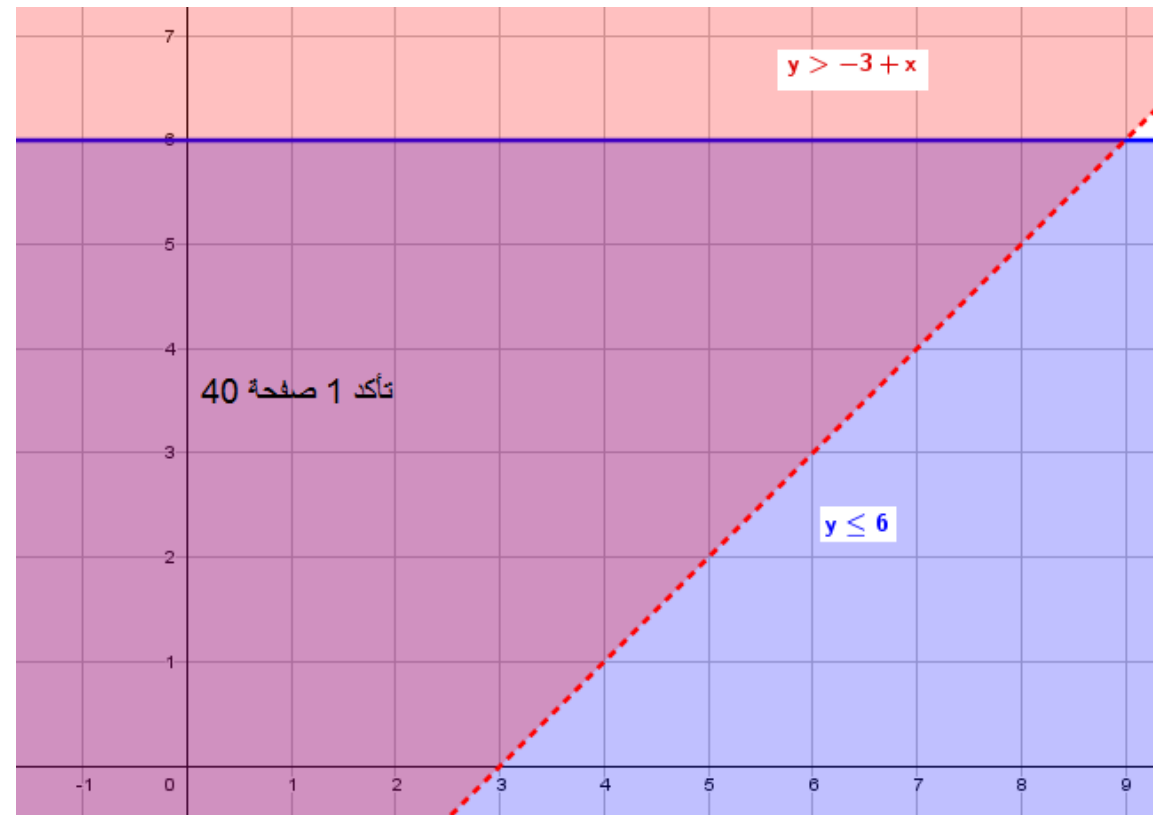
حل كل نظام مما يأتي بيانيًا:

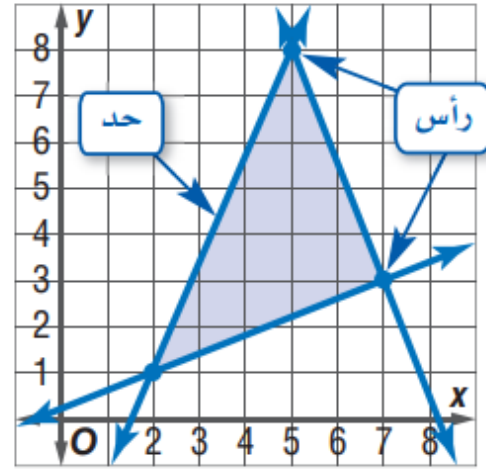
$$(1) \quad y \leq 6$$

$$y > -3 + x$$



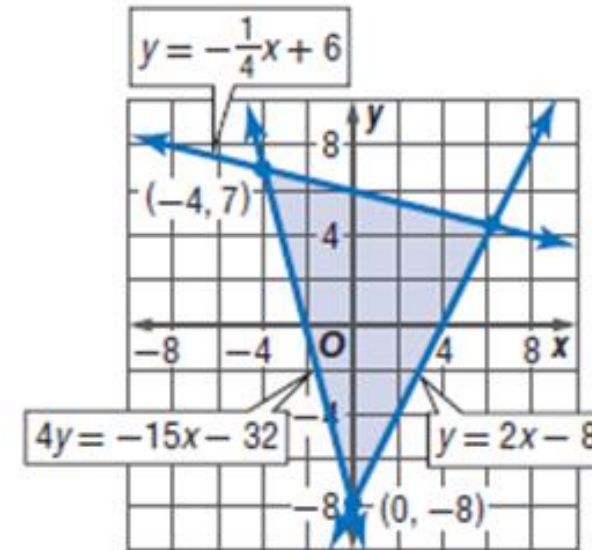
أ.روان القضية





إيجاد رؤوس منطقة الحل: ينتج أحياناً عن التمثيل البياني لنظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلع، ويمكن إيجاد إحداثيات رؤوس تلك المنطقة بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحددة للمنطقة (الحدود).

مثال 4



تحقق من فهمك

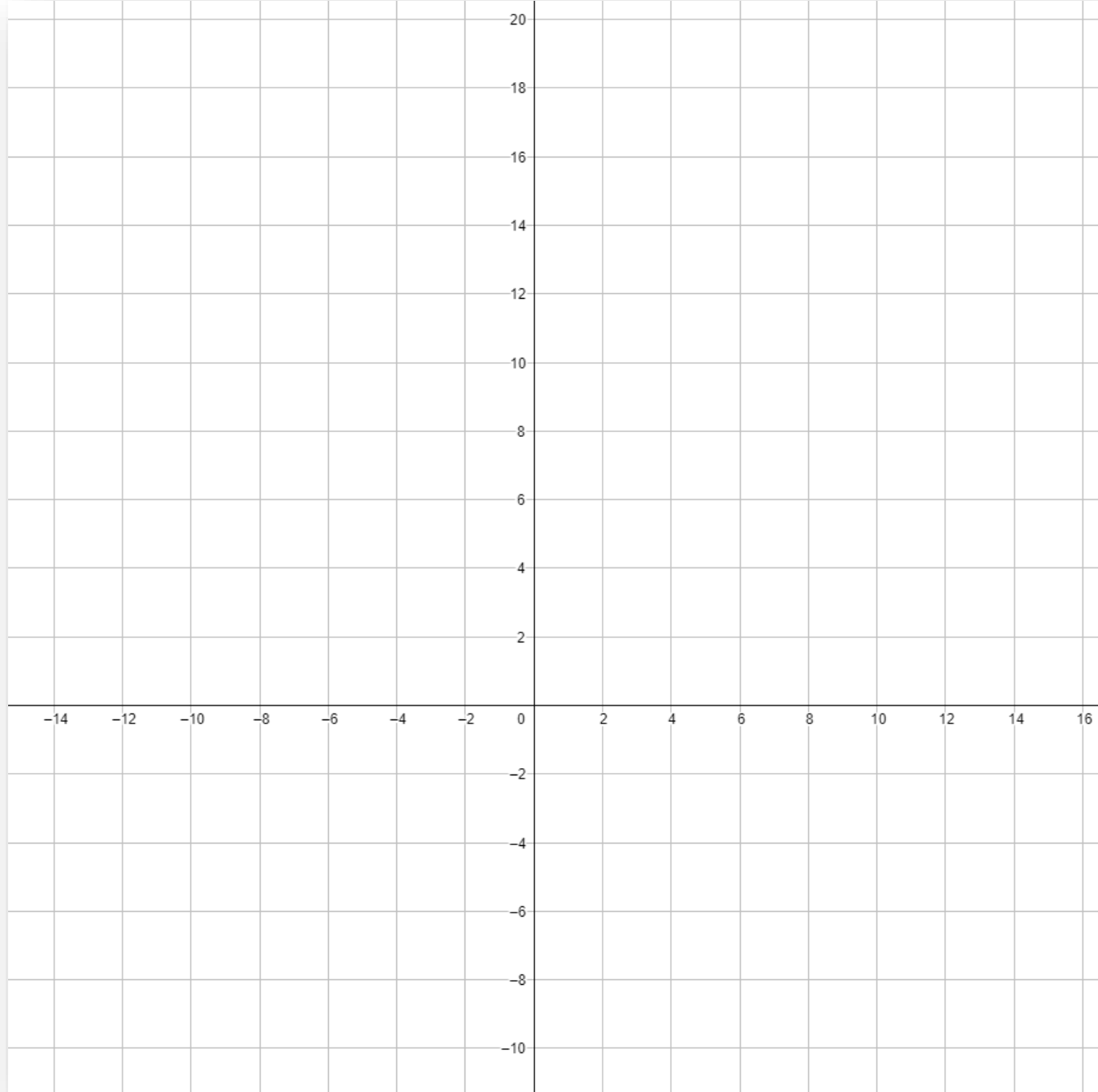
إيجاد رؤوس منطقة الحل

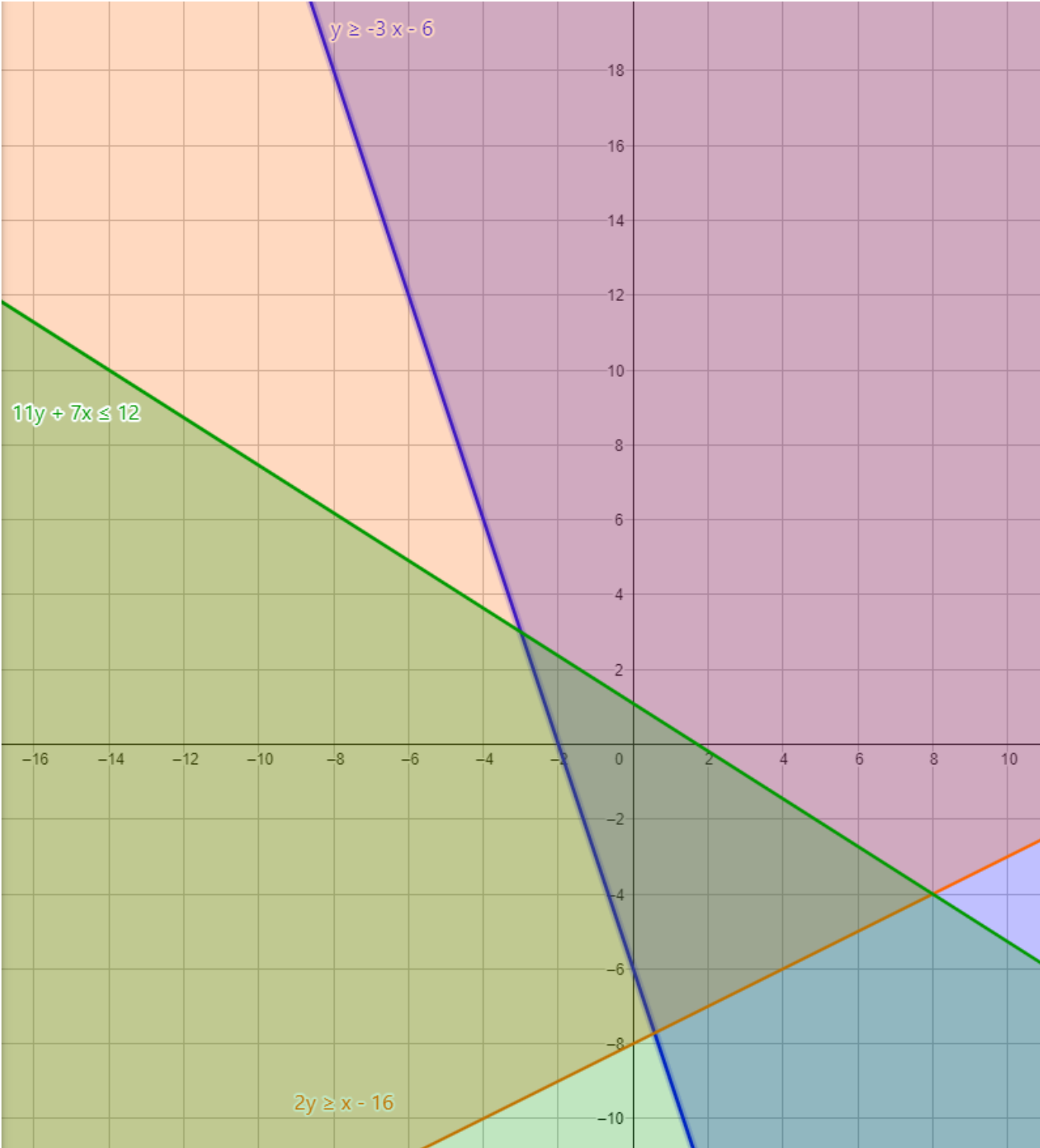
أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي:

$$5y \leq 2x + 9 \quad (4B)$$

$$y \leq -x + 6$$

$$9y \geq -2x + 5$$





(42) اكتب: وضح بخطوات مكتوبة طريقة تحديد منطقة التظليل عند حل نظام متباينات خطية بيانيًا.

مسائل مهارات التفكير العليا



أ.روان القضاة

x	y
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	20

43) يبين الجدول المجاور العلاقة بين x و y .

فأيُّ المعادلات الآتية تمثل هذه العلاقة؟

$y = 3x - 2$ **A**

$y = 3x + 2$ **B**

$y = 4x + 1$ **C**

$y = 4x - 1$ **D**

النقطة التي لا تمثل رأساً لمنطقة حل النظام:

$x \geq 0, y \geq 0, y \leq -2x + 6$ هي:

$(0, 0)$ **A** $(0, 6)$ **C**

$(0, 3)$ **B** $(3, 0)$ **D**



الدرس السادس

البرمجة الخطية والحل الأمثل

درست حل أنظمة متباينات
خطية بيانيا

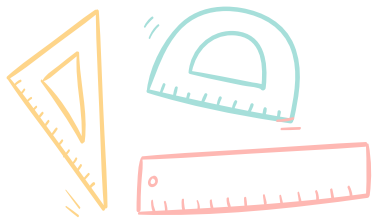
فيما سبق

المفردات

1. البرمجة الخطية
2. قيود
3. منطقة محدودة
4. منطقة غير محدودة
5. الحل الأمثل
6. القيمة العظمى
7. القيمة الصغرى

1. إيجاد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة معينة .
2. استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتيه.

الاهداف



يبين الجدول أدناه أكبر وأقل عدد للأثواب المنتجة في اليوم الواحد من المقاسين الكبير والصغير، وتكلفة إنتاج كل ثوب منها في أحد المصانع الوطنية.

عدد الأثواب المنتجة في اليوم الواحد			
المقاس	أقل عدد	أكبر عدد	تكلفة إنتاج الثوب
صغير	600	1500	55 ريالاً
كبير	800	1700	70 ريالاً

إذا كان عدد الأثواب المطلوب إنتاجها من المقاسين في اليوم الواحد لا يقل عن 2000 ثوب، فكم ثوباً من كل مقاس يجب إنتاجه لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟

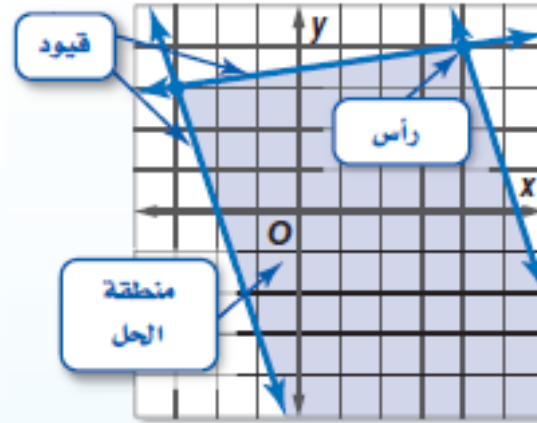
هناك قيود إضافية على إنتاج المصنع ناجمة عن الطلب والشحن وكفاءة المصنع. وللتعبير عن هذه القيود يمكن استعمال أنظمة المتباينات الخطية.

القيمة العظمى والقيمة الصغرى: تواجه المصانع في كثير من الأحيان أوضاعاً ضمن قيود مختلفة وتسعى للوصول إلى أقل تكلفة أو إلى أعلى ربح. مثل هذه الأوضاع يمكن التعامل معها عادة باستعمال البرمجة الخطية.

أسئلة التعزيز

1. ما تكلفة إنتاج 1000 ثوب من المقاس الصغير
2. أيهما أقل تكلفة إنتاج ثوب من المقاس الصغير أم ثوب من المقاس الكبير
3. هل تستطيع الشركة إنتاج 2000 ثوب من المقاس الصغير في اليوم الواحد ، وضح اجابتك ؟

أضف إلى
مطوبتك



إذا كانت منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك **غير محدودة**، ويمكن أن تحتوي على قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

منطقة الحل

مفهوم اساسي

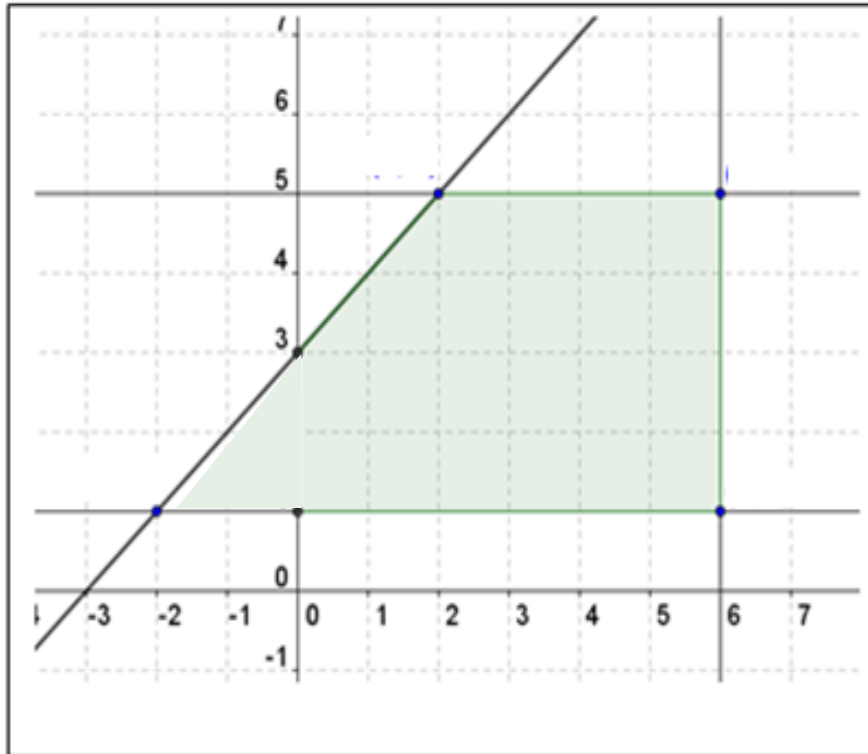


إذا كانت منطقة الحل **محدودة** (مغلقة) أو محصورة بقيود كما في الشكل أعلاه، فإن القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة تظهر دائماً عند رؤوس منطقة الحل.

حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

تحقق من فهمك (1A) صفحة 45

$$f(x, y) = -5x + 2y$$



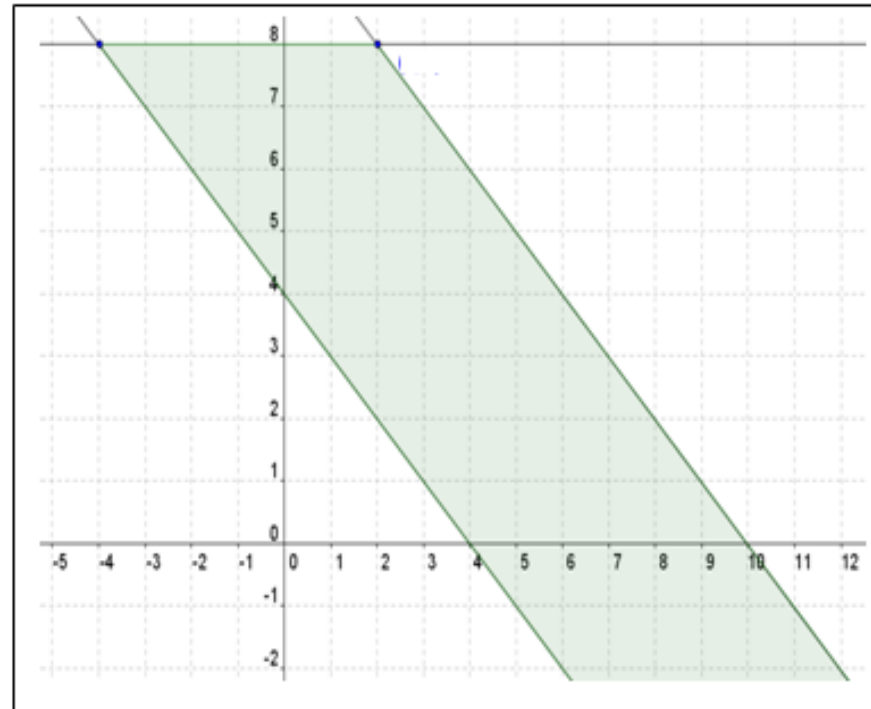
(x, y)	$f(x, y) = -5x + 2y$

إذا نتج عن التمثيل البياني لنظام متبايناتٍ منطقةً مفتوحة وممتدة، فإنها تكون غير محدودة.

منطقة الحل غير المحدودة

تحقق من فهمك

حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:



$$f(x, y) = -6x + 8y$$

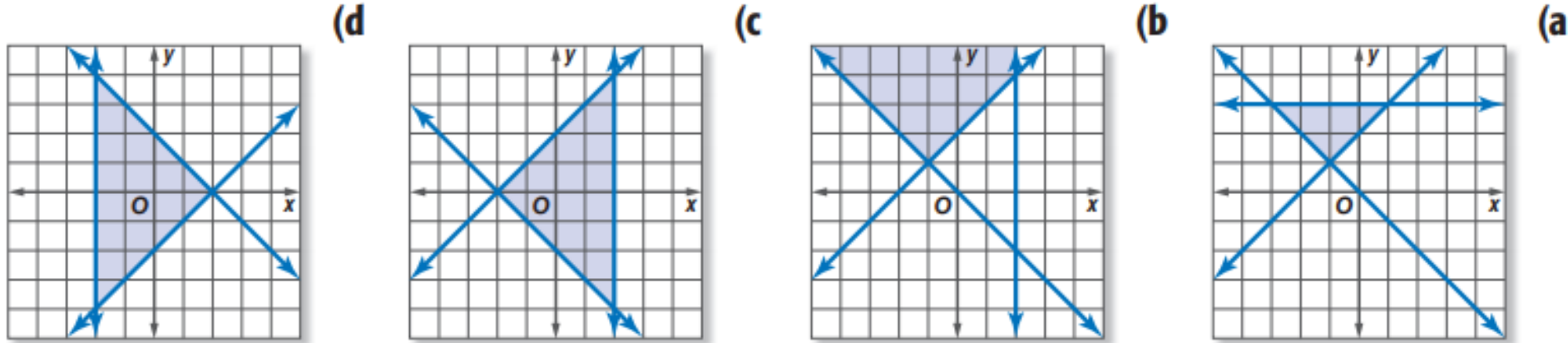
(x, y)	$f(x, y) = -6x + 8y$

تنبيه

القيمة العظمى

لا تفترض عدم وجود قيم عظمى إذا كانت منطقة الحل غير محدودة، بل اختبر قيمة الدالة عند كل رأس؛ لتحديد إذا كان هناك قيمة عظمى أو صغرى.

(23) حدّد نظام المتباينات المختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى فيما يأتي، وضّح إجابتك.



(26) هندسة: أيّ مما يأتي يُعد وصفًا مناسبًا للتمثيل البياني

للمعادلتين $y = 3x - 5$, $4y = 12x + 16$ ؟

A مستقيمان لهما المقطع y نفسه .

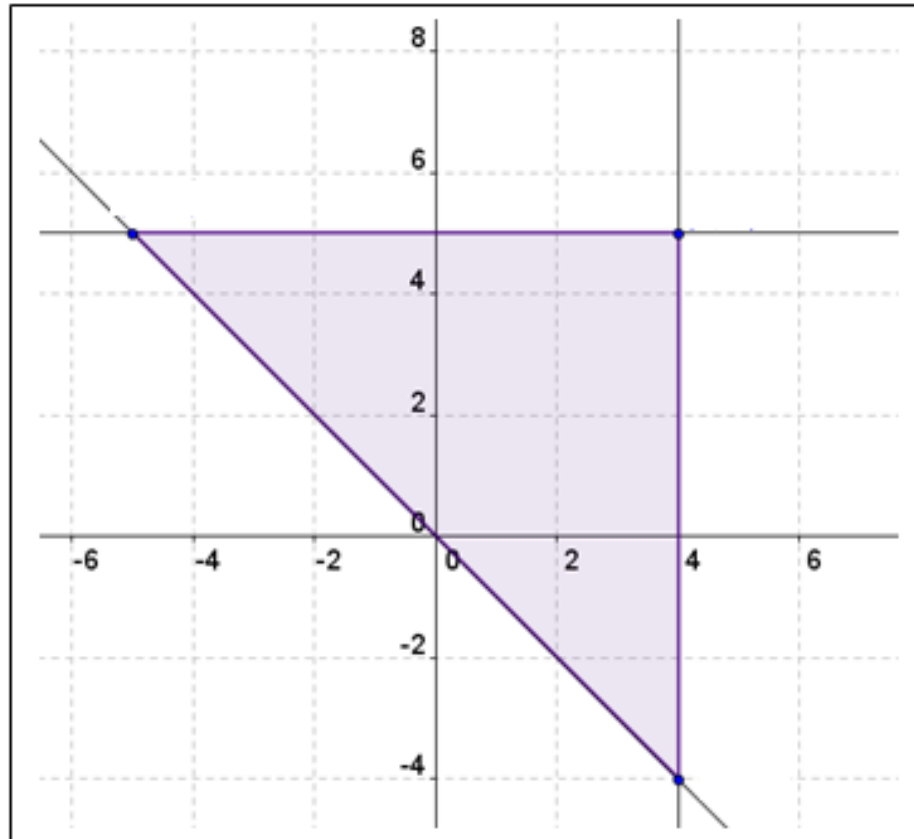
B مستقيمان متعامدان.

C مستقيمان لهما المقطع x نفسه .

D مستقيمان متوازيان.

تدريب على اختبار

حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى
للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

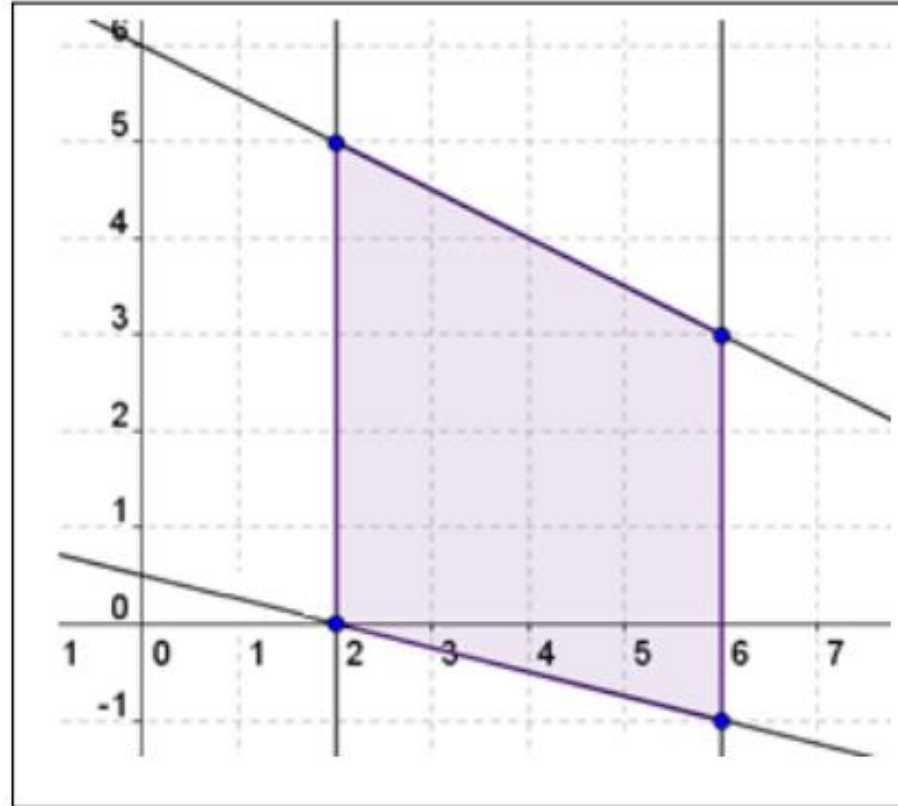


$$f(x, y) = 5x - 2y$$

(x, y)	$f(x, y) = 5x - 2y$

حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

تدرب وحل المسائل



$$f(x, y) = 6x + 7y$$

(x, y)	$f(x, y) = 6x + 7y$

أ.روان القضاة

إيجاد الحل الأمثل: يُسمَّى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح **الحل الأمثل**، ويمكنك الحصول على ذلك الحل باستعمال البرمجة الخطية.

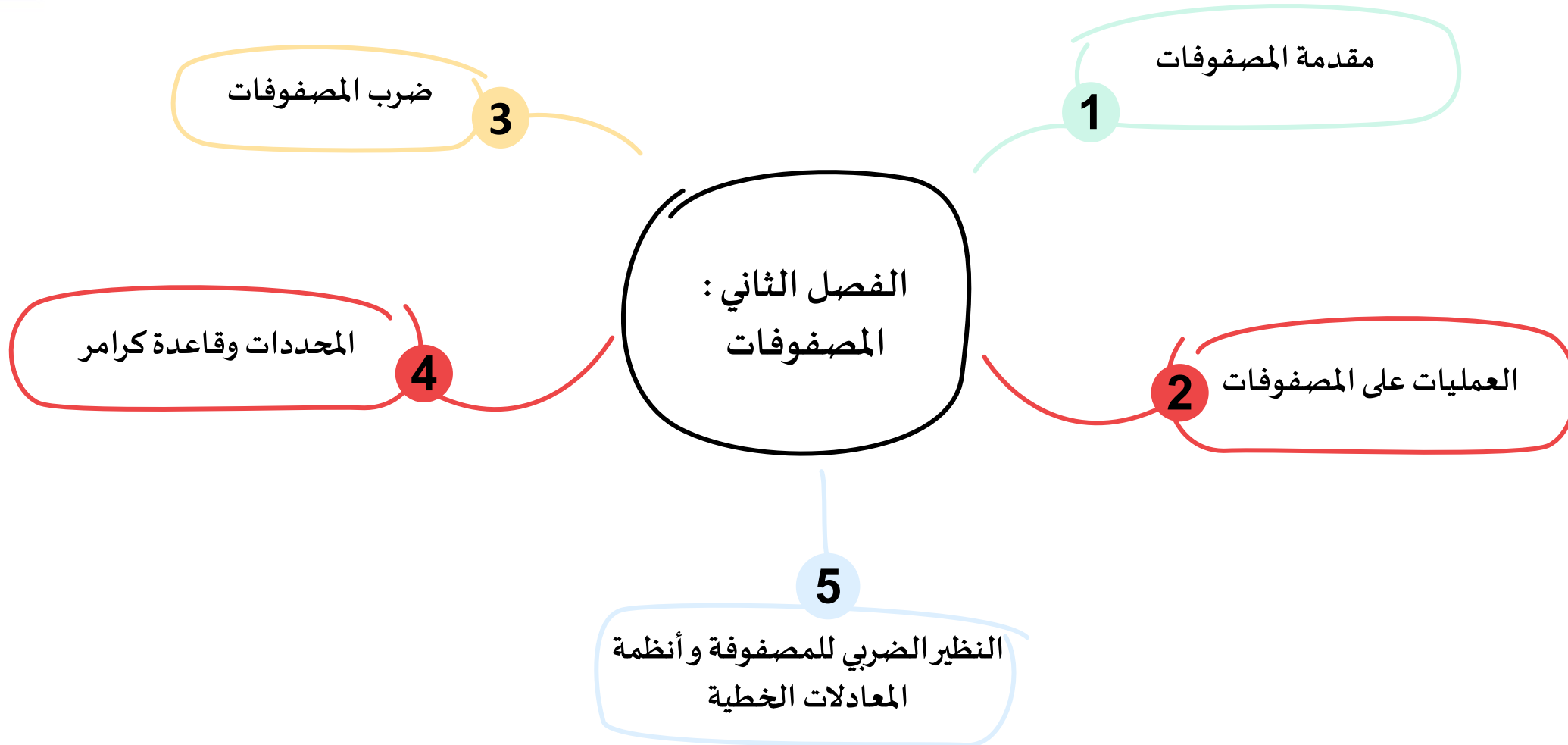
مفهوم اساسي	استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل
الخطوة 1	حدّد المتغيرات.
الخطوة 2	اكتب نظام متباينات خطية يمثل المسألة.
الخطوة 3	مثل نظام المتباينات بيانياً.
الخطوة 4	جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.
الخطوة 5	اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى.
الخطوة 6	عوض إحداثيات الرؤوس في الدالة.
الخطوة 7	اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقاً لما هو مطلوب في المسألة.



(3) **مجوهرات:** تصوغ أسماء من 10 إلى 25 عقدًا، ومن 15 إلى 40 سوارًا شهريًا. فإذا كانت أجرة صياغة العقد 50 ريالًا. وأجرة صياغة السوار 30 ريالًا، وصاغت في أحد الأشهر 30 قطعة من العقود والأساور على الأقل، فكم قطعة من كلا النوعين عليها صياغتها لتحصل على أكبر أجر؟

(17) **صناعة:** ينتج مصنع نوعين من وحدات الإنارة؛ يباع النوع الأول بسعر 25 ريالاً، أما النوع الثاني فيباع بسعر 35 ريالاً. فإذا كانت الطاقة الإنتاجية للمصنع لا تزيد على 450 وحدة إنارة يومياً، وكان على المصنع أن ينتج ما لا يقل عن 100 وحدة إنارة من النوع الأول وما لا يزيد على 200 وحدة إنارة من النوع الثاني، فما عدد وحدات الإنارة اللازم إنتاجها من كل نوع ليكون دخل المصنع اليومي أكبر ما يمكن؟

تدرب وحل المسائل





الدرس الاول

مقدمة في المصفوفات

المفردات

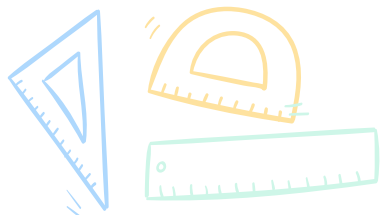
1. المصفوفة
2. العنصر
3. الرتبة
4. مصفوفة الصف
5. مصفوفة العمود
6. المصفوفة المربعة
7. المصفوفة الصفيرية
8. المصفوفات المتساوية

درست حل مسائل باستعمال
تنظيم البيانات في جداول

فيما سبق

1. تنظيم البيانات في مصفوفة .
2. استعمال العمليات على عناصر صفوف أو أعمدة
مصفوفة لتحليل البيانات

الاهداف



هاتف محمول: حصل صالح على عدة عروض لشراء هاتف محمول حسب النوع، وسعة الذاكرة، والسعر. وحتى يكون قادرًا على المقارنة بين العروض بسهولة، نظم البيانات في مصفوفة كما يلي:

النوع	سعة الذاكرة	السعر
العرض الأول	a	512
العرض الثاني	b	512
العرض الثالث	c	256
العرض الرابع	d	128

أسئلة التعزيز

1. ما عدد الصفوف في مصفوفة الهاتف المحمول ؟
2. ما عدد الأعمدة في مصفوفة الهاتف المحمول ؟
3. ما العدد الظاهر في الصف الثالث والعمود 2 ؟

تنظيم البيانات: المصفوفة هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، محصورة بين قوسين. وتُنظم الأعداد أو البيانات في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى. وتُسمى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا**. ويرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال حرف كبير تحته خط مثل \underline{A} و \underline{B} .

ثلاثة صفوف

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

4 أعمدة

العنصر 1- موجود في الصف 2، والعمود 1، ويرمز إليه بالرمز a_{21} .

العنصر 8- موجود في الصف 3، والعمود 2، ويرمز إليه بالرمز a_{32} .

يمكنك تحديد نوع المصفوفة **برتبها**؛ فالمصفوفة المكونة من m صفًا و n عمودًا يقال عنها مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أو من النوع $m \times n$ (تقرأ " m في n "). فالمصفوفة \underline{A} في الأعلى هي مصفوفة من النوع 3×4 أو من الرتبة 3×4 ؛ لأنها تحتوي على 3 صفوف، و 4 أعمدة. ويدل الرمز a_{12} على عنصر في المصفوفة \underline{A} ، على حين يدل الرمز b_{12} على عنصر في المصفوفة \underline{B} .

قراءة الرياضيات

يدل الرمز a_{ij} على
العنصر الواقع في الصف
 i والعمود j من
المصفوفة \underline{A} .

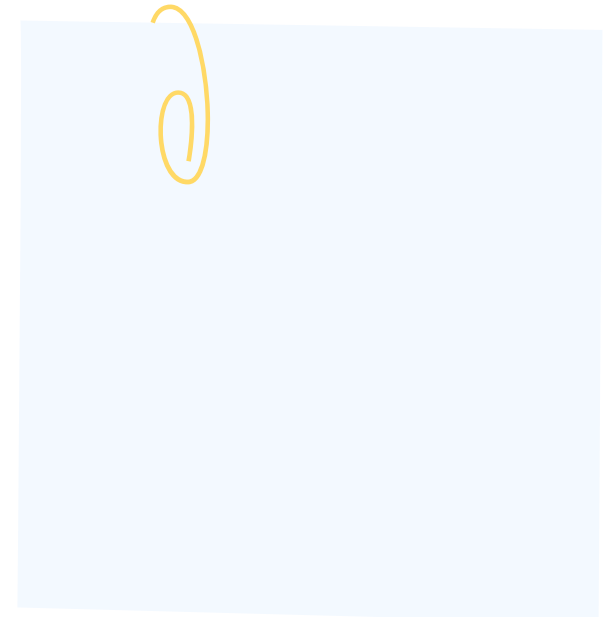
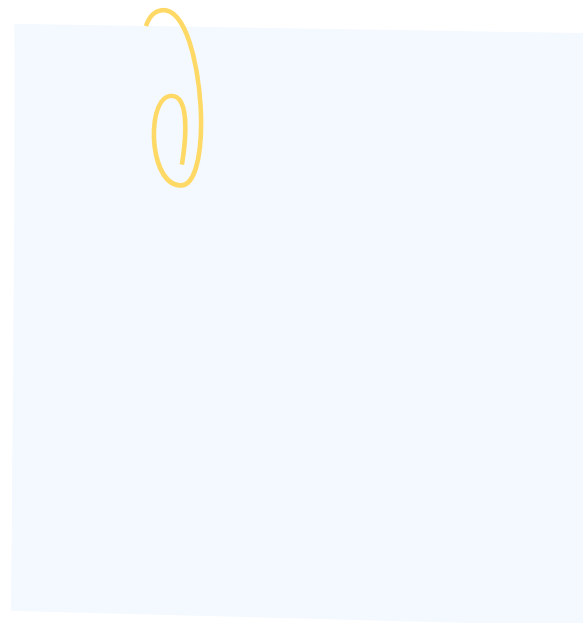
رتبة المصفوفة وعناصرها

تحقق من فهمك

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

(1A) ما رتبة \underline{B} ؟

(1B) ما قيمة b_{32} ؟



بعض المصفوفات لها تسميات خاصة.

المصفوفة الصفيرية
جميع عناصرها أصفار

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المربعة
عدد الصفوف فيها يساوي
عدد الأعمدة.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

مصفوفة عمود
تحتوي عموداً واحداً.

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة صف
تحتوي صفاً واحداً.

$$[8 \quad -5 \quad 2 \quad 4]$$

تكون المصفوفتان متساويتين إذا كانتا من الرتبة نفسها ، وتساوت عناصرهما المتناظرة.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان متساويتان.

ليست جميع العناصر
المتناظرة متساوية.

المصفوفتان لهما رتبتان
مختلفتان.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة

يدل التناظر على
العناصر التي تقع
بالضبط في الموقع
نفسه من كل مصفوفة.

تنظيم البيانات في مصفوفة

تحقق من فهمك

أسعار البيتزا (بالريال)

	كبيرة	وسط	صغيرة
شمار البحر	35	24	13
الخضار	34	23	12
الدجاج	36	25	14
اللحم	37	27	15

(2) **بيتزا:** يبين الجدول المجاور الأسعار بالريال لأربعة أنواع من البيتزا بثلاثة أحجام في أحد المطاعم.

(A) نظم هذه البيانات في مصفوفة A ، على أن تكون الأسعار مرتبة تصاعدياً.

(B) حدد رتبة المصفوفة.

(C) ما قيمة العنصر a_{21} ؟

تحليل البيانات: عند تنظيم البيانات في مصفوفة، يسهل تحليلها وتفسيرها. وتعطي مجاميع عناصر الصفوف أو الأعمدة أحياناً معلومات ذات معنى. وفي أحيان أخرى لا تعطي أي معلومات ذات معنى.

تحقق من فهمك

(3) محافظات: يبين الجدول المجاور عدد المحافظات من الفئتين أ، ب في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة.

عدد المحافظات من الفئتين أ، ب في 4 مناطق مختلفة في المملكة		
المنطقة	محافظه فئة أ	محافظه فئة ب
الرياض	12	8
مكة المكرمة	9	7
المدينة المنورة	4	4
القصيم	5	7

المصدر: المملكة العربية السعودية، حقائق وأرقام، هيئة المساحة الجيولوجية السعودية، 1433 هـ

(A) نظم البيانات في مصفوفة .

(B) اجمع عناصر كل عمود، وفسر النتائج.

(C) اجمع عناصر كل صف، وفسر النتائج.

(D) هل إيجاد معدل عناصر كل صف يعطي بيانات ذات معنى؟

إرشادات للدراسة

عرض البيانات

يكون من الممكن أحياناً
تبديل عناصر الصفوف
وعناصر الأعمدة في
المصفوفات التي تمثل
معلومات من واقع
الحياة.

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

تأكد

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 17 & 21 \end{bmatrix} \quad (3)$$

د

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} \quad (2)$$

د

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & -8 \end{bmatrix} \quad (1)$$

د

$$[115] \quad (14)$$

د

$$\begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

د

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ x & 3y & 0 \\ 8 & 12 & 11 \end{bmatrix} \quad (12)$$

د

تدرب وحل المسائل

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & x & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 5 & -8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل عنصر فيما يأتي:

تأكد

a_{24} (7)

a_{33} (6)

a_{11} (5)

a_{32} (4)

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ x & -5 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي:

تدرب وحل المسائل

a_{21} (24)

b_{12} (23)

b_{21} (22)

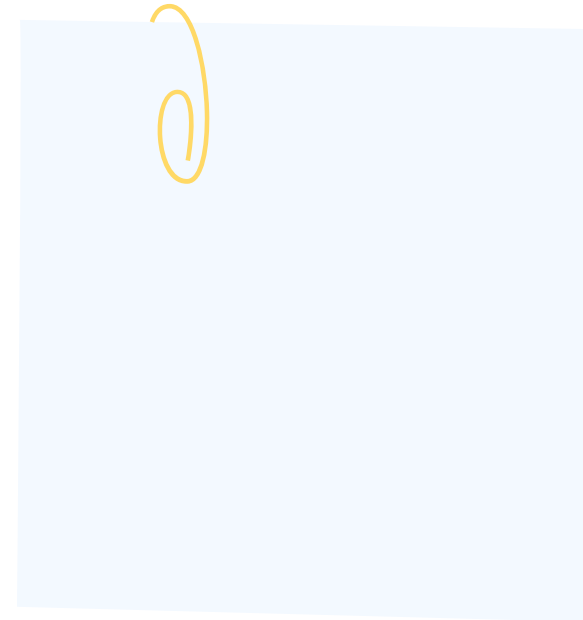
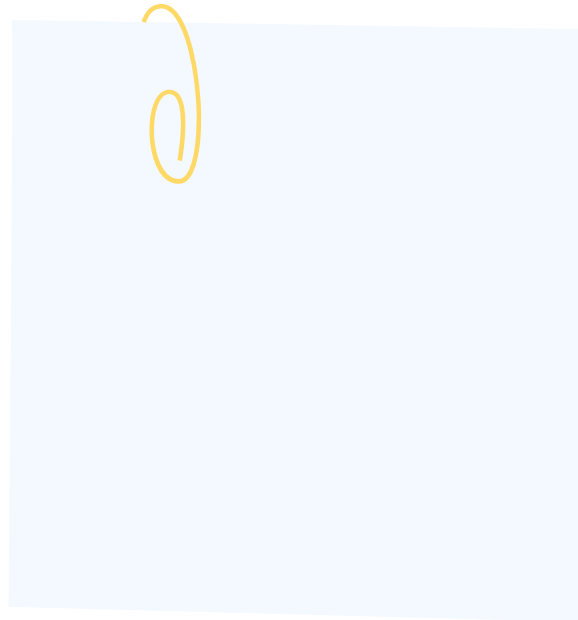
a_{32} (21)

أسعار حديد التسليح (بالريال)		
المقاس	الرياض	جدة
8mm	2410	2455
14mm	2210	2255
16mm	2200	2245

(25) **حديد التسليح:** يبين الجدول المجاور أسعار حديد التسليح حسب تقرير وزارة التجارة في منطقتي الرياض وجدة يوم الثلاثاء 16 مارس 2010 م.

