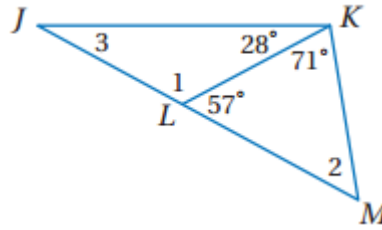


زوايا المثلثات

تلقّق

صفحة ١٤٩

(1A)



مجموع قياسات زوايا المثلث ΔJKL و $\Delta LKM = 180^\circ$

والزاويتان المتجاورتان على مستقيم $= 180^\circ$

ΔLKM

$$71^\circ + 57^\circ + \angle 2 = 180^\circ$$

$$\angle 2 = 180^\circ - 128$$

$$\angle 2 = 52^\circ$$

$$\angle 1 = 180^\circ - 57^\circ$$

$$\angle 1 = 123^\circ$$

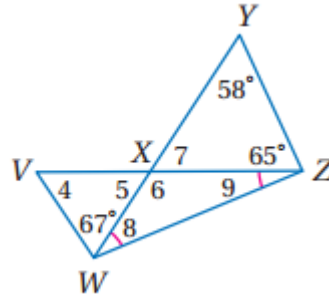
ΔJKL

$$28^\circ + 123^\circ + \angle 3 = 180^\circ$$

$$\angle 3 = 180^\circ - 151^\circ$$

$$\angle 3 = 29^\circ$$

(1B)



$\triangle XYZ$

$$58^\circ + 65^\circ + \angle 7 = 180^\circ$$

$$123^\circ + \angle 7 = 180^\circ$$

$$\angle 7 = 57^\circ$$

$$\angle 7 = \angle 5 = 57^\circ$$

نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

$\triangle VWX$

$$67^\circ + 57^\circ + \angle 4 = 180^\circ$$

$$124^\circ + \angle 4 = 180^\circ$$

$$\angle 4 = 56^\circ$$

$$\angle 6 = 180^\circ - \angle 7$$

$$\angle 6 = 180^\circ - 57^\circ$$

زاويتان متجاورتان على مستقيم

$$\angle 6 = 123^\circ$$

$$\angle 6 = 180^\circ - (\angle 9 + \angle 8)$$

$$123^\circ = 180^\circ - (\angle 9 + \angle 8)$$

$$\angle 9 = \angle 8$$

$$123^\circ = 180^\circ - (\angle 8 + \angle 8)$$

$$123^\circ = 180^\circ - 2\angle 8$$

$$2\angle 8 = 180^\circ - 123^\circ$$

$$2\angle 8 = 57^\circ$$

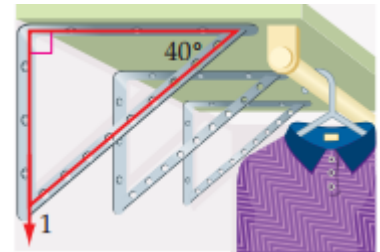
$$\angle 8 = 57^\circ \div 2$$

$$\angle 8 = 28.5^\circ$$

$$\angle 9 = 28.5^\circ$$



(2) تنظيم خزانة الملابس

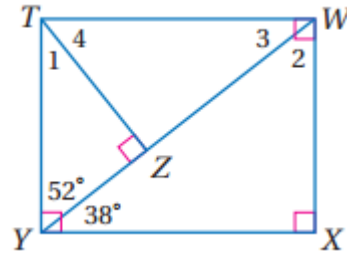


الزاوية الخارجة عن المثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخلتين البعديتين (نظرية الزاوية الخارجة)

$$\angle 1 = 90^\circ + 40^\circ$$

$$\angle 1 = 130^\circ$$

3A)



$$\angle 2 + \angle WYX = 90^\circ$$

زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية

$$\angle 2 + 38^\circ = 90^\circ$$

$$\angle 2 = 52^\circ$$

3B)

$$\angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\angle 3 + 52^\circ = 90^\circ$$

$$\angle 3 = 90^\circ - 52^\circ$$

$$\angle 3 = 38^\circ$$

3C)

$$\angle 4 + \angle 3 = 90^\circ$$

زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية

$$\angle 4 + 38^\circ = 90^\circ$$

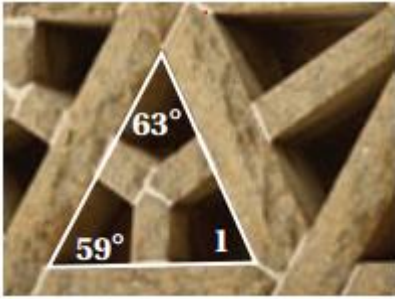
$$\angle 4 = 90^\circ - 38^\circ$$

$$\angle 4 = 52^\circ$$



أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في كل من السؤالين الآتيين: المثال ١