(a) اكتب مصفوفة تمثل البيانات المعطاة.

(b) ما رتبة المصفوفة الناتجة في الفرع a ؟



(33) **اكتشف الخطأ:** حددت كل من ياسمين وسارة العنصر b_{32} في المصفوفة $\underline{B} = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 0 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ ، فهل توصلت إحداهما للحل الصحيح؟ فسّر إجابتك.

سارة

العنصر b_{32} غير موجود في
المصفوفة B ، لأن B
مصفوفة من النوع 2×3 .

ياسمين

قيمة العنصر b_{32}
هي 5.

	مؤيد	ضد
المرشح الأول	1553	771
المرشح الثاني	689	1633
المرشح الثالث	2088	229

(37) مسح: نُظمت نتائج استطلاع للرأي في المصفوفة المجاورة:

بالاعتماد على هذه النتائج، أي استنتاج مما يأتي ليس صحيحًا؟

- A هناك 771 صوتًا ضد المرشح الأول.
- B عدد الأصوات المعارضة للمرشح الأول أكبر من تلك المؤيدة للمرشح الثاني.
- C فرصة المرشح الثاني للفوز ضئيلة.
- D عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الأول أكبر من عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الثالث.



تطوير - إنتاج - توثيق

الدرس الثاني

العمليات على المصفوفات

المفردات

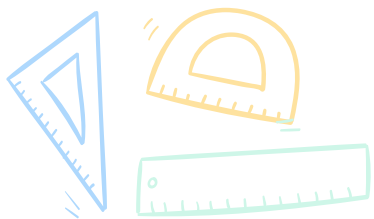
1. جمع مصفوفتين
2. طرح مصفوفتين
3. ضرب المصفوفة في عدد ثابت

درست تنظيم البيانات
في مصفوفات

فيما سبق

1. جمع المصفوفات وطرحها
2. ضرب مصفوفة في عدد ثابت

الاهداف



أروان القضاة

لدى مؤسسة تجارية للمعدات الثقيلة فروع في كل من: الرياض، والشرقية، وجدة، يتبع كلاً منها ثلاثة معارض. وتبين المصفوفات الآتية معدل النفقات والمبيعات الأسبوعية في معارض المناطق الثلاث:

	الرياض		الشرقية		جدة	
	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات	المبيعات	النفقات
المعرض (1)	145000	1900	122000	1700	109500	1050
المعرض (2)	225000	2400	145500	1800	135000	1800
المعرض (3)	290000	2700	160000	1800	150500	1800

- أسئلة التعزيز**
1. ما معدل النفقات اليومي للمعرض 2 في المنطقة الشرقية ؟
 2. ما موقع معدل النفقات اليومية للمعرض الأول في كل مصفوفة ؟
 3. كيف يمكن ان تجد إجمالي المبيعات الأسبوعية للمعارض الثانية في الشركة لجميع المناطق ؟

جمع المصفوفات وطرحها: يمكن جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة نفسها، حيث تجمع العناصر المتناظرة في حالة الجمع، وتطرح في حالة الطرح.

أضف إلى
مطوبتك
مفهوم أساسي

جمع المصفوفات وطرحها

التعبير اللفظي: إذا كانت $\underline{A}, \underline{B}$ مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ فإن $\underline{A} + \underline{B}$ هي مصفوفة أيضاً من الرتبة $m \times n$ ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في \underline{A} و \underline{B} ، وكذلك $\underline{A} - \underline{B}$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أيضاً، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}, \underline{A} - \underline{B} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix}$$

الرموز: لتكن:

فإن:

مثال:

إرشادات للدراسة

إذا كان $\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$
فإن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

جمع المصفوفات وطرحها

تحقق من فهمك

أوجد كلاً مما يأتي إن أمكن:

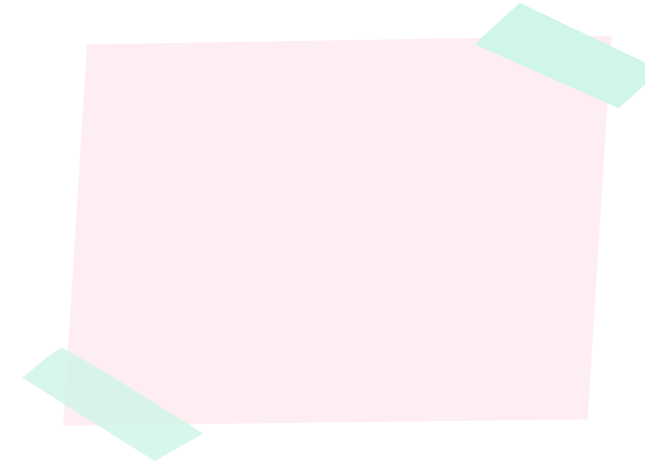
$$\begin{bmatrix} -9 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -3 & 6 \\ -9 & -5 & 18 \end{bmatrix} \quad (1B)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & -7 \end{bmatrix} \quad (1A)$$

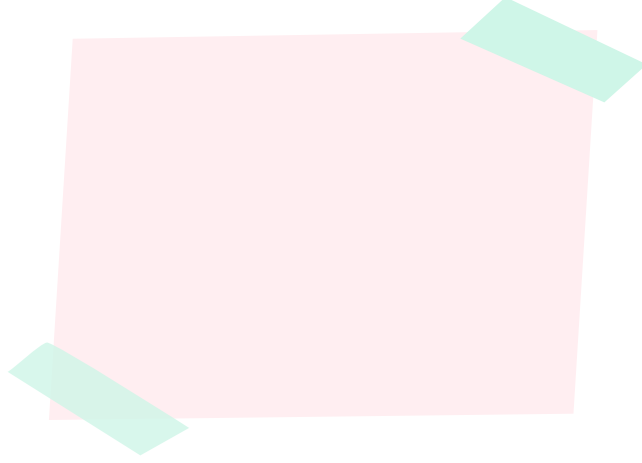
أوجد الناتج في كلِّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

تأكد

$$(1) \begin{bmatrix} -8 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$



$$(3) \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$

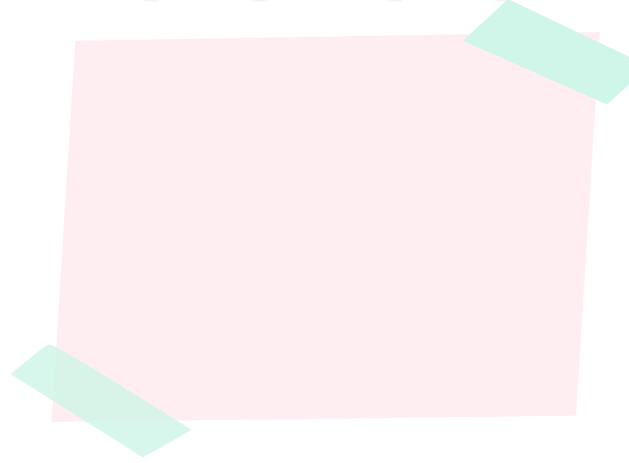


تدرب وحل المسائل

$$(11) \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 12 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$



$$(13) \begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



أ.روان القضاة

الضرب في عدد ثابت: يمكنك ضرب أي مصفوفة في عدد ثابت، وهذا يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الثابت. وتُسمى هذه العملية **ضرب المصفوفة في عدد ثابت**.

مفهوم أساسي أضف إلى مطوبتك

الضرب في عدد ثابت

التعبير اللفظي: حاصل ضرب مصفوفة A من الرتبة $m \times n$ في عدد ثابت k هي مصفوفة kA من الرتبة $m \times n$ وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة A مضروباً في العدد الثابت k

الرموز: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و k عدد ثابت فإن:

$$k \cdot A = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال:

$$-3 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$$

إرشادات للدراسة

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

إذا كان $kA = B$
فإن: $ka_{ij} = b_{ij}$

(2) إذا كانت $T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-4T$

تحقق من فهمك

أوجد الناتج في كل مما يأتي:

$$3 \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \quad (5)$$

تأكد

$$-4 \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -8 \\ 3x \\ -9 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 4 \\ x - 6 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (21)$$

تدرب وحل المسائل

تنطبق كثير من خصائص العمليات التي تُجرى على الأعداد الحقيقية على المصفوفات. وفيما يأتي ملخص لهذه الخصائص:

مفهوم أساسي	خصائص جمع المصفوفات
الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت k :	
الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات	$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$
الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات	$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$
خاصية التوزيع للضرب في عدد	$k(\underline{A} + \underline{B}) = k\underline{A} + k\underline{B}$

يمكنك إجراء عمليات متعددة الخطوات على المصفوفات. وترتيب تلك العمليات شبيه بترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية.

العمليات على المصفوفات

تحقق من فهمك

(3) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -8 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ ، $\underline{B} = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-6\underline{B} + 7\underline{A}$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

تأكد

إذا كانت
فأوجد ناتج كلٍّ مما يلي:

$$4\underline{B} - 2\underline{A} \quad (7)$$

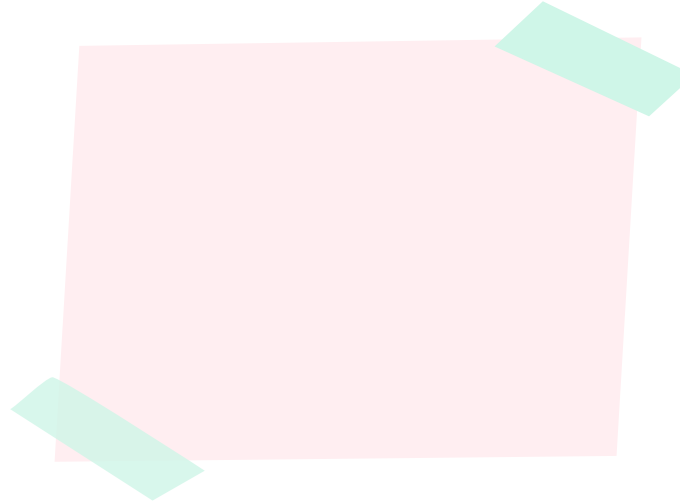
أوجد الناتج في كل مما يأتي:

تدرب وحل المسائل

$$-6 \left(\begin{bmatrix} 6 & 3y \\ 4x+1 & -2 \\ -9 & xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 8 & -7 \\ x+2 & 2x \end{bmatrix} \right) \quad (23)$$

$$-5 \left(\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \right) \quad (22)$$

(31) اكتب: اشرح كيف تجد $4D - 3C$ لأي مصفوفتين D, C لهما الرتبة نفسها.



تدريب على اختبار

(33) رتبة المصفوفة: إذا كانت A, B مصفوفتين من الرتبة 5×3 ، فإن رتبة المصفوفة $A - B$ هي:

3×2 **C**

3×5 **A**

3×3 **D**

5×3 **B**

(12) مشروبات: يبين الجدول المجاور قائمة أسعار المشروبات في مطعم، إذا رفع المطعم أسعار جميع المشروبات بنسبة 50%.

المشروب	صغير	وسط	كبير
غازي	3	4	5
شاي	2	3	4
قهوة	2	3	4
عصير	4	5	6

(a) اكتب المصفوفة C التي تمثل الأسعار الحالية .

(b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب المصفوفة C فيه لإيجاد المصفوفة N التي تمثل الأسعار الجديدة؟

(c) جد المصفوفة N .

(d) جد المصفوفة $N - C$. ماذا تمثل هذه المصفوفة في هذه الحالة؟



الدرس الثالث

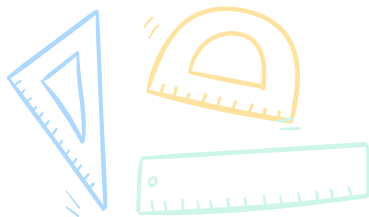
ضرب المصفوفات



تطوير - إنتاج - توثيق

فيما سبق
درست ضرب
المصفوفات بعدد ثابت

الاهداف
1. ضرب المصفوفات
2. استعمال خصائص ضرب المصفوفات



أروان القضاة



نوع القلم	الشهر وعدد الأقلام			
	المحرم	صفر	ربيع 1	ربيع 2
رصاص	153	217	197	249
حبر سائل	12	6	7	8
حبر جاف	82	146	102	158

يبين الجدول المجاور أنواع الأقلام وعددها التي باعتها مكتبة في 4 أشهر متتالية.

إذا علمت أن سعر بيع قلم الرصاص ريال واحد، وقلم الحبر السائل 3 ريالات، وقلم الحبر الجاف ريالان، فإنه يمكنك تلخيص الجدول بمصفوفة عدد الأقلام B ، كما يمكنك التعبير عن مصفوفة سعر بيع كل نوع من الأقلام بالمصفوفة P .

مصفوفة الأسعار P

$$\begin{matrix} \text{قلم الرصاص} & \text{الحبر السائل} & \text{الحبر الجاف} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

مصفوفة عدد الأقلام B

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

وباستعمال ضرب المصفوفات، تجد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

أسئلة التعزيز

1. يبين الجدول أن المكتبة باعت 249 قلم رصاص في شهر 2 فما عدد أقلام الحبر الجاف التي باعتها المكتبة في شهر صفر؟

أ.روان القضاة

2. ما سعر بيع الأقلام في شهر محرم؟

ضرب المصفوفات: يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة \underline{A} ذات الرتبة $m \times r$ في المصفوفة \underline{B} ذات الرتبة $r \times t$ ، فإن الناتج هو المصفوفة \underline{AB} ذات الرتبة $m \times t$.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$

$m \times r$ $r \times t$ $m \times t$
 متساويان
 رتبة AB

إرشادات للدراسة

رمز المصفوفة

أحياناً تكتب $\underline{A}_{m \times n}$
لتعبر عن مصفوفة \underline{A}
رتبتها $m \times n$.

تحقق من فهمك

رتبة مصفوفة ناتج الضرب

هل يمكن إيجاد $\underline{A} \cdot \underline{B}$ في كلِّ مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

$$\underline{A}_{3 \times 2} \cdot \underline{B}_{3 \times 2} \quad (1B)$$

$$\underline{A}_{4 \times 6} \cdot \underline{B}_{6 \times 2} \quad (1A)$$

أروان القضاة

حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإن كانت معرفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

تأكد

(1) $\underline{A}_{2 \times 4} \cdot \underline{B}_{4 \times 3}$

(2) $\underline{C}_{5 \times 4} \cdot \underline{D}_{5 \times 4}$

تدرب وحل المسائل

(16) $\underline{A}_{5 \times 5} \cdot \underline{B}_{5 \times 5}$

(17) $\underline{M}_{3 \times 1} \cdot \underline{N}_{2 \times 3}$

يمكنك إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين بضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم جمع النواتج.

أضف إلى
مطوياتك
ضرب المصفوفات
مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة \underline{AB} هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة \underline{A} ، بعناصر العمود r من المصفوفة \underline{B} بالترتيب.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{AB}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \quad \text{الرموز:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 7 & 2 \times 6 + 3 \times 8 \\ 1 \times 5 + 4 \times 7 & 1 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix} \quad \text{مثال:}$$

(2) إذا كانت $\underline{U} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{V} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ فأوجد \underline{UV} .

أ.روان القضاة

أوجد الناتج في كلِّ مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

[illegible]

[illegible]

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

تدرب وحل المسائل

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot [-3 \quad -1] \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & -9 \\ 2 & 8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (26)$$

خصائص ضرب المصفوفات: تذكر أن خصائص جمع الأعداد الحقيقية تبقى صحيحة أيضًا عند جمع المصفوفات، إلا أن بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائمًا عند ضرب المصفوفات.



اختبار الخاصية الإبدالية

تحقق من فهمك

(4) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, $\underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، فهل $\underline{AB} = \underline{BA}$ ؟

(5) إذا كانت $\underline{R} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\underline{S} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $\underline{T} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ فحدّد ما إذا كانت المعادلة

$(\underline{S} + \underline{T})\underline{R} = \underline{S}\underline{R} + \underline{T}\underline{R}$ صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا.

تأكد

إذا كانت $\underline{X} = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$, $\underline{Y} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$, $\underline{Z} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$ فحدّد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا:

$$\underline{X}(\underline{Y}\underline{Z}) = (\underline{X}\underline{Y})\underline{Z} \quad (14)$$

$$\underline{X}\underline{Y} = \underline{Y}\underline{X} \quad (13)$$

[illegible]This image shows a full page of graph paper. It features a light blue background. A single vertical red line runs down the left side, creating a margin. The rest of the page is filled with evenly spaced horizontal blue lines. There are no other markings or text on the page.

أضف إلى

مطوبتك

خصائص ضرب المصفوفات

مفهوم أساسي

تُعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ ، ولأي عدد k ، على أن تكون عمليتا ضرب أو جمع أيٍّ منها معرفتين:

$$(\underline{AB})\underline{C} = \underline{A}(\underline{BC})$$

$$k(\underline{AB}) = (k\underline{A})\underline{B} = \underline{A}(k\underline{B})$$

$$\underline{C}(\underline{A} + \underline{B}) = \underline{CA} + \underline{CB}$$

$$(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{AC} + \underline{BC}$$

الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات

الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات في عدد

خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات

خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات

(34

تنسيق زهور:

الزهور	سعر الشراء	سعر البيع
جوري	0.50 ريال	3.00 ريالات
نرجس	1.5 ريال	6 ريالات
زنابق	2 ريال	7 ريالات

(b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي حصل عليه صاحب المحل من بيع الزهور .

(c) أوجد مقدار ربح المحل من بيع الزهور.

[illegible]

(43) **تبرير:** إذا كانت رتبة المصفوفة \underline{AB} هي 5×8 ، ورتبة المصفوفة \underline{A} هي 5×6 ، فما رتبة المصفوفة \underline{B} ؟



تطوير - إنتاج - توليق

تدريب على اختبار

(49) **رتبة المصفوفة:** ما رتبة المصفوفة الناتجة عن عملية الضرب الآتية؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

1×4 **A**

3×3 **B**

4×1 **C**

4×3 **D**



تطوير - إنتاج - توثيق

الدرس الرابع

المحددات وقاعدة كرامر

المفردات

1. المحددة
2. محددة الدرجة الثانية
3. محددة الدرجة الثالثة
4. قاعدة الاقطار
5. مصفوفة المعاملات
6. قاعدة كرامر

درست حل أنظمة من
المعادلات جبريا

فيما سبق

1. حساب المحددات
2. حل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر

الاهداف

أ.روان القضاة





لتحديد الإقليم الذي يعيش فيه أحد النمور، يقوم عالم
حيوانات بتتبعه بواسطة جهاز GPS، وبعد عدة أيام، حدّد
العالم أن الإقليم مثلث الشكل. ويمكنه بعد تحديد
إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات
والمحدّدات لمعرفة مساحتها.

أسئلة التعزيز

1. ما الطريقة التي تعرفها سابقا لإيجاد مساحة مثلث ؟
2. لماذا يصعب استعمال الصيغة السابقة في هذه الحالة ؟

المحددات: كل مصفوفة مربعة لها **محددة**، وتسمى **محددة المصفوفة** من النوع 2×2 **محددة الدرجة الثانية**.

مفهوم أساسي **محددة الدرجة الثانية** **أضف إلى مطويتك**

التعبير اللفظي: يرمز لمحددة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحاً منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرموز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$ القطر الرئيس

مثال: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$

قراءة الرياضيات

المحددات:

يرمز لمحددة المصفوفة

A بالرمز |A|

تحقق من فهمك

محددة الدرجة الثانية

أوجد قيمة كل محددة فيما يأتي:

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} \quad (1B)$$

$$\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} \quad (1A)$$

أروان القضاة

أوجد قيمة كل محدّدة مما يأتي:

تدرب وحل المسائل

$$\begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad (16)$$

تأكد

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \quad (1)$$

تُسمى محدّدات المصفوفات من الرتبة 3×3 **محدّدات الدرجة الثالثة**. ويمكنك حساب هذه المحدّدات باستعمال **قاعدة الأقطار** أو باستعمال محدّدة المصفوفة 2×2 .

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

حساب محدّدة المصفوفة 3×3

الطريقة الأولى: باستعمال قاعدة الأقطار

a	b	c	a	b
d	e	f	d	e
g	h	i	g	h

a	b	c	a	b
d	e	f	d	e
g	h	i	g	h

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدّدة.

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبيّنة ثم اجمع.

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبيّنة ثم اجمع.

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحدّدة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2.

الطريقة الثانية: باستعمال محدّدة المصفوفة 2×2 .

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

إرشادات للدراسة

قاعدة الأقطار

يمكن استعمال
قاعدة الأقطار فقط
للمصفوفات من الرتبة
 3×3 .

حساب محدّدة المصفوفة 3×3

تحقق من فهمك

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad (2B)$$

أروان القضاة

أوجد قيمة كل محدّدة مما يأتي:

تدرب وحل المسائل

$$\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 9 \end{vmatrix} \quad (21)$$

أ.روان القضاة

تأكد

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \quad (9)$$

تستعمل المحدّات أيضًا لإيجاد مساحة المثلث. فإذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة، فيمكنك استعمال الصيغة أدناه لإيجاد مساحة المثلث.

أضف إلى
مطوبتك

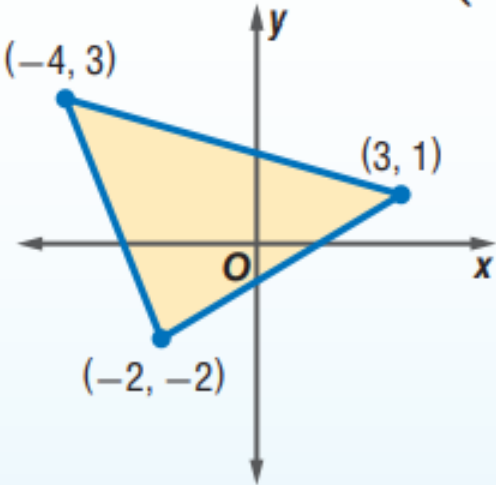
مساحة المثلث

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(a, b), (c, d), (e, f)$ هي القيمة المطلقة للمقدار A ، حيث:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

مثال: مساحة المثلث في الشكل المجاور هي:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$


إرشادات للدراسة

صيغة المساحة

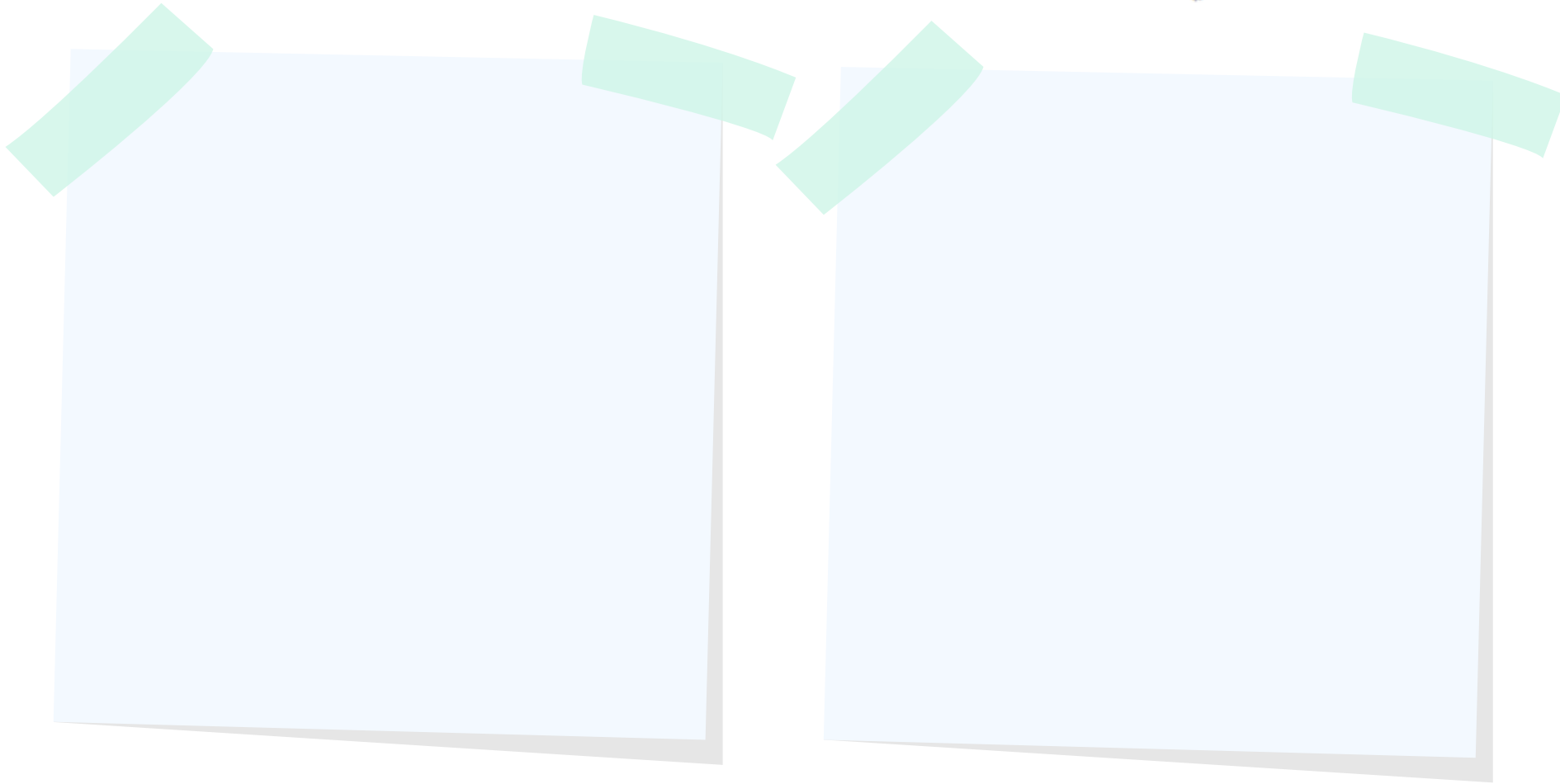
لاحظ أنه يجب أن تستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى تضمن أن المساحة غير سالبة.

إرشادات للدراسة

مساحة المثلث

لا تختلف قيمة مساحة المثلث باختلاف ترتيب الرؤوس في المحدّة، أو بتبديل الصفوف فيها.

(3) خرائط: يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها، فإذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي: $(3, 15)$, $(6, 4)$, $(11, 9)$ ، بحيث تمثل كل وحدة على الخريطة 0.5km . فما مساحة المنطقة المثلثة التي يقفون عند رؤوسها؟

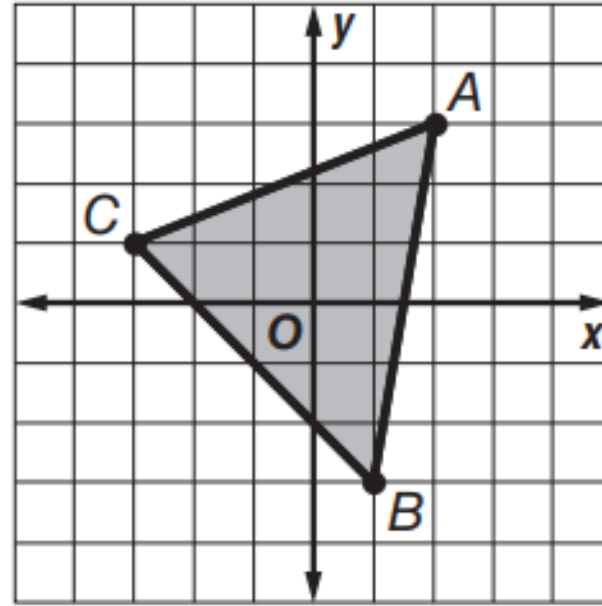




جغرافيا: استعمل الخريطة الإحداثية المجاورة، التي تظهر منطقة مثلث برمودا، للإجابة عما يأتي:

(a) احسب مساحة منطقة مثلث برمودا على الخريطة.

(b) إذا كان طول كل وحدة على الخريطة تمثل 175 ميلاً في الواقع، فأوجد مساحة منطقة مثلث برمودا الحقيقية.



(36) أوجد مساحة المثلث
المبين في الشكل المجاور.

A 10 وحدات مربعة

B 14 وحدة مربعة

C 12 وحدة مربعة

D 16 وحدة مربعة

تسمى المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام **مصفوفة المعاملات**.

قاعدة كرامر: يمكنك استعمال المحددات لحل أنظمة معادلات، فإذا كانت قيمة المحددة لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفراً، فإن للنظام حلاً وحيداً. وإذا كانت قيمة المحددة صفراً، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول أو لا حل له، وهناك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تسمى **قاعدة كرامر**.

إرشادات للدراسة

قاعدة كرامر

عندما تكون قيمة
محددة مصفوفة
المعاملات C صفراً،
فإنه لا يكون للنظام حل
وحيد.

إرشادات للدراسة

المحددات

تستعمل المحددات
لتحديد ما إذا كان لنظام
من المعادلات الخطية
حل وحيد أم لا.

أضف إلى

مطوبتك

مفهوم أساسي

قاعدة كرامر

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام
حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$ ، $ax + by = m$
 $fx + gy = n$

فإن حل هذا النظام هو $x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$8x - 5y = 70 \quad (4B)$$

$$9x + 7y = 3$$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

تأكد

$$4x - 5y = 39 \quad (12)$$

$$3x + 8y = -6$$

أ.روان القضاة

يمكنك استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات أيضًا.

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} ax + by + cz = m \\ fx + gy + hz = n \\ jx + ky + \ell z = p \end{matrix} \quad \text{حيث}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$$

فإن حل هذا النظام هو

وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

حل نظام من ثلاث معادلات

تحقق من فهمك

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$6x + 5y + 2z = -1 \quad (5B)$$

$$-x + 3y + 7z = 12$$

$$5x - 7y - 3z = -52$$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

$$3a - 5b - 9c = 17 \quad (28)$$

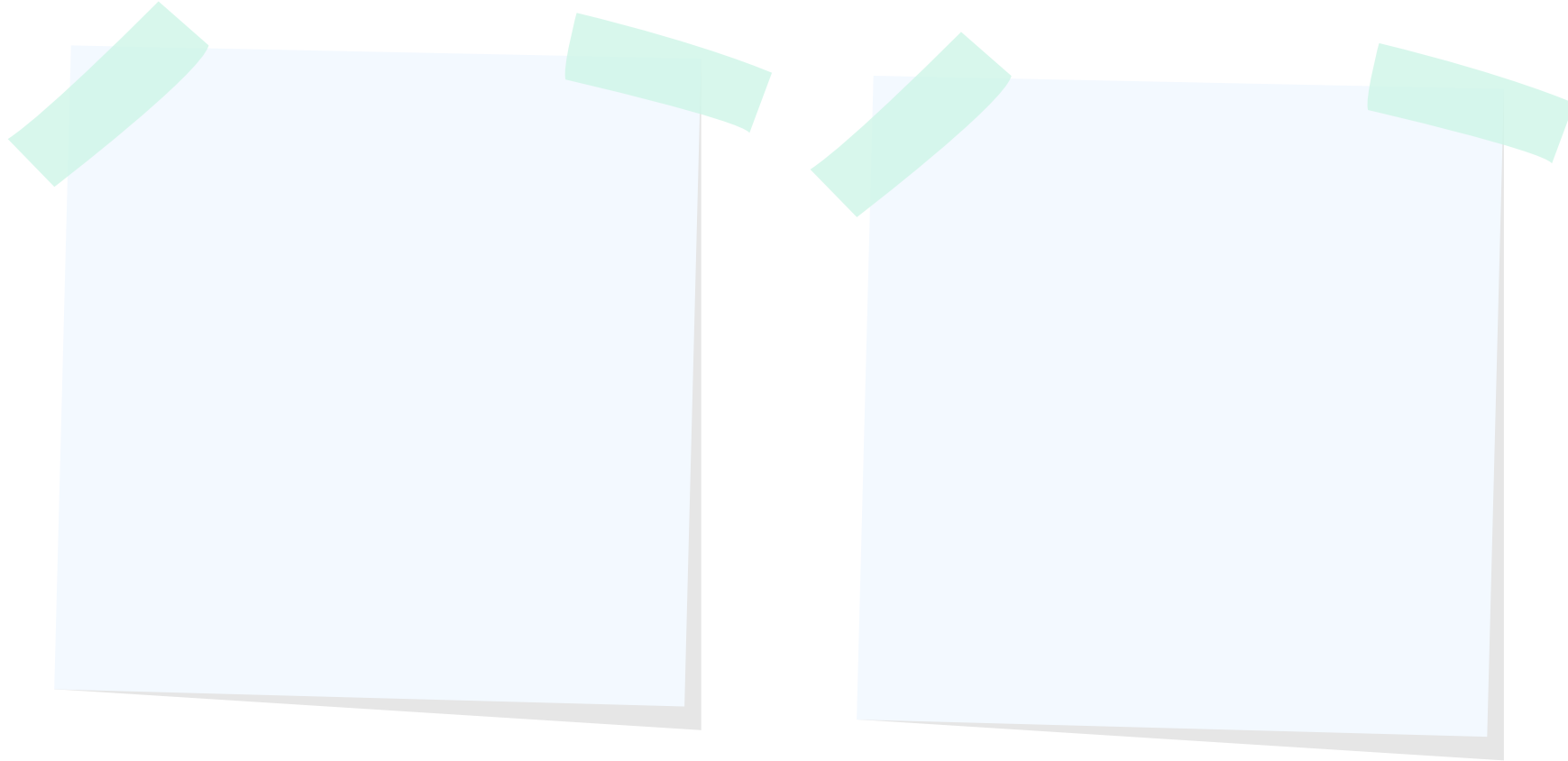
$$4a - 3c = 31$$

$$-5a - 4b - 2c = -42$$



(32) **تحذ:** أوجد قيمة محدّدة مصفوفة من النوع 3×3 ، على أن تكون عناصرها على النحو الآتي:

$$a_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } m + n \text{ زوجياً} \\ m + n & \text{إذا كان } m + n \text{ فردياً} \end{cases}$$



أ.روان القضاة



الدرس الخامس

النظير الضربي وأنظمة المعادلات المصفوفية

درست حل نظام
معادلات خطية جبريا

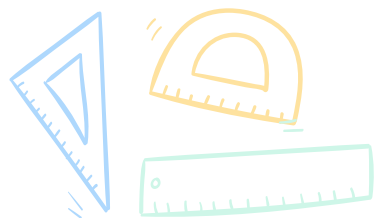
فيما سبق

المفردات

1. مصفوفة الوحدة
2. النظير الضربي للمصفوفة
3. المعادلة المصفوفية
4. مصفوفة الثوابت
5. مصفوفة المتغيرات

1. ايجاد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2×2
2. كتابة معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وحلها

الاهداف





يبين الشكل المجاور أسعار وجبة الغداء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة، وعلبة المقبلات، وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات w, s, d التي تحقق المساواة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

حيث w تمثل سعر الشطيرة، و s تمثل سعر علبة المقبلات، و d تمثل سعر علبة العصير.

أسئلة التعزيز

1. ما الذي تم التعبير عنه بالعدد 3 في المصفوفة الأولى ؟
2. ما رتبة مصفوفة ناتج ضرب المصفوفة 3×3 في المصفوفة 3×1 ؟

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي: تذكر أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلٌّ منهما نظيراً ضربياً للآخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب. وكذلك الحال في المصفوفات، فإن **مصفوفة الوحدة** هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي واحداً، والباقي أصفار.

مصفوفة وحدة من النوع 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أضف إلى
مطوبتك
المصفوفة المحايدة لعملية الضرب
مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب ورمزها I هي مصفوفة الوحدة، والتي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

لأي مصفوفة مربعة A لها رتبة مصفوفة الوحدة I نفسها،
فإن $A \cdot I = I \cdot A = A$.

الرموز: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، و $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مثال: $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

إذا كانت المصفوفتان \underline{A} , \underline{B} مربعيتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $\underline{AB} = \underline{BA} = \underline{I}$ فإن المصفوفة \underline{B} تُسمى **نظيراً ضربياً للمصفوفة \underline{A}** ، وكذلك تُسمى المصفوفة \underline{A} نظيراً ضربياً للمصفوفة \underline{B} . وإذا كان للمصفوفة \underline{A} نظير ضربى فإنه يرمز إليه بالرمز \underline{A}^{-1} ، حيث $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I}$

إرشادات للدراسة

التحقق من النظير الضربى

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.

التحقق من النظير الضربى

تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيراً ضربياً للأخرى أم لا فيما يأتي:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (1)$$

حدّد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى أم لا فيما يأتي:

تدرب وحل المسائل

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \underline{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

تأكد

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

يمكنك استعمال المحدّات؛ لإيجاد النظير الضربي لمصفوفة ما.

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2×2

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ وذلك إذا كانت $|\underline{A}| \neq 0$.

لاحظ أنه إذا كانت قيمة محدّدة مصفوفة ما تساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربي.

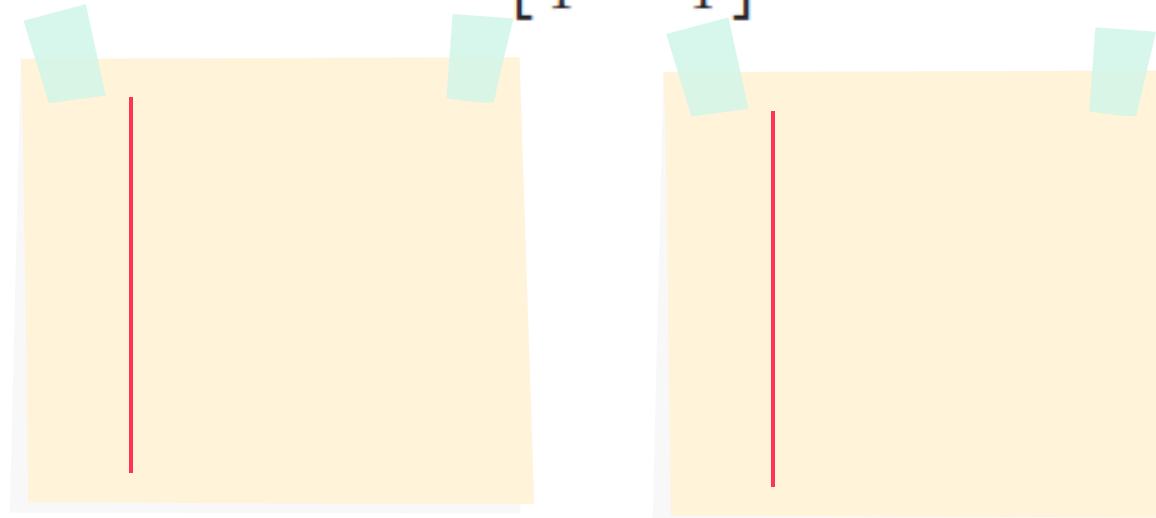
إرشادات للدراسة

لاحظ تبديل موضعي
عنصري القطر
الرئيس، وتغيير إشارتي
عنصري القطر الآخر
عند حساب \underline{A}^{-1} .

تحقق من فهمك

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد: $\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad (2A)$



تحقق من فهمك

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad (2B)$$

إرشادات للدراسة

خطوات إيجاد النظير

الضربي للمصفوفة \underline{A}

من الرتبة 2×2 .

(1) أوجد قيمة $|\underline{A}|$ ، فإذا

كان $|\underline{A}| = 0$ ، فإنه

ليس للمصفوفة \underline{A} نظير

ضربي، وإذا كان

$|\underline{A}| \neq 0$ ، فإن

للمصفوفة \underline{A} نظيراً

ضربياً نجده كما في

الخطوات 4 - 2.

(2) بادل بين موضعي

عنصري القطر الرئيس.

(3) غير إشارتي عنصري

القطر الآخر.

(4) اضرب المصفوفة

الناتجة بعد إجراء

الخطوتين 3، 2 في

العدد $\frac{1}{|\underline{A}|}$ ،

فتحصل على \underline{A}^{-1} .



أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

تدرب وحل المسائل

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

تأكد

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

المعادلات المصفوفية: يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلاً، يمكنك كتابة معادلة مصفوفية لحل نظام معادلتين خطيتين:

$$\begin{cases} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} ax + by \\ fx + gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

ويمكنك التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات

مصفوفة المتغيرات

المتغيرات في النظام فقط

مصفوفة الثوابت

الثوابت في النظام فقط

المعادلات المصفوفية

يمكنك استعمال هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات A نظير ضربي، أما إذا لم يكن لها نظير ضربي، فيمكن أن يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول، أو لا يوجد له حل.

ثم حل المعادلة المصفوفية بالطريقة نفسها التي تحل بها أي معادلة أخرى من الشكل $ax = b$.

$$\begin{aligned} \underline{A} \underline{X} &= \underline{B} \\ \underline{A}^{-1} \underline{A} \underline{X} &= \underline{A}^{-1} \underline{B} \end{aligned}$$

$$\underline{I} \underline{X} = \underline{A}^{-1} \underline{B}$$

$$\underline{X} = \underline{A}^{-1} \underline{B}$$

المعادلة
اضرب كل طرف في النظير الضربي
لمصفوفة المعاملات إن وجد

$$\underline{A}^{-1} \underline{A} = \underline{I}, \left(\frac{1}{a}\right)a = 1$$

$$\underline{I} \underline{X} = \underline{X}, 1x = x$$

$$\begin{aligned} ax &= b \\ \left(\frac{1}{a}\right)ax &= \left(\frac{1}{a}\right)b \end{aligned}$$

$$1x = \frac{b}{a}$$

$$x = \frac{b}{a}$$

لاحظ أن حل المعادلة المصفوفية من الشكل $\underline{A} \underline{X} = \underline{B}$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

أروان القضاة

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

تأكد

$$(6) \quad -2x + y = 9$$

$$x + y = 3$$

أ.روان القضاة

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام إن أمكن فيما يأتي:

تدرب وحل المسائل

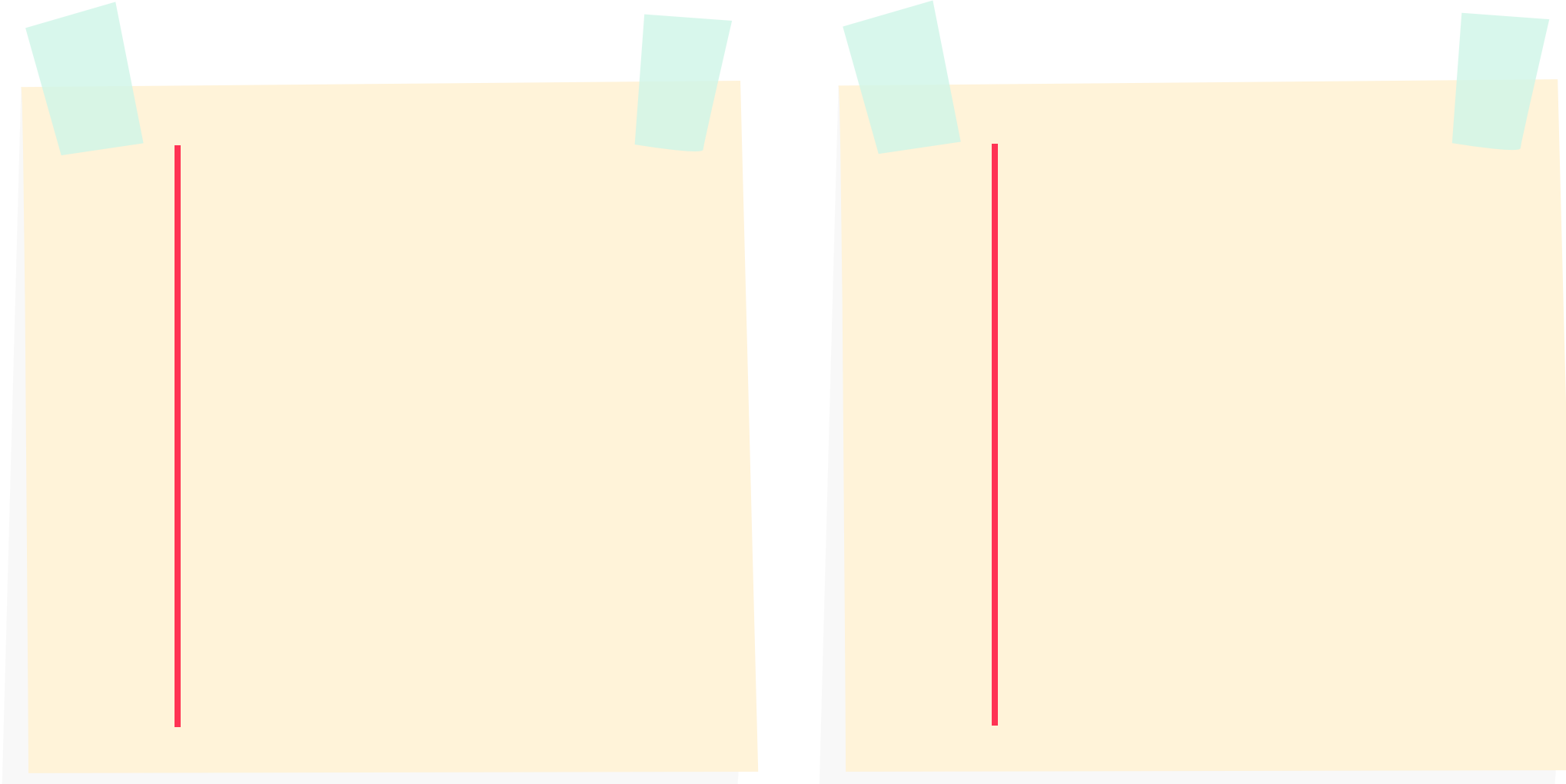
$$3x + y = 3 \quad (21)$$

$$5x + 3y = 6$$

أ.روان القضاة

(3) كتب: أنفقت عائشة في معرض للكتب 190 ريالاً لشراء 3 نسخ من كتاب علمي، و 4 نسخ من كتاب ثقافي. في حين أنفقت فاطمة 340 ريالاً لشراء 3 نسخ من الكتاب العلمي نفسه و 10 نسخ من الكتاب الثقافي نفسه، فإذا كان سعر النسخة من الكتاب العلمي هو (x) ، ومن الكتاب الثقافي هو (y) ، فما سعر الكتاب العلمي؟

(16) مشتريات: دفع سعد 225 ريالاً لشراء 5 أقلام حبر جافة و 6 أقلام حبر سائلة، بينما دفع ماجد 120 ريالاً لشراء 3 أقلام جافة من النوع نفسه و 3 أقلام سائلة من النوع نفسه. فإذا كان سعر القلم الجاف x . وسعر القلم السائل y ، فاستعمل معادلة مصفوفية؛ لإيجاد سعر القلم الجاف.



(27) **اكتشف الخطأ:** أنشأت كل من هاجر وفاطمة معادلة مصفوفية لنظام المعادلتين $5x + 7y = 19, 3y + 4x = 10$. فهل حل أحدهما أو كليهما صحيح؟ فسّر إجابتك.

فاطمة

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

هاجر

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

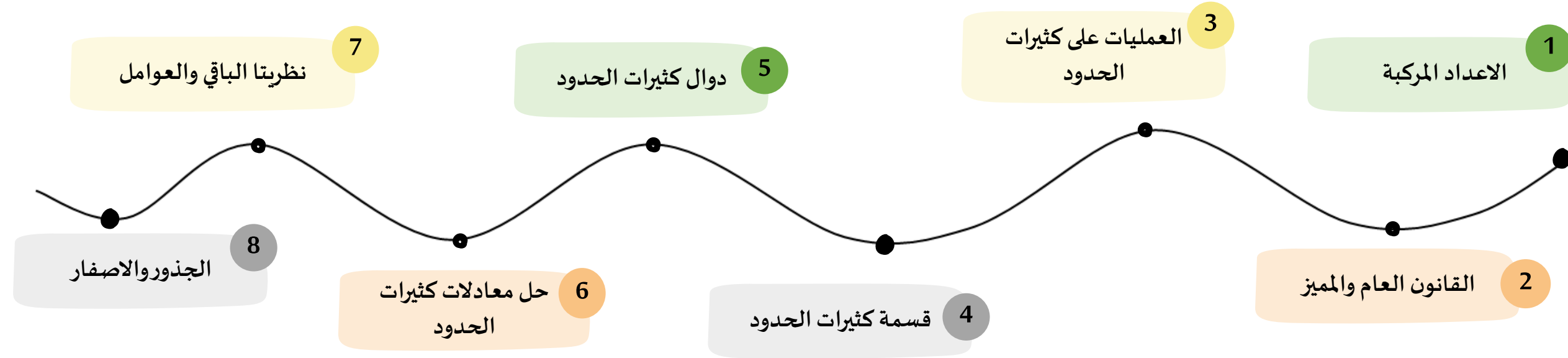
أ.روان القضاة

(32) **إجابة قصيرة:** تباع مكتبة 3 أحجام من الدفاتر: حجم صغير بسعر 2 ريال، وحجم متوسط بسعر 3 ريالات، وحجم كبير بسعر 4 ريالات، فإذا باعت المكتبة 52 دفترًا في أحد الأشهر، وكان عدد الدفاتر المباعة من الحجم المتوسط يزيد على عدد الدفاتر المباعة من الحجم الصغير بـ 7 دفاتر، وكان إجمالي المبيعات 150 ريالاً. فما عدد الدفاتر المباعة من الحجم المتوسط؟

A 11 B 17 C 24 D 36

الفصل الثالث :
كثيرات الحدود ودوالها

تنبيه: كل الحقوق محفوظة ، نسخة الكترونية مجانية لا تباع عند إزالة شعار المجموعة أو اسم المؤلفه سوف يعرضك للمسائلة القانونية .





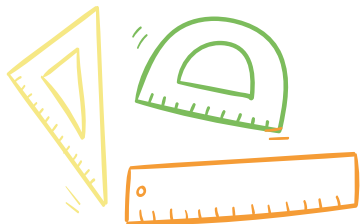
الدرس الاول الاعداد المركبة

درست تبسيط الجذور التربيعية
فيما سبق

- المفردات
1. الوحدة التخيلية
 2. العدد التخيلي البحت
 3. العدد المركب
 4. المركبان المترافقان

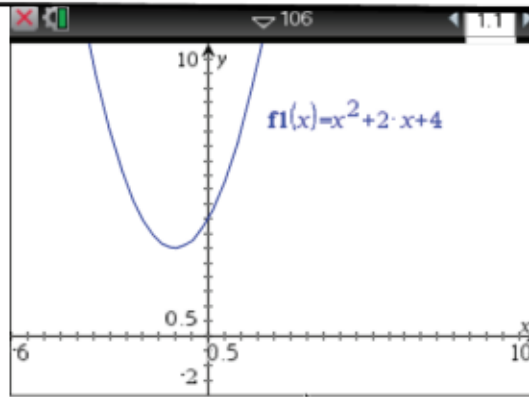
الاهداف

1. اجراء العمليات على الاعداد التخيلية البحتة
2. اجراء العمليات على الاعداد المركبة

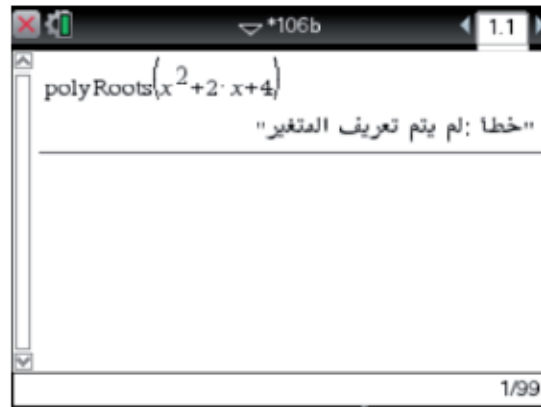


أروان القضاة





$[-6, 10]$ scl: 0.5 by $[-2, 10]$ scl: 0.5



بالنظر إلى الشكل المجاور، تلاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ لا يقطع المحور x ، ولذا فليس للمعادلة جذور حقيقية. فهل يعني ذلك أنه ليس للمعادلة حلول؟

للتأكد من ذلك استعمل الآلة الحاسبة بالضغط على مفتاح on ومنها اختر **1** مستند جديد ثم اختر **1**: إضافة تطبيق الحاسبة ثم اضغط menu واختر منها

3: العمليات الجبرية **3**: أدوات كثيرات الحدود **2**: الجذور الحقيقية لكثيرات الحدود

ثم أدخل $x^2 + 2x + 4$ واضغط enter enter فيظهر على الشاشة كلمة خطأ، وهذا يعني أنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة، ولكن هناك حلول تخيلية.

أسئلة التعزيز

1. ما عند أي نقاط من التمثيل البياني على مستوى الاحداثي تكون $y=0$ ؟

2. كيف ترتبط الدالة $y = x^2 + 2x + 4$ بالمعادلة $x^2 + 2x + 4 = 0$ ؟

الأعداد التخيلية البحتة: قادت المعادلات "كالمعادلة السابقة" الرياضيين إلى تعريف الأعداد التخيلية،

ووحدها التخيلية i ، حيث تعرف **الوحدة التخيلية i** على أنها الجذر التربيعي الموجب للعدد -1 ، وبعبارة أخرى فإن: $i = \sqrt{-1}$ ، وهذا يعني أن $i^2 = -1$

والأعداد على الصورة $i\sqrt{3}$ ، $-2i$ ، $6i$ ، تسمى **أعدادًا تخيلية بحتة**، وهي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة.

لأي عدد حقيقي موجب مثل b ، فإن $\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1} = bi$.

تحقق من فهمك

الجذور التربيعية للأعداد السالبة

بسّط كلّ ممّا يأتي:

(1A) $\sqrt{-18}$

(1B) $\sqrt{-125}$

تحقق الأعداد التخيلية البحتة كلاً من الخاصيتين التجميعية والتبديلية على الضرب، وبيّن الجدول الآتي بعض قوى الوحدة التخيلية i :

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = (i^2)^2 \cdot i = i$	$i^6 = (i^2)^3 = -1$	$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$	$i^8 = (i^2)^4 = 1$

ضرب الأعداد التخيلية البحتة

تحقق من فهمك

أوجد ناتج كل مما يأتي :

i^{31} (2C)

$\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$ (2B)

$3i \cdot 4i$ (2A)

تأكد

أوجد ناتج كل مما يأتي:

(1) $\sqrt{-81}$

(5) i^{40}

(3) $(4i)(-3i)$

(6) i^{63}



تدرب وحل المسائل

أوجد ناتج كل مما يأتي:

(25) i^{25}

(20) $\sqrt{-100}$

(26) $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-24}$

(24) i^{11}



يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستعمال خصائص الجذر التربيعي .

تحقق من فهمك

معادلة حلولها أعداد تخيلية بحتة

حل المعادلة :

$$4x^2 + 100 = 0 \quad (3A)$$



حلّ كلّ معادلة مما يأتي :

(7) $4x^2 + 32 = 0$

تأكد

(30) $2x^2 + 10 = 0$

تدرب وحل المسائل

العمليات على الأعداد المركبة: تتكون العبارة من حدين غير متشابهين ولا يمكن جمعهما، وهما العدد الحقيقي 2 والعدد التخيلي $3i$ ، ويسمى هذا النوع من العبارات **العدد المركب**.



أضف إلى
مطوبتك

الأعداد المركبة (C)

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$ ؛ حيث a و b عدنان حقيقيان، و i الوحدة التخيلية، ويسمى a الجزء الحقيقي، و b الجزء التخيلي.

مثالان:

$$5 + 2i$$

$$1 - 3i = 1 + (-3)i$$

يوضح شكل فن المجاور مجموعة الأعداد المركبة .

الأعداد الحقيقية $b = 0$	الأعداد التخيلية $b \neq 0$
	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 10px; text-align: center;"> <p>الأعداد التخيلية البحتة $a = 0$</p> </div>

- إذا كانت $b = 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًا.
- إذا كانت $b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًا.
- إذا كانت $a = 0, b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًا بحتًا.

يتساوى عدنان مركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين، والجزأين التخيليين؛ أي أن:
 $a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا كان $a = c, b = d$.

يتساوى عدداً مركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين، والجزأين التخيليين؛ أي أن:
 $a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا كان $a = c, b = d$.

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمتي x, y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.



في كل معادلة مما يأتي أوجد قيمتي a, b الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

تدرب وحل المسائل

$$2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i \quad (33)$$

تأكد

$$3a + (4b + 2)i = 9 - 6i \quad (9)$$

جمع الأعداد المركبة وطرحها

ويمكنك استعمال كلٍّ من الخاصية التبديلية والخاصية التجميعية وخاصية التوزيع عند جمع الأعداد المركبة وضربها، ولكي تجمع أو تطرح أعدادًا مركبة، جمّع الأجزاء المتشابهة؛ أيّ جمّع الأجزاء الحقيقية معًا وجمّع الأجزاء التخيلية معًا.

تحقق من فهمك : أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي :

$$(4 + 6i) - (-1 + 2i) \quad (5B)$$



$$(-2 + 5i) + (1 - 7i) \quad (5A)$$



بسّط كلّ ممّا يأتي :

تأكد

$$(11) \quad (-1 + 5i) + (-2 - 3i)$$

$$(12) \quad (7 + 4i) - (1 + 2i)$$

$$(36) \quad (-3 + i) + (-4 - i)$$

$$(37) \quad (11 - 8i) - (2 - 8i)$$

تدرب وحل المسائل

تستعمل الأعداد المركبة في مسائل الكهرباء، ففي الدوائر الكهربائية ذات التيار المتناوب يمكنك تمثيل فرق الجهد، وشدة التيار، والمعاوقة بأعداد مركبة، ولضرب هذه الأعداد تستعمل طريقة التوزيع بالترتيب.

إرشادات للدراسة

المعاوقة:

في الأعداد المركبة
تستعمل كلمة المعاوقة
بدلاً من المقاومة.

تحقق من فهمك

(6) **كهرباء:** أوجد فرق الجهد لتيار متناوب شدته $2 - 4i$ أمبير، ومعاوقته $3 - 2i$ أوم.

بسط كلاً ممّا يأتي :

تدرب وحل المسائل

$$(1 + 2i)(1 - 2i) \quad (38)$$

تأكد

$$(6 - 8i)(9 + 2i) \quad (13)$$

يسمى العددان المركبان $a + bi$, $a - bi$ **مركبين مترافقين**، وناتج ضربهما هو عدد حقيقي دائماً على الصورة $a^2 + b^2$. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة لإيجاد ناتج قسمة عددين مركبين.

تحقق من فهمك
أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$\frac{-2i}{3 + 5i} \quad (7A)$$

بسّط كلّ ممّا يأتي :

تدرب وحل المسائل

$$\frac{5+i}{3i} \quad (43)$$

تأكد

$$\frac{3-i}{4+2i} \quad (15)$$

56) اكشف الخطأ: قامت كلٌّ من صفاء ومنال بتبسيط $(2i)(3i)(4i)$ ، فأَيُّ منهما على صواب؟ وضح إجابتك.

منال

$$24i^3 = -24$$

صفاء

$$24i^3 = -24i$$

تدريب على اختبار

62) قيمة $(3 + 6i)^2$ تساوي:

(A) $-27 + 36i$

(B) $9 + 36$

(C) $9 - 36$

(D) $36 - 27i$

61) ما قيمتا x, y الحقيقيتان اللتان تجعلان
 $(5 + 4i) - (x + yi) = (-1 - 3i)$ صحيحة؟

(A) $x = 6, y = 7$

(B) $x = 4, y = i$

(C) $x = 4, y = i$

(D) $x = 4, y = 7$

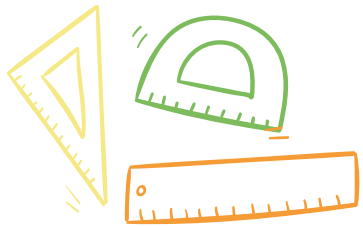


الدرس الثاني
القانون العام والمميز

- المفردات
- 1. القانون العام
 - 2. المميز

فيما سبق
درست حل معادلات
تربيعية باكمال مربع

الاهداف
1. حل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام
2. استعمال المميز لتحديد عدد جذور معادلة
تربيعية وانواعها.





أطلق سهم نحو هدف على الأرض، ويمكن التعبير عن ارتفاعه عن الأرض بالدالة التربيعية:

$$h = -4.9t^2 + 117t + 42$$

حيث h ارتفاع السهم بعد t ثانية من إطلاقه، وللتنبؤ بالزمن اللازم لوصول السهم إلى الهدف، نحل المعادلة:

$$-4.9t^2 + 117t + 42 = 0$$

أسئلة التعزيز

1. ما تأثير زيادة قيمة t في المعادلة على قيمة h ؟
2. ما شكل المعادلة البياني؟
3. ما اتجاه فتحة المكافئ؟

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

القانون العام لحل المعادلة التربيعية

التعبير اللفظي: يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ باستعمال القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال: $x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$

إرشادات للدراسة

القانون العام

على الرغم من أن طريقة التحليل إلى العوامل قد تكون الأسهل لحل بعض المعادلات التربيعية، إلا أن القانون العام يحل أي معادلة تربيعية.

تحقق من فهمك

معادلة لها جذران نسبيا

$x^2 + 6x = 16$ (1A)

حُلَّ كُلِّ معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

تدرب وحل المسائل

$$5x^2 + 8x = 0 \quad (24)$$



معادلة لها جذر نسبي واحد (مكرر مرتين)

عندما يكون ما تحت الجذر في القانون العام صفرًا، فإننا نحصل على جذر نسبي واحد، ويكون حل المعادلة في هذه الحالة هو هذا الجذر النسبي، ولكنه مكرر مرتين .

تحقق من فهمك

$$x^2 - 16x + 64 = 0 \quad (2A)$$

حُلّ كلّ معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

تدرب وحل المسائل

$$(21) \quad x^2 - 6x = -9$$



$$3x^2 + 5x + 1 = 0 \quad (3A)$$

تحقق من فهمك



الجذور المركبة

إذا كان ما تحت الجذر في القانون العام عددًا سالبًا، فإن الحلين يكونان عددين مركبين مترافقين.

تحقق من فهمك

$$3x^2 + 5x + 4 = 0 \quad (4A)$$

إرشادات للدراسة

الأعداد المركبة

تذكر أن تكتب حلك
على الصورة $a + bi$ ،
وتسمى هذه الصورة
الصورة القياسية للعدد
المركب.

حُلَّ كُلِّ معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

تدرب وحل المسائل

$$x^2 + 2x - 4 = -9 \quad (22)$$



الجذور والمميز: في المعادلة التربيعية لاحظ العلاقة بين قيمة ما تحت الجذر وجذور المعادلة التربيعية في الأمثلة السابقة. تسمى العبارة $b^2 - 4ac$ **المميز**.

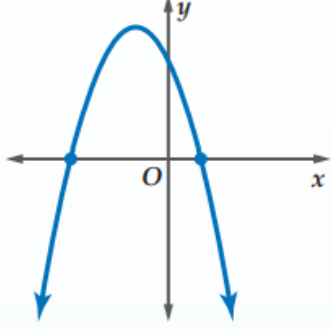
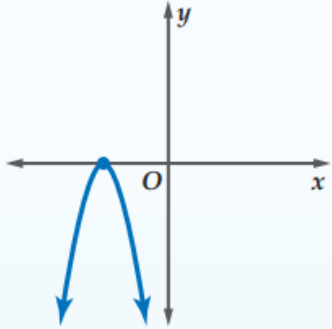
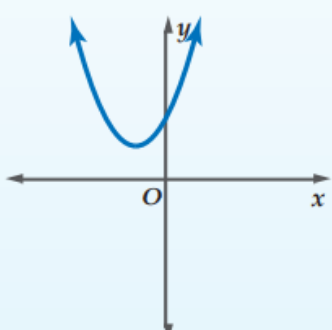
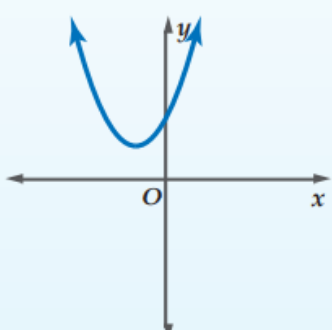
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leftarrow \text{المميز}$$

اضف إلى
مطوبتك

المميز

مفهوم أساسي

في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a, b, c أعداد نسبية، $a \neq 0$.

مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة	عدد الجذور وأنواعها	قيمة المميز
	جذران حقيقيان نسبيا	$b^2 - 4ac > 0$ والعبارة $b^2 - 4ac$ مربع كامل.
	جذران حقيقيان غير نسبيا	$b^2 - 4ac > 0$ والعبارة $b^2 - 4ac$ ليست مربعاً كاملاً.
	جذر حقيقي مكرر مرتين	$b^2 - 4ac = 0$
	جذران مركبان	$b^2 - 4ac < 0$

إرشادات للدراسة

الجذور

تذكر أن حلول المعادلة تسمى جذوراً وهي قيم X التي يقطع عندها التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة المحور X .



أوجد قيمة المميز لكلٍّ من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين ، وحدد عدد جذور كلٍّ منهما وأنواعها:

$$-7x + 15x^2 - 4 = 0 \quad (5B)$$

$$-5x^2 + 8x - 1 = 0 \quad (5A)$$

درست فيما سبق طرائق مختلفة لحل المعادلات التربيعية، والجدول أدناه يلخص تلك الطرائق.



ملخص المفهوم

حل المعادلات التربيعية

أضف إلى

مطوبتك

الطريقة	إمكانية استعمالها	حالات استعمالها
التمثيل البياني	أحياناً	عندما لا يطلب إيجاد الحل الدقيق، وأفضل استعمال لها عند التحقق من معقولية الحلول التي يتم إيجادها بالطرائق الجبرية.
التحليل إلى العوامل	أحياناً	عندما يساوي الحد الثابت صفراً مثال: $x^2 - 7x = 0$ أو عندما يكون من السهل إيجاد العوامل . مثال: $x^2 - 5x + 6 = 0$
خاصية الجذر التربيعي	أحياناً	مع المعادلات المكتوبة على صورة مربع كامل يساوي ثابتاً. مثال: $(x - 5)^2 = 18$
إكمال المربع	دائماً	مع المعادلات المكتوبة على الصورة: $x^2 + bx + c = 0$ مثال: $x^2 + 6x - 14 = 0$
القانون العام	دائماً	عندما لا يمكن استعمال بقية الطرائق أو عندما يكون من الصعب استعمالها. مثال: $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

أ.روان القضاة

أجب عن الفرعين a، b لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

(a) أوجد قيمة المميز.

(b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

تأكد

$$5x^2 + 2x + 4 = 0 \quad (12)$$

$$3x^2 + 8x + 2 = 0 \quad (9)$$

(32) **اكتشف الخطأ:** حددت كلٌّ من هدى وندى عدد حلول للمعادلة $3x^2 - 5x = 7$. فمن منهما إجابتهما صحيحة؟ وضح إجابتك.

ندى

$$3x^2 - 5x = 7$$

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(7) \\ = -59$$

وبها أن المميز سالب فلا توجد
للمعادلة حلول حقيقية.

هدى

$$3x^2 - 5x = 7$$

$$3x^2 - 5x - 7 = 0$$

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-7) \\ = 109$$

وبها أن المميز موجب فللمعادلة
حلان حقيقيان.

(36) أي المعادلات الآتية لها جذر حقيقي مكرر مرتين؟

$x^2 - 2x + 5 = 0$ **A**

$x^2 - 2x - 5 = 0$ **B**

$x^2 = 19$ **C**

$x^2 - 8x = -16$ **D**

(37) قيمة المميز للمعادلة $x^2 - 8x = 0$ هي:

-64 **A**

-8 **B**

8 **C**

64 **D**



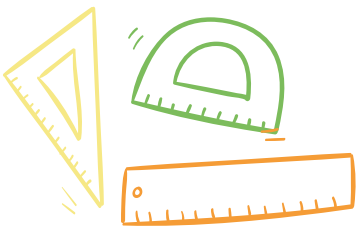
الدرس الثالث العمليات على كثيرات الحدود

- المفردات**
1. التبسيط
 2. درجة كثيرة الحدود

درست ايجاد قيم القوى
فيما سبق

الاهداف

1. ضرب وحيدات حد وعبارات تتضمن قوى وقسمتها وتبسيطها
2. جمع كثيرات حدود وطرحها وضربها



لماذا



يستغرق وصول ضوء الشمس إلى الأرض 8 دقائق تقريباً؛ إذ يسير الضوء بسرعة كبيرة تصل إلى $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ تقريباً.

ما الوقت الذي سيستغرقه وصول الضوء إلينا من مجرة تبعد مسافة $2.367 \times 10^{21} \text{ m}$ تقريباً؟

أسئلة التعزيز

1. كيف يمكن كتابة 3×10^8 بالصيغة القياسية؟

2. كم ثانية في 8 دقائق؟

ضرب وحيدات الحد وقسمتها تذكر أن وحيدة الحد هي: عدد، أو متغير، أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة، وتتكون من حد واحد فقط. والجدول الآتي يلخص خصائص الأسس التي تساعد على ضرب وقسمة وحيدات الحد وتبسيطها، حيث إن عملية **تبسيط** عبارات تتضمن قوى تعني إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.

ملخص المفهوم		
خصائص الأسس		
لأي عددين حقيقيين x, y وعددين صحيحين a, b :		
الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوى	$x \neq 0, \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$ $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
الأسس السالبة	$x \neq 0, x^{-a} = \frac{1}{x^a}, \frac{1}{x^{-a}} = x^a$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$ $(d^2)^4 = d^{2 \cdot 4} = d^8$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$ $(ab)^3 = a^3 b^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0,$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}, x \neq 0, y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$
القوة الصفرية	$x^0 = 1, x \neq 0$	$7^0 = 1$



عند تبسيط وحيدة الحد، تأكد من أنك قد كتبتها في أبسط صورة.

أضف إلى

مطوبتك

مفهوم أساسي

تبسيط وحيدات الحد

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما:

- لا تتضمن قوى قوة.
- يظهر كل أساس مرة واحدة.
- تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- لا تتضمن أقواساً أو أسساً سالبة.

إرشادات للدراسة

تحقق

يمكنك التحقق من إجابتك دائماً باستعمال تعريف الأسس، فمثلاً:

$$\frac{q^2}{q^7} = \frac{q \cdot q}{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}$$

$$= \frac{1}{q^5}$$

بسّط كل عبارة فيما يأتي مفترضاً أن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

تحقق من فهمك

(1D) $(-2x^3y^2)^5$

(1C) $\left(\frac{a}{4}\right)^{-3}$

(1B) $\frac{15c^5d^3}{-3c^2d^7}$

(1A) $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$

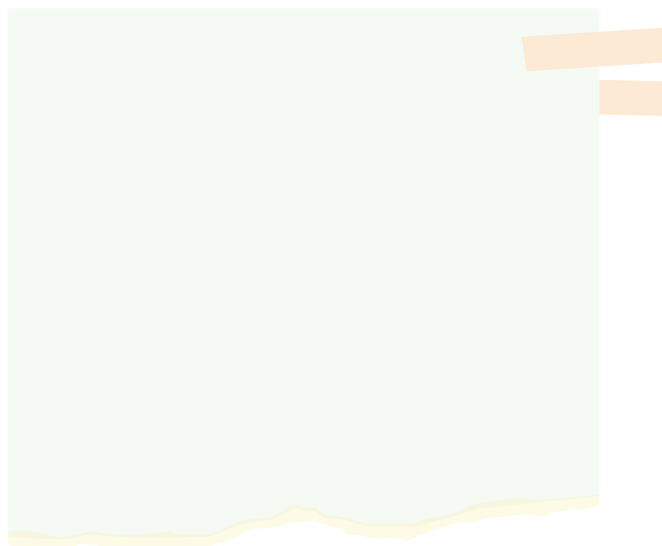
بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

تأكد

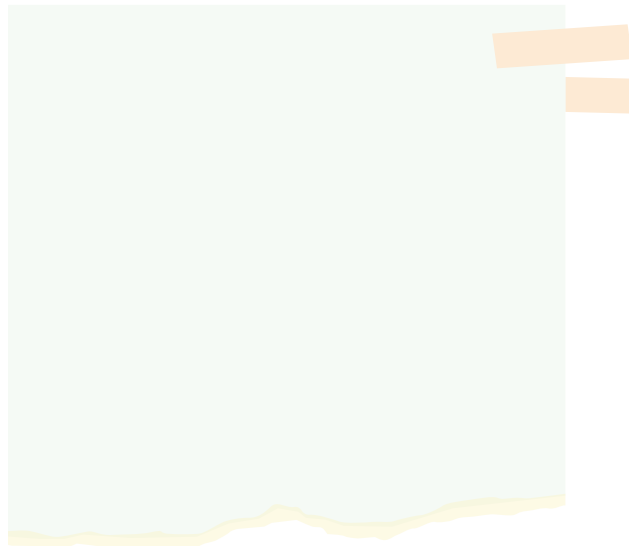
(1) $(2a^3b^{-2})(-4a^2b^4)$



(2) $\frac{12x^4y^2}{2xy^5}$

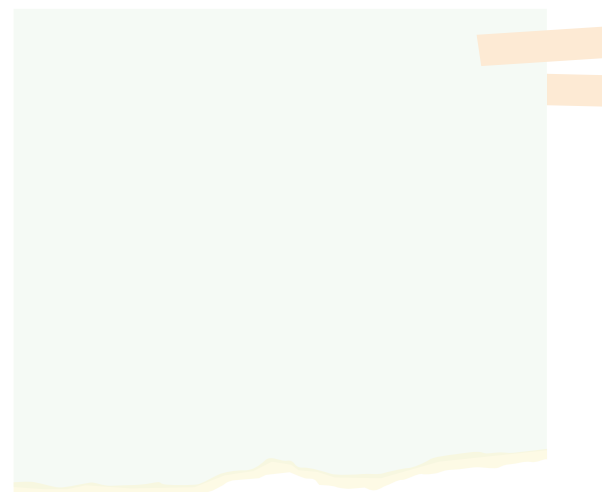


(3) $\left(\frac{2a^2}{3b}\right)^3$



تدرب وحل المسائل

(17) $(n^5)^4$



أ.روان القضاة

العمليات على كثيرات الحدود: درجة كثيرة الحدود المبسطة هي أكبر درجة لوحيدات الحد المكوّنة لها.
فمثلاً درجة كثيرة الحدود $x^2 + 4x + 58$ هي 2.

إرشادات للدراسة

كثيرات الحدود

تذكّر أن كثيرة الحدود هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد، وتُسمى كل وحيدة حد منها حدًا في كثيرة الحدود. ودرجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها.

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

$$\frac{x}{y} + 3x^2 \quad (2A)$$

$$x^5y + 9x^4y^3 - 2xy \quad (2B)$$

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

تأكد

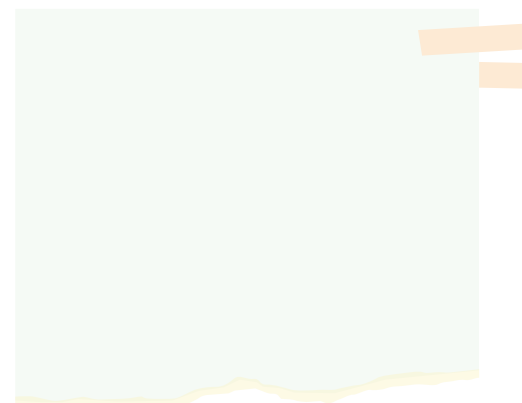
(8) $\frac{ab^3 - 1}{az^4 + 3}$



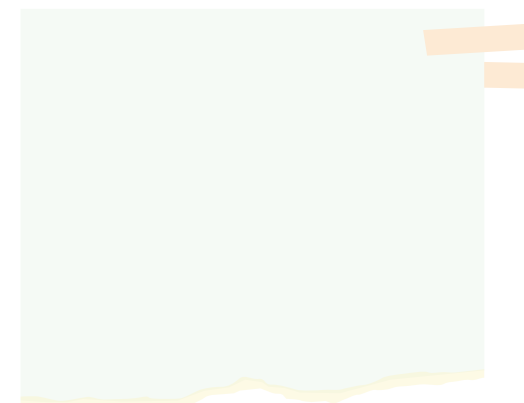
(7) $x^2 + \sqrt{x}$



(6) $\frac{1}{2}x^2 - 7y$



(5) $3x + 4y$



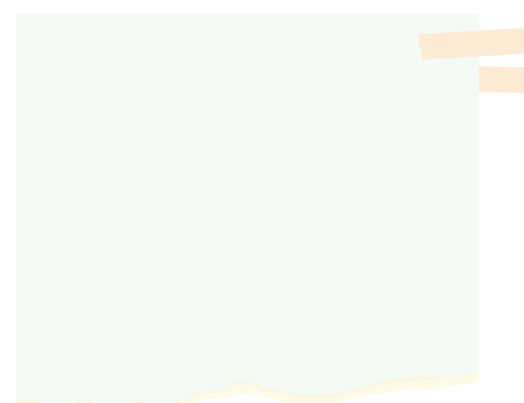
(21) $\sqrt{m - 7}$



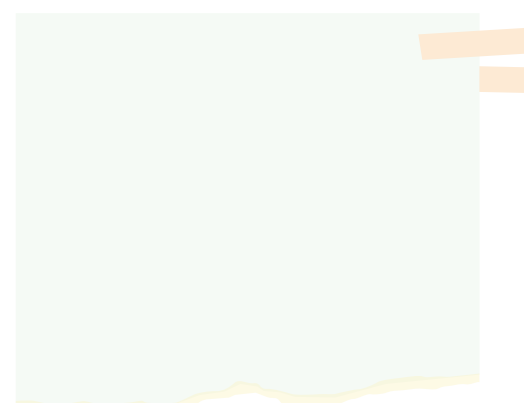
(20) $\frac{5np}{n^2} - \frac{2g}{h}$



(19) $a^3 - 11$



(18) $2x^2 - 3x + 5$



تدرب وحل المسائل

جمع كثيرات الحدود وطرحها

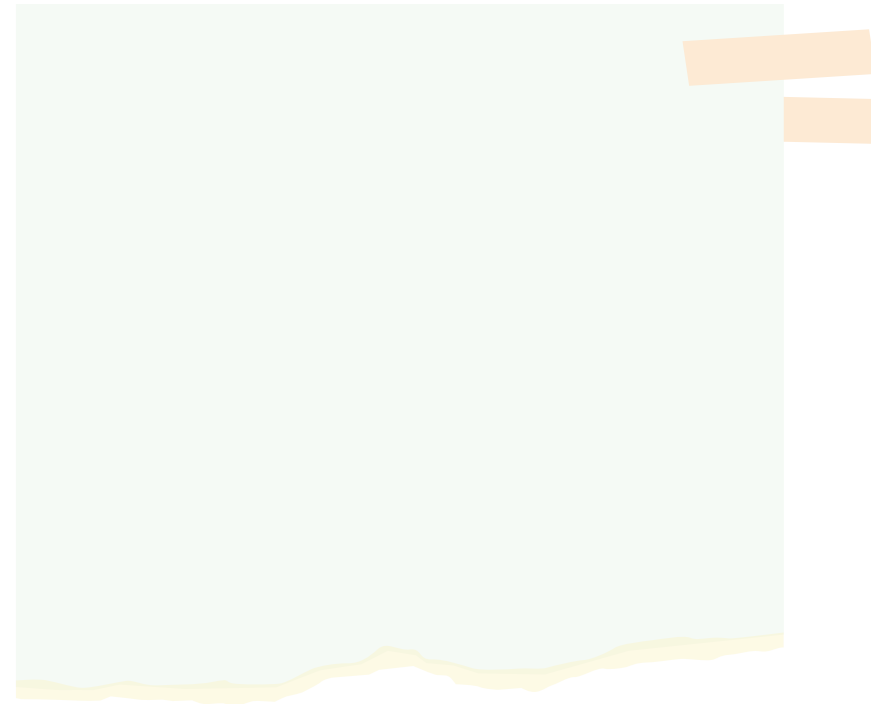
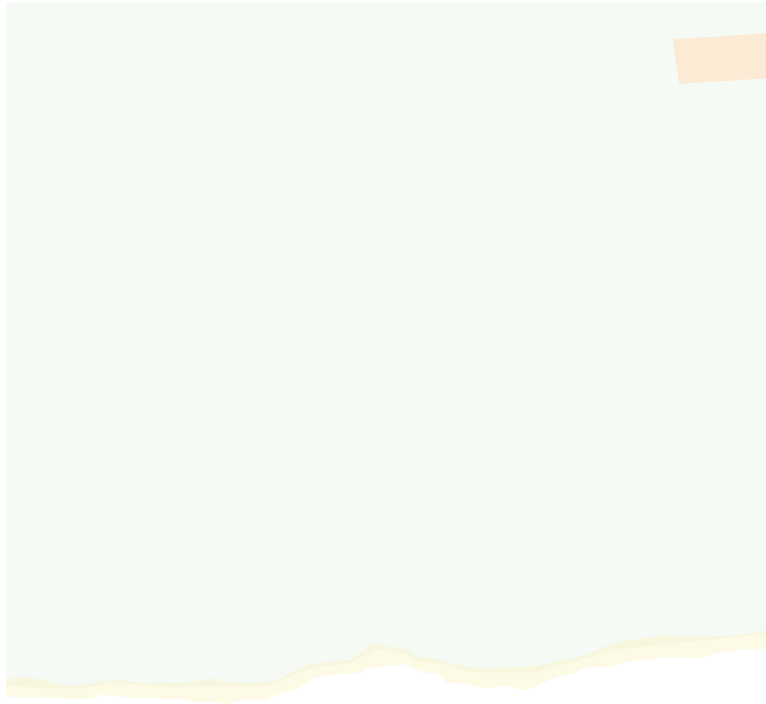
يمكنك إجراء العمليات المطلوبة على كثيرات الحدود وتبسيطها تمامًا كما تبسط وحيدة الحد، ثم تجمع الحدود المتشابهة.

تحقق من فهمك

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، واكتبه في أبسط صورة:

(3B) $(3x^2 - 6) + (-x + 1)$

(3A) $(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$

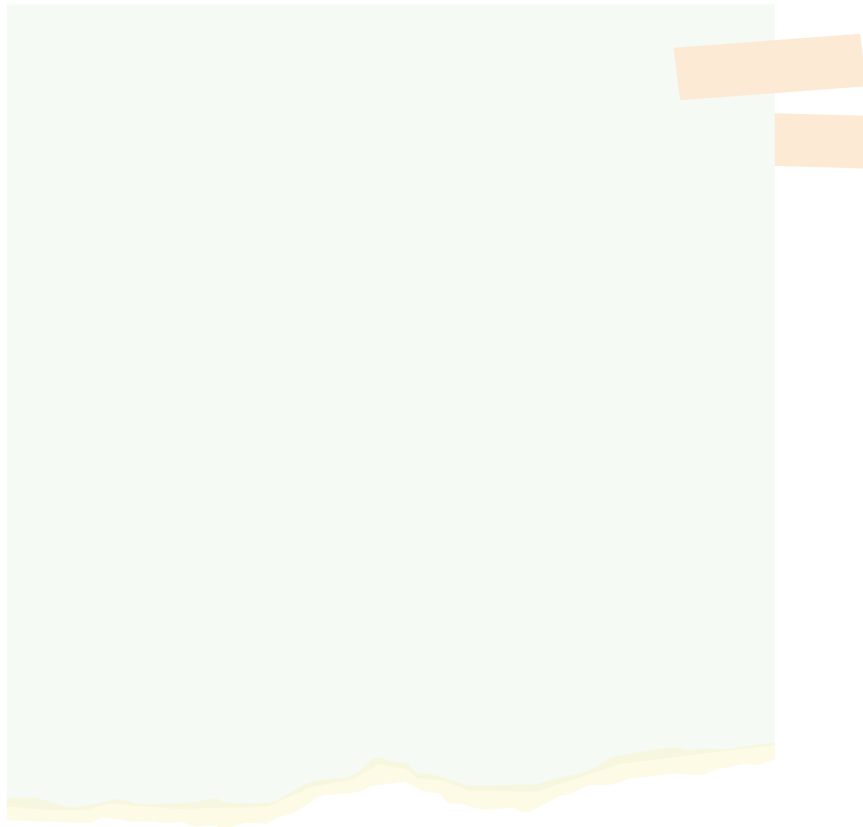


أوجد ناتج كل مما يأتي واكتبه في أبسط صورة:

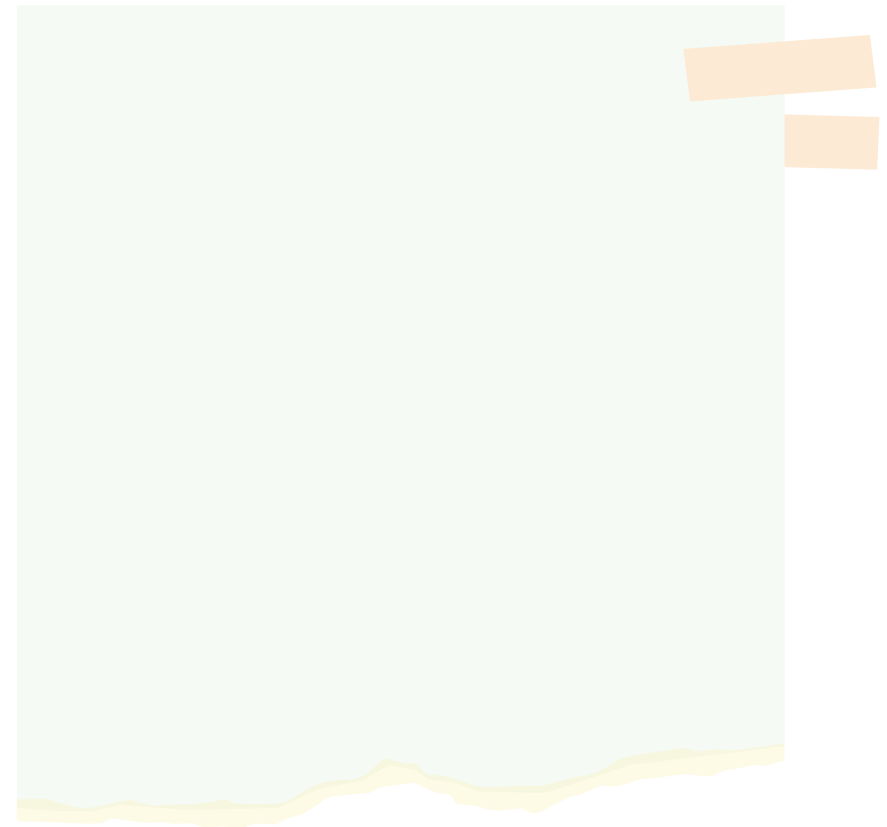
تدرب وحل المسائل

تأكد

$$(6a^2 + 5a + 10) - (4a^2 + 6a + 12) \quad (22)$$



$$(x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1) \quad (9)$$

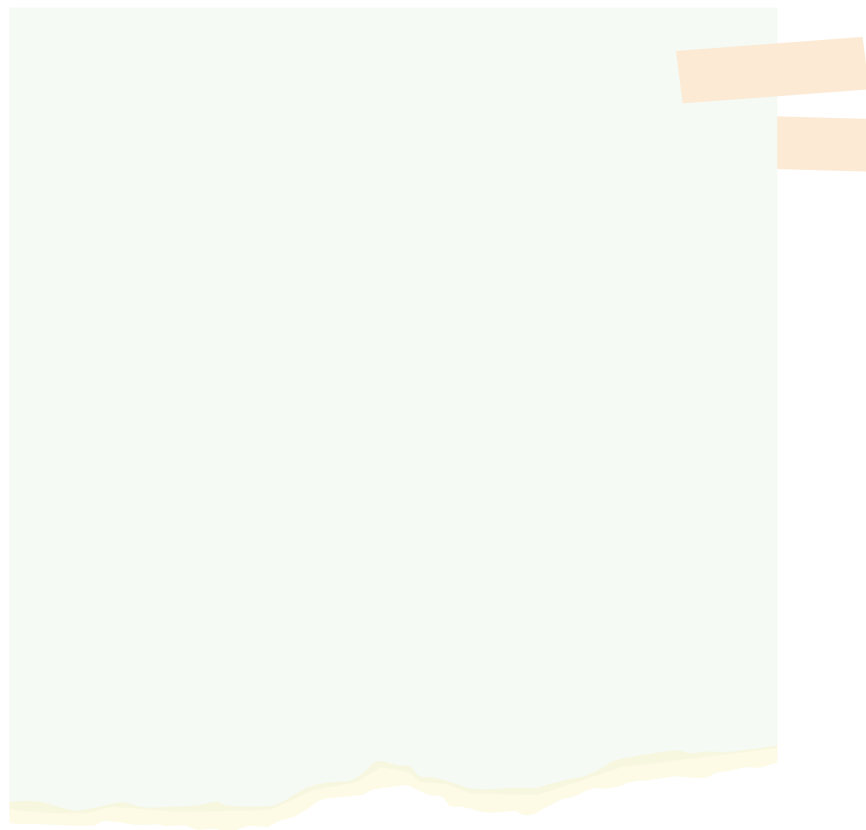


يمكنك استعمال خاصية التوزيع لضرب كثيرات الحدود.

ضرب كثيرات الحدود

تحقق من فهمك

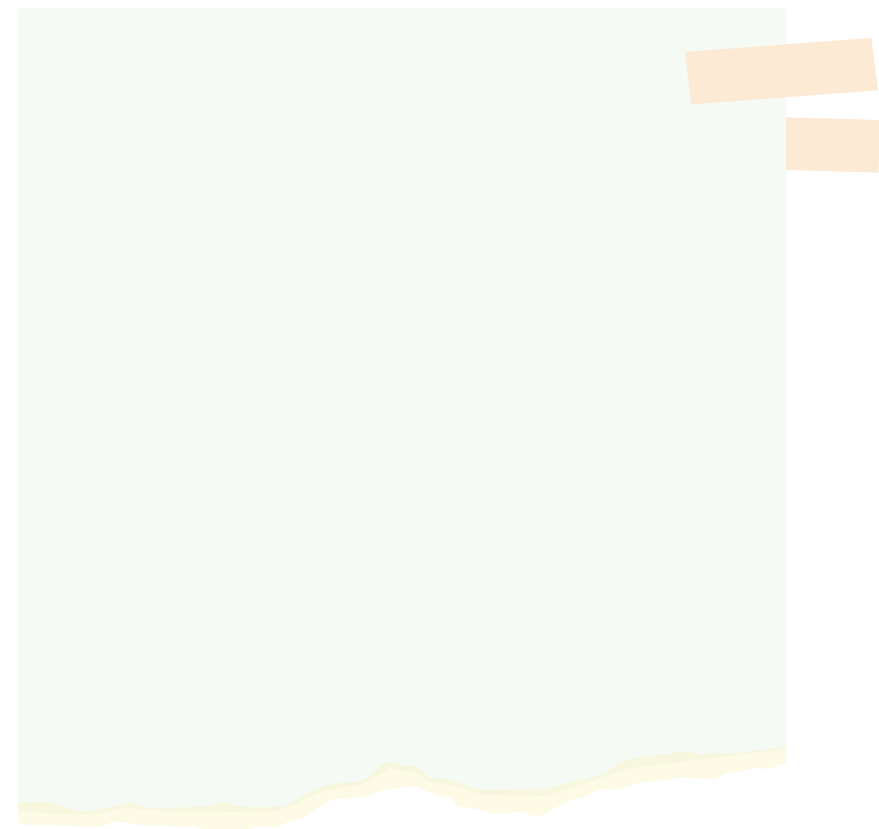
$$(x^2 + 4x + 16)(x - 4) \quad (5A)$$



ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

تحقق من فهمك

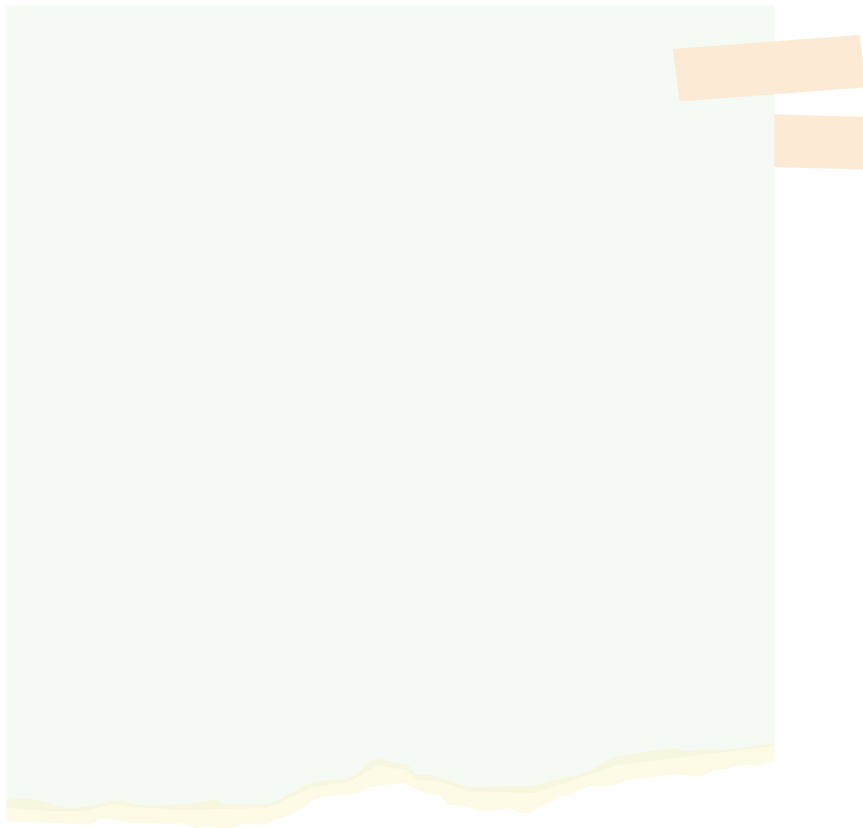
$$-2a(-3a^2 - 11a + 20) \quad (4B)$$



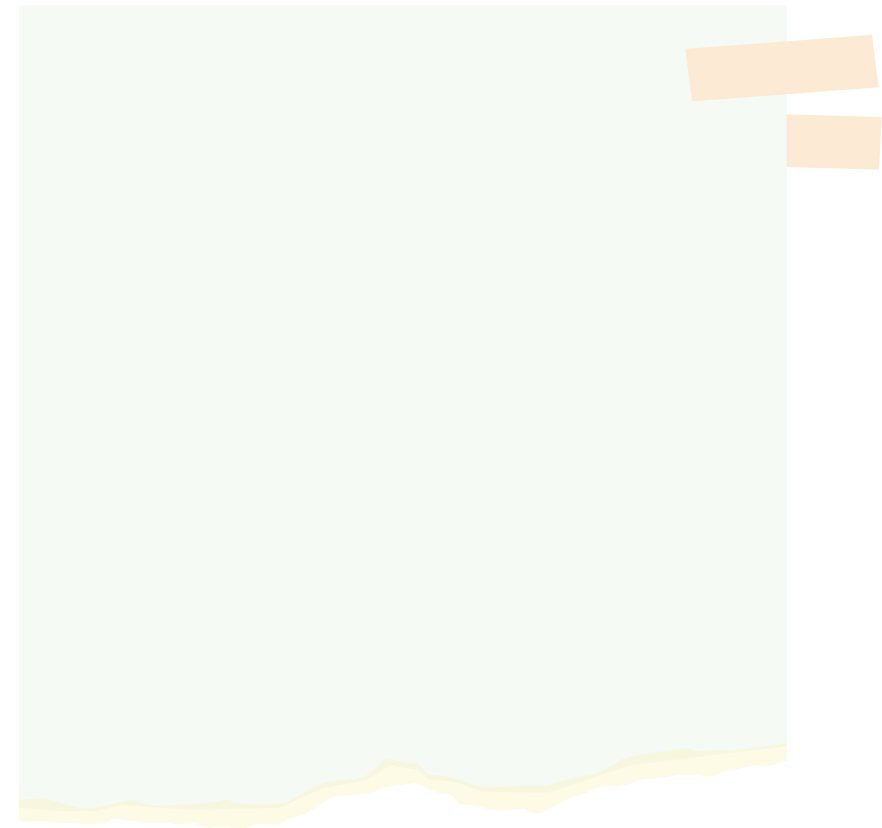
أوجد ناتج كل مما يأتي واكتبه في أبسط صورة:

تأكد

(12) $(n - 9)(n + 7)$



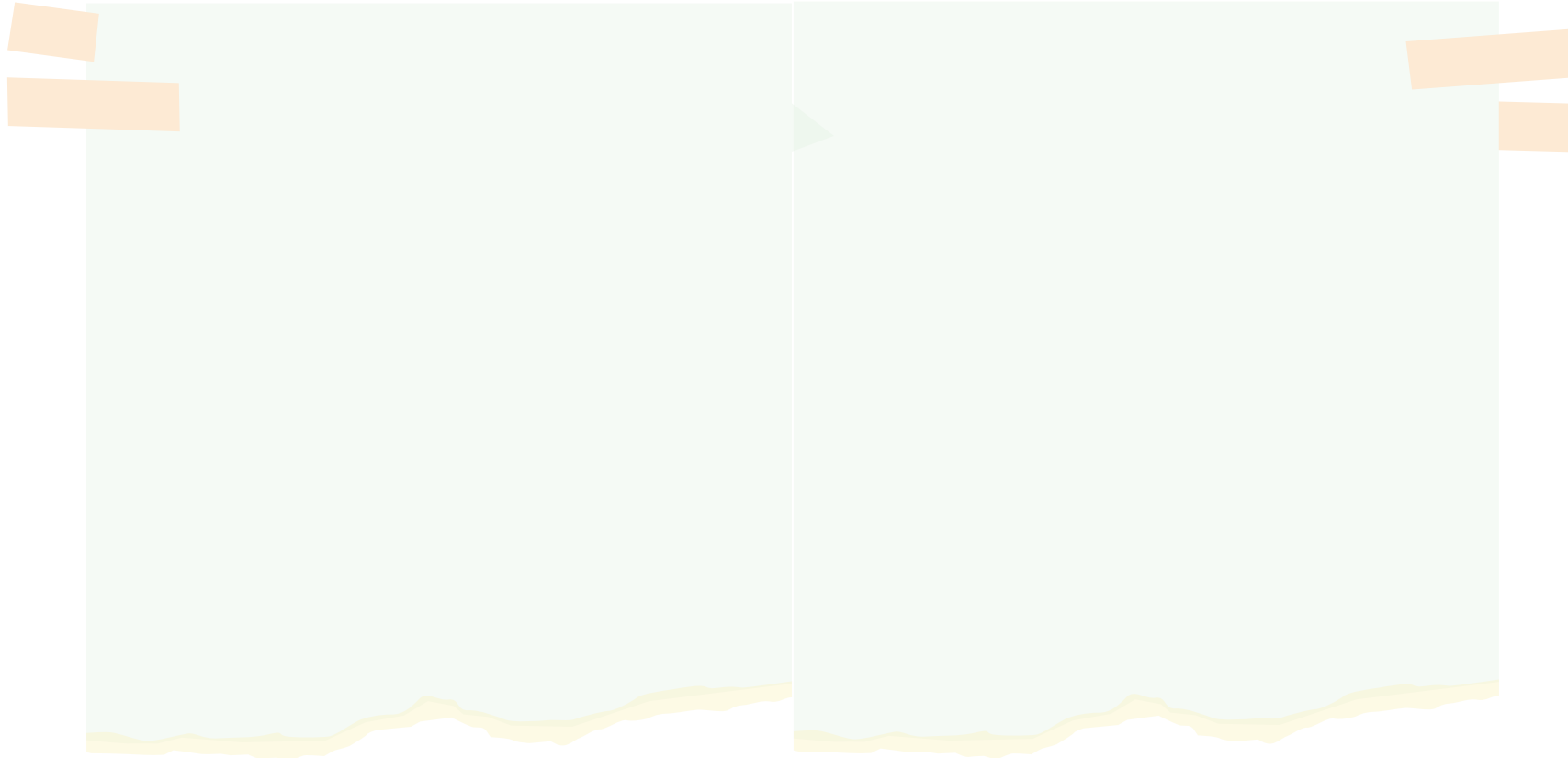
(11) $3x^2(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3)$



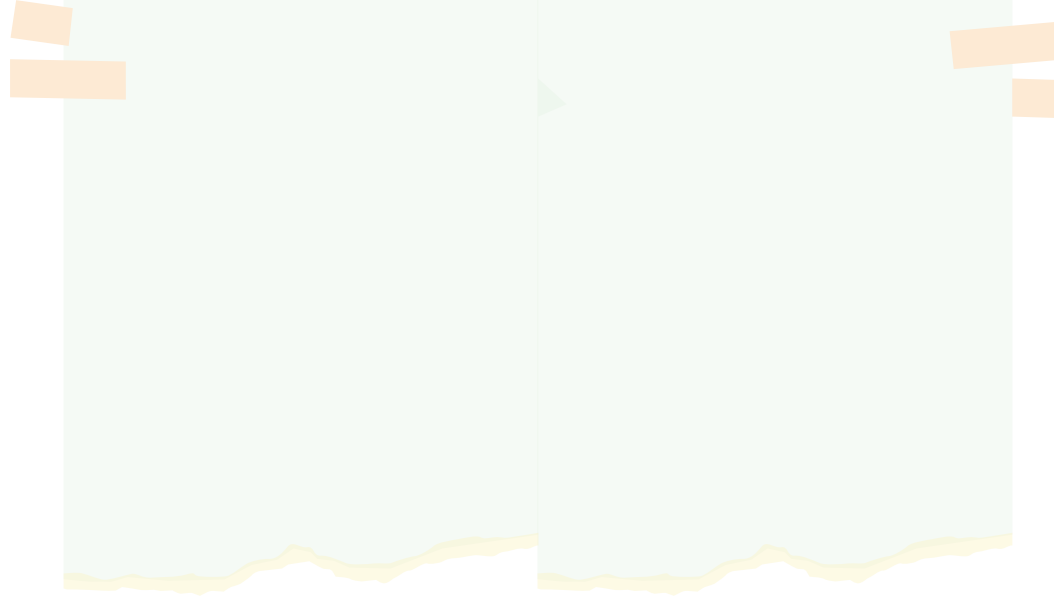
يمكنك استعمال كثيرات الحدود لتمثيل مواقف من واقع الحياة.

(6) **استثمار:** استثمر فيصل مبلغ 90000 ريال في مشروعين أحدهما صناعي نسبة ربحه السنوي 18%، والآخر مشروع عقاري نسبة ربحه السنوي 42%، فإذا كانت x تمثل المبلغ الذي استثمره فيصل في المشروع العقاري، فاكتب كثيرة حدود تمثل ربحه في المشروعين بعد عام واحد.

تحقق من فهمك



(43) تبرير: فسّر لماذا تكون العبارة 0^{-2} غير معرّفة؟



تدريب على اختبار

(47) أيّ مما يأتي ليس عاملاً لكثيرة الحدود $x^3 - x^2 - 2x$ ؟

A x **C** $x - 1$

B $x + 1$ **D** $x - 2$

(46) إجابة قصيرة: بسّط المقدار $\frac{(2x^2)^3}{12x^4}$.

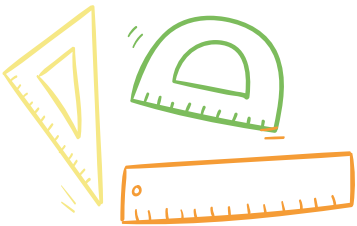


الدرس الرابع
قسمة كثيرات الحدود

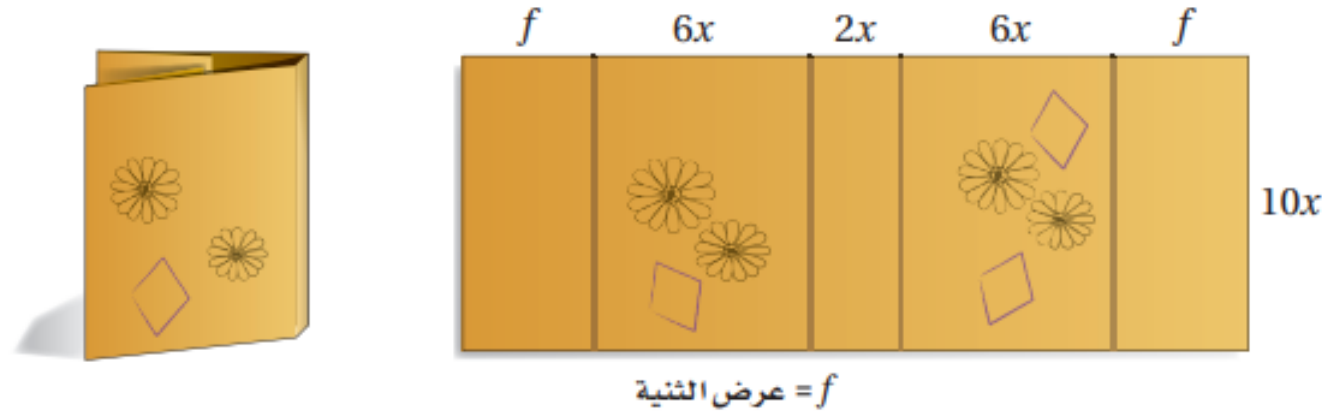
المفردات
1. القسمة التركيبية

درست قسمة وحيدات الحد
فيما سبق

الاهداف
1. قسمة كثيرات الحدود مستعملا القسمة الطويلة
2. قسمة كثيرات الحدود مستعملا القسمة التركيبية



تحتاج سلمى إلى $(140x^2 + 60x)$ بوصة مربعة من الورق لعمل غلاف لكتاب طوله $10x$ بوصات. ويظهر الشكل أدناه الجزء الذي تركته للشني على جانبي الغلاف. فإذا كان عرض كعب الغلاف $2x$ بوصة، وعرض كل من الغلاف الأمامي والخلفي $6x$ بوصة، فما عرض كل من جزأي الشني؟ يمكنك استعمال قسمة كثيرات الحدود لمساعدتك على إيجاد الجواب.



أسئلة التعزيز

1. ما عرض غلاف الكتاب ؟
2. ما طول الغلاف ؟
3. إذا علمت أن عرض الغلاف $10x$ بوصات و مساحته $14x^2 + 60x$ بوصة مربعة، فكيف يمكن إيجاد طول الغلاف ؟

بسّط العبارة :

$$(18x^2y + 27x^3y^2z)(3xy)^{-1} \quad \textbf{(1B)}$$

$$(20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf) \quad \textbf{(1A)}$$

بسّط كلّ عبارة فيما يأتي :

$$(1) \quad \frac{4xy^2 - 2xy + 2x^2y}{xy}$$

$$(2) \quad (3a^2b - 6ab + 5ab^2)(ab)^{-1}$$

تدرب وحل المسائل

$$(28c^3d^2 - 21cd^2) \div (14cd) \quad (30)$$

$$\frac{16c^4d^4 - 24c^2d^2}{4c^2d^2} \quad (16)$$

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$.

$$\begin{array}{r} x + 8 \\ x - 5 \overline{) x^2 + 3x - 40} \\ \underline{(-) x^2 - 5x} \\ 8x - 40 \\ \underline{(-) 8x - 40} \\ 0 \end{array}$$

اضرب المقسوم عليه في x

اطرح

اضرب المقسوم عليه في 8

اطرح

ناتج القسمة هو $x + 8$ ، والباقي 0.

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج:

تحقق من فهمك

$$(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3) \quad (2A)$$

$$(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1) \quad (2B)$$

تحقق من فهمك

(3) أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(r^2 + 5r + 7)(1 - r)^{-1}$ ؟

$r - 6 + \frac{13}{1 - r}$ C

$r + 6 - \frac{13}{1 - r}$ D

$-r - 6 + \frac{13}{1 - r}$ A

$r + 6$ B

(7) اختيار من متعدد: أي مما يأتي يكافئ العبارة : $(x^2 + 3x - 9)(4 - x)^{-1}$ ؟

- A $-x - 7 + \frac{19}{4 - x}$ B $-x - 7$ C $x + 7 - \frac{19}{4 - x}$ D $-x - 7 - \frac{19}{4 - x}$

القسمة التركيبية: القسمة التركيبية هي طريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

أضف إلى
مطوبتك

القسمة التركيبية

مفهوم أساسي

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازلياً بحسب درجتها. تأكد من أن المقسوم عليه على الصورة $X - r$ ، ثم اكتب الثابت r في الصندوق، واكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في r ، واكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه.

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الذي فوقه.

الخطوة 4: كرر الخطوتين 2, 3 على ناتج الجمع في الخطوة السابقة حتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير. الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.



تنبيه!

القسمة التركيبية

تذكر أن الحدود تجمع ولا تطرح عند إجراء القسمة التركيبية.

أروان القضاة

إرشادات للدراسة

القسمة التركيبية

إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معامله صفراً. فمثلاً إذا كان المقسوم

$$2x^3 - 4x^2 + 6$$

فاكتبه في صورة

$$2x^3 - 4x^2 + 0x + 6$$



استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج:

تحقق من فهمك

$$(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3) \quad (4A)$$

$$(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2) \quad (4B)$$

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ مما يأتي:

$$(y^5 - 3y^2 - 20) \div (y - 2) \quad (6)$$

$$(x^2 - 6x - 20) \div (x + 2) \quad (3)$$

تدرب وحل المسائل

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلِّ ممَّا يأتي:

(20) $(z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 4)(z - 1)^{-1}$

(18) $(a^2 - 8a - 26) \div (a + 2)$

معامل x في المقسوم عليه لا يساوي 1

ولإجراء القسمة التركيبية يجب أن يكون المقسوم عليه على الصورة $x - r$ ، وإذا كان معامل x في المقسوم عليه لا يساوي الواحد، فيجب إعادة كتابة عبارة القسمة بحيث يمكنك استعمال القسمة التركيبية.

تنبيه!

قسمة جميع الحدود

تذكر أن تقسم جميع الحدود في البسط والمقام على معامل x في المقام.

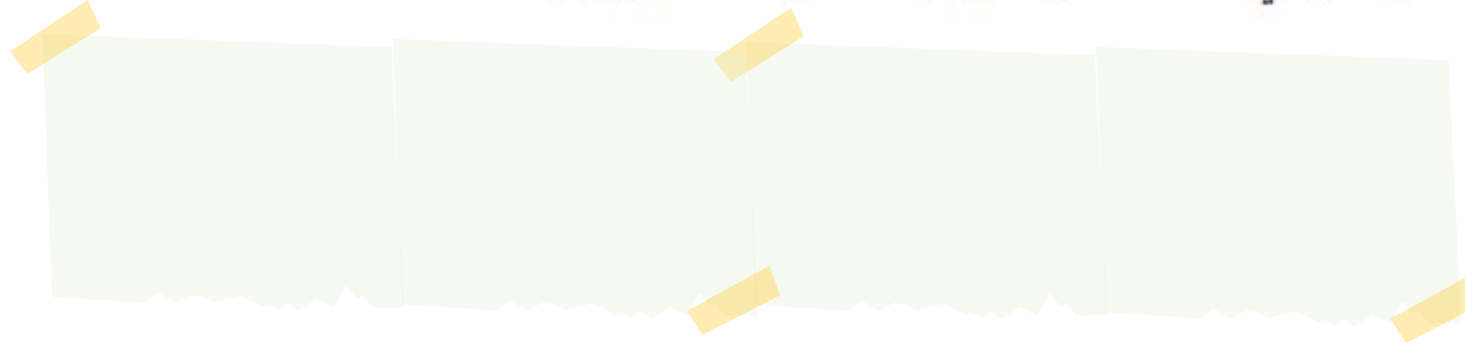
تحقق من فهمك
استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج:

$$(5A) \quad (8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$$

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلِّ مما يأتي :

(25) $(6a^2 - 3a + 9) \div (3a - 2)$

(37) **اكتشف الخطأ:** قسّم كلٌّ من خليفة وجمال $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ على $x - 3$ ، فقال خليفة: إن الباقي 26، وقال جمال: إن الباقي 100-. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.



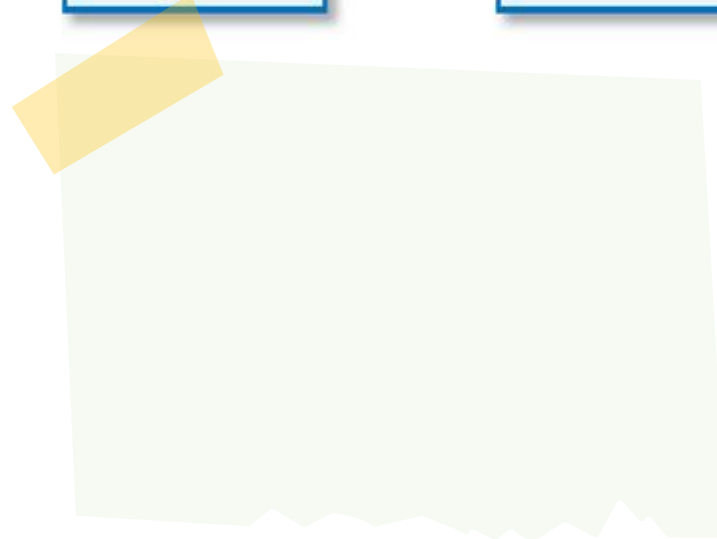
(41) حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسّر إجابتك.

$$3xy + 6x^2$$

$$\frac{5}{x^2}$$

$$x + 5$$

$$5b + 11c - 9ad^2$$





(56) ما باقي قسمة: $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$ ؟

-1 **C**

-11 **A**

11 **D**

1 **B**



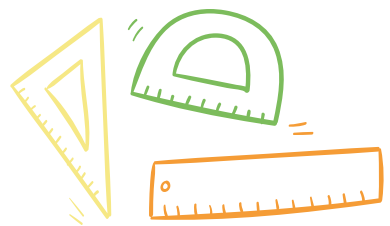
الدرس الخامس
دوال كثيرات الحدود

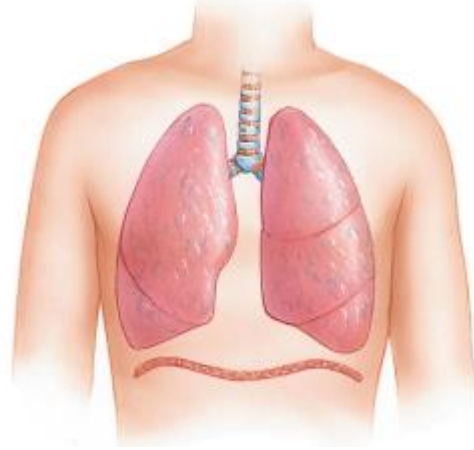
1 2 3

فيما سبق
درست تحليل التمثيل البياني
للدوال التربيعية

- المفردات
1. كثيرة حدود بمتغير واحد.
 2. المعامل الرئيس.
 3. دالة كثيرة الحدود.
 4. دالة القوة.
 5. سلوك طرفي التمثيل البياني.
 6. صفر الدالة.

- الاهداف
1. ايجاد قيم دوال كثيرات الحدود
 2. التعرف على الاشكال العامة للتمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود وتحديد عدد أصفارها





يمكن تمثيل حجم الهواء في رئتي الإنسان خلال دورة تنفس مدتها 5 ثوان بالدالة: $v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$ ، حيث v الحجم بالترات، t الزمن بالثواني. وهذه الدالة مثال على دالة كثيرة حدود.

أسئلة التعزيز

1. مما تتكون دورة التنفس ؟
2. باستعمال القانون ، ما قيمة $v(1)$ ؟
3. ما أكبر قيمة لـ t تجعل النموذج معقولا ؟

دوال كثيرات الحدود: كثيرة الحدود بمتغير واحد هي عبارة جبرية على الصورة:

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية، $a_n \neq 0$ ، $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ، n عدد صحيح غير سالب. وتكون كثيرة الحدود مكتوبة بالصيغة القياسية إذا كانت أسس المتغير في حدودها مرتبة ترتيباً تنازلياً، ودرجة كثيرة الحدود هي أس المتغير ذي أكبر أس فيها، ويُسمى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية **المعامل الرئيس**.

كثيرة الحدود	مثال	الدرجة	المعامل الرئيس
الثابتة	12	0	12
الخطية	$4x - 9$	1	4
التربيعية	$5x^2 - 6x - 9$	2	5
التكعيبية	$8x^3 + 12x^2 - 3x + 1$	3	8
الصيغة العامة	$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$	n	a_n

تحقق من فهمك

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

$$8x^4 - 2x^3 - x^6 + 3 \quad (1C)$$

$$5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14 \quad (1B)$$

$$5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x} \quad (1A)$$

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب:

تأكد

(4) $8x^5 - 3x^2 + 4xy - 5$

(1) $11x^6 - 5x^5 + 4x^2$

(13) $-6x^6 - 4x^5 + 13xy$

(14) $3a^7 - 4a^4 + \frac{3}{a}$

تدرب وحل المسائل

دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد، فمثلاً $f(x) = 3x^3 - 4x + 6$ دالة كثيرة حدود تكعيبية. وتكتب أبسط دوال كثيرات الحدود على الصورة $f(x) = ax^b$ ، حيث a عدد حقيقي، b عدد صحيح غير سالب، وتُسمى عندئذٍ **دوال القوة**.

إذا علمت عنصراً في مجال دالة كثيرة حدود، تستطيع معرفة القيمة المقابلة له في المدى.

تحقق من فهمك

(3A) إذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 8$ ، فأوجد $g(5a - 2) + 3g(2a)$.



لتطوير - إنتاج - توزيع

تأكد

إذا كانت $c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$, $d(x) = 3x^2 + 6x - 10$ فأوجد كلاً مما يأتي:

$-4[d(3z)]$ (8)

$c(y^3)$ (7)



إذا كانت $c(x) = 2x^2 - 4x + 3$, $d(x) = -x^3 + x + 1$ فأوجد كلاً مما يأتي:

$5d(2a)$ (26)

$c(3a)$ (25)

تدرب وحل المسائل

أ.روان القضاة

التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود: إن التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود يظهر أكبر عدد من المرات التي قد يقطع فيها هذا التمثيل المحور x ، وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود.

قراءة الرياضيات

الرمزان $+\infty$, $-\infty$

نعبّر عن التزايد

غير المحدود لقيم

المتغير x ، باستعمال

الرمز $+\infty$ ويُقرأ

ما لا نهاية ويُكتب

$x \rightarrow +\infty$

كما نعبّر عن التناقص

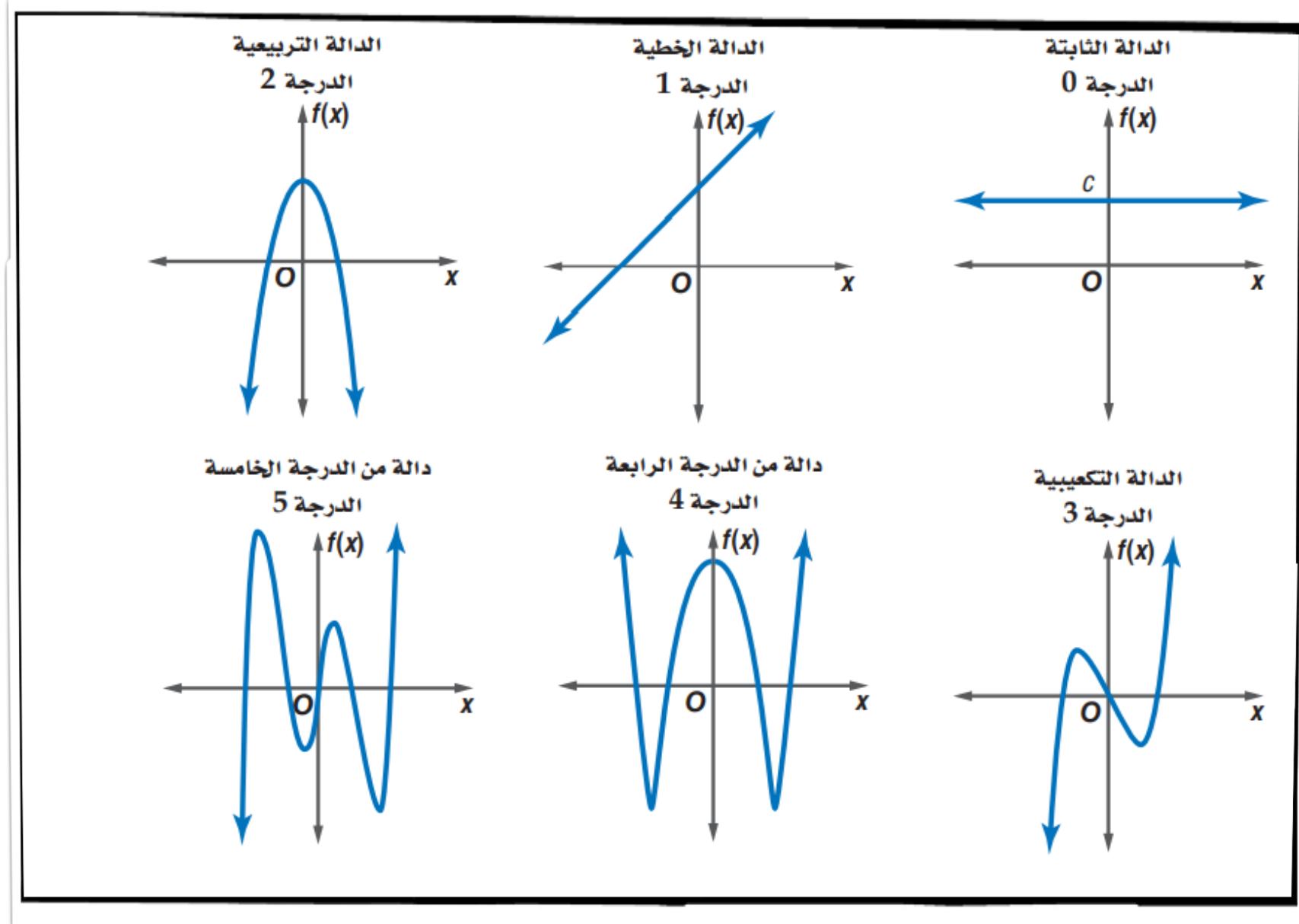
غير المحدود لقيم

المتغير x ، باستعمال

الرمز $-\infty$ ويُقرأ

سالب ما لا نهاية ويُكتب

$x \rightarrow -\infty$



مجال دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ويُحدد سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من المالانهاية $(x \rightarrow +\infty)$ ، أو سالب المالانهاية $(x \rightarrow -\infty)$ بكل من: درجة دالة كثيرة الحدود والمعامل الرئيس لها.

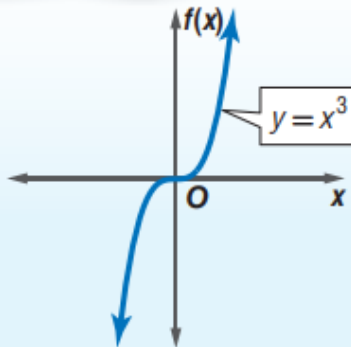
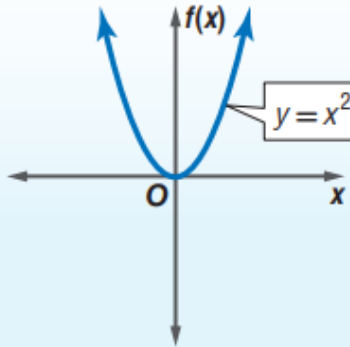
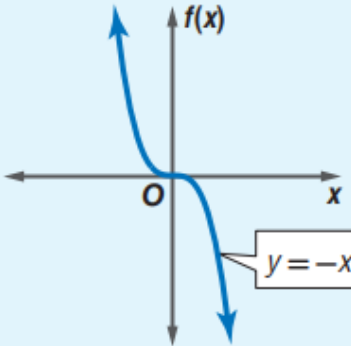
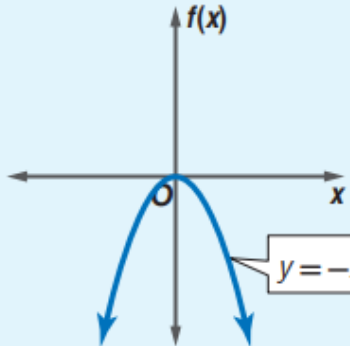
إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل
البياني
المعامل الرئيس ودرجة
كثيرة الحدود هما
العاملان الوحيدان في
تحديد سلوك طرفي
التمثيل البياني.

أضف إلى
مطوبتك

سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

مفهوم أساسي

<p>الدرجة : فردية المعامل الرئيس : موجب</p>  <p>المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية</p> <p>سلوك طرفي التمثيل البياني : (في اتجاهين مختلفين)</p> <p>$x \rightarrow -\infty$ عندما $f(x) \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow +\infty$ عندما $f(x) \rightarrow +\infty$</p>	<p>الدرجة : زوجية المعامل الرئيس : موجب</p>  <p>المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو التي تساوي القيمة الصغرى .</p> <p>سلوك طرفي التمثيل البياني : (في الاتجاه نفسه)</p> <p>$x \rightarrow -\infty$ عندما $f(x) \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$ عندما $f(x) \rightarrow +\infty$</p>
<p>الدرجة : فردية المعامل الرئيس : سالب</p>  <p>المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية</p> <p>سلوك طرفي التمثيل البياني : (في اتجاهين مختلفين)</p> <p>$x \rightarrow -\infty$ عندما $f(x) \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$ عندما $f(x) \rightarrow -\infty$</p>	<p>الدرجة : زوجية المعامل الرئيس : سالب</p>  <p>المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل من أو التي تساوي القيمة العظمى</p> <p>سلوك طرفي التمثيل البياني : (في الاتجاه نفسه)</p> <p>$x \rightarrow -\infty$ عندما $f(x) \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow +\infty$ عندما $f(x) \rightarrow -\infty$</p>

صفر الدالة هو الإحداثي x لنقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور x ، لذا فإنه يمكن تحديد عدد الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية لمعادلة كثيرة الحدود من التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود المرتبطة بها. تذكر أن مقاطع x تحدد هذه الأصفار؛ ولذا فإن عدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع محور x يساوي عدد هذه الأصفار.

أضف إلى

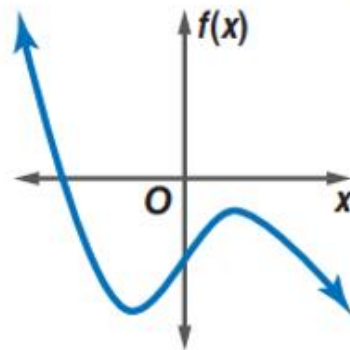
مطوبتك

أصفار الدوال الفردية الدرجة والزوجية الدرجة

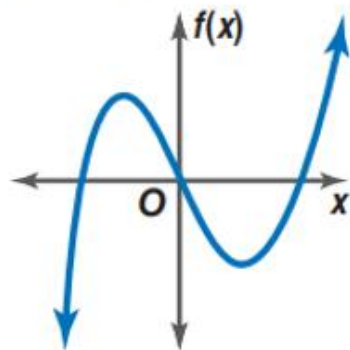
مفهوم أساسي

يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية، ويكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار أو لا يكون لها أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

كثيرتا حدود فرديتا الدرجة

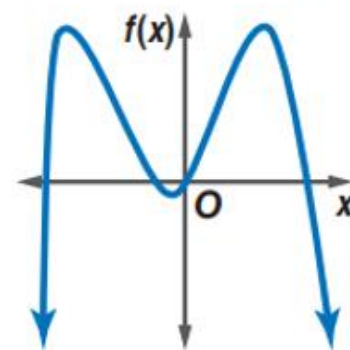


لها صفر واحد حقيقي

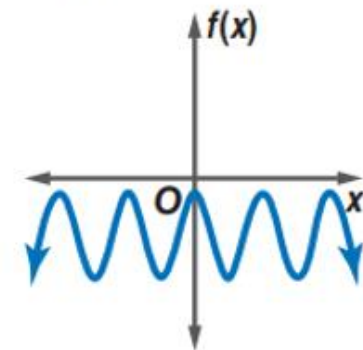


لها 3 أصفار حقيقية

كثيرتا حدود زوجيتا الدرجة



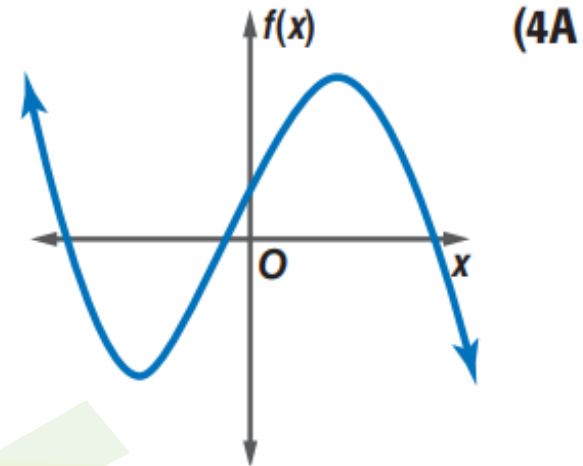
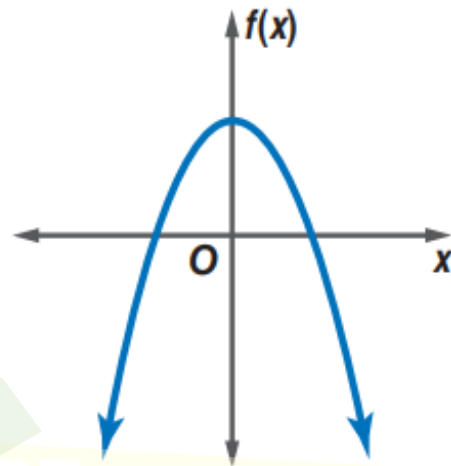
لها 4 أصفار حقيقية



ليس لها أصفار حقيقية

تحقق من فهمك

- أجب عن الأسئلة الآتية لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :
- صف سلوك طرفي التمثيل البياني .
 - حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
 - اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.



أروان القضاة

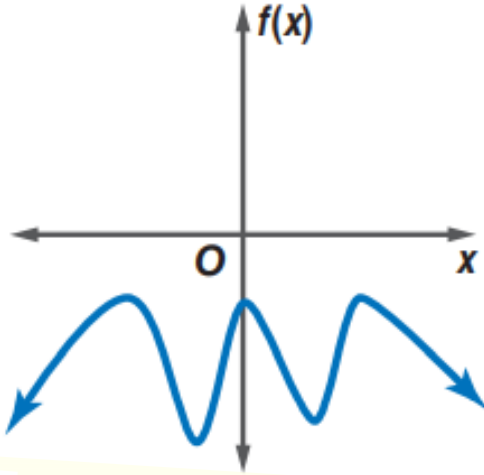
أجب عن الفروع $a - c$ لكل من التمثيلين البيانيين أدناه :

(a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

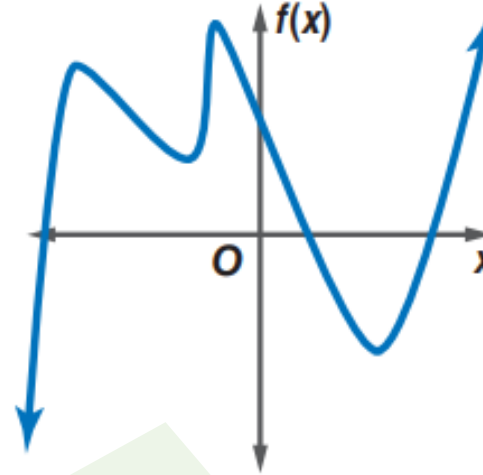
(b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.

(c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.

(12)

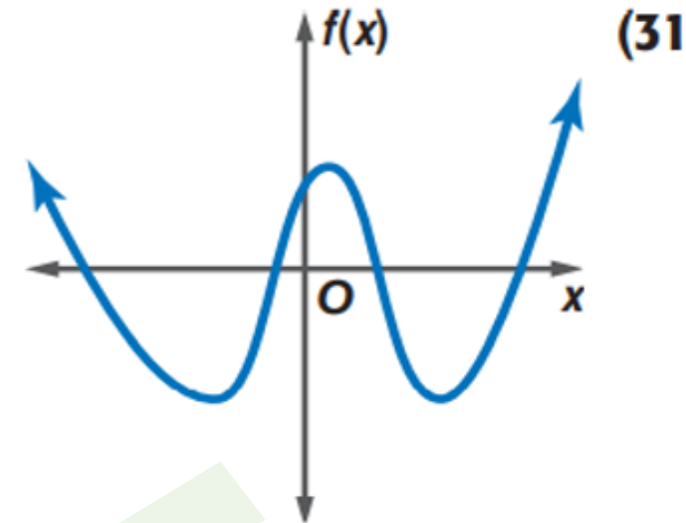
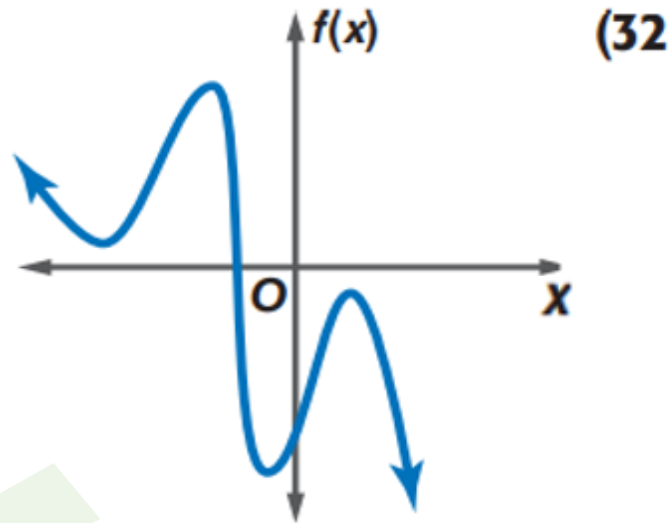


(11)



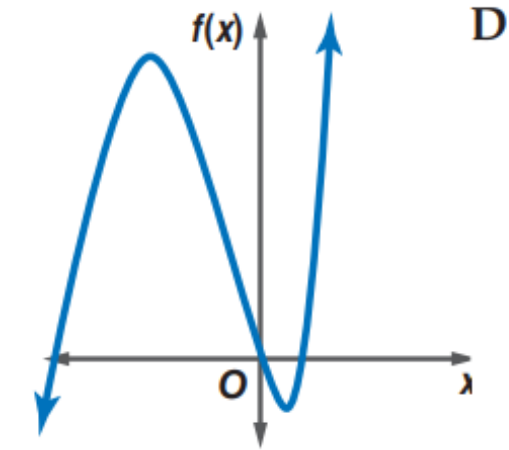
أجب عن الفروع من **a-c** لكل التمثيلات البيانية الآتية:

- (a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
(b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
(c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.



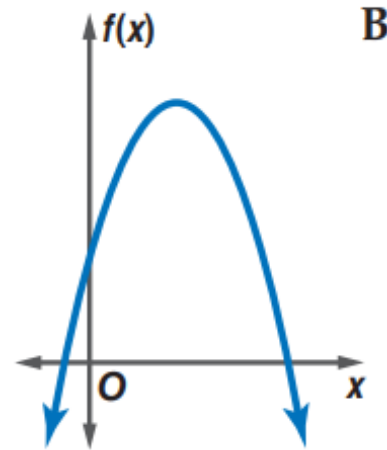
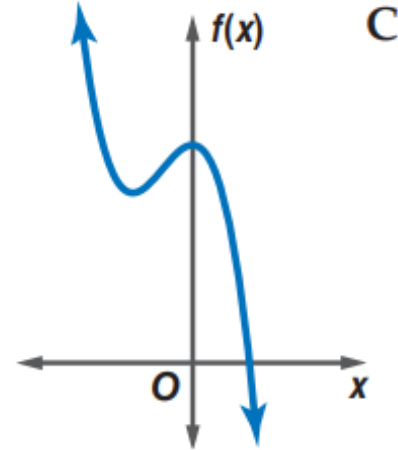
حدّد التمثيل البياني المناسب لكل دالة في الأسئلة (39–42) مستعملًا درجة كثيرة الحدود وسلوك طرفي التمثيل البياني لها.

تدرب وحل المسائل



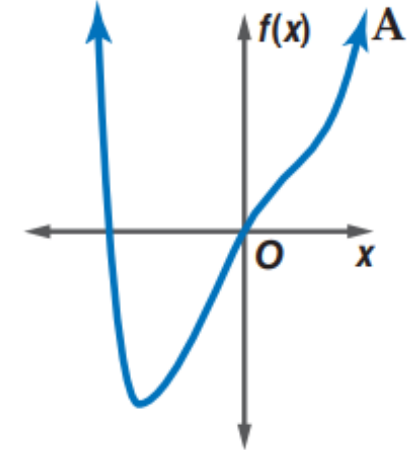
$f(x) = -2x^2 + 8x + 5$ **(40)**

$f(x) = -4x^3 - 4x^2 + 8$ **(42)**



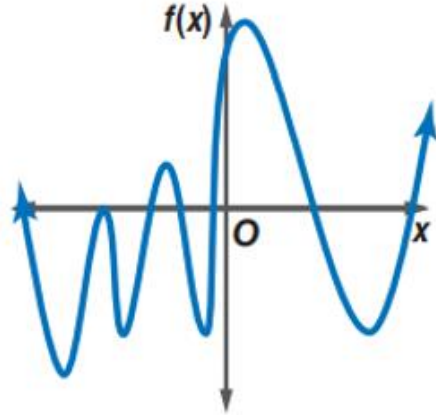
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$ **(39)**

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x$ **(41)**



أروان القضية

(52) **اكتشف الخطأ:** حدّد كل من ماجد وبدر عدد أصفار التمثيل البياني المجاور. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.



بدر
يوجد 7 أصفار؛ لأن التمثيل
البياني يقطع المحور x سبع
مرات.

ماجد
يوجد 8 أصفار؛ لأن التمثيل
البياني يقطع المحور x 7 مرات،
وأحد الجذور مكرر مرتين.

(56) ما باقي قسمة: $x^3 - 7x + 5$ على $x + 3$ ؟

-1 **C**

-11 **A**

11 **D**

1 **B**

(57) إذا كان $i = \sqrt{-1}$ ، فإن $5i(7i)$ يساوي :

-35 **C**

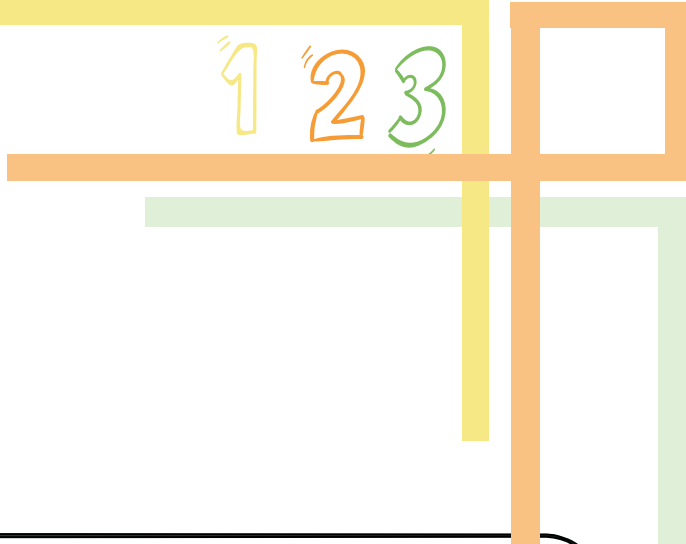
70 **A**

-70 **D**

35 **B**



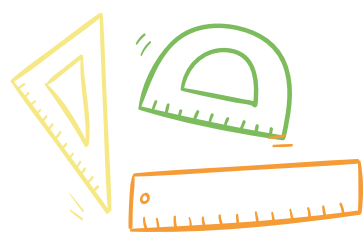
الدرس السادس
حل معادلات كثيرات الحدود

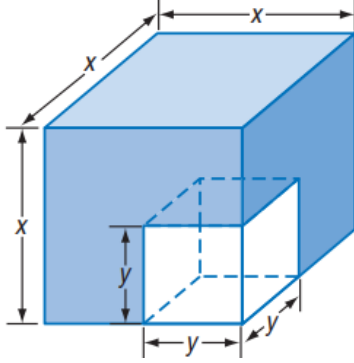


فيما سبق
درست حل معادلات تربيعية
بالتحليل الى العوامل

- المفردات
- 1. كثيرة حدود أولية
 - 2. الصورة التربيعية

الاهداف
1. تحليل كثيرات الحدود
2. تحليل كثيرات الحدود بالتحليل الى العوامل





قُطع مكعب صغير من آخر كبير كما في الشكل المجاور، وأُعطى حجم الجزء المتبقي والعلاقة بين بعدي المكعبين، والمطلوب إيجاد أبعاد المكعبين الصغير والكبير. لاحظ أنه يمكن إيجادها بتحليل كثيرة الحدود التكعيبية $x^3 - y^3$ كما في مثال 4.

أسئلة التعزيز

1. ما قانون حجم المكعب ؟
2. ما حجم المكعب الكبير في الشكل إذا كان $x = 5 \text{ in}$ ؟
3. ما الفرق بين حجمي المكعبين إذا كان $x = 5 \text{ in}, y = 2 \text{ in}$ ؟

تحليل كثيرات الحدود: تعلمت سابقاً أنه يمكنك تحليل كثيرات الحدود التربيعية تماماً كما تحلل الأعداد الكلية، ولكن عواملها ستكون كثيرات حدود أخرى، وكما هو الحال في كثيرات الحدود التربيعية يمكنك تحليل بعض كثيرات الحدود التكعيبية بقوانين خاصة.

مفهوم أساسي	
مجموع مكعبين والفرق بينهما	
أضف إلى مطويتك	
طريقة التحليل	الحالة العامة
مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها إلى كثيرتي حدود درجة كل منهما أقل من درجة كثيرة الحدود المُعطاة **كثيرة حدود أولية**.

إرشادات للدراسة

التحليل التام لكثيرات الحدود

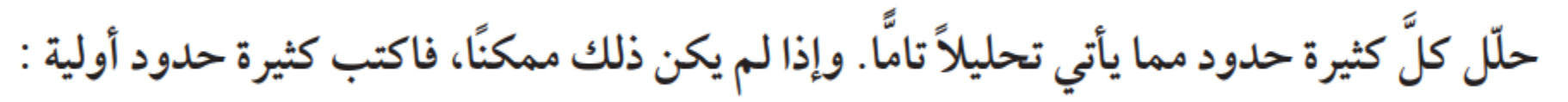
يعد تحليل كثيرة الحدود تحليلاً تاماً إذا كتبت في صورة ناتج ضرب كثيرات حدود جميعها أولية، أي إذا حلت إلى أقصى درجة ممكنة.

تحقق من فهمك

حلّ كلاً من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية: توزيع - إنجاح - توثيق

$$-54w^4 - 250wz^3 \quad \textbf{(1B)}$$

$$5y^4 - 320yz^3 \quad \textbf{(1A)}$$


$$8c^3 - 27d^3 \quad (12)$$
$$8c^3 - 125d^3 \quad \mathbf{(6)}$$

يلخص الجدول الآتي معظم الطرائق المستعملة لتحليل كثيرات الحدود، وعندما تريد تحليل كثيرة حدود ابحث أولاً عن العامل المشترك الأكبر، ثم حدد ما إذا كانت كثيرة الحدود الناتجة بعد إخراج العامل المشترك الأكبر قابلة للتحليل أم لا مستعملاً واحدة أو أكثر من الطرائق المذكورة في الجدول أدناه:

ملخص المفهوم		
طرائق التحليل		
أضف إلى مطوبتك	نموذج	عدد الحدود
	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$	أي عدد
	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	حدان الفرق بين مربعين مجموع مكعبين الفرق بين مكعبين
	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	ثلاثة حدود
	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$	ثلاثية الحدود بالصورة العامة
	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$ $= (a + b)(x + y)$	أربعة حدود أو أكثر

تحقق من فهمك

حلّ كلاً من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

$$30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2 \quad (2A)$$

$$13ax + 18bz - 15by - 14az \quad (2B)$$

حلّل كلّ كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًّا. وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

$$3ax + 2ay - az + 3bx \quad (1)$$

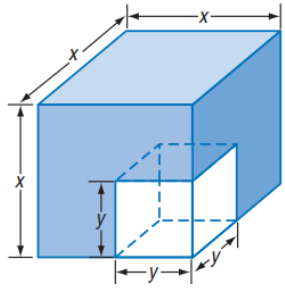
تأكد

$$12ax^2 - 20cy^2 - 18bx^2 - 10ay^2 + 15by^2 + 24cx^2 \quad (19)$$

تدرب وحل المسائل

تحقق من فهمك

(4) هندسة: إذا كان طول حرف المكعب الصغير ثلث طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي 3250cm^3 ، فأوجد بُعدي المكعبين.



(7) **إنشاءات:** صنع أنس ممراً خشبياً عرضه x ft حول بركة مستطيلة الشكل. فإذا كان طول البركة 40ft وعرضها 30 ft، ومساحتها مع الممر 2000ft^2 ، فما عرض الممر الخشبي؟



إرشادات للدراسة

الصورة التربيعية

لكتابه كثيرة حدود
على الصورة التربيعية،
اختر العبارة المكافئة
// بالنظر إلى الحدود
التي تحوي متغيرات،
واهتم خصوصاً بأسس
المتغير الأصلي في
تلك الحدود. فهناك
كثيرات حدود لا يمكن
كتابتها على الصورة
التربيعية.

تستطيع أحياناً أن تكتب كثيرة حدود فيها المتغير x على الصورة $au^2 + bu + c$ ، فمثلاً بفرض أن $u = x^2$ ، يمكنك كتابة كثيرة الحدود $x^4 + 12x^2 + 32$ على الصورة $(x^2)^2 + 12(x^2) + 32$ أو $u^2 + 12u + 32$. وكثيرة الحدود الجديدة هذه تكافئ كثيرة الحدود الأصلية، ولكنها مكتوبة على **الصورة التربيعية**.

أضف إلى

مطوبتك

الصورة التربيعية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: الصورة التربيعية لكثيرة الحدود هي: $au^2 + bu + c$ ، $a \neq 0$ ، a, b, c أعداد حقيقية، ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود في المتغير x على هذه الصورة، وذلك بعد تعريف u بدلالة x .

$$12x^6 + 8x^3 + 1 = 3(2x^3)^2 + 4(2x^3) + 1 \quad \text{مثال:}$$

اكتب كلاً من العبارتين الآتيتين في الصورة التربيعية إن أمكن ذلك:

تحقق من فهمك

$$8x^4 + 12x^2 + 18 \quad (5B)$$

$$x^4 + 5x + 6 \quad (5A)$$

اكتب كلاً من العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكناً:

تدرب وحل المسائل

$$x^4 + 12x^2 - 8 \quad (21)$$

تأكد

$$4x^6 - 2x^3 + 8 \quad (8)$$

تدرب وحل المسائل

$$64x^3 + 1 = 0 \quad (46)$$

حل المعادلة:

تحقق من فهمك

$$4x^4 - 8x^2 + 3 = 0 \quad (6A)$$

40 أي مما يأتي هو تحليل للعبارة $27x^3 + y^3$ ؟

A $(3x + y)(3x + y)(3x + y)$

B $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

C $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

D $(3x - y)(9x^2 + 9xy + y^2)$

69 إجابة قصيرة حل المعادلة: $x^3 + 27 = 0$.



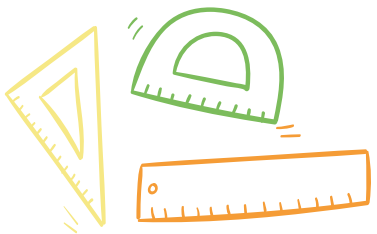
الدرس السابع

نظريتا الباقي والعوامل

- المفردات
1. نظرية الباقي
 2. التعويض التركيبي
 3. نظرية العوامل

فيما سبق
درست استعمال خاصية التوزيع
والتحليل لتبسيط عبارات جبرية

الاهداف
1. ايجاد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي
2. استعمال التعويض التركيبي لتحديد ما إذا كانت ثنائية حد عاملا
من عوامل كثيرة الحدود أم لا



قدّر صاحب بقالة أرباحه السنوية بالدالة:

$S(x) = 0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$ ، حيث x عدد السنوات منذ العام 1418هـ، وتمثل $S(x)$ قيمة الأرباح بمئات الريالات.

يمكنك استعمال هذه الدالة لتقدير الأرباح في العام 1438هـ، بإيجاد قيمة الدالة $S(x)$ عندما $x = 20$ ، ويمكنك استعمال التعويض التركيبي باعتباره طريقة أخرى للوصول إلى ذلك.

أسئلة التعزيز

1. ما قيمة x إذا رغبت في معرفة عدد الطلاب عام 1414هـ ؟
2. هل تتوقع أن يتساوى العدد الفعلي للطلاب عام 1433هـ مع العدد الذي تحصل عليه من الدالة ، وضح إجابتك ؟

التعويض التركيبي: يمكنك إيجاد باقي قسمة دالة كثيرة حدود مثل: $f(x) = -3x^2 + 5x + 4$ على الدالة $x - 3$ بطريقتين:

الطريقة 1: القسمة الطويلة

$$\begin{array}{r} -3x - 4 \\ x - 3 \overline{) -3x^2 + 5x + 4} \\ (-) \underline{-3x^2 + 9x} \\ -4x + 4 \\ (-) \underline{-4x + 12} \\ -8 \end{array}$$

الطريقة 2: القسمة التركيبية

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & -3 & 5 & 4 \\ & & -9 & -12 \\ \hline & -3 & -4 & -8 \end{array}$$

قارن بين باقي القسمة وهو العدد -8 ، وقيمة $f(3)$.

عوّض العدد 3 بدلاً من x $f(3) = -3(3)^2 + 5(3) + 4$

اضرب $= -27 + 15 + 4$

بسّط $= -8$

لاحظ أن قيمة $f(3)$ تساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 3$. وهذا يوضح **نظرية الباقي**.

التعبير اللفظي إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$ ، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$ ، وكذلك :

الباقي	+	المقسوم عليه	•	ناتج القسمة	=	المقسوم
$P(r)$	+	$(x - r)$	•	$Q(x)$	=	$P(x)$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

مثال	+	42	+	$(x + 10)$	•	$(x - 4)$	=	$x^2 + 6x + 2$
------	---	----	---	------------	---	-----------	---	----------------

إن عملية إيجاد قيمة دالة عند عدد بتطبيق نظرية الباقي واستعمال القسمة التركيبية تسمى **التعويض التركيبي**. وهي طريقة سهلة لإيجاد قيم دوال كثيرات الحدود، خصوصاً عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية.

التعويض التركيبي

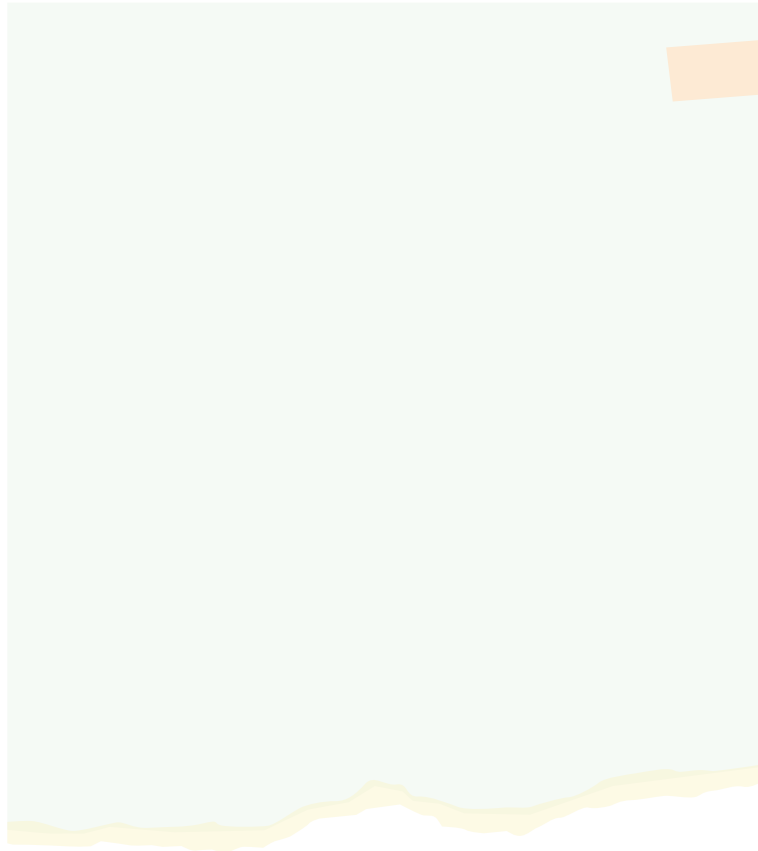
تحقق من فهمك

(1A) إذا كان $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$ ، فأوجد $f(3)$.

أوجد $f(4)$, $f(-2)$ من الدالتين الآتيتين مستعملًا التعويض التركيبي:

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + x^2 - 4x - 10 \quad (2)$$

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 14 \quad (1)$$



عوامل كثيرات الحدود: تبين القسمة التركيبية أدناه أن ناتج قسمة $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ على $x + 3$ هو $2x^2 - 9x + 10$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & -3 & -17 & 30 \\ & & -6 & 27 & -30 \\ \hline & 2 & -9 & 10 & 0 \end{array}$$

عند قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد من عواملها، يكون ناتج القسمة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة كثيرة الحدود الأصلية.

بناءً على عملية القسمة وباستعمال نظرية الباقي فإن:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{المقسوم} & & \text{ناتج القسمة} & & \text{المقسوم عليه} & & \text{الباقي} \\ \hline 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 & = & (2x^2 - 9x + 10) & \cdot & (x + 3) & + & 0 \end{array}$$

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن $f(-3) = 0$. وهذا يعني أن $x + 3$ عامل لكثيرة الحدود $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$. وهذا يوضح **نظرية العوامل**، التي تعدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

نظرية العوامل

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

تحقق من فهمك

(3) حدد ما إذا كان $x - 2$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

إرشادات للدراسة

التحليل إلى العوامل

ليس شرطاً أن تكون
عوامل كثيرة الحدود
ثنائيات حد. فمثلاً،
عاملاً كثيرة الحدود
 $x^3 + x^2 - x + 15$ هما
 $x + 3$ و $x^2 - 2x + 5$.

في كلِّ مما يأتي كثيرة حدود ودالة من الدرجة الأولى، حدّد ما إذا كانت هذه الدالة عاملاً من عوامل كثيرة الحدود أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى:

(4) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x - 1$

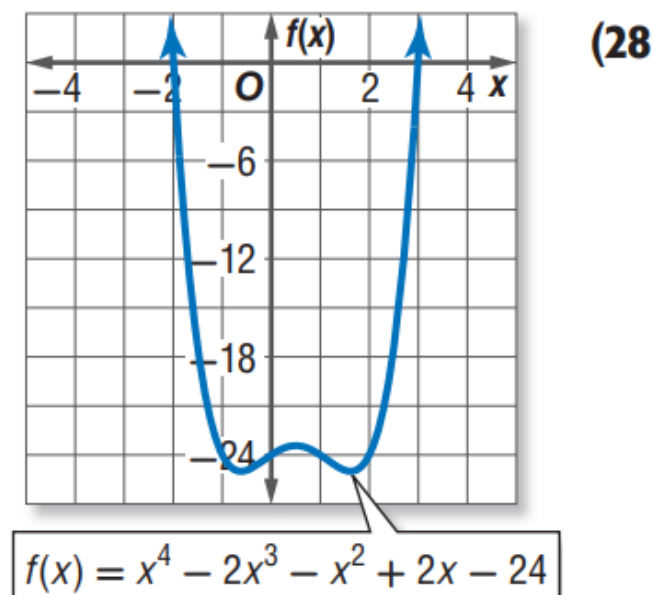
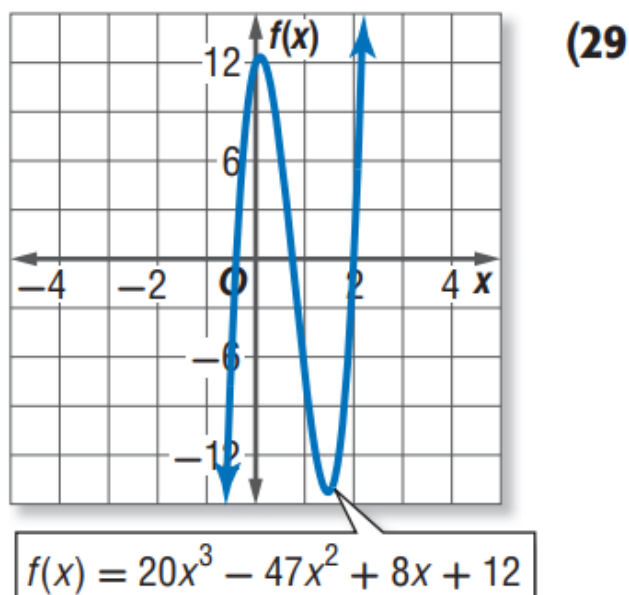
(5) $x^3 + x^2 - 16x - 16; x + 1$



(3) **جوارح:** يمكن تمثيل عدد أزواج النسور في محمية باستعمال الدالة $P(x) = -0.16x^3 + 15.83x^2 - 154.15x + 1147.97$ حيث x عدد السنوات منذ عام 1390 هـ، فما العدد التقريبي المتوقع لأزواج هذه النسور في عام 1438 هـ؟



استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يأتي:



(37) تبرير: إذا قسمت دالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - c$ ، فماذا يمكن أن تستنتج إذا كان:

(a) الباقي يساوي صفراً؟

(b) الباقي يساوي 1؟

(c) ناتج القسمة يساوي 1 والباقي يساوي صفراً؟



تدريب على اختبار

(41) ما حاصل ضرب العددين المركبين $(4 + i)(4 - i)$ ؟

17 **C**

15 **A**

$17 - 8i$ **D**

$16 - i$ **B**



الدرس الثامن

الجزور والاصفار

1 2 3

المفردات

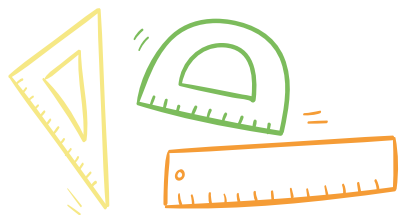
1. النظرية الاساسية في الجبر

فيما سبق

درست استعمال الاعداد المركبة
لوصف حلول المعادلات التربيعية

الاهداف

1. تحديد عدد جزور معادلة كثيرة حدود وأنواعها
2. ايجاد عدد الاصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والاصفار
التخيلية للدالة
3. كتابة دالة كثيرة حدود بأقل درجة ممكنة بمعرفة أصفارها





يستعمل مدير الإنتاج في مصنع الدالة:

$$g(x) = 1.384x^4 - 0.003x^3 + 0.28x^2 - 0.078x + 1.365$$

 لتقدير معدل تكلفة إنتاج القطعة الواحدة على مدى عدة سنوات،
 حيث x عدد السنوات منذ 1410هـ.
 ولكي تجد العام الذي يبلغ فيه معدل تكلفة إنتاج قطعة واحدة
 قيمة معينة، يمكنك استعمال جذور معادلة كثيرة الحدود المرتبطة
 بالدالة.

أسئلة التعزيز

1. بناء على المعادلة أعلاه: ما تكلفة إنتاج القطعة الواحدة في عام 1410هـ؟
2. هل تبقى المعادلة صحيحة لقيم x السالبة؟

أنواع الجذور تعلمت سابقاً أن صفر دالة مثل $f(x)$ يمكن أن يكون أية قيمة مثل c ، حيث $f(c) = 0$. وعند تمثيل الدالة بيانياً تكون أصفارها الحقيقية هي مقاطع المحور x .

أضف إلى

مطوبتك

ملخص المفهوم

الأصفار، والعوامل، والجذور، والمقاطع

التعبير اللفظي: إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود،

فإن العبارات الآتية متكافئة:

- c صفر للدالة $P(x)$.
- c جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$.
- إذا كان c عدداً حقيقياً، فإن $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع تمثيل الدالة $P(x)$ مع المحور x .

مثال:

افترض أن دالة كثيرة الحدود هي: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

فإن أصفار هذه الدالة هي: $-3, -2, 1, 2$

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$

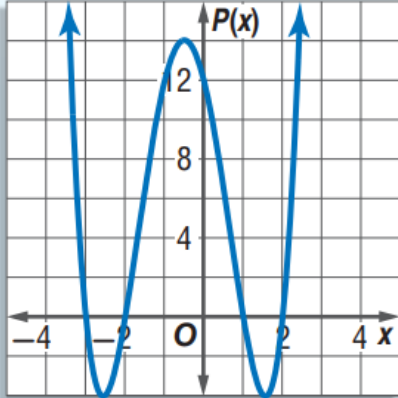
هي: $-3, -2, 1, 2$

وعوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

هي: $(x + 3), (x + 2), (x - 1), (x - 2)$

ونقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x)$ مع المحور x

هي: $(-3, 0), (-2, 0), (1, 0), (2, 0)$.





عند حل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر من الممكن أن يكون لها جذر حقيقي واحد أو أكثر، وقد لا يوجد جذور حقيقية (أي أن الجذور أعداد تخيلية). وبما أن الأعداد الحقيقية والتخيلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، يمكن القول إن أية معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد مركب على الأقل، وهذه هي النظرية الأساسية في الجبر.

أضف إلى
مطوبتك

النظرية الأساسية في الجبر

مفهوم أساسي

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

حُلَّ كُلِّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها :

$$x^4 - 16 = 0 \quad (1B)$$

$$x^3 + 2x = 0 \quad (1A)$$

تحقق من فهمك

حُلِّ كلَّ معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، ونوعها:

تأكد

(3) $16x^4 - 81 = 0$

(1) $x^2 - 3x - 10 = 0$

أضف إلى مطوبتك

مفهوم أساسي

نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

التعبير اللفظي: يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

مثال:

$x^3 + 2x^2 + 6$	$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6$	$-2x^5 - 3x^2 + 8$
3 جذور	4 جذور	5 جذور

وقد اكتشف العالم الفرنسي ديكارت علاقة بين إشارات معاملات دالة كثيرة الحدود وعدد الأصفار الحقيقية.



أضف إلى مطوبتك

مفهوم أساسي

قانون ديكارت للإشارات

إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن:

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.

إيجاد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والأصفار التخيلية لدالة



(2) اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة.

$$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

تحقق من فهمك



تعلمت سابقاً أن حاصل ضرب العددين المركبين المترافقين هو عدد حقيقي دائماً، ومن الجدير بالذكر أن الجذور المركبة تكون في أزواج مترافقة. فمثلاً إذا علمت أن أحد جذري المعادلة $x^2 - 8x + 52 = 0$ هو $4 + 6i$ ، فإنك تستنتج أن الجذر الآخر هو $4 - 6i$.

إرشادات للدراسة

استعمال الأصفار لكتابة الدالة

إن أي دالة على الصورة
 $f(x) = a(x^3 - 9x^2 + 16x + 26)$
(حيث a عدد صحيح لا
يساوي الصفر)، تحقق
المعطيات الواردة في
المثال 3، ولكن اعتبر أن
 $a = 1$ للتسهيل فقط.

إرشادات للدراسة

الجذور المكررة

يمكن أن يكون لمعادلات
كثيرات الحدود جذر
مكرر مرتين أو ثلاث
أو أربع مرات وهكذا.

وينطبق هذا الأمر على أصفار دوال كثيرات الحدود أيضاً. فإذا كان العدد المركب صفراً لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن مرافقه أيضاً صفر لدالة كثيرة الحدود.

أضف إلى

مطويتك

نظرية الأصفار المركبة المترافقة

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا كان a, b عددين حقيقيين، وكان $a + bi$ صفراً لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضاً.

مثال: إذا كان $3 + 4i$ صفراً للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$ ، فإن $3 - 4i$ صفر للدالة أيضاً.

عندما تعطى جميع أصفار دالة كثيرة حدود ويطلب إليك تحديد الدالة، حوّل الأصفار إلى عوامل، ثم اضرب جميع العوامل بعضها في بعض؛ لتحصل على دالة كثيرة الحدود المطلوبة.

تحقق من فهمك

(3) اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $-1, 1 + 2i$ من أصفارها.



اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي :

تدرب وحل المسائل

تأكد

$$f(x) = 4x^6 - 5x^4 - x^2 + 24 \quad (25)$$

$$f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 2x - 4 \quad (7)$$

تدرب وحل المسائل

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

$$4, -1, 6 \quad (9)$$



$$-3, 1, -3i \quad (30)$$

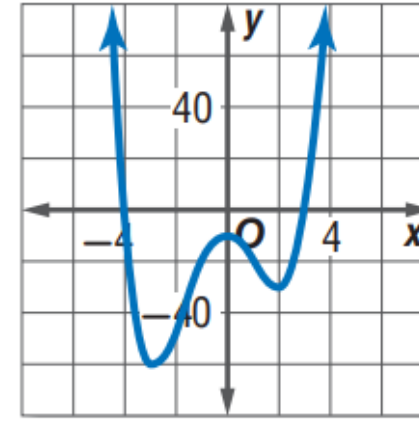
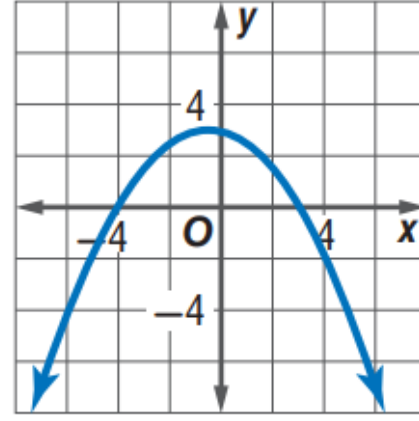
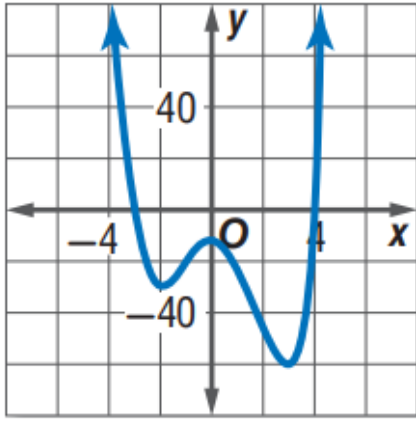
اكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

تدرب وحل المسائل

(a) $-3, 4, i, -i$

(b) $-4, 3$

(c) $-4, 3, i, -i$



(40) حدد أي المعادلات الآتية تختلف عن الأخريات، ووضح إجابتك:

$$r^4 + 1 = 0$$

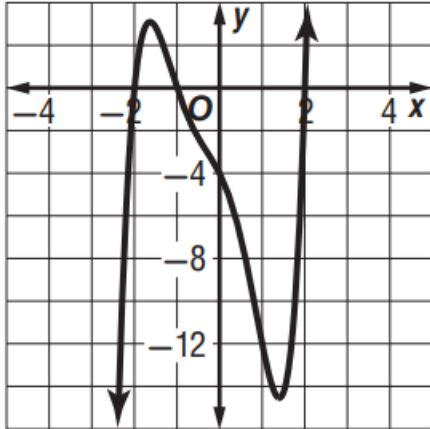
$$r^3 + 1 = 0$$

$$r^2 - 1 = 0$$

$$r^3 - 8 = 0$$

تدريب على اختبار

(43) استعمل التمثيل البياني للدالة: $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$ وحدد أيًا مما يأتي لا يعد عاملاً لكثيرة الحدود $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$ ؟



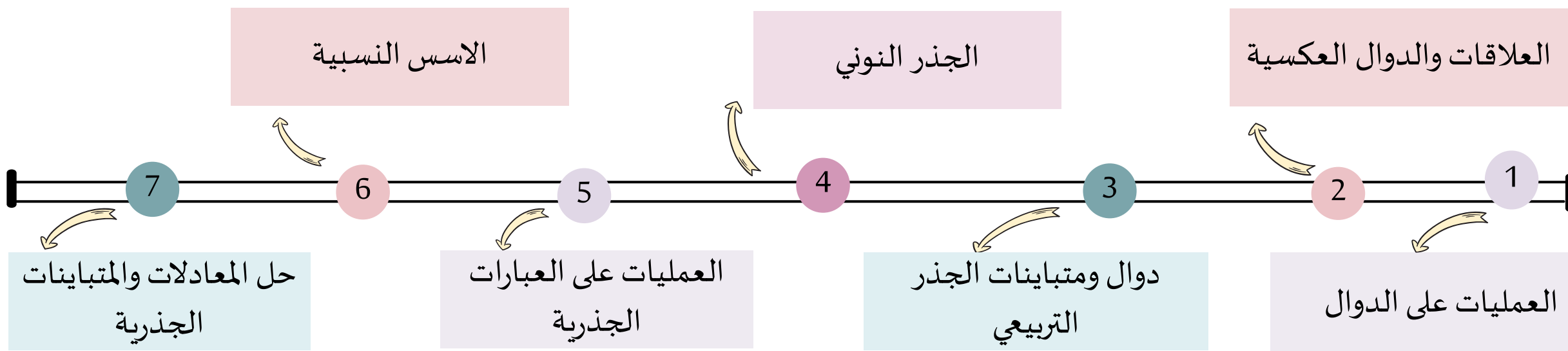
C $x + 2$

A $x - 2$

D $x + 1$

B $x - 1$

الفصل الرابع :
العلاقات والدوال العكسية
والجذرية



تنبيه: كل الحقوق محفوظة ، نسخة الكترونية مجانية لا تباع عند إزالة شعار المجموعة أو اسم المؤلفه سوف يعرضك للمسائلة القانونية.



الدرس الاول العمليات على الدوال

المفردات

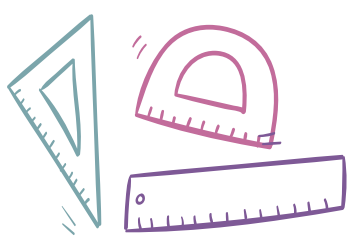
1. تركيب دالتين

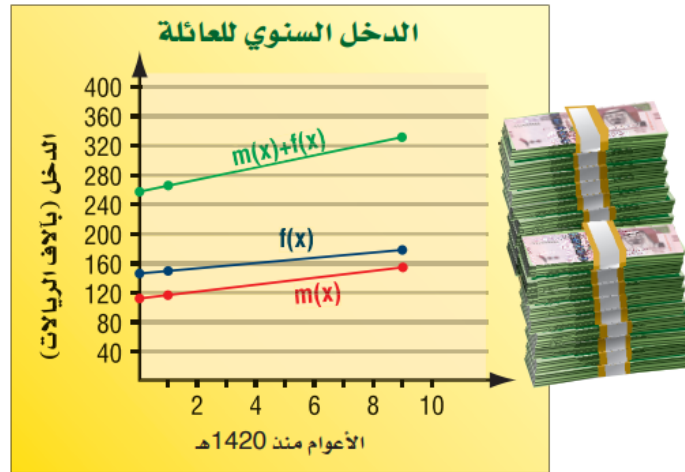
درست إجراء العمليات على
كثيرات الحدود

فيما سبق

الاهداف

1. ايجاد مجموع دالتين والفرق بينهما وحاصل
ضربهما وقسمتهما .
2. ايجاد تركيب دالتين





تتبع التمثيلات البيانية المجاورة الدخل السنوي لعائلة منذ عام 1420 هـ؛ حيث $f(x)$ تعبر عن الدخل السنوي للزوج، و $m(x)$ تعبر عن الدخل السنوي للزوجة.

يمكن التعبير عن إجمالي الدخل السنوي لتلك العائلة بالدالة $f(x) + m(x)$.

أسئلة التعزيز

1. ما السنوات الممثلة بالقيم $x = 0, x = 4, x = 10$ ؟
2. ما القيم التقريبية لكل من $m(0), f(0), m(0) + f(0)$ ؟

العمليات الحسابية: لقد أجريت العمليات الحسابية على كثيرات الحدود في الفصل السابق. ويمكنك إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الدوال أيضًا. يمكنك الاعتماد على القواعد الآتية لإجراء العمليات الحسابية على الدوال:

مفهوم أساسي		
العمليات على الدوال		
أضف إلى مطوبتك	مثال	العملية
	تكن $f(x) = 2x, g(x) = -x + 5$	
	$2x + (-x + 5) = x + 5$	الجمع
	$2x - (-x + 5) = 3x - 5$	الطرح
	$2x(-x + 5) = -2x^2 + 10x$	الضرب
	$\frac{2x}{-x + 5}, x \neq 5$	القسمة
		$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

$$f(x) = x^2 + 5x - 2, g(x) = 3x - 2$$

$$(f - g)(x) \quad (1B)$$

$$(f + g)(x) \quad (1A)$$

جمع الدوال وطرحها

تحقق من فهمك

يتكون مجال جميع الدوال الناتجة عن عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ من تقاطع مجاليهما كما أن مجال الدالة الناتجة عن قسمة هاتين الدالتين هو تقاطع مجاليهما أيضًا، مع استثناء القيم التي تجعل المقام يساوي صفرًا.

تنبيه !

قسمة دالتين

بما أنه قد تم تعلم قسمة كثيرات الحدود في الفصل 3، فإنه سيكتفي عند إيجاد ناتج قسمة دالتين (في هذا الدرس) بكتابتهما في صورة دالة نسبية، وتحديد مجالها من دون إجراء عملية القسمة.



ضرب الدوال وقسمتها

تحقق من فهمك

$$f(x) = x^2 - 7x + 2, g(x) = x + 4$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \quad (2B)$$

$$(f \cdot g)(x) \quad (2A)$$

مراجعة المفردات

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين، ويرمز له بالرمز \cap .

أ.روان القضاة

أوجد $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي:

تأكد

$$f(x) = x + 2 \quad (1)$$

$$g(x) = 3x - 1$$

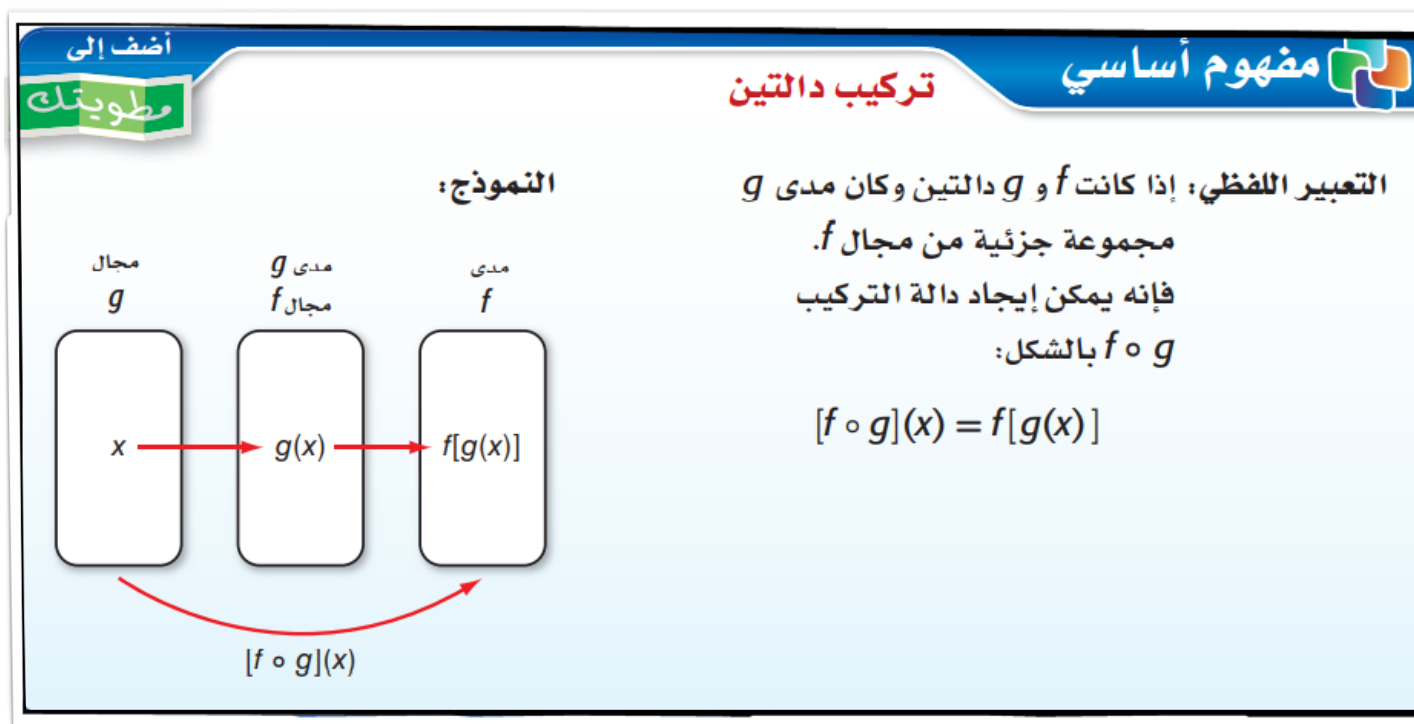
أوجد $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي:

تدرب وحل المسائل

$$f(x) = x^2 \quad (9)$$

$$g(x) = -x + 1$$

تركيب دالتين: هي إحدى الطرائق التي تستعمل لدمج دالتين. وعند **تركيب دالتين** فإن قيم دالة منهما تستعمل لحساب قيم الدالة الأخرى.



قراءة الرياضيات

تركيب دالتين

يرمز إلى تركيب الدالتين f و g بالرمز $f \circ g$ أو $f[g(x)]$ ، وتقرأ f بعد g .

إرشادات للدراسة

التركيب

كن حذراً من الخلط بين عملية تركيب دالتين $f[g(x)]$ وعملية ضرب دالتين $(f \cdot g)(x)$.

يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرف. فإذا كانت f و g دالتين، فإن $[f \circ g](x)$ يكون معرفاً فقط عند قيم x التي تجعل $g(x)$ عنصراً في مجال الدالة f . وكذلك تكون الدالة $[g \circ f](x)$ معرفة فقط عند قيم x التي تجعل $f(x)$ عنصراً في مجال الدالة g .

في معظم الحالات تكون $f \circ g \neq g \circ f$ ؛ لذا فإن ترتيب الدالتين عند تركيبهما مهم.

تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$ ، لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكناً:

(3B) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x - 6$

(3A) $g(x) = \{(4, 3), (2, -1), (9, 4), (3, 10)\}$

$f(x) = \{(3, -2), (-1, -5), (4, 7), (10, 8)\}$

أوجد $f \circ g, g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكناً:

تدرب وحل المسائل

تأكد

$$f = \{(-4, -14), (0, -6), (-6, -18), (2, -2)\} \quad (14)$$

$$g = \{(-6, 1), (-18, 13), (-14, 9), (-2, -3)\}$$

$$f = \{(2, 5), (6, 10), (12, 9), (7, 6)\} \quad (3)$$

$$g = \{(9, 11), (6, 15), (10, 13), (5, 8)\}$$

أوجد $f \circ g, g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكناً:

تدرب وحل المسائل

تأكد

$$f(x) = 2x^2 \quad (18)$$

$$g(x) = 8x^2 + 3x$$

$$f(x) = -3x \quad (5)$$

$$g(x) = 5x - 6$$

(4) **تسوق:** يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معاً على جهاز كهربائي هما: خصم 35 ريالاً، وتخفيض نسبته 15% ، فإذا كان سعر الجهاز الأصلي 300 ريال، فأيهما يعطي سعراً أقل: تطبيق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

(19 صناعة : ينتج مصنع نوعًا من الفناجين. فإذا كان ثمن بيع x فنجان يُعبر عنه بالدالة: $r(x) = 6.5x$ ، وتكلفة إنتاج x فنجان يُعبر عنها بالدالة: $c(x) = 0.75x + 1850$.

- (a) اكتب الدالة $p(x)$ التي تعبّر عن ربح المصنع إذا باع x فنجان.
- (b) أوجد ربح المصنع عند بيع 500 فنجان و 1000 فنجان و 5000 فنجان.



(39) **اكتشف الخطأ:** تقوم ريم والعنود بإيجاد الدالة $[f \circ g](x)$ ، حيث $f(x) = x^2 + 2x - 8$ ، $g(x) = x^2 + 8$. من منهما إجابتها صحيحة؟ وضح إجابتك.

العنود

$$\begin{aligned}[f \circ g](x) &= f[g(x)] \\ &= (x^2 + 8)^2 + 2x - 8 \\ &= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x - 8 \\ &= x^4 + 16x^2 + 2x + 58\end{aligned}$$

ريم

$$\begin{aligned}[f \circ g](x) &= f[g(x)] \\ &= (x^2 + 8)^2 + 2(x^2 + 8) - 8 \\ &= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x^2 + 16 - 8 \\ &= x^4 + 18x^2 + 72\end{aligned}$$

د

(43) إذا كان $g(x) = x^2 + 9x + 21$, $h(x) = 2(x + 5)^2$
فما الدالة المكافئة للدالة $h(x) - g(x)$ ؟

$k(x) = -x^2 - 11x - 29$ **A**

$k(x) = x^2 + 11x + 29$ **B**

$k(x) = x + 4$ **C**

$k(x) = x^2 + 7x + 11$ **D**

(44) إذا كان $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = x^2 + 5$
فإن قيمة $f[g(6)]$ تساوي:

38 **A**

43 **B**

86 **C**

261 **D**

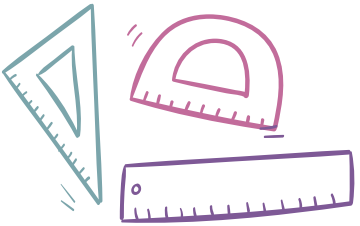
الدرس الثاني
العلاقات والدوال العكسية



- المفردات
1. العلاقة العكسية
 2. الدالة العكسية

فيما سبق
درست كتابة معادلات بالنسبة
لمتغير محدد وحلها

- الاهداف
1. ايجاد كلا من العلاقة العكسية والدالة العكسية .
 2. تحديد ما إذا كانت علاقة (أودالة) تمثل علاقة (أودالة عكسية)
لأخرى أم لا .





أمريكا	السعودية	
0.267		السعودية
	3.75	أمريكا

يبين الجدول المجاور قيمة الريال السعودي مقارنة بالدولار الأمريكي، والدالة $d = 0.267 r$ تمثل عدد الدولارات التي تحصل عليها مقابل كل ريال سعودي، ولمعرفة عدد الريالات التي تحصل عليها مقابل كل دولار أمريكي، حل المعادلة السابقة بالنسبة للمتغير r فتكون النتيجة $r \approx 3.75 d$ وتمثل دالة عكسية للدالة السابقة.

أسئلة التعزيز

1. اعتمادا على الجدول ، كم دولارا أمريكيا يقابل كلا من 5 ريالات ، 10 ريالات ؟
2. كم ريالا يقابل كلا من دولارا أمريكي ، 5 دولارات أمريكية ؟
3. ما مقلوب 0.267 وهل يظهر مقلوبه في الجدول ؟

إيجاد العلاقة العكسية: تذكر أن العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة. والعلاقة العكسية هي مجموعة من الأزواج المرتبة، يمكنك الحصول عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب في العلاقة، فيصبح مجال العلاقة هو مدى العلاقة العكسية لها، ومداها هو مجال العلاقة العكسية لها.

مفهوم أساسي **العلاقة العكسية** **أضف إلى مطوبتك**

التعبير اللفظي: تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

كلما احتوت إحداها على زوج مرتب (a, b) ، احتوت الأخرى على الزوج المرتب (b, a) .

مثال: كل من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى:

$$A = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\} \quad B = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3)\}$$

1 هندسة: إذا كانت الأزواج المرتبة للعلاقة $\{(-8, -3), (-8, -6), (-3, -6)\}$ ، تمثل إحداثيات رؤوس مثلث قائم الزاوية. فأوجد العلاقة العكسية لها، وصف تمثيلها البياني.

تحقق من فهمك

أوجد العلاقة العكسية لكلٍّ من العلاقتين الآتيتين:

تأكد

9 $\{(1, -5), (2, 6), (3, -7), (4, 8), (5, -9)\}$

1 $\{(-9, 10), (1, -3), (8, -5)\}$

إن ما ينطبق على الأزواج المرتبة في العلاقة والعلاقة العكسية، ينطبق أيضًا على الأزواج المرتبة في الدالة ومعكوسها، وإذا كان معكوس الدالة يمثل دالة أيضًا، فإنه يسمى **دالة عكسية**. ويرمز إلى الدالة العكسية للدالة $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.

مفهوم أساسي **خواص الدالة العكسية**

أضف إلى مطوبتك

التعبير اللفظي: إذا كان كل من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

مثال: ليكن $f(x) = x - 4$ ودالتها العكسية هي $f^{-1}(x) = x + 4$.

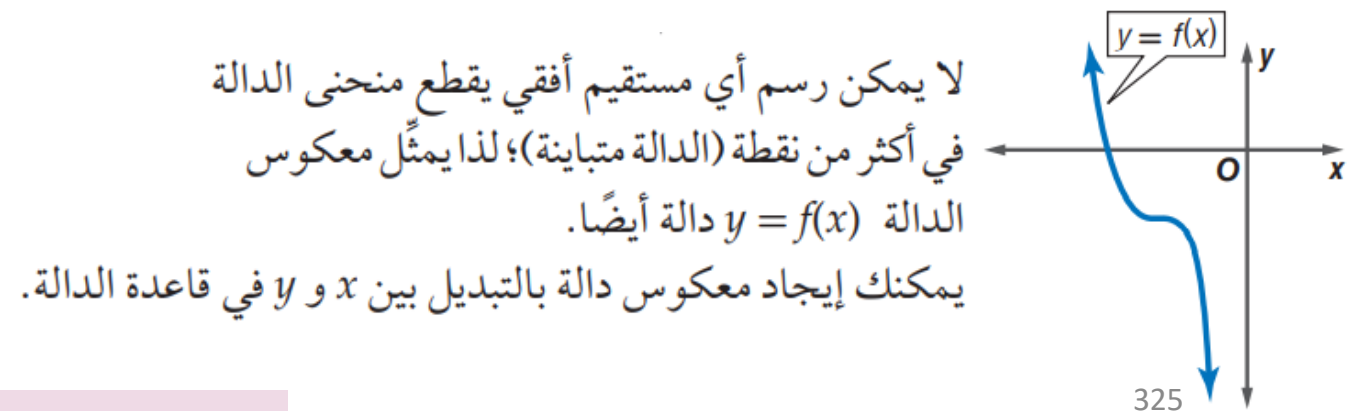
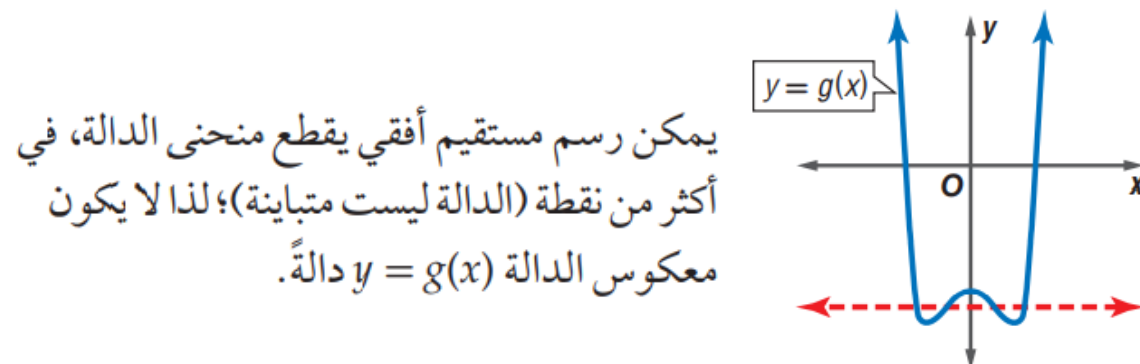
أوجد $f(6)$	أوجد $f^{-1}(2)$
$f(x) = x - 4$	$f^{-1}(x) = x + 4$
$f(6) = 6 - 4 = 2$	$f^{-1}(2) = 2 + 4 = 6$

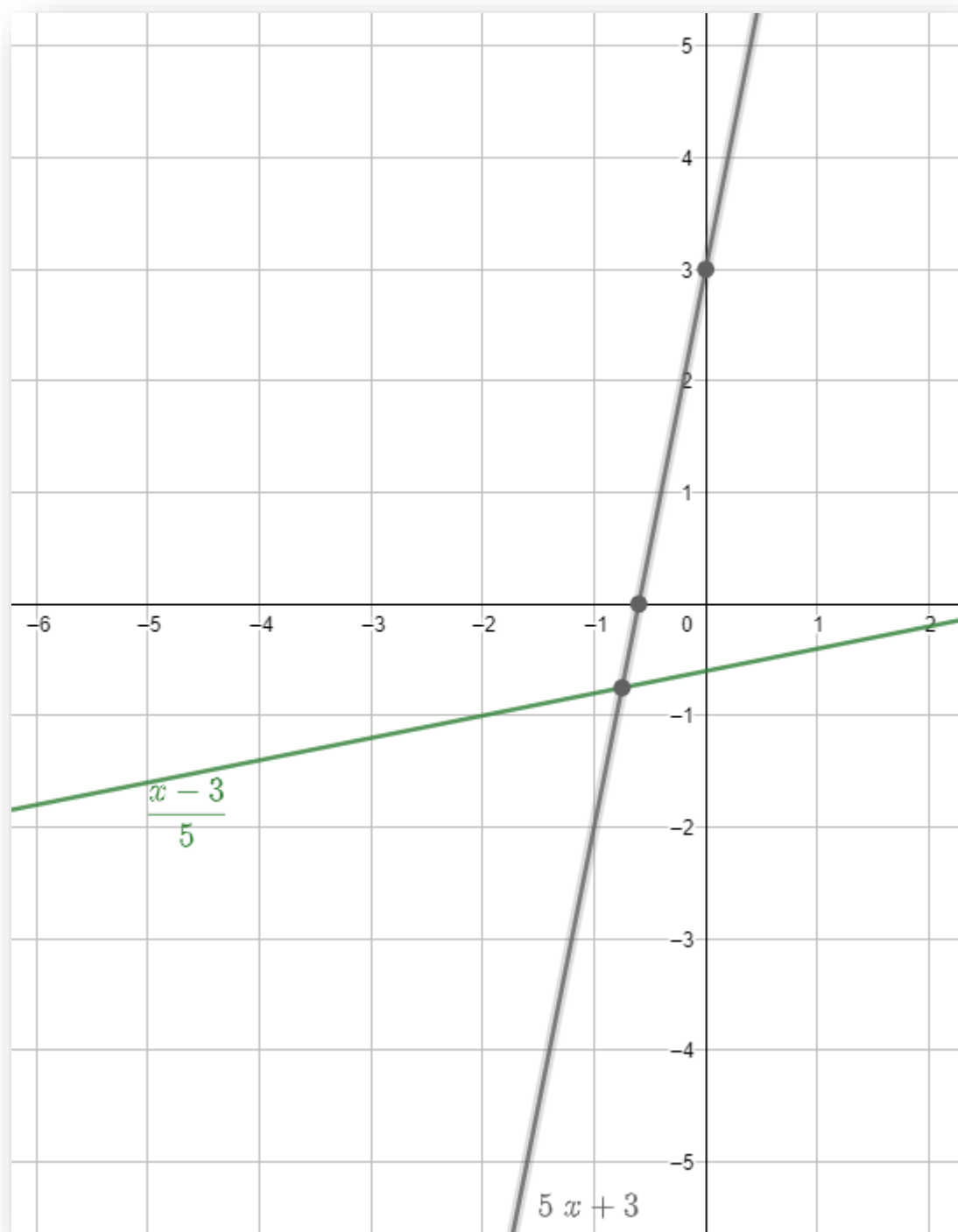
وبما أن كلاً من $f(x), f^{-1}(x)$ دالة عكسية للأخرى، فإن $f(6) = 2, f^{-1}(2) = 6$.

قراءة الرياضيات

الدالة العكسية
 f^{-1} يقرأ الدالة العكسية للدالة f . تذكر أن (-1) ليس أسًا.

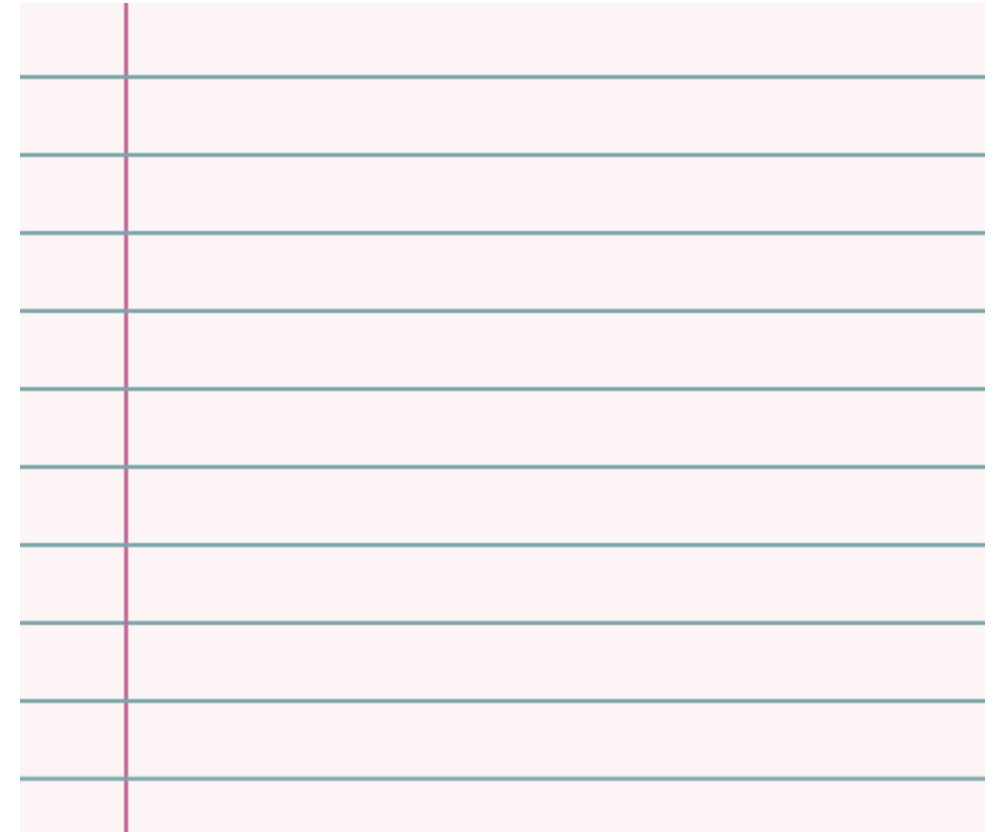
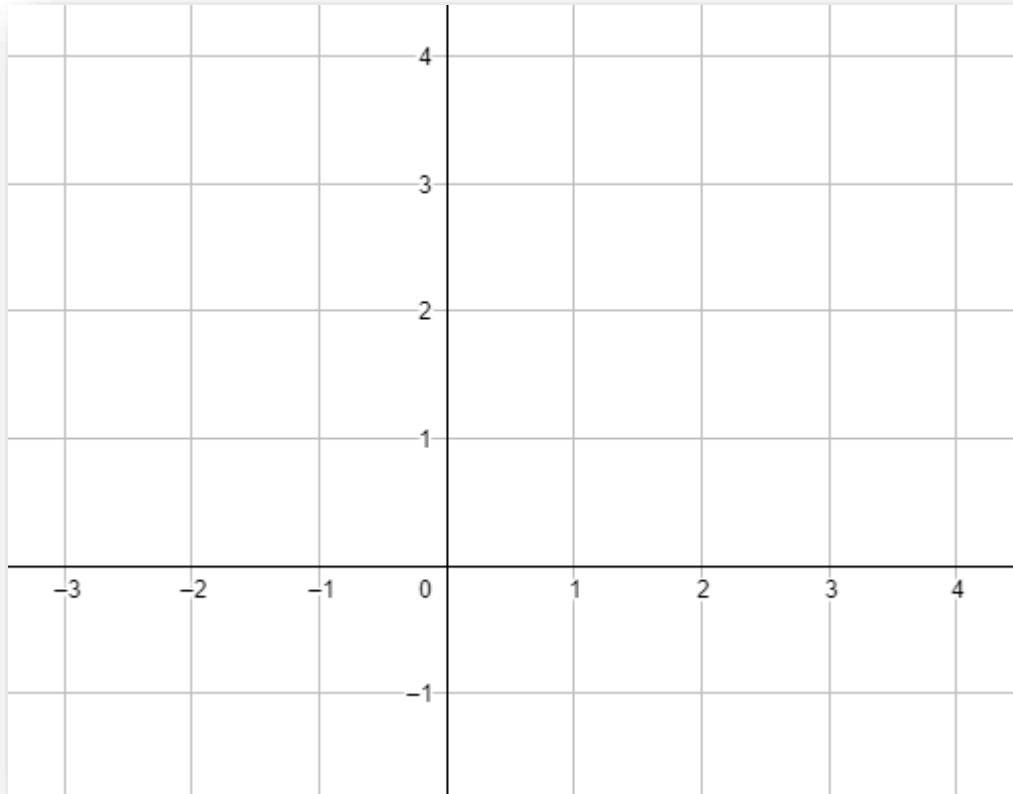
اختبار الخط الأفقي: إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون دالة متباينة. تذكر أنه يمكنك استعمال اختبار الخط الرأسي لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا. وبالمثل يمكنك استعمال اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا.

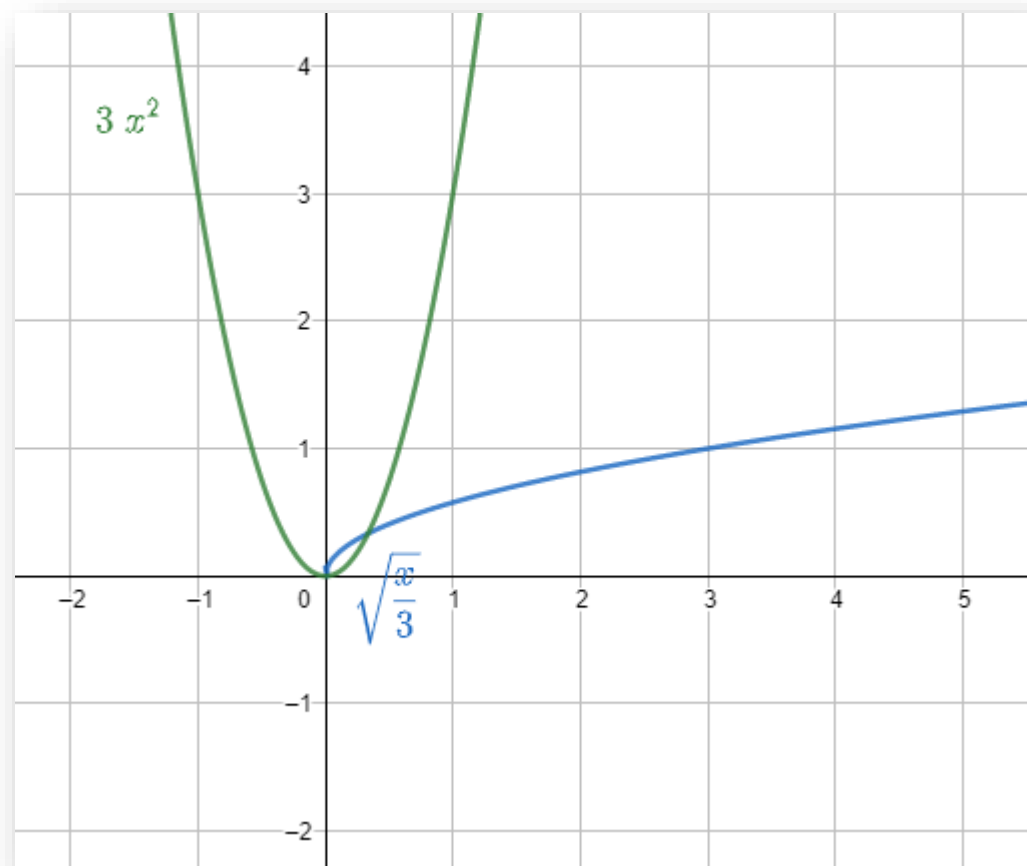




أوجد معكوس كلٍّ من الدالتين الآتيتين، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانيًا على مستوى إحداثي واحد.

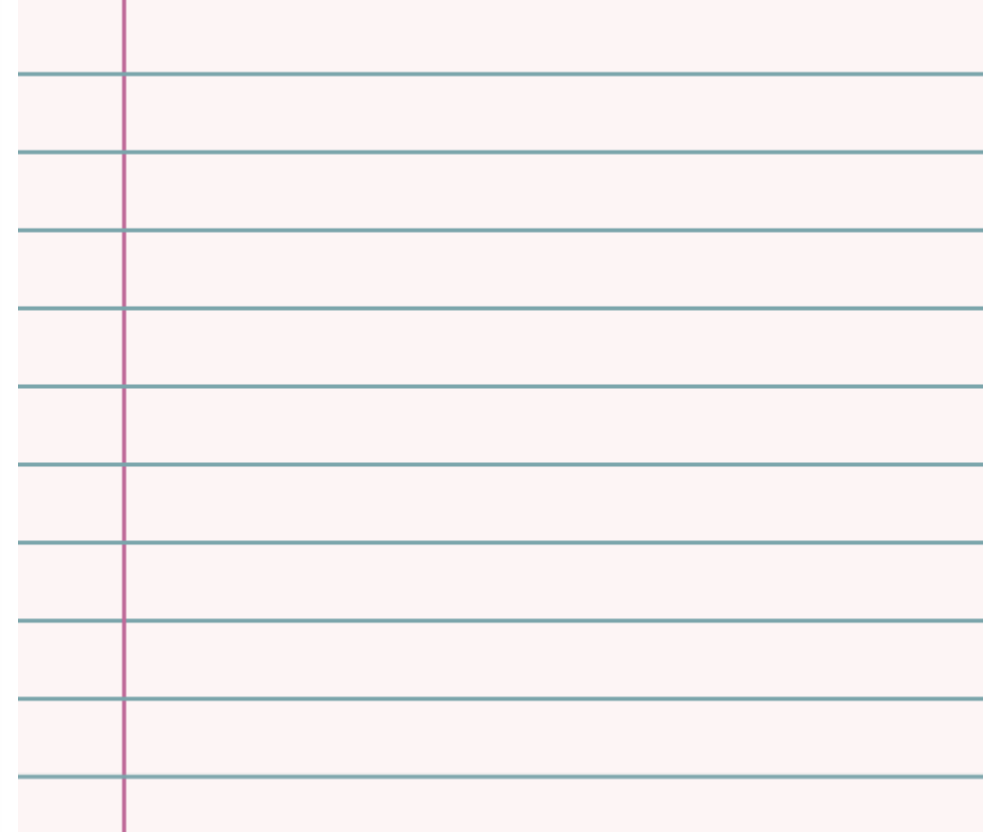
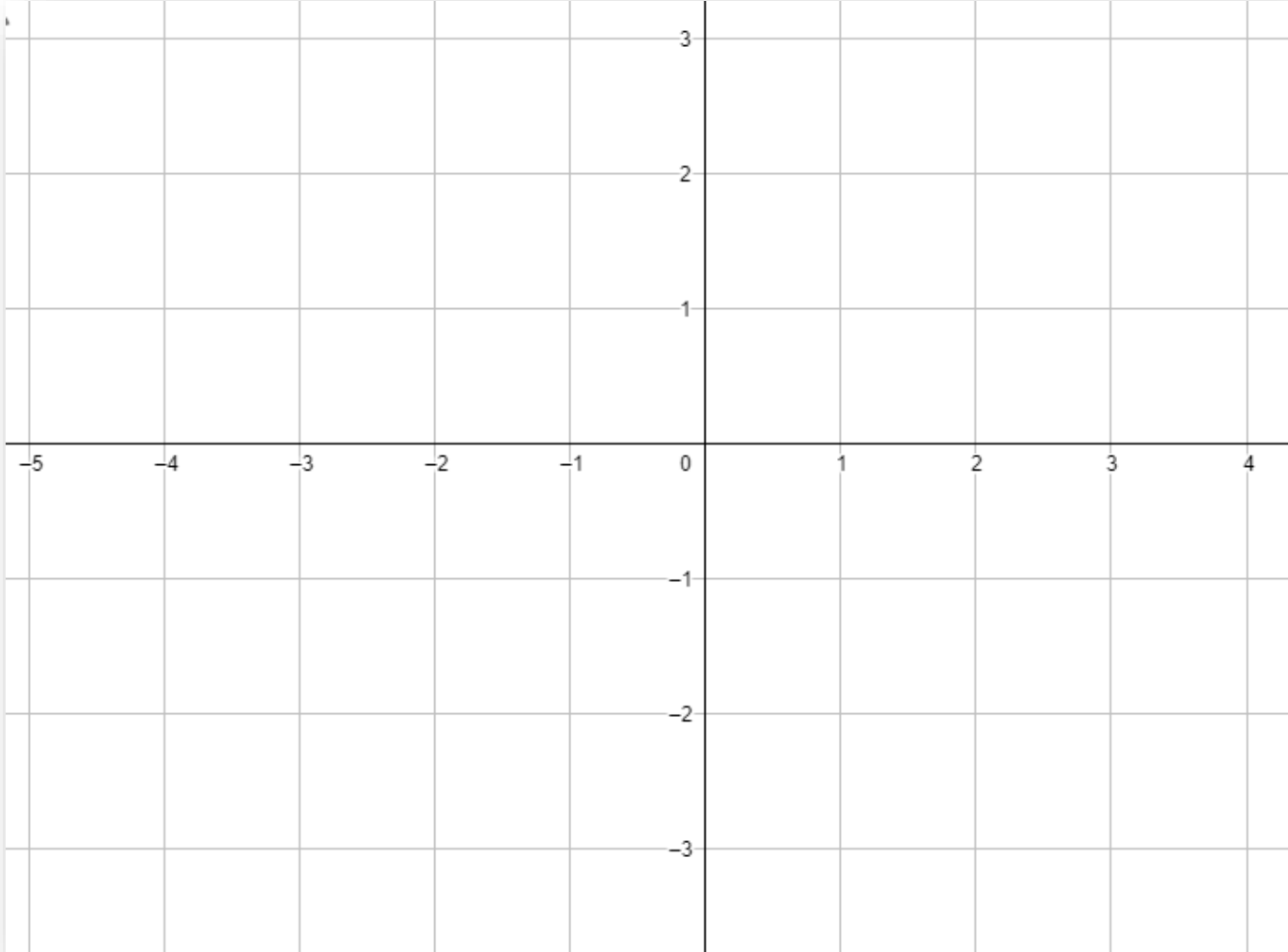
$$f(x) = 3x^2 \quad (2B)$$

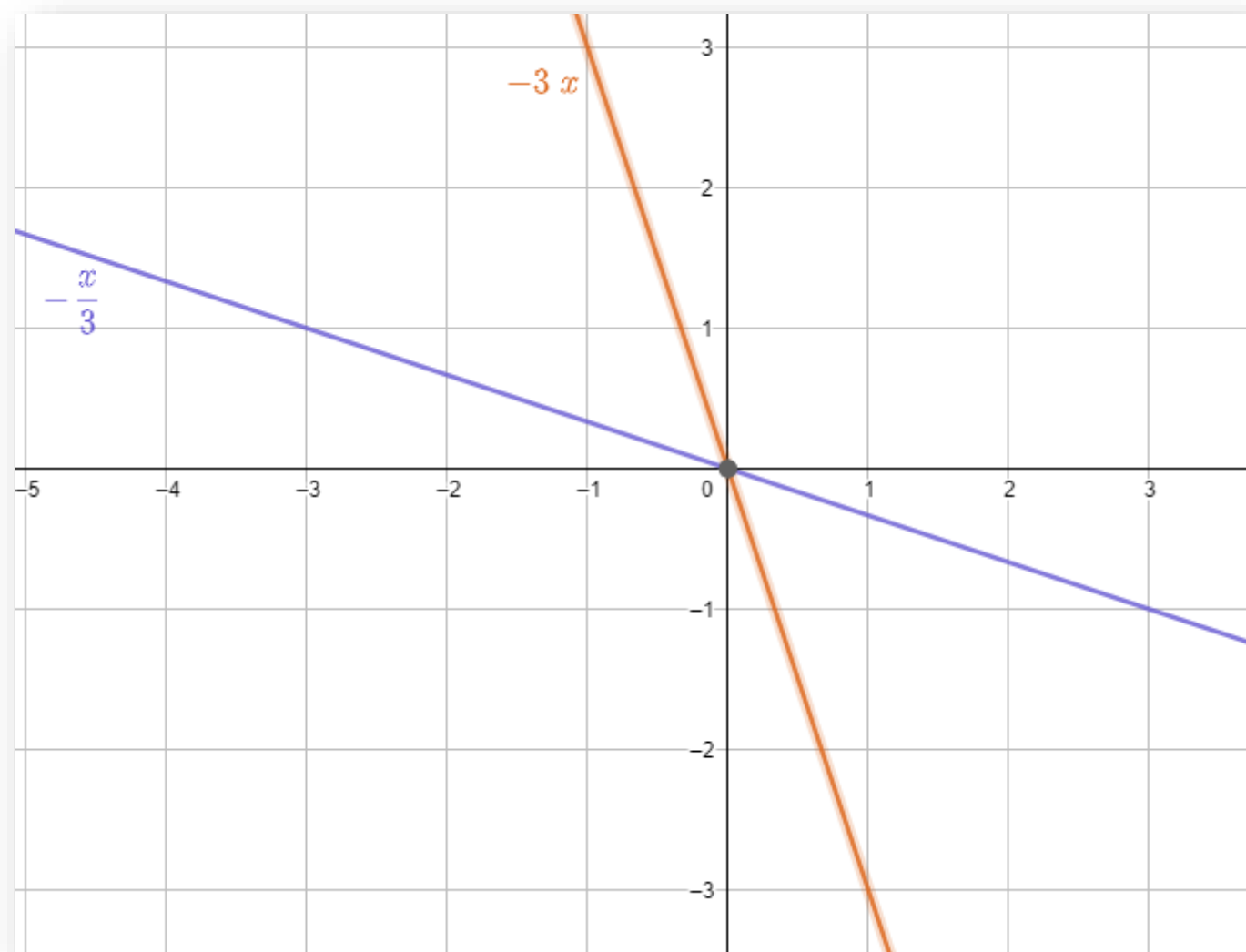


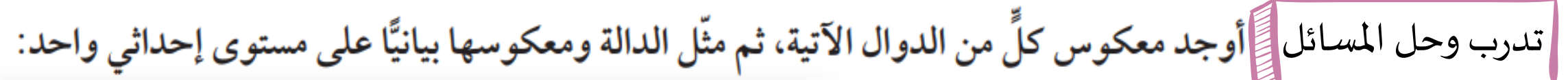


أوجد معكوس كلٍّ من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

$$f(x) = -3x \quad (3)$$

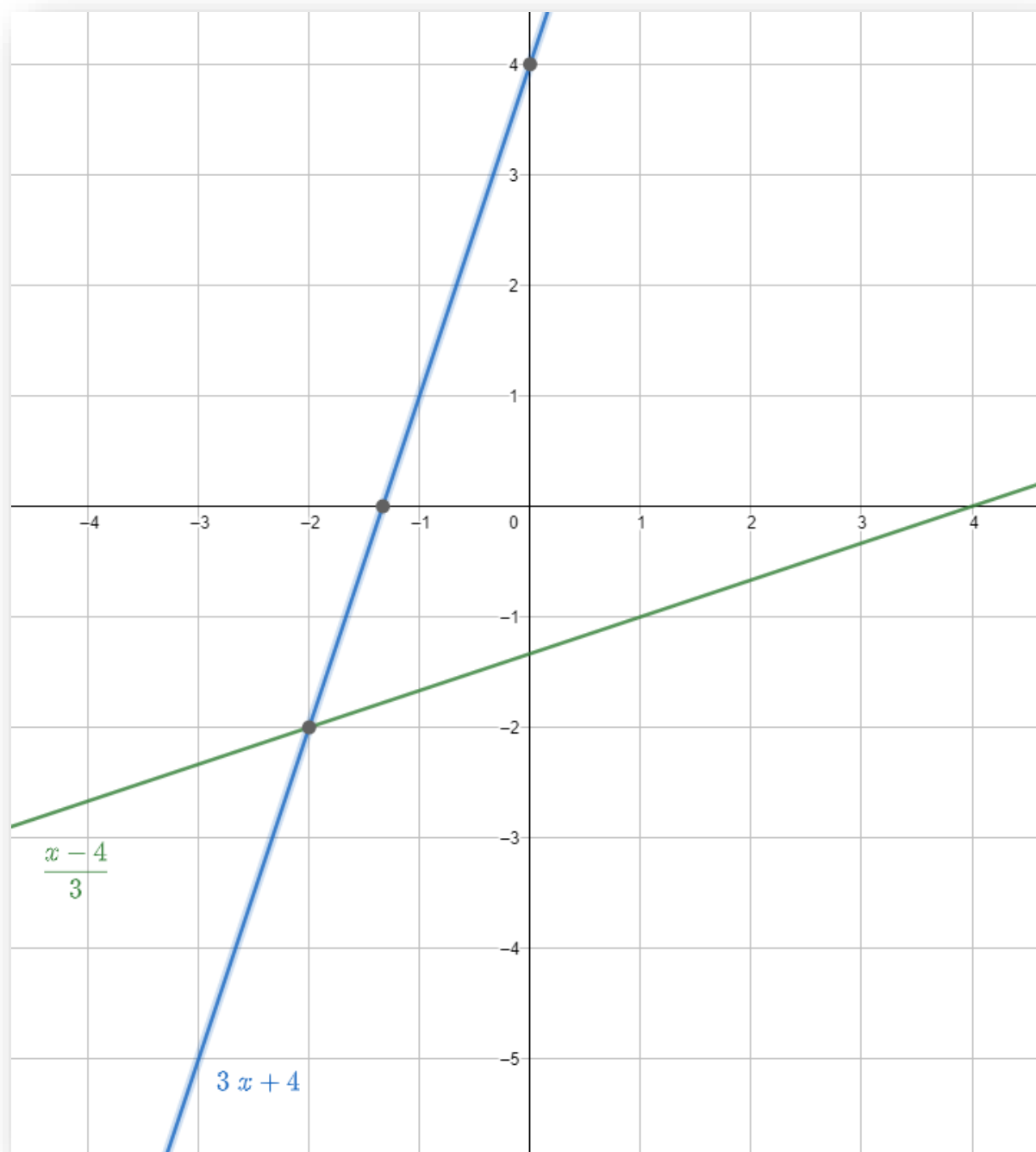






$$h(x) = \frac{x-4}{3} \quad (14)$$

[illegible]



التأكد من الدالة العكسية: يمكنك تحديد ما إذا كانت دالتان، كلٌّ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا، وذلك بإيجاد كلٍّ من تركيبيهما.

تنبيه !

الدالة العكسية

تأكد أن التركيبين $[f \circ g](x)$ و $[g \circ f](x)$ يساوي كلٌّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ ؛ وذلك لتكون كلٌّ من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

أضف إلى

مطوبتك

الدالة العكسية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: تكون كلٌّ من الدالتين f, g دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا كان تركيب كلٍّ منهما يساوي الدالة المحايدة $I(x) = x$.
الرموز: الدالتان $f(x), g(x)$ كلٌّ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا كان $[g \circ f](x) = [f \circ g](x) = x$.

التأكد أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

تحقق من فهمك

في كل زوج ممّا يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضّح إجابتك. **(3A)** $f(x) = 3x - 3$, $g(x) = \frac{1}{3}x + 4$

في كلِّ زوجٍ ممَّا يأتي، حدد هل كلُّ دالةٍ تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

تدرب وحل المسائل

$$f(x) = (x + 6)^2 \quad (24)$$

$$g(x) = \sqrt{x} - 6$$

[illegible]

تاکد

$$f(x) = x - 7 \quad \textbf{(6)}$$

$$g(x) = x + 7$$

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal blue lines and a vertical red margin line on the left side. The paper is oriented vertically and appears to be a standard notebook page. There are no markings or text on the page.

إذا كان عدد الكيلومترات التي تقطعها سيارة فهد لكل l لتر من البنزين يُعبر عنه بالدالة $k(l) = 12l$ ، وكان سعر اللتر كما هو موضح في الشكل المجاور.



- (a) أوجد الدالة $c(l)$ التي تمثل سعر l من لترات البنزين
 (b) أوجد دالة تمثل سعر الوقود المستهلك في الكيلومتر الواحد، مستعملاً فكرة الدالة العكسية.



This image shows a blank sheet of white paper with horizontal blue lines and a vertical red margin line on the left side. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

تدريب على اختبار

(37) إذا كان $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = -x + 1$ ، فأَيُّ مما يأتي يمثل $f[g(x)]$ ؟

$-x^3 + x^2 - 3x + 3$ **C**

$x^2 - x + 2$ **A**

$x^2 - 2x + 4$ **D**

$-x^2 - 2$ **B**

(38) أيُّ الدوال الآتية هي دالة عكسية للدالة: $f(x) = \frac{3x-5}{2}$ ؟

$g(x) = 2x + 5$ **C** $g(x) = \frac{2x+5}{3}$ **A**

$g(x) = \frac{2x-5}{3}$ **D** $g(x) = \frac{3x+5}{2}$ **B**



الدرس الثالث

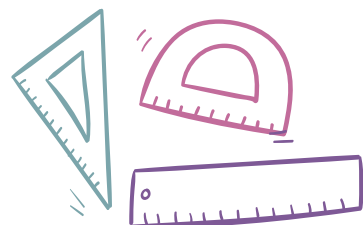
دوال ومتباينات الجذر التربيعي

1 2 3

فيما سبق
درست تبسيط عبارات تحوي
جذورا تربيعية

- المفردات
1. دالة الجذر التربيعي
 2. الدالة الجذرية
 3. متباينة الجذر التربيعي

- الاهداف
1. التمثيل بيانيا لدوال الجذور التربيعية وتحليلها .
 2. التمثيل بيانيا لمتباينات الجذور التربيعية .





يُمثل الزمن الدوري للبندول بدالة الجذر التربيعي: $T=2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ ،
حيث T الزمن الدوري بالثواني، L طول البندول بالأقدام ، g تسارع السقوط الحر،
الذي يساوي 32 قدمًا لكل ثانية مربعة.

أسئلة التعزيز

1. ما المقصود بالزمن الدوري للبندول ؟
2. صف تغير الزمن الدوري للبندول بتغير طوله ؟

دوال الجذر التربيعي: إذا احتوت دالة على الجذر التربيعي لمتغير، تُسمى دالة الجذر التربيعي. وهي نوع من أنواع الدالة الجذرية.



أضف إلى
مطوبتك

الدالة الرئيسية (الأم) لدوال الجذر التربيعي

مفهوم أساسي

$f(x) = \sqrt{x}$

الدالة الرئيسية (الأم): $f(x) = \sqrt{x}$

المجال: $\{x \mid x \geq 0\}$

المدى: $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

المقطعان: $x = 0, f(x) = 0$

غير معرفة عندما: $x < 0$

سلوك الدالة عند طرفيها: $x \rightarrow 0, f(x) \rightarrow 0$

$x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$

مجال دالة الجذر التربيعي محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرفة.

تعيين المجال والمدى

تحقق من فهمك

عين كلاً من المجال والمدى للدالة: **(1A)** $f(x) = \sqrt{x - 3}$

عيّن المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي:

$$f(x) = \sqrt{4x} \quad (1)$$

تأكد

$$f(x) = \sqrt{x+6} + 2 \quad (1B)$$

تحقق من فهمك

$$f(x) = \sqrt{x} - 6 \quad (14)$$

تدرب وحل المسائل

$$f(x) = \sqrt{x+8} - 2 \quad (3)$$

تأكد

يمكنك تمثيل دالة الجذر التربيعي بيانياً، بتحديد القيم الصغرى لها، وعمل جدول لبعض قيم x وقيم $f(x)$ المقابلة لها. تطوير - إنتاج - توثيق

إرشادات للدراسة

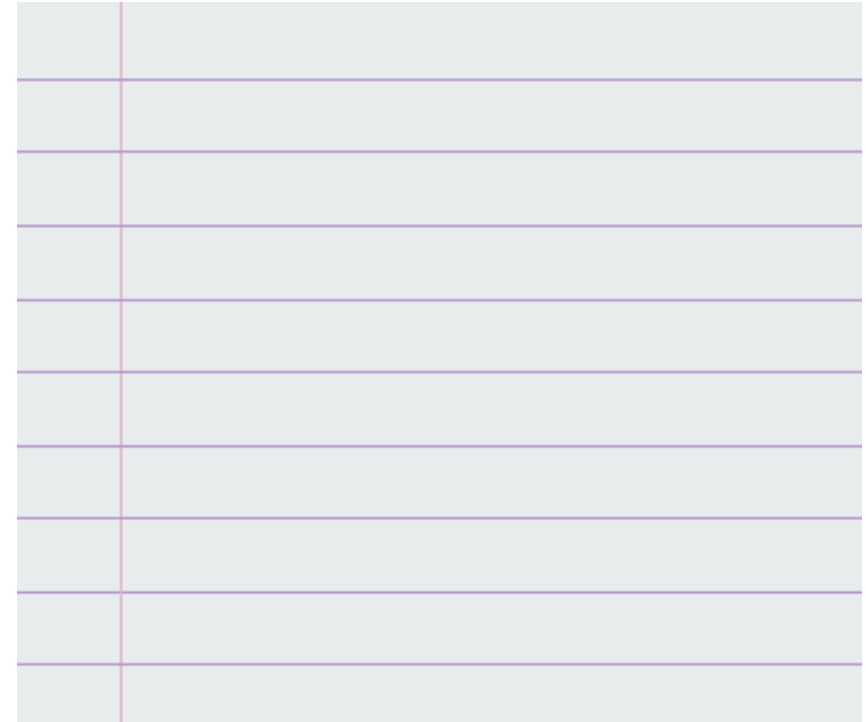
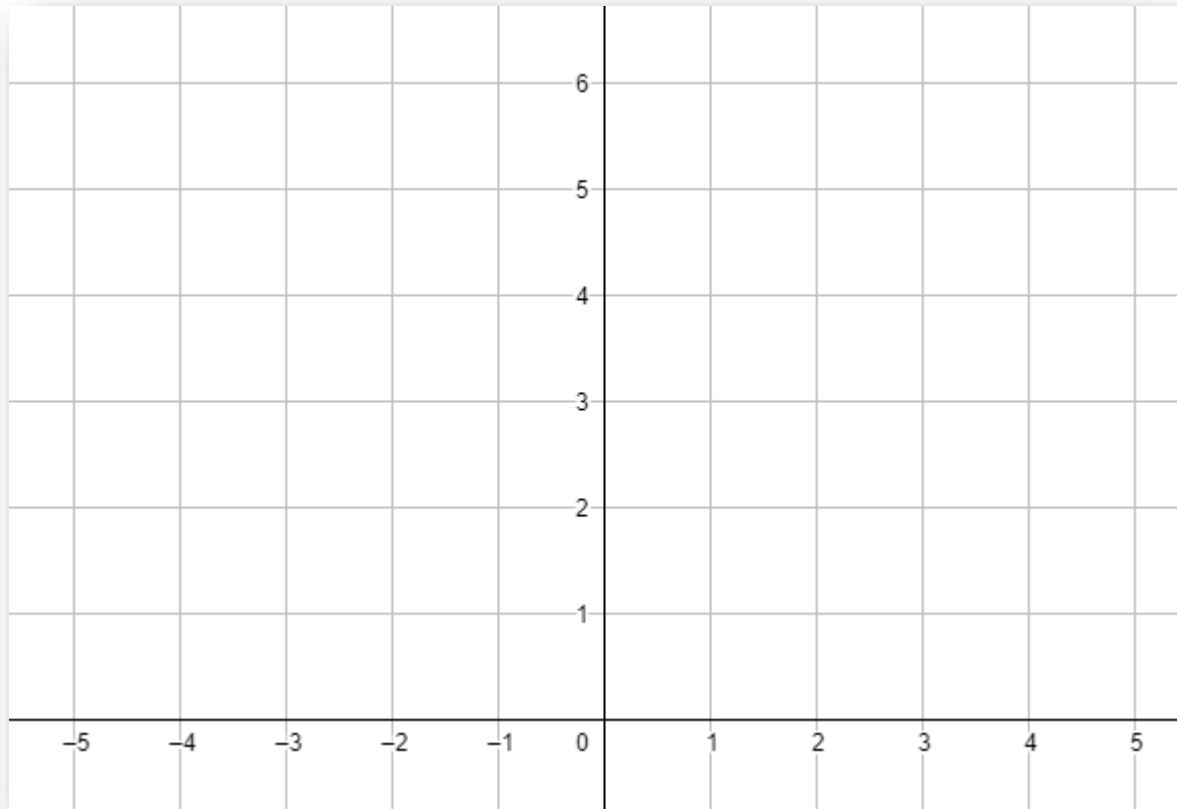
المجال والمدى

حدود المجال والمدى
تمثل إحداثيات نقطة
بدء منحنى دالة الجذر
التربيعي.

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداهما:

تحقق من فهمك

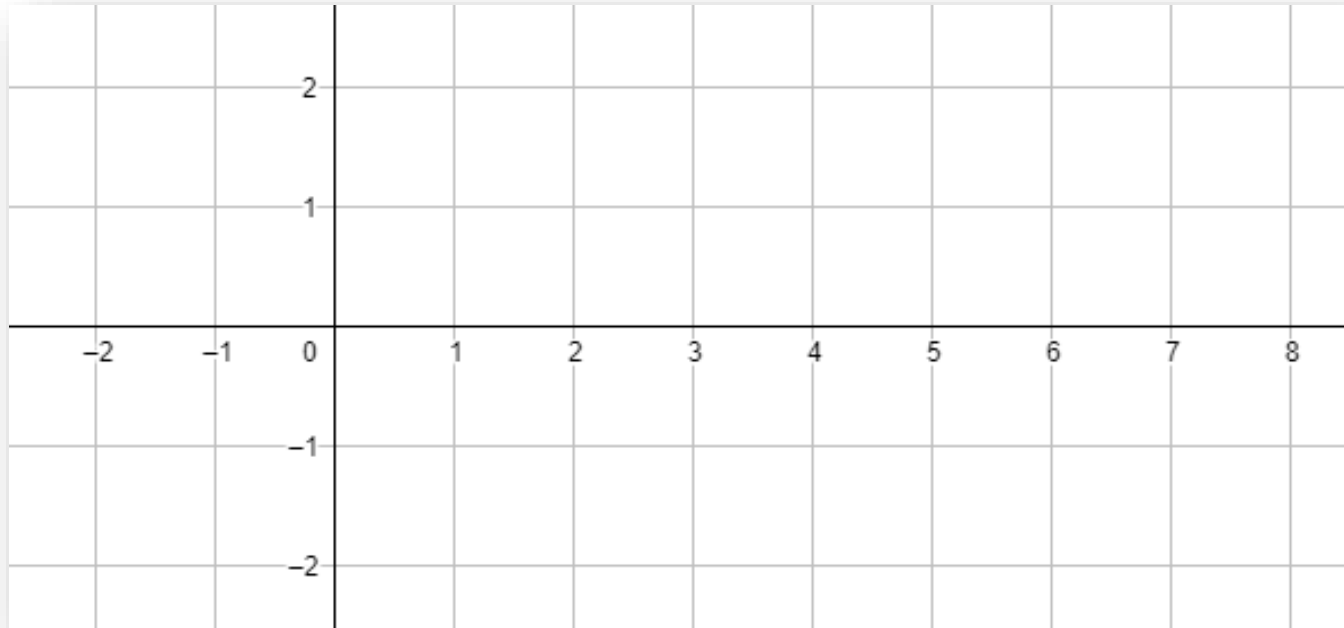
$$f(x) = 2\sqrt{x+4} \quad (2A)$$

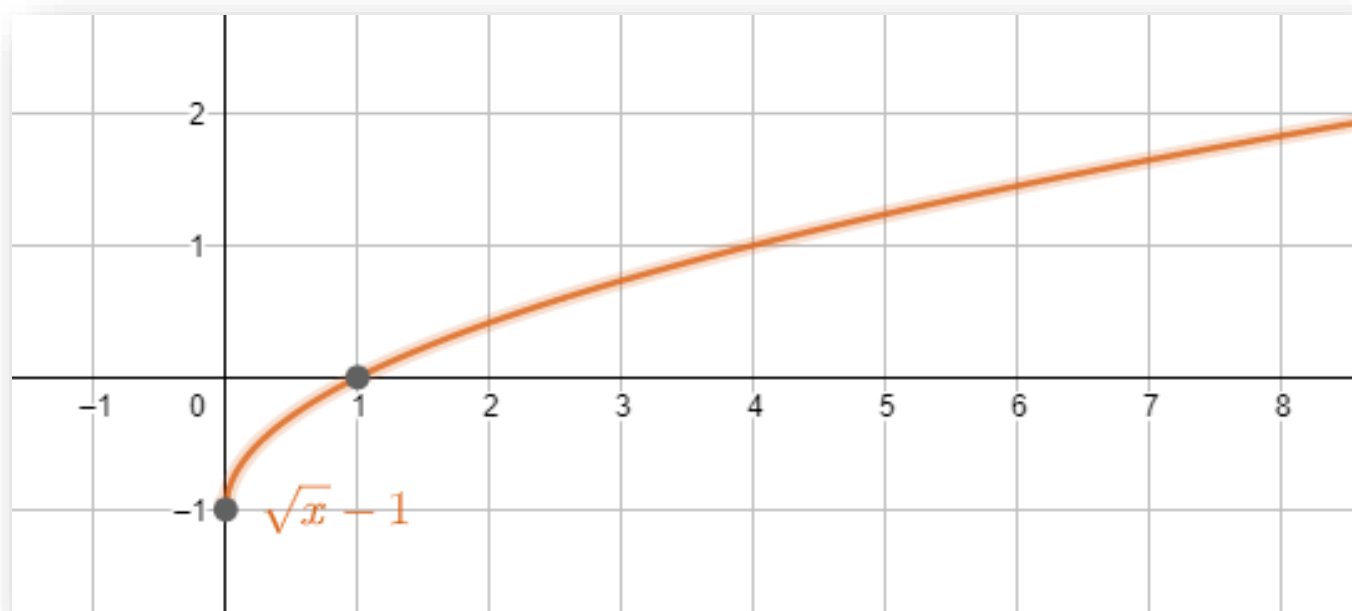




مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومداه:

$$(4) \quad f(x) = \sqrt{x} - 2$$

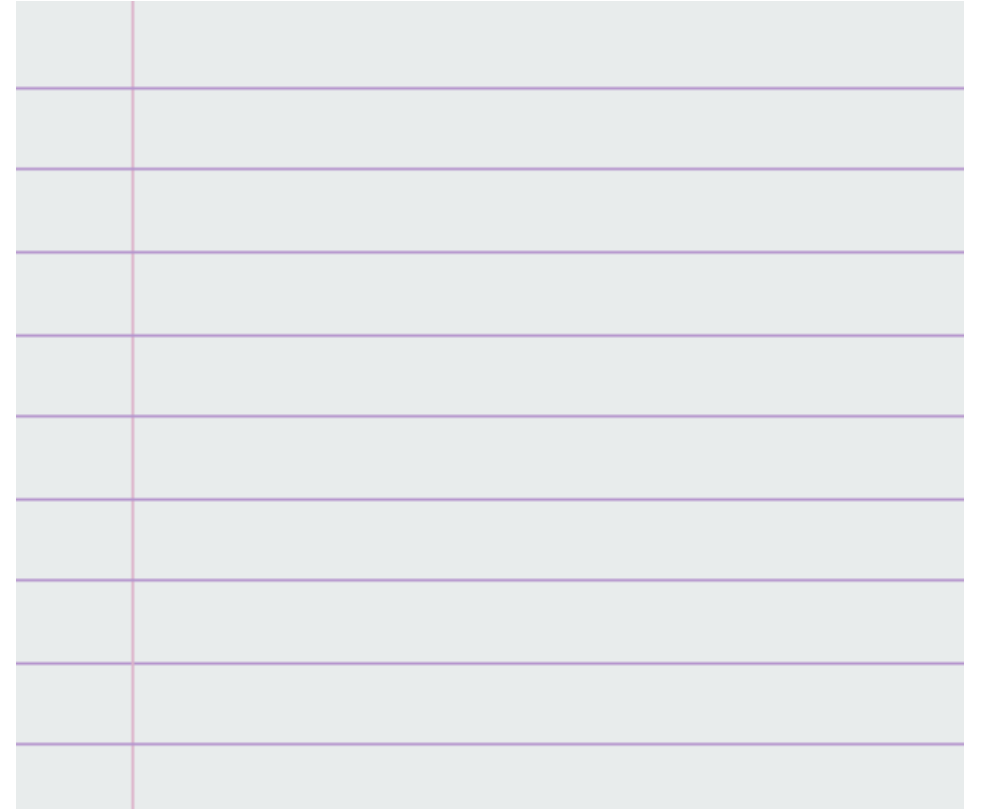
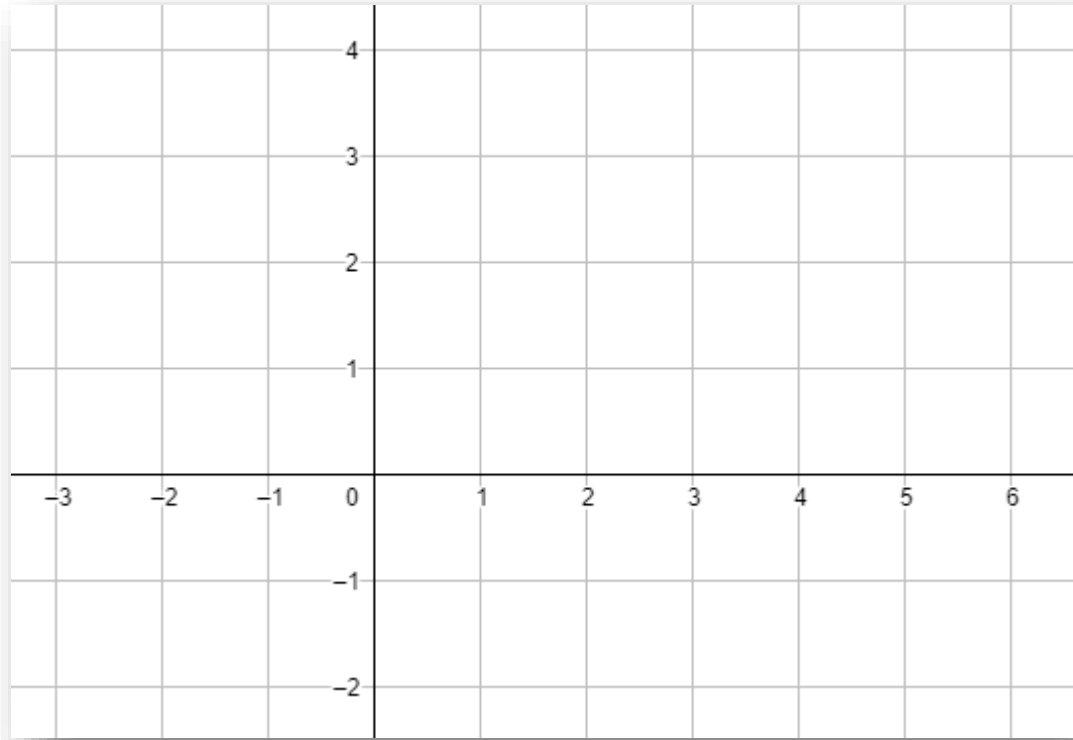


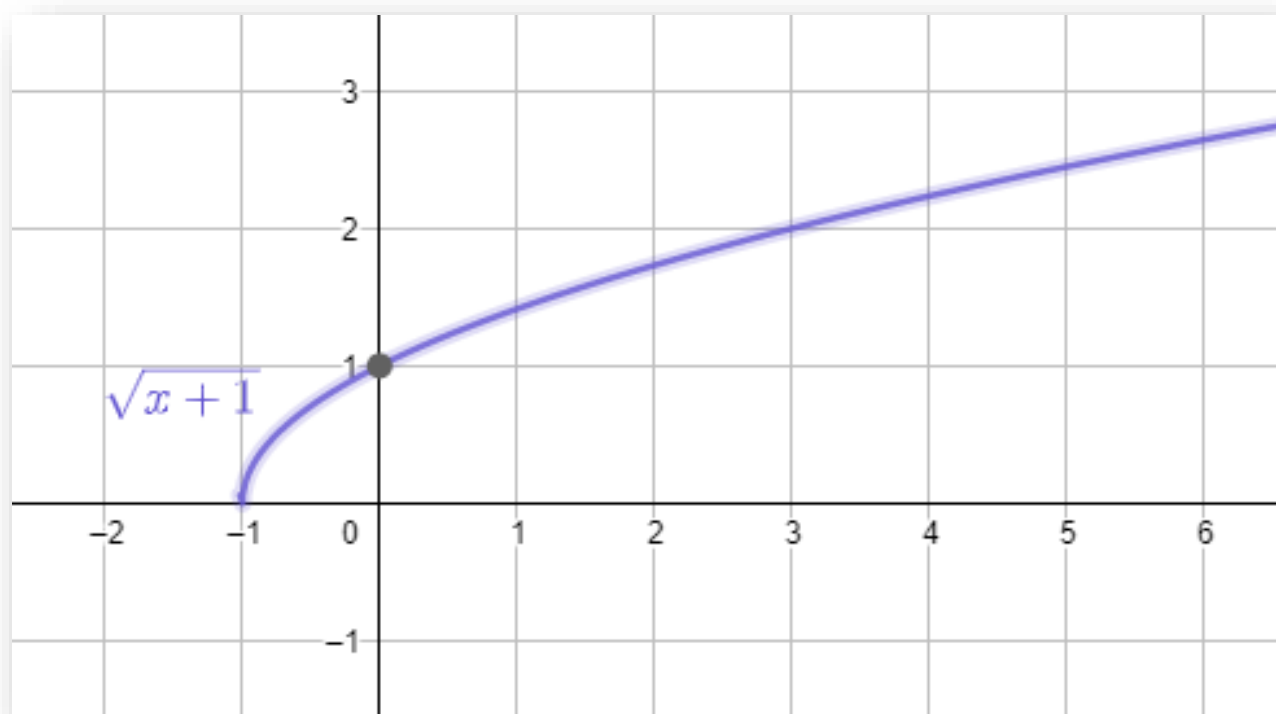


مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومداها:

تدرب وحل المسائل

$$f(x) = \sqrt{x + 1} \quad (18)$$





3) صوت: يمكن تحديد تردد اهتزازات وتر مشدود باستعمال الدالة: $f = 200 \sqrt{m_t}$ ، حيث f تمثل عدد الاهتزازات في الثانية، m_t كتلة ثقل قوة الشد مقيسة بالرطل. مثل هذه الدالة بيانياً في الفترة $0 \leq m_t \leq 10$ ، ثم أوجد التردد عندما تكون قوة الشد 3 أرطال.

عمل جدول

يعد عمل جدول طريقة
جيدة لترتيب الأزواج
المرتبة؛ لدراسة سلوك
التمثيل البياني للدالة.

[illegible]This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

تدرب وحل المسائل

(22) **القفز بالمظلات:** إذا كان الزمن التقريبي t بالثواني، اللازم لسقوط جسم من ارتفاع d بالأقدام يعطى

بالدالة $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$ ، فإذا قفز مظلي قبل 11 ثانية من فتح المظلة، فكم قدمًا هبط المظلي خلال هذا الزمن؟

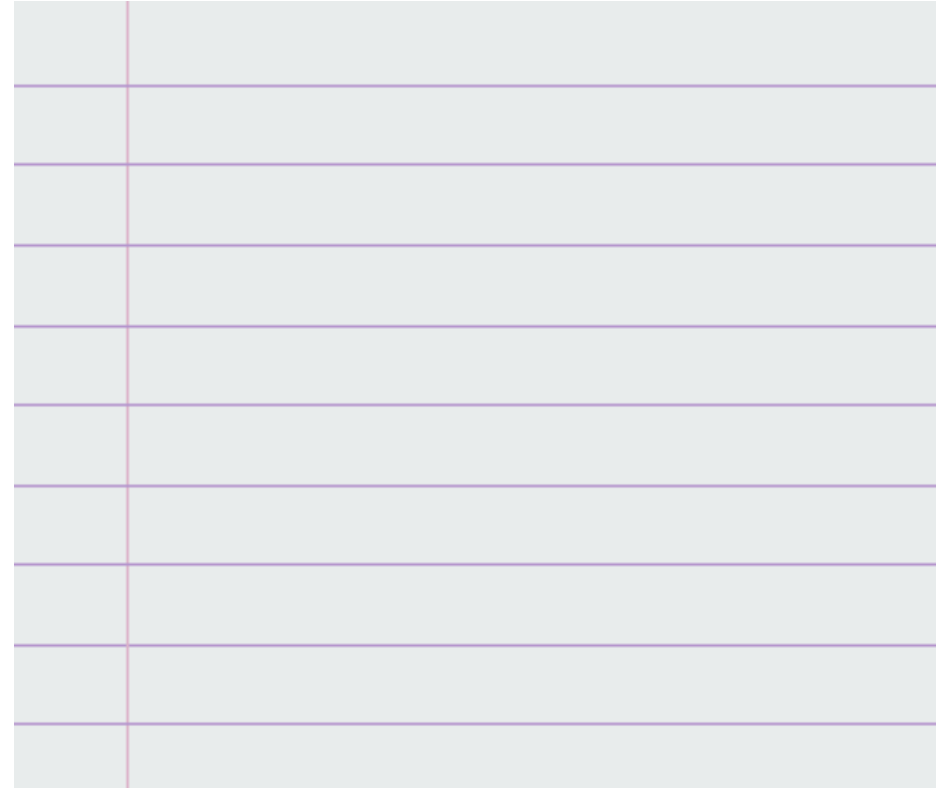
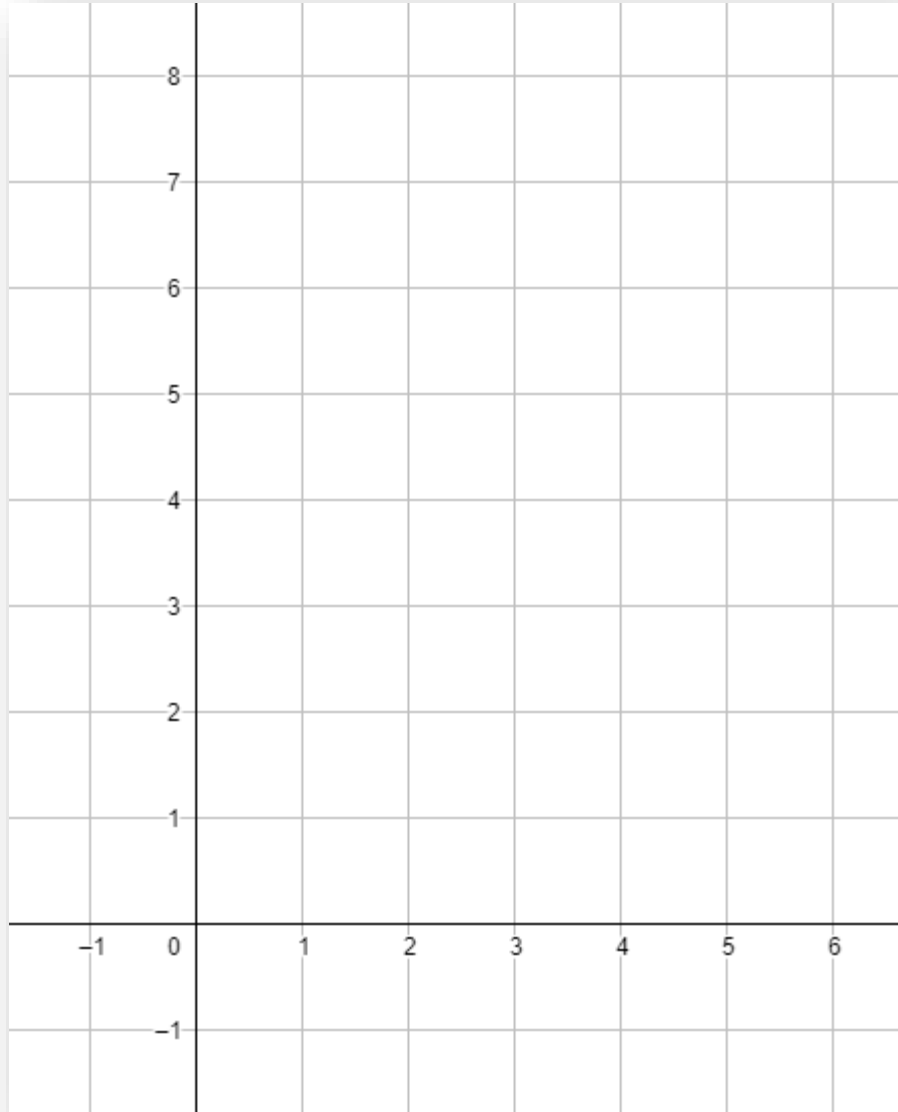
[illegible][illegible]

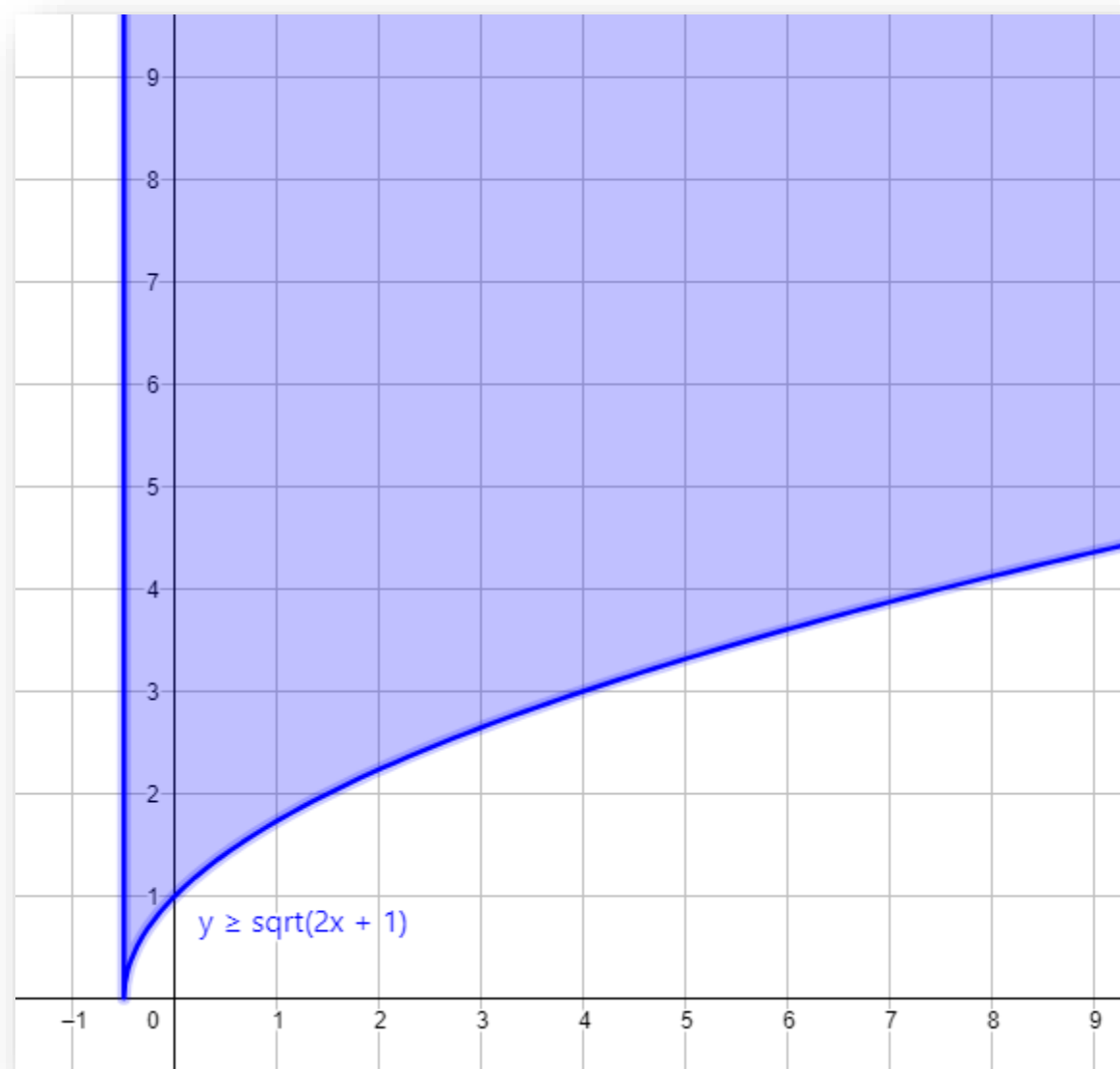
تمثيل متباينة الجذر التربيعي بيانياً

متباينات الجذر التربيعي: متباينة الجذر التربيعي هي متباينة تحتوي الجذر التربيعي. ويمكن تمثيلها بيانياً تماماً مثل طريقة تمثيل المتباينات الأخرى.

مثال المتباينة (4A) $f(x) \geq \sqrt{2x+1}$ بيانياً.

تحقق من فهمك

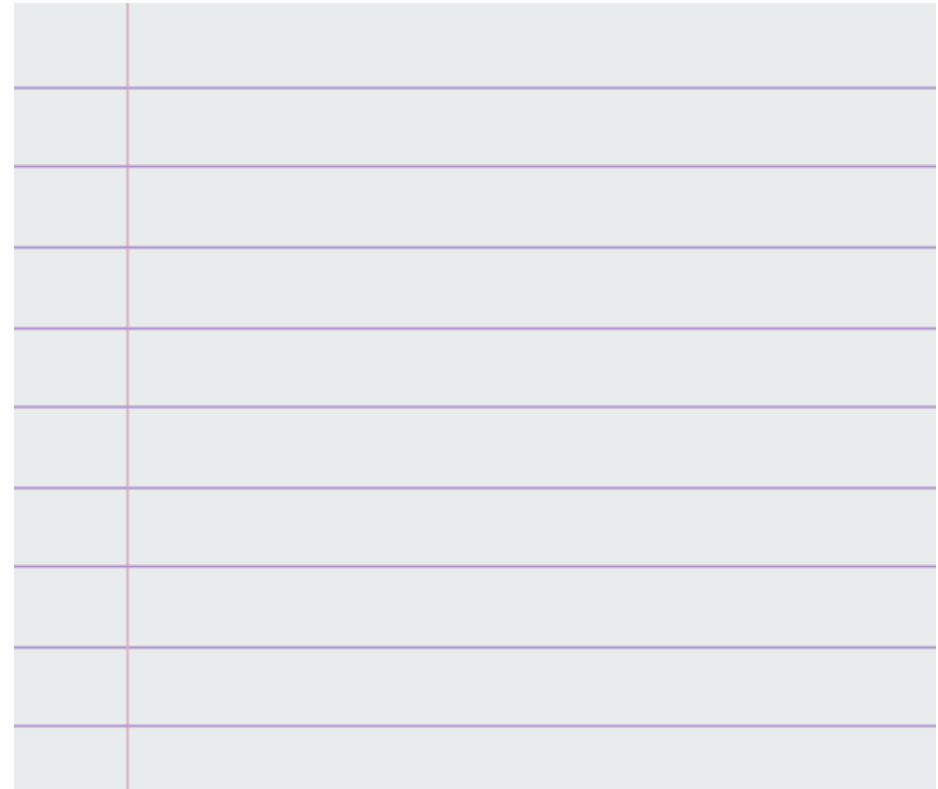


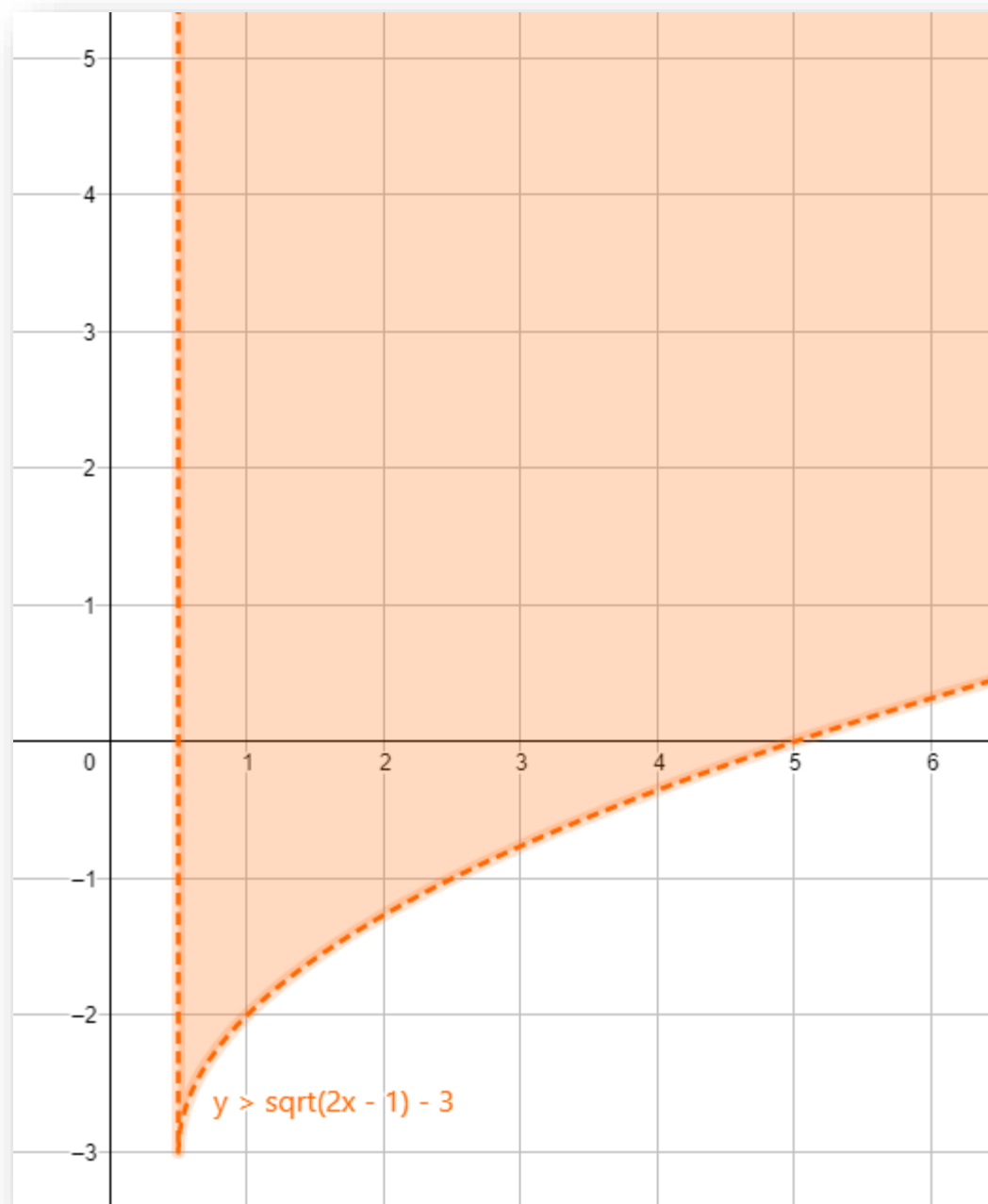


تأكيد

مَثَلُ كُلِّ مُتَابِعَةٍ مِمَّا يَأْتِي بَيَانًا:

$$f(x) > \sqrt{2x-1} - 3 \quad (12)$$

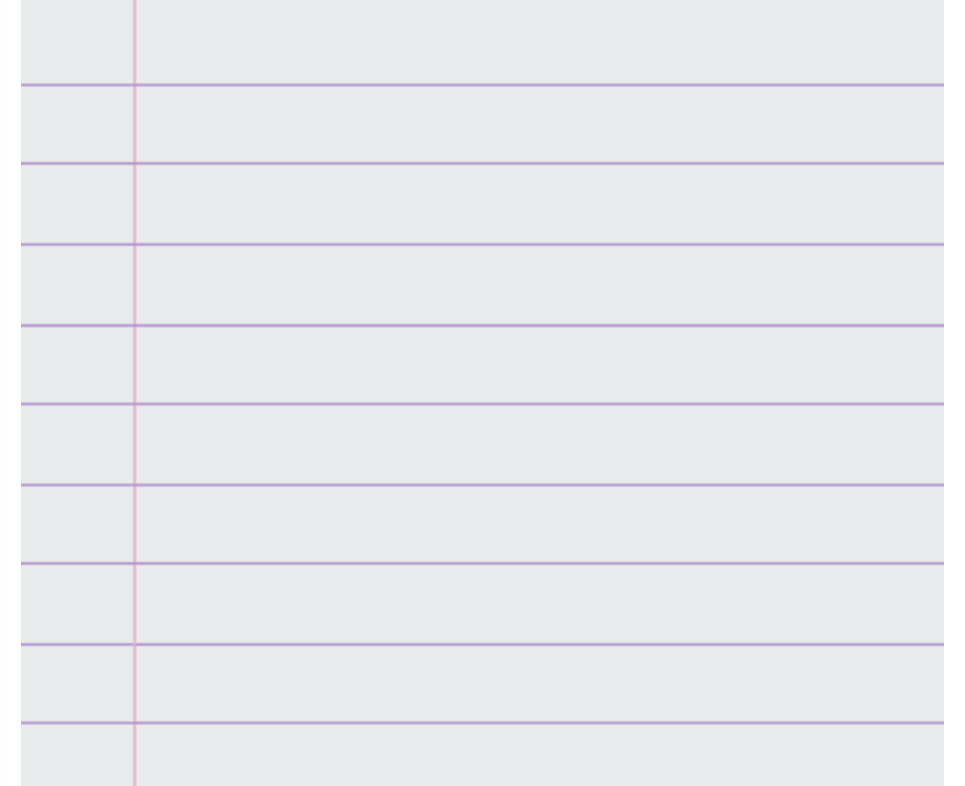
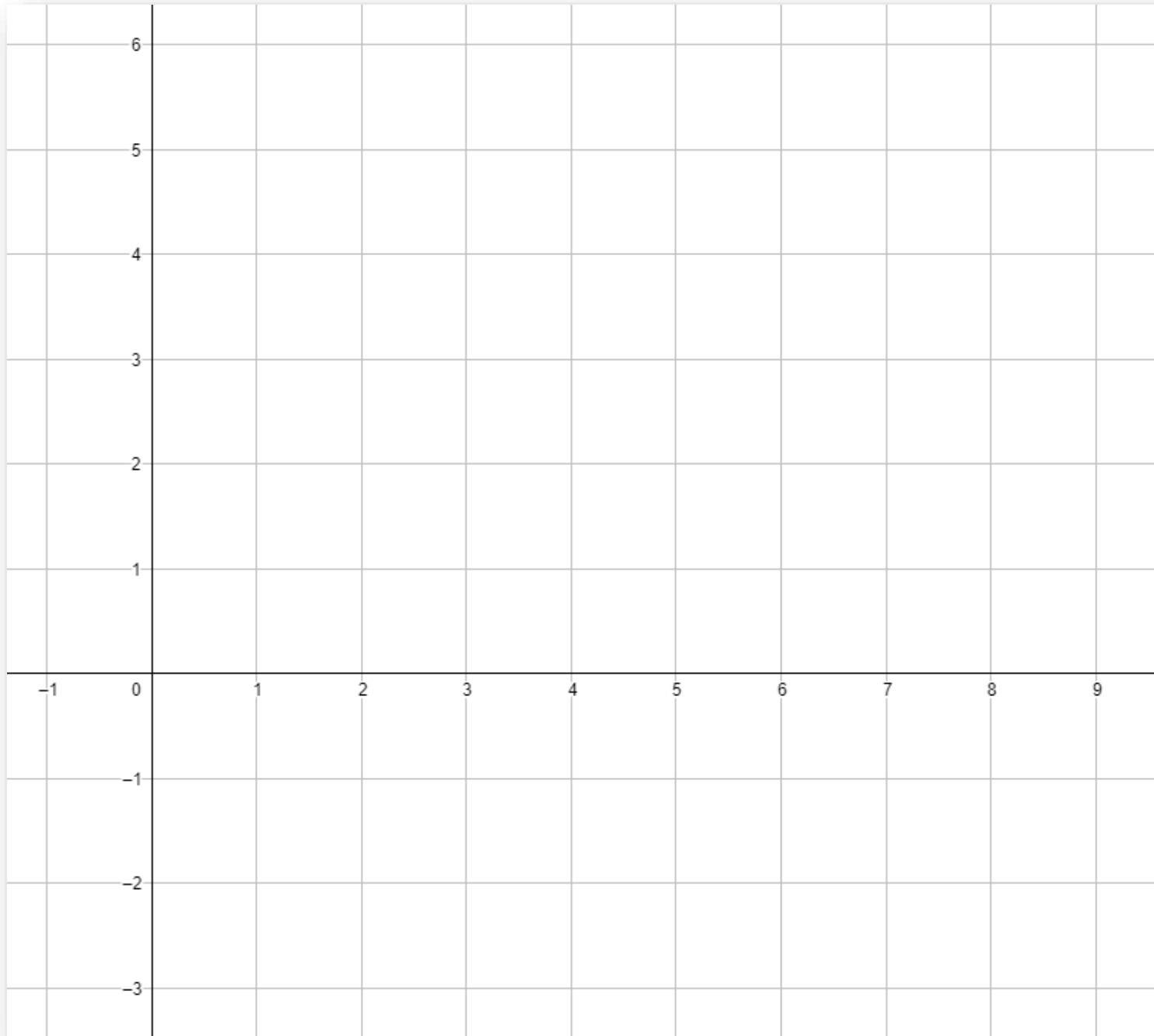


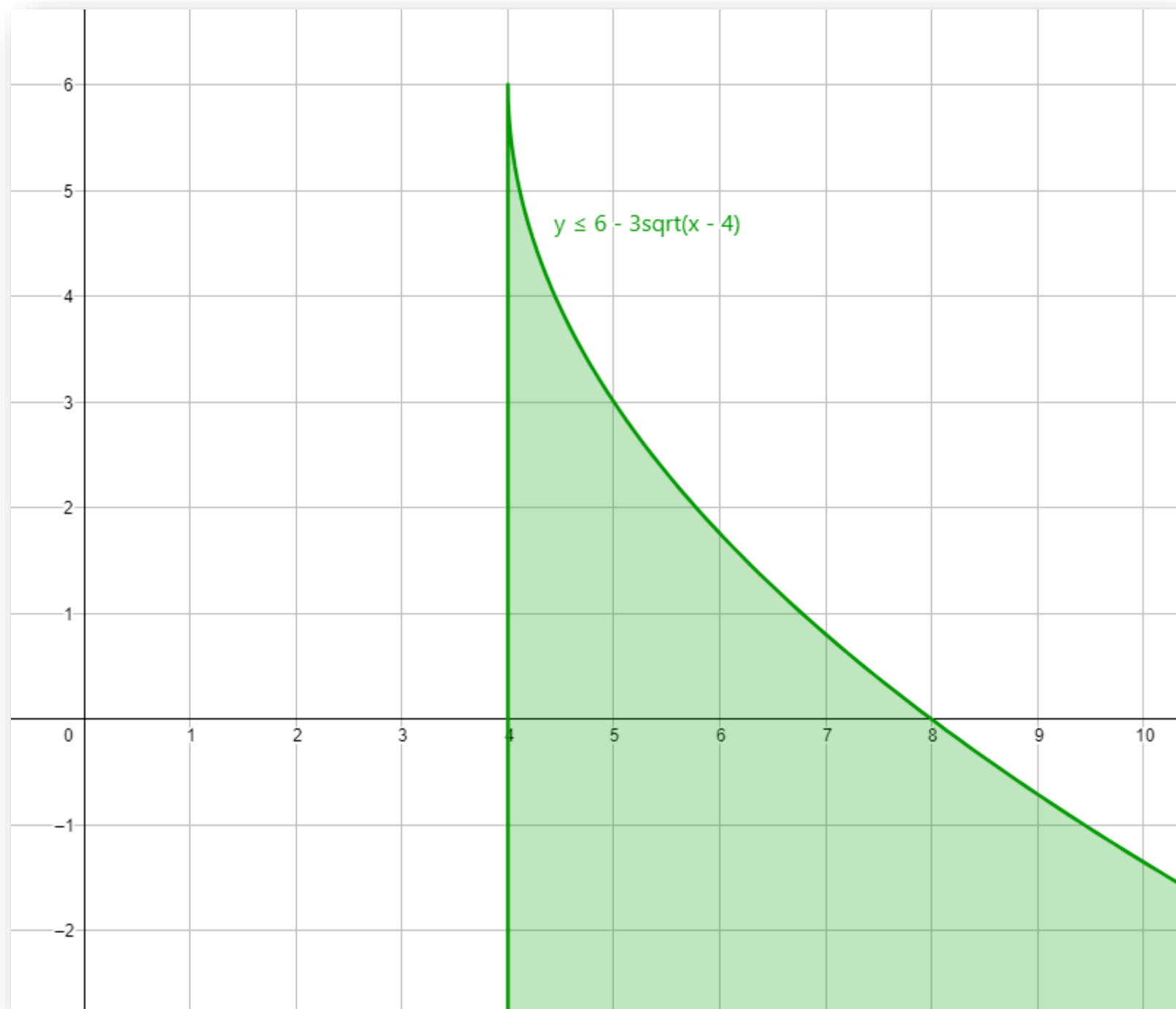


مثل كل متباينة مما يأتي بيانًا:

تدرب وحل المسائل

$$y \leq 6 - 3\sqrt{x - 4} \quad (29)$$

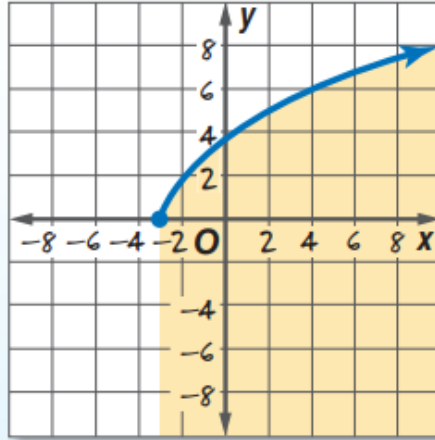




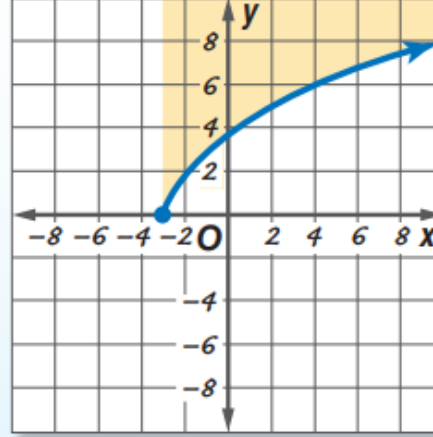
(35) **اكتشف الخطأ:** مثل كل من عبد الرحمن وعبد العزيز المتباينة $y \leq \sqrt{5x + 15}$. فأيهما إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

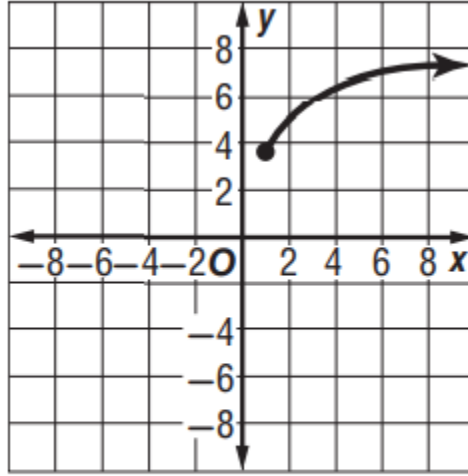
مسائل مهارات التفكير العليا

عبد العزيز



عبد الرحمن





(37) يمثل الشكل المجاور التمثيل البياني لدالة جذر تربيعي. فأي مما يأتي صحيح؟

(I) المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية

(II) الدالة هي $y = \sqrt{x} + 3.5$

(III) المدى هو $\{y \mid y \geq 3.5\}$ تقريباً

D فقط III

C I, II, III

B فقط II, III

A فقط I



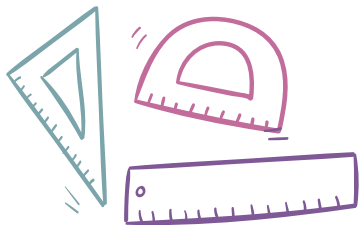
الدرس الرابع الجزر النوني

المفردات

1. الجزر النوني
2. رمز الجزر
3. الدليل
4. ما تحت الجزر
5. الجزر الرئيس

فيما سبق
درست دوال الجزر التربيعي

الاهداف
1. تبسيط عبارات جذرية .
2. استعمال الحاسبة لتقريب قيم الجذور





لوحظ تزايد عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات على الطريق كلما زاد عدد الدراجات. ويمكن تمثيل العلاقة بينهما بالدالة $c = \sqrt[5]{b^2}$ ، حيث b عدد الدراجات، c عدد الحوادث.

أسئلة التعزيز

1. ما المتغير المستقل في المعادلة ؟
2. ما المتغير التابع الذي يمكن ايجاده ؟
3. هل تعتقد ان عدد الحوادث سوف يزيد أو ينقص بازدياد عدد الدراجات الهوائية ؟

تبسيط الجذور: يعدُّ إيجاد الجذر التربيعي لعددٍ عمليةً عكسيةً لتربيعة. فلايجاد الجذر التربيعي للعدد a ، يجب أن تجد العدد الذي مربعه يساوي a . وبالمثل فإن العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد الجذر النوني للعدد.

القوى	العوامل	التعبير اللفظي	الجذور
$x^3 = 64$	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$	4 هو الجذر التكعيبي للعدد 64	$\sqrt[3]{64} = 4$
$x^4 = 625$	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$	5 هو الجذر الرابع للعدد 625	$\sqrt[4]{625} = 5$
$x^5 = 32$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	2 هو الجذر الخامس للعدد 32	$\sqrt[5]{32} = 2$
$a^n = b$	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ مرة}} = b$	a هو الجذر النوني للعدد b	$\sqrt[n]{b} = a$

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي
تعريف الجذر النوني

التعبير اللفظي: لأيَّ عددين حقيقيين a, b ، ولأيَّ عدد صحيح n ، $n > 1$ إذا كان $a^n = b$ ، فإن a هو جذر نوني للعدد b .

مثال: بما أن $(-3)^4 = 81$ ، فإن -3 هو جذر رابع للعدد 81.

يشير الرمز $\sqrt[n]{}$ إلى الجذر النوني.

رمز الجذر
الدليل
ما تحت الجذر

$$\sqrt[n]{81}$$

بعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي . فعلى سبيل المثال، العدد 64 له جذران تربيعيان هما: 8 و -8؛ لأن 8^2 و $(-8)^2$ كليهما يساوي 64. فعندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، ويكون n عدداً زوجياً، فإن الجذر غير السالب يسمى **الجذر الرئيس**. وفيما يأتي بعض الأمثلة على الجذر النوني:

$$\sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{25} \text{ يشير إلى الجذر التربيعي الرئيس للعدد } 25.$$

$$-\sqrt{25} = -5, \quad -\sqrt{25} \text{ يشير إلى معكوس (النظير الجمعي) الجذر التربيعي الرئيس للعدد } 25.$$

$$\pm\sqrt{25} = \pm 5, \quad \pm\sqrt{25} \text{ يشير إلى كلا الجذرين التربيعيين للعدد } 25.$$

مفهوم أساسي		
الجذر النوني الحقيقي		
ليكن n عدداً صحيحاً أكبر من 1، و a عدداً حقيقياً.		
a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وجذر حقيقي سالب وحيد: $\pm\sqrt[n]{a}$ ، الجذر الموجب هو الجذر الرئيس	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وليس هناك جذر حقيقي سالب: $\sqrt[n]{a}$.
$a < 0$	ليس هناك جذور حقيقية.	ليس هناك جذور حقيقية موجبة. وهناك فقط جذر حقيقي سالب وحيد: $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$	

$$-\sqrt{(y+7)^{16}} \quad (1B)$$

إيجاد الجذور

تحقق من فهمك

$$\sqrt[3]{8x^6} \quad (1A) \quad \text{بسّط كلاً ممّا يأتي:}$$

إذا كان دليل الجذر عدداً زوجياً وأسس ما تحت الجذر عدداً زوجياً، وكان أسس الناتج عدداً فردياً، يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج لتأكد من أن الجواب ليس سالباً.

إرشادات للدراسة

دليل الجذر

إذا كان n عدداً فردياً
فهناك فقط جذر
حقيقي واحد، وبناءً
على ذلك، فلا يوجد
هناك جذر رئيس،
ولا يوجد حاجة إلى
استعمال رمز القيمة
المطلقة. أما إذا كان
 n عدداً زوجياً فإن
 $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

تحقق من فهمك

بسّط كلّاً مما يأتي:

$$\sqrt[4]{16(x-3)^{12}} \quad (2B)$$

$$\sqrt{36y^6} \quad (2A)$$

بسّط كلّ ممّا يأتي:

$$\pm \sqrt{100y^8} \quad (1)$$

$$-\sqrt{49u^8v^{12}} \quad (2)$$

$$\sqrt{(y-6)^8} \quad (3)$$

$$\sqrt[4]{16g^{16}h^{24}} \quad (4)$$

بسّط كلّ ممّا يأتي:

تدرب وحل المسائل

(19) $\sqrt[3]{a^{12}}$

(15) $\sqrt[3]{27b^{18}c^{12}}$

(22) $\sqrt[8]{x^{16}y^8}$

(17) $\sqrt[3]{-(y-9)^9}$

بسّط كلّ ممّا يأتي:

(31) $\sqrt{196c^6d^4}$

(32) $\sqrt[3]{-27a^{15}b^9}$

(33) $\sqrt[3]{64(x+y)^6}$



(40) تحدّد: حل المعادلة: $\frac{-5}{\sqrt{a}} = -125$

تدريب على اختبار

(41) أيُّ الآتية هو الأقرب إلى قيمة المقدار $\sqrt[3]{7.32}$ ؟

1.8 **A**

1.9 **B**

2 **C**

2.1 **D**

(42) قيمة $\sqrt[4]{256x^8y^{16}}$ هي:

$16x^8y^{16}$ **A**

$16x^2y^{16}$ **B**

$4x^2y^4$ **C**

$4x^4y^4$ **D**

تقريب الجذور باستعمال الحاسبة: تذكّر أن الأعداد الحقيقية التي لا يمكن كتابتها في صورة كسور عشرية منتهية أو دورية، تُسمى أعدادًا غير نسبية. وغالبًا ما يستعمل تقريب الأعداد غير النسبية في مسائل من واقع الحياة.

(3B) قياس: إذا كانت مساحة سطح كرة تساوي 214.5 in^2 ، فأوجد حجم الكرة.

تحقق من فهمك



استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي، إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

تأكد

$$\sqrt{58} \quad (8)$$

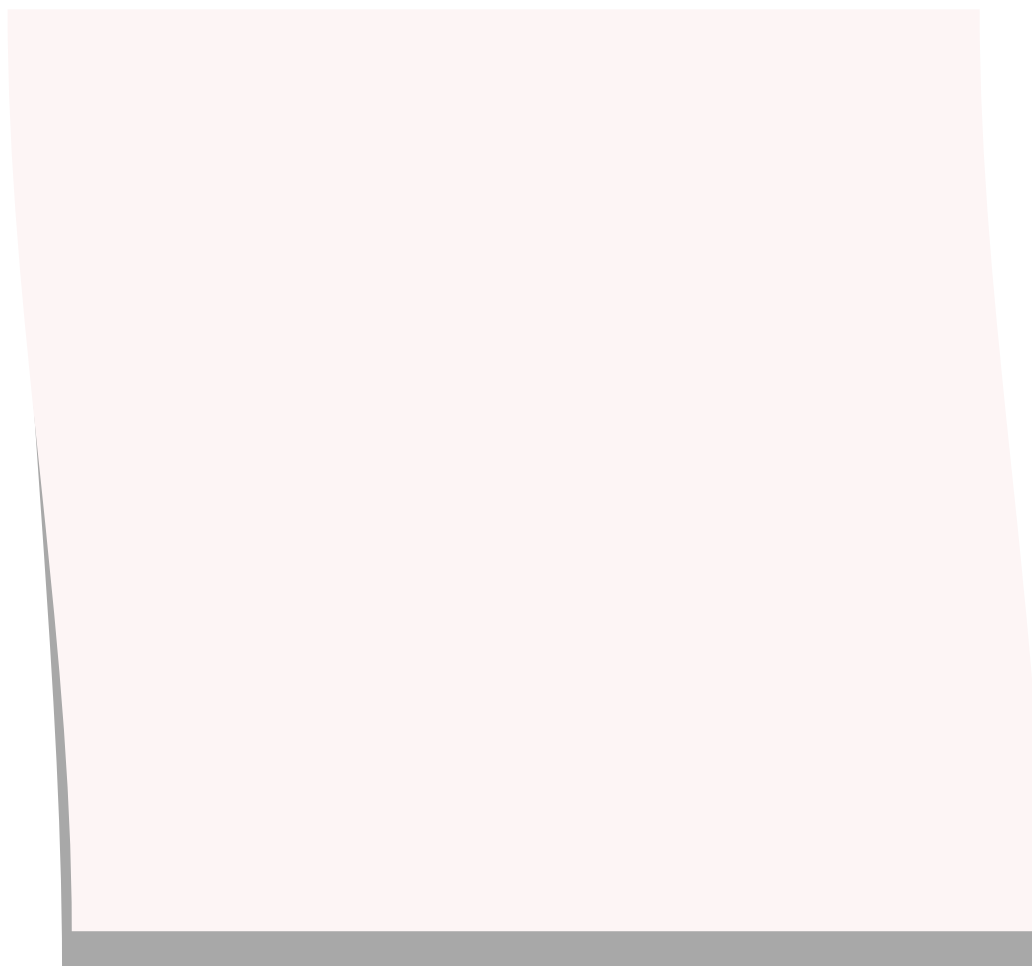
$$\sqrt[5]{-43} \quad (10)$$

تدرب وحل المسائل

$$-\sqrt{150} \quad (26)$$

$$\sqrt[6]{(8912)^2} \quad (29)$$

(34) **فيزياء:** طوّر جوهانز كيبلر (Johannes kepler) القانون $d = \sqrt[3]{6t^2}$ ، حيث d تمثل المسافة بملايين الأميال بين أي كوكب والشمس، و t تمثل عدد الأيام الأرضية التي يستغرقها الكوكب ليدور حول الشمس. إذا كان كوكب المريخ يستغرق 687 يومًا أرضيًا ليدور حول الشمس، فكم يبعد المريخ عن الشمس؟



الدرس الخامس
العمليات على العبارات الجذرية



- المفردات
1. انطاق المعام
 2. الجذور المتشابهة
 3. المرافق

درست تبسيط عبارات تتضمن
الجزر النوني

فيما سبق

الاهداف

1. تبسيط العبارات الجذرية
2. جمع العبارات الجذرية وطرحها وضربها وقسمتها



عُرف المستطيل الذهبي قديمًا، حيث استعمله الفنانون والمهندسون في تصاميمهم، والنسبة بين طوله إلى عرضه هي $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$. ومن أهم خصائصه أنه إذا أزيل منه مربع طول ضلعه هو عرض المستطيل فالشكل الباقي مستطيل ذهبي أيضًا. وسنتعلم في هذا الدرس تبسيط عبارات جذرية مثل $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.



أسئلة التعزيز

1. هل المقام $\sqrt{5}-1$ أكبر من 2 أم أقل ؟
2. هل النسبة $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ أكبر من 1 أم أقل ؟

تبسيط العبارات الجذرية: يمكن تبسيط العبارات التي تحوي جذوراً نونية باستعمال خواص العمليات عليها.

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

خاصية ضرب الجذور

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين a, b ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$ ، فإن

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

إذا كانت n عدداً زوجياً وكان a, b عددين غير سالبين أو إذا كان n عدداً فردياً.

مثالان: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$

تحقق من فهمك

تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية الضرب

(1B) $\sqrt[3]{27y^{12}z^7}$

(1A) $\sqrt{12d^3c^{12}}$ بسّط كلّاً مما يأتي:

بسّط كلّ عبارة جذرية فيما يأتي:

تدرب وحل المسائل

$$\sqrt{9a^{15}b^3} \quad (17)$$

تأكد

$$\sqrt{36ab^4c^5} \quad (1)$$

خاصية قسمة الجذور هي خاصية أخرى تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية.



أضف إلى
مطوبتك

خاصية قسمة الجذور

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين a, b ، حيث $b \neq 0$ ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$ ، فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ، إذا كانت جميع الجذور معروفة.

$$\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$$

مثالان:

لإزالة الجذور من المقام أو الكسور تحت الجذر، استعمل عملية تُسمى **إنطاق المقام**. ولعمل ذلك، اضرب البسط والمقام في مقدار بحيث تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر مما يسهل إيجاد الجذر الدقيق.

إذا كان المقام	فاضرب البسط والمقام في	مثال
\sqrt{b}	\sqrt{b}	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sqrt[n]{b^x}$	$\sqrt[n]{b^{n-x}}$	$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

$$\sqrt{25a^4} = 5a^2$$

تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية القسمة

تحقق من فهمك

بسّط كلّاً مما يأتي:

$$\sqrt[5]{\frac{3}{4y}} \quad (2B)$$

$$\frac{\sqrt{a^9}}{\sqrt{b^5}} \quad (2A)$$

فيما يأتي ملخص للقواعد التي تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية:

أضف إلى
مطوبتك

تبسيط العبارات الجذرية

ملخص المفاهيم

تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية:

- إذا كان دليل الجذر n أصغر ما يمكن.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تُكتب على صورة قوى نونية لعدد صحيح أو لكثيرة حدود.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر كسوراً.
- إذا لم توجد جذور في المقام.

العمليات على العبارات الجذرية: يمكنك استعمال خاصيتي الضرب والقسمة لضرب بعض العبارات الجذرية وقسمتها.

تحقق من فهمك

ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية:

$$6\sqrt{8c^3d^5} \cdot 4\sqrt{2cd^3} \quad (3A)$$

$$2\sqrt[4]{8x^3y^2} \cdot 3\sqrt[4]{2x^5y^2} \quad (3B)$$

بسّط كلّ عبارة جذرية فيما يأتي:

تأكد

(6) $3\sqrt[3]{36xy} \cdot 2\sqrt[3]{6x^2y^2}$

(5) $5\sqrt{2x} \cdot 3\sqrt{8x}$

يمكنك جمع العبارات الجذرية وطرحها بالأسلوب المستعمل عند جمع وحيدات الحد أو طرحها، ولكن بشرط أن تكون الجذور متشابهة؛ أي أن يكون للجذور الدليل نفسه وما تحت الجذور المقادير نفسها.

غير متشابهين: $\sqrt{3b}$ و $\sqrt{2b}$

غير متشابهين: $\sqrt[3]{3b}$ و $\sqrt{3b}$

متشابهان: $4\sqrt{3b}$ و $\sqrt{3b}$

جمع العبارات الجذرية وطرحها

تحقق من فهمك

بسط العبارة الجذرية: $4\sqrt{8} + 3\sqrt{50}$ (4A)

إرشادات للدراسة

جمع العبارات
الجذرية وطرحها
بسط كل جذر على حدة
قبل محاولة تجميع
الجذور المتشابهة.

بسّط كلّ عبارة جذرية فيما يأتي:



تدرب وحل المسائل

$$3\sqrt{90} + 4\sqrt{20} + \sqrt{162} \quad (24)$$



تأكد

$$5\sqrt{32} + \sqrt{27} + 2\sqrt{75} \quad (8)$$



بسّط كلّ عبارة جذرية فيما يأتي، حيث b عدد زوجي:

(43) $\sqrt[b]{a^{3b}}$

(42) $\sqrt[b]{a^{2b}}$

(41) $\sqrt[b]{a^{4b}}$

(40) $\sqrt[b]{a^b}$

وبما أنه يمكنك جمع الجذور وطرحها بالطريقة نفسها المتبعة في جمع وحيدات الحد وطرحها، فإنه يمكنك أيضًا ضرب الجذور باستعمال التوزيع بالترتيب لضرب ثنائيي حد.

تعتبر كلٌّ من ثنائيي الحد اللتين على الصورة $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$, $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$ حيث a, b, c, d أعداد نسبية مرافقة للأخرى. ويمكنك استعمال المرافق لإنتاج المقام.

إرشادات للدراسة

المرافق

حاصل ضرب عددين
متراfcين هو عدد نسبي
دائمًا.

تحقق من فهمك

ضرب العبارات الجذرية

$$(5B) (7\sqrt{2} - 3\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 3\sqrt{3})$$

$$(5A) (6\sqrt{3} - 5)(2\sqrt{5} + 4\sqrt{2})$$

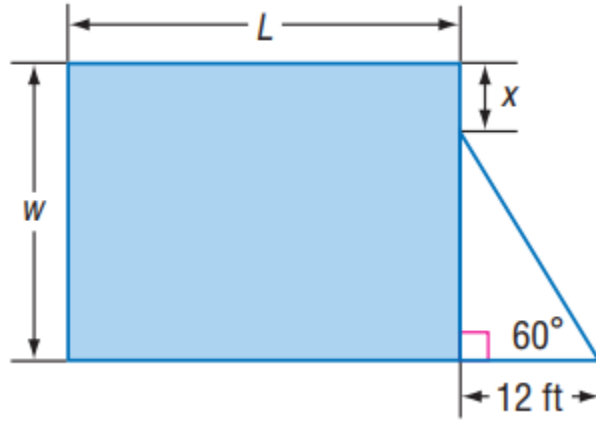
بسّط كلّ عبارة جذرية فيما يأتي:

تدرب وحل المسائل

(28) $(6\sqrt{3} + 5\sqrt{2})(2\sqrt{6} + 3\sqrt{8})$

تأكد

(10) $(8\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(8\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$



(6) هندسة: إذا كانت مساحة المستطيل في الشكل المجاور تساوي 900 ft^2 ، فاكتب معادلة تمثل طول المستطيل L بدلالة x ، ثم بسطها.

بسّط كلّ عبارة جذرية فيما يأتي:

تدرب وحل المسائل

$$\frac{6}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \quad (29)$$

تأكد

$$\frac{8}{\sqrt{6} - 5} \quad (12)$$

(39) **تفاح:** يرتبط قطر التفاحة مع كتلتها بالدالة $d = \sqrt[3]{3w}$ ، حيث d تمثل القطر بالبوصة، w الكتلة بالأونصات. أوجد قطر تفاحة كتلتها 6.47 أونصات.



(45) **اكتشف الخطأ:** بسّط كل من خالد وناصر العبارة الجذرية $4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$ ، فأَيُّ منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

ناصر

$$\begin{aligned} 4\sqrt{32} + 6\sqrt{18} \\ &= 4\sqrt{16 \cdot 2} + 6\sqrt{9 \cdot 2} \\ &= 64\sqrt{2} + 54\sqrt{2} \\ &= 118\sqrt{2} \end{aligned}$$

خالد

$$\begin{aligned} 4\sqrt{32} + 6\sqrt{18} \\ &= 4\sqrt{4^2 \cdot 2} + 6\sqrt{3^2 \cdot 2} \\ &= 16\sqrt{2} + 18\sqrt{2} \\ &= 34\sqrt{2} \end{aligned}$$

تدريب على اختبار

(50) أيّ العبارات الجذرية الآتية تكافئ العبارة الجذرية $\sqrt{180a^2b^8}$ ؟

D $36\sqrt{5} | a | b^4$

C $3\sqrt{10} | a | b^4$

B $6\sqrt{5} | a | b^4$

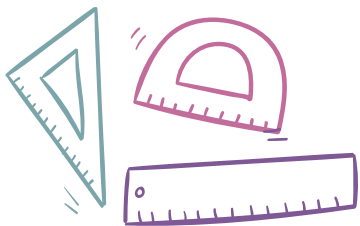
A $5\sqrt{6} | a | b^4$

الدرس السادس
الاسس النسبية



فيما سبق
درست استعمال خصائص الاسس

الاهداف
1. كتابة عبارات ذات أسس نسبي بالصورة الجذرية وبالعكس
2. تبسيط عبارات أسية أو جذرية





يمكن أن تستعمل الصيغة $P = c(1 + r)^n$ لتقدير الثمن المستقبلي لسلعة اعتماداً على التضخم المالي، حيث P يمثل الثمن المستقبلي، c تمثل الثمن الحالي، r يمثل معدل التضخم السنوي، n تمثل عدد السنوات المستقبلية. فمثلاً يمكن أن تستعمل الصيغة:

$$P = c(1 + r)^{\frac{1}{2}}$$

لتقدير الثمن المستقبلي لجهاز تبريد ماء في ستة أشهر.

أسئلة التعزيز

1. ما أس c في الصيغة $p = c(1 + r)^n$ ؟
2. ما العبارة المرفوعة إلى الأس n ؟
3. لماذا كان الأس $\frac{1}{2}$ في الصيغة الأخيرة؟

الأسس النسبية والعبارات الجذرية: تعلم أن تربيع عدد غير سالب وإيجاد جذره التربيعي هما عمليتان عكسيتان. ولكن كيف يمكنك إيجاد قيمة عبارة تتضمن أسًا نسبيًا كما في الصيغة أعلاه؟ يمكنك إيجاد قيم مثل هذه العبارات بافتراض أن عبارات الأسس النسبية يصح فيها ما يصح في عبارات الأسس الصحيحة.

$$\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$$

اكتبه على صورة حاصل ضرب

$$= b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

اجمع الأسس

$$= b^1 = b$$

بسّط

لذا فإن $b^{\frac{1}{2}}$ هو عدد مربعه يساوي b ؛ إذن $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$.

أضف إلى
مطويتك

مفهوم أساسي

الأسس النسبية ($b^{\frac{1}{n}}$)

التعبير اللفظي: لأي عدد حقيقي b ، وأي عدد صحيح موجب n ، $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ ،
إلا إذا كانت $b < 0$ ، و n عددًا زوجيًا فإن الجذر النوني يكون عددًا مركبًا.

$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

$(-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16} = 4i$

مثالان:

تحقق من فهمك

(1A) اكتب $a^{\frac{1}{5}}$ على الصورة الجذرية.

(1B) اكتب $\sqrt[8]{c}$ على الصورة الأسية.

اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسية في كل مما يأتي:

تأكد

(1) $10^{\frac{1}{4}}$

(2) $x^{\frac{3}{5}}$

تدرب وحل المسائل

(18) $\sqrt{17}$

(17) $(x^3)^{\frac{3}{2}}$

وبشكل عام يمكنك تقديم التعريف العام الآتي للأسس النسبية:



أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

الأسس النسبية $(b^{\frac{x}{y}})$

التعبير اللفظي: يكون $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = (\sqrt[y]{b})^x$ لأي عدد حقيقي b لا يساوي صفراً، ولأي عددين صحيحين x, y بحيث $y > 1$ ، إلا إذا كانت $b < 0$ و y عدداً زوجياً، فإن الجذر قد يكون عدداً مركباً.

مثالان: $27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$ $(-16)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{-16})^3 = (4i)^3 = -64i$

كما أن القواعد التي تنطبق على الأسس الصحيحة السالبة تنطبق أيضاً على الأسس النسبية السالبة.

تحقق من فهمك

إيجاد قيم عبارات تتضمن أسساً نسبية

$256^{\frac{3}{8}}$ (2B)

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: $-3125^{-\frac{1}{5}}$ (2A)

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

تأكد

$32^{-\frac{1}{5}}$ (6)

$343^{\frac{1}{3}}$ (5)

تدرب وحل المسائل

$27^{\frac{1}{3}}$ (20)

$(-27)^{-\frac{2}{3}}$ (23)



مجموعة رفاة الرياضيات

لتطوير - إنتاج - توثيق

تبسيط العبارات: خواص الأسس التي تعلمتها سابقاً تنطبق أيضاً على الأسس النسبية؛ لذا اكتب كل عبارة على صورة أسس موجبة. واحرص على أن تكون الأسس في مقام الكسر أعداداً صحيحة موجبة؛ لذلك أنت في مجموعة رفاة الرياضيات بحاجة إلى إنطاق المقام أحياناً.

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

تحقق من فهمك

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات

عند تبسيط عبارات
تحتوي أسساً نسبية،
اترك الأسس على
الصورة النسبية بدلاً
من كتابة العبارة على
الصورة الجذرية.

$$r^{-\frac{4}{5}} \quad (4B)$$

$$p^{\frac{1}{4}} \cdot p^{\frac{9}{4}} \quad (4A)$$



عند تبسيط عبارة جذرية اجعل دليل الجذر أقل ما يمكن. وتذكر أن استعمال الأسس النسبية يسهّل هذه العملية، وبعد الانتهاء من استعمال الأسس النسبية، أعد كتابة الناتج في الصورة الجذرية.

بسّط كلّ عبارة مما يأتي:

تحقق من فهمك

$$\sqrt[3]{16x^4} \quad (5B)$$

$$\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{2}} \quad (5A)$$

إرشادات للدراسة

العبارات الجذرية والأسية

اكتب العبارة بعد
تبسيطها (الناتج
النهائي) على الصورة
التي كان عليها قبل
التبسيط؛ أي إذا بدأت
بعبارة جذرية، فاكتب
الناتج النهائي على
الصورة الجذرية،
وإذا بدأت بعبارة
تتضمن أسساً نسبية،
فاكتب الناتج النهائي
على الصورة الأسية.

بسّط كلّ عبارة مما يأتي:

تأكد

$$\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{4}} \quad (14)$$

$$\frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}} \quad (11)$$

$$a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

بسّط كلّ عبارة مما يأتي:

تدرب وحل المسائل

$$x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}} \quad (25)$$

$$y^{-\frac{4}{5}} \quad (26)$$

$$a^{\frac{7}{4}} \cdot a^{\frac{5}{4}} \quad (33)$$

$$\sqrt{\sqrt{81}} \quad (42)$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{256}} \quad (43)$$

أضف إلى
مطوبتك

ملخص المفاهيم

عبارات تتضمن أسسًا نسبية

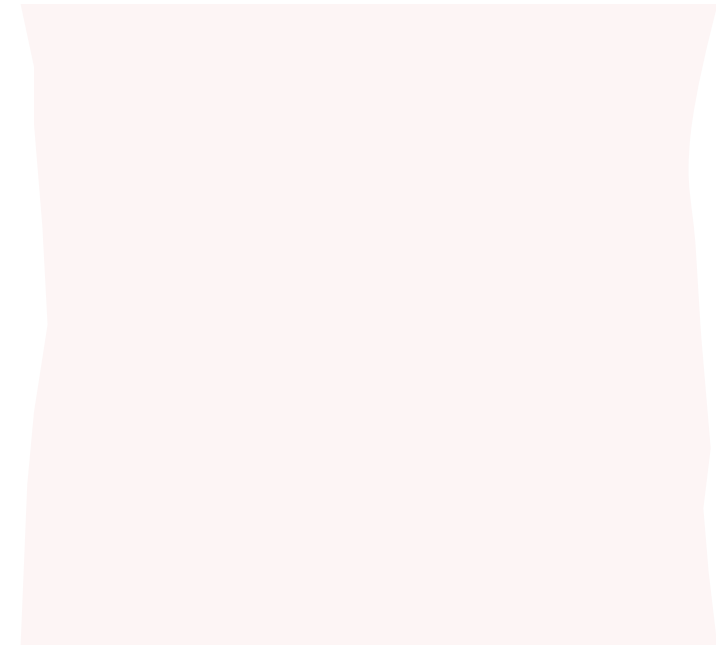
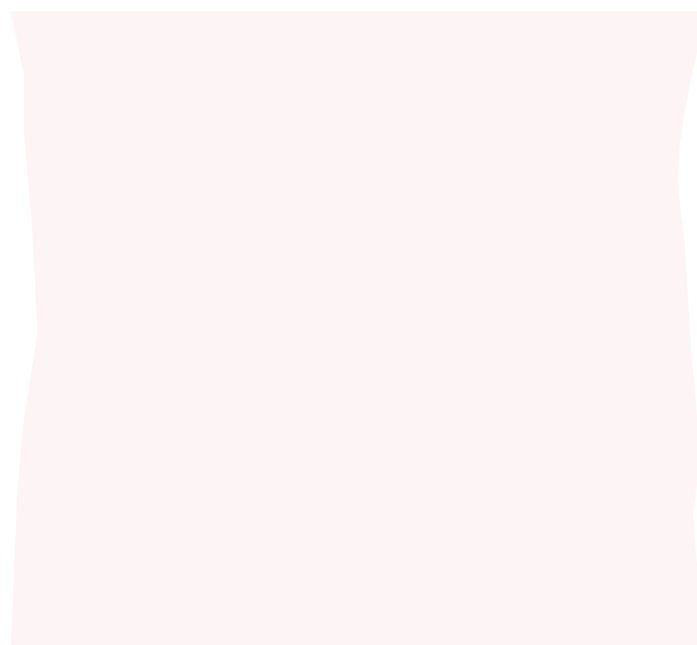
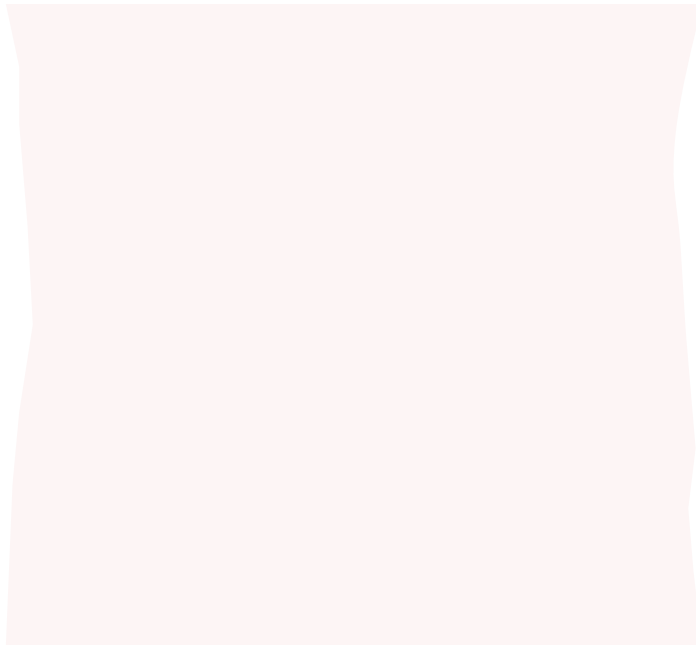
تكون العبارات التي تتضمن أسسًا نسبية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط الآتية:

- جميع الأسس غير سالبة.
- جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة.
- لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسرًا.
- دليل الجذر أو الجذور المتبقية فيها أصغر ما يمكن.





- (37) محميات:** إذا افترضنا أن عدد الغزلان يتضاعف في المحميات الطبيعية كل سنتين. فإذا كان في المحمية 100 غزال، وكان عدد الغزلان D بعد t من السنوات يعبر عنه بالصيغة $D = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$ ، فأجب عما يأتي:
- (a) كم سيصبح عدد الغزلان بعد أربع سنوات ونصف؟
- (b) اعمل جدولاً يحدد عدد الغزلان في كل سنة من السنوات الخمس القادمة.
- (c) مثل بيانيًا بيانات الجدول الذي كوّنته في الفرع **b**.
- (d) قرّر باستعمال الجدول، والتمثيل البياني: هل عدد الغزلان في المحمية معقول على المدى البعيد أم لا؟ ووضح إجابتك.



اكتشف الخطأ: بسّط كل من محمود وعلي العبارة $\frac{x^4}{x^{\frac{1}{2}}}$ ، فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟

علي

$$\begin{aligned}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} &= x^{\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}} \\ &= x^{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1}} \\ &= x^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

محمود

$$\begin{aligned}\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} &= x^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}} \\ &= x^{\frac{3}{4} + \frac{2}{4}} \\ &= x^{\frac{5}{4}}\end{aligned}$$

(51) تكون العبارة $\sqrt{56 - c}$ مساويةً لعدد صحيح موجب عندما تكون قيمة c هي:

A 8 **B** -8 **C** 56 **D** 36

(52) ما قيمة p التي تحقق المعادلة: $3^5 \cdot p = 3^3$ ؟

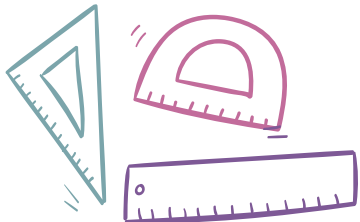
A 2^{-3} **B** 3^{-2} **C** 3^2



الدرس السابع

حل المعادلات والمتباينات الجذرية

- المفردات
1. المعادلة الجذرية
 2. الحل الدخيل
 3. المتباينة الجذرية



أ.روان القضاة

1 2 3

فيما سبق
درست حل معادلات
كثيرات الحدود

الاهداف
1. حل معادلات تحتوي جذورا
2. حل متباينات تحتوي جذورا





عندما تقفز إلى الأعلى فإنك ترتفع عن الأرض وتبقى زمناً معيناً في الهواء يُسمى زمن التحليق. ويمكنك إيجاد زمن التحليق t بالثواني إذا علمت ارتفاع القفزة h بالأقدام، وذلك باستعمال الصيغة $t = 0.5\sqrt{h}$. إذا علم أن زمن تحليق أحد لاعبي كرة السلة 0.98 ثانية تقريباً، فكيف يمكنك حساب ارتفاع قفزته؟

أسئلة التعزيز

1. ما المتغير الذي يظهر تحت رمز الجذر في الصيغة $t = 0.5\sqrt{h}$ وماذا يمثل؟

2. ما قيمة t إذا كانت $h = 4$ ؟

حل المعادلات الجذرية: تحتوي المعادلات الجذرية على عبارات جذرية يكون المتغير فيها تحت الجذر. ويمكنك حلها عن طريق رفع طرفي المعادلة لأس معين.

أضف إلى
مطوبتك

مفهوم أساسي

حل المعادلات الجذرية

الخطوة 1: اجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة.

الخطوة 2: ارفع طرفي المعادلة لقوة مساوية لدليل الجذر؛ وذلك للتخلص من الجذر.

الخطوة 3: حل معادلة كثيرة الحدود الناتجة، ثم تحقق من صحة الحل.

عند حل بعض المعادلات الجذرية، قد لا يحقق الحل المعادلة الأصلية. ويُسمى مثل هذا الحل **حلاً دخيلاً**.

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي:

$$5 = \sqrt{x - 2} - 1 \quad (1A)$$



حُلّ كلّ معادلة مما يأتي:

21 $6 + \sqrt{3x + 1} = 11$

تدرب وحل المسائل

1 $\sqrt{x - 4} + 6 = 10$

تأكد

حلّ كل معادلة مما يأتي:

تحقق من فهمك

$$(3n + 2)^{\frac{1}{3}} + 1 = 0 \quad (2A)$$

تدرب وحل المسائل
حل كل معادلة مما يأتي:

$$\frac{1}{7}(14a)^{\frac{1}{3}} = 1 \quad (33)$$

يمكنك استعمال طرائق حل معادلات الجذور التربيعية والتكعيبية في حل المعادلات الجذرية أيًا كان دليل جذرها. وللتخلص من الجذر النوني لأي عبارة ارفعه للأس n .

$$4(3x + 6)^{\frac{1}{4}} - 12 = 0 \quad (3)$$

تحقق من فهمك

$$x = 37 \quad \mathbf{D}$$

$$x = 29 \quad \mathbf{C}$$

$$x = 25 \quad \mathbf{B}$$

$$x = 7 \quad \mathbf{A}$$

تأكد

(12) اختيار من متعدد: حل المعادلة $(2y + 6)^{\frac{1}{4}} - 2 = 0$ هو:

$y = 15$ D

$y = 11$ C

$y = 5$ B

$y = 1$ A



(34) اختيار من متعدد: حل المعادلة: $\sqrt[4]{y + 2} + 9 = 14$ هو:

623 D

123 C

53 B

23 A

تدرب وحل المسائل

حل المتباينات الجذرية: المتباينة الجذرية هي متباينة تحوي عبارات جذرية، ويكون المتغير فيها تحت الجذر. ولحل متباينة جذرية، اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي

حل المتباينات الجذرية

**أضف إلى
مطوبتك**

الخطوة 1: إذا كان دليل الجذر عدداً زوجياً، فعين قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالباً.

الخطوة 2: حل المتباينة جبرياً.

الخطوة 3: حدّد حل المتباينة من الخطوتين السابقتين، ثم اختبر القيم لتتأكد من صحة الحل.

تحقق من فهمك

حل المتباينة: $\sqrt{2x+2} + 1 \geq 5$ (4A)



إرشادات الاختبار

المتباينات الجذرية

- بما أن الجذر التربيعي الرئيس لا يكون سالباً أبداً، فإن المتباينات التي تبسط إلى الصورة: $\sqrt{ax+b} \leq c$ حيث c عدد سالب، ليس لها حل، والتي تبسط إلى الصورة $\sqrt{ax+b} > c$ تكون مجموعة حلها هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

إرشادات الاختبار

المتباينات الجذرية

- إذا كان طرفا المتباينة موجبين، فإنه يمكنك تربيع الطرفين مع بقاء الرمز \leq كما هو.

حلّ كلّ متباينة مما يأتي:

تأكد

$$\sqrt{3x + 4} - 5 \leq 4 \quad (13)$$

حلّ كلّ متباينة مما يأتي:

تدرب وحل المسائل

$$\sqrt{2x + 14} - 6 \geq 4 \quad (35)$$

(41) **فيزياء:** الصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ تمثل الزمن الدوري للبندول بالثواني، حيث L طول البندول بالأقدام. احسب طول البندول الذي يستغرق 1.5 ثانية لإتمام دورته.



تطوير - إنتاج - توثيق

مسائل مهارات التفكير العليا

46 أي معادلة مما يأتي ليس لها حلٌّ؟

$$\sqrt{x+1} + 3 = 4$$

$$\sqrt{x-1} + 3 = 4$$

$$\sqrt{x+2} - 7 = -10$$

$$\sqrt{x-2} + 7 = 10$$

تدريب على اختبار

54 ما حلّ المعادلة $\sqrt{x+5} + 1 = 4$ ؟

20 **D**

11 **C**

10 **B**

4 **A**

المراجع :
ماجرهل رياضيات 3
الصف الثاني الثانوي
الفصل الدراسي الاول
وزارة التعليم
مجموعة العبيكان للاستثمار



اتقدم بالشكر الجزيل لمجموعة الابداع والتميز

مجموعة (رفعة)

ولي الفخر بأن أكون أحد أعضاء هذه المجموعة

أ. روان القضاة