1)

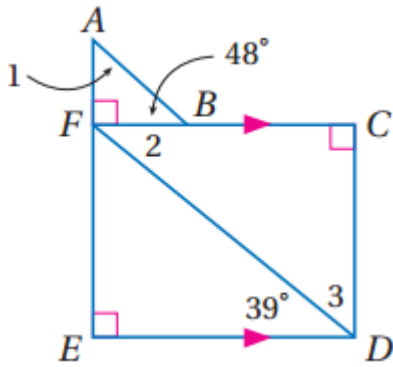


بما أن زوايا المثلث الداخلية $= 180^\circ$ إذن:

$$\angle 1 = 180^\circ - (63^\circ + 59^\circ)$$

$$\angle 1 = 58^\circ$$

2)



$$\angle 1 = 180^\circ - (90^\circ + 48^\circ)$$

$$\angle 1 = 42^\circ$$

$$\angle 2 = 39^\circ$$

نظرية الزاويتان المتبادلتان داخلياً

$$\angle 3 = 90^\circ - 39^\circ$$

$$\angle 3 = 51^\circ$$

كراسي الشاطئ: المثال ٢



3)

$$\angle 2 + 53^\circ = 102^\circ$$

$$\angle 2 = 102^\circ - 53^\circ$$

$$\angle 2 = 49^\circ$$

نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

4)

$$\angle 4 = 180 - 53^\circ$$

$$\angle 4 = 127^\circ$$

5)

$$\angle 1 = 180^\circ - 102^\circ$$

$$\angle 1 = 78^\circ$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

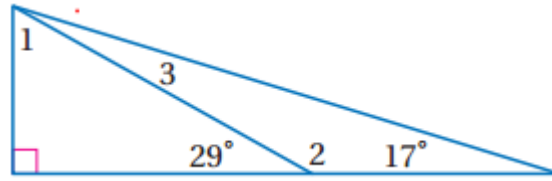
6)

$$\angle 3 = 180 + \angle 2$$

$$\angle 3 = 180^\circ + 49^\circ$$

$$\angle 3 = 131^\circ$$

معتمداً على الشكل المجاور أوجد القياسات التالية:



7)

$$\angle 1 = 180 - (90^\circ + 29^\circ)$$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180°

$$\angle 1 = 61^\circ$$

8)

$$\angle 1 + \angle 3 = 180 - (90^\circ + 17^\circ)$$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180°

$$61^\circ + \angle 3 = 73^\circ$$

$$\angle 3 = 12^\circ$$

9)

$$\angle 2 = 180 - (\angle 3 + 17^\circ)$$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180°

$$\angle 2 = 180 - (12^\circ + 17^\circ)$$

$$\angle 2 = 151^\circ$$

تدرب وحل المسائل

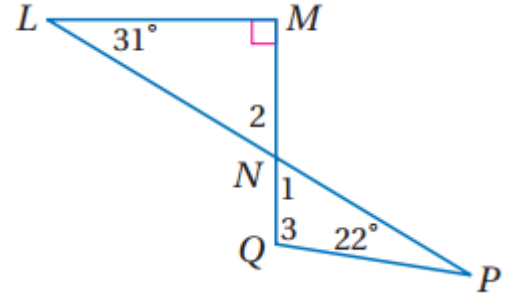
أوجد قياس الزوايا المرقمة في كل من السؤالين الآتيين:

10)

$$\angle 1 = 180 - (59^\circ + 61^\circ)$$

$$\angle 1 = 60^\circ$$





11)

$$\angle 2 = 180 - (31^\circ + 90^\circ)$$

$$\angle 2 = 59^\circ$$

نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس $\angle 2 = \angle 1 = 59^\circ$

$$\angle 3 = 180^\circ - (\angle 1 + 22^\circ)$$

$$\angle 3 = 180^\circ - (59 + 22)$$

$$\angle 3 = 99^\circ$$

12 طائرات:

(a) متطابق الضلعين، منفرج الزاوية

(b)

بما أن زاوية الهبوط والإقلاع متطابقتين فإنهما متساويتان

وبما أن مجموع زوايا المثلث $= 180^\circ$ إذن:

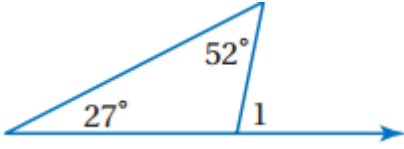
$$7 = 180^\circ - 173^\circ$$

$$3.5 = 2 \div 7^\circ$$

زاوية الهبوط والإقلاع $= 3.5^\circ$

اوجد كلا من القياسات الآتية: المثال ٢

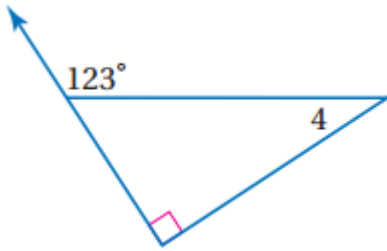
13)



$$\angle 1 = 27^\circ + 52^\circ = 79^\circ$$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

14)

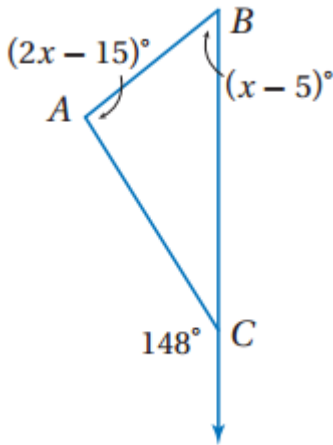


$$123 = \angle 4 + 90^\circ$$

$$\angle 4 = 123^\circ - 90^\circ = 33^\circ$$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

15)



$$148 = (2x - 15) + (x - 5)$$

$$148 = 3x - 20$$

$$148 + 20 = 3x$$

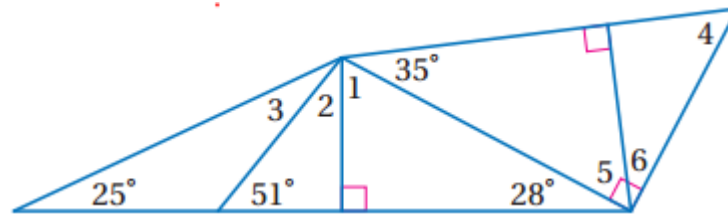
$$168 = 3x$$

$$x = 56^\circ$$

$$\angle ABC = x - 5 = 56 - 5 = 51^\circ$$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

أوجد كلا من القياسات الآتية: المثال ٣



16)

$$\angle 1 = 180^\circ - (90^\circ + 28^\circ) \quad \text{نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة} = 180^\circ$$

$$\angle 1 = 62^\circ$$

17)

$$\angle 2 = 180^\circ - (90^\circ + 51^\circ) \quad \text{نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة} = 180^\circ$$

$$\angle 2 = 39^\circ$$

18)

$$\angle 3 = 180^\circ - (129^\circ + 25^\circ)$$

$$\angle 3 = 26^\circ$$

نظرية الزاويتان المتجاورتان للزاوية 51° ونظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

19)

$$\angle 5 = 180^\circ - (35^\circ + 90^\circ) \quad \text{نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة} = 180^\circ$$

$$\angle 5 = 55^\circ$$

20)

$$\text{نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة} = 180^\circ$$

$$\angle 4 = 180^\circ - (35^\circ + 90^\circ)$$

$$\angle 4 = 55^\circ$$

21)

$$\angle 6 = 180^\circ - (\angle 4 + 90^\circ)$$

$$\angle 6 = 180^\circ - (55 + 90^\circ)$$

$$\angle 6 = 35^\circ$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

(22) بستة:

$$\angle A = 3\angle B, \angle A = 3\angle C$$

$$\angle A = 180 - (\angle B + \angle C) \quad \text{مجموع زوايا المثلث الداخلة} = 180^\circ$$

$$3(\angle B) = 180 - (\angle B + \angle C)$$

$$3(\angle C) = 180 - (\angle B + \angle C)$$

$$3(\angle B) = 180 - \angle B - \angle C$$

$$4\angle B = 180 - \angle C$$

$$4\angle B + \angle C = 180 \rightarrow 1$$

$$3(\angle C) = 180 - \angle B - \angle C$$

$$4\angle C = 180 - \angle B$$

$$4\angle C + \angle B = 180 \quad \times -4$$

$$-4\angle B - 16\angle C = -720 \rightarrow 2$$

$$\cancel{15}\angle C = \cancel{15}540$$

$$\angle C = \frac{540}{15}$$

$$\angle C = 36^\circ$$

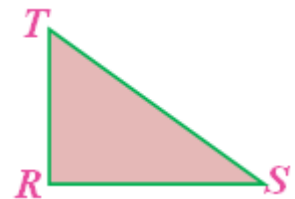
بجمع المعادلتين ١ و ٢

$$\angle B = 36^\circ$$

$$\angle A = 3\angle B = 3 \times 36 = 108^\circ$$

براهين: برهن كل مما يأتي مستعملا طريقة البرهان المذكورة:

(23) النتيجة ١, ٣ باستعمال البرهان التسلسلي.



$$m \angle R + m \angle S + m \angle T = 180^\circ$$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle R$ زاوية قائمة

معطى

$$m \angle R = 90^\circ$$

تعريف الزاوية القائمة

$$90 + m \angle S + m \angle T = 180^\circ$$

بالتعويض

$$m \angle S + m \angle T = 90^\circ$$

خاصية الطرح للمساواة

$m \angle S, m \angle T$ زاويتان متتامتان

تعريف الزاويتان المتتامتان

(٢٤) النتيجة ٢, ٣ باستعمال البرهان الحر

البرهان:

$\triangle MNO$ فيه $\angle M$ قائمة.

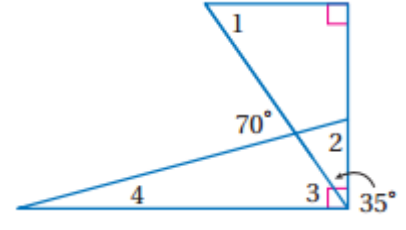
$$180^\circ = m \angle M + m \angle N + m \angle O, \text{ ولذلك فإن } 90^\circ = m \angle M$$

$$90^\circ = m \angle N + m \angle O. \text{ فإذا كانت } N \text{ زاوية قائمة فسيكون}$$

$$0^\circ = m \angle O. \text{ وهذا مستحيل. لذلك لا يمكن أن يكون في المثلث زاويتان قائمتان.}$$

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة فيما يأتي:

(25)



$$m \angle 1 = 180 - (35^\circ + 90^\circ)$$

$$m \angle 1 = 180^\circ + 125^\circ$$

$$m \angle 1 = 55^\circ$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

الزاوية المجاورة ل $70^\circ = 110^\circ$ حسب نظرية الزاويتان المتجاورتان على مستقيم.

وكذلك الزاوية لمجاورة ل $70^\circ = 110^\circ$ حسب نظرية الزاويتان المتجاورتان على مستقيم.

$$m \angle 2 = 180 - (70^\circ + 35^\circ)$$

$$m \angle 2 = 75^\circ$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$$m \angle 4 = 180 - (m \angle 2 + 90^\circ)$$

$$m \angle 4 = 180 - (75^\circ + 90^\circ)$$

$$m \angle 4 = 15^\circ$$

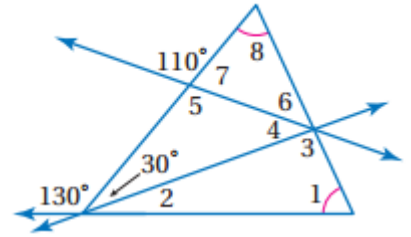
نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$$m \angle 3 = 180^\circ - (m \angle 4 + 110^\circ)$$

$$m \angle 3 = 180^\circ - (15^\circ + 110^\circ)$$

$$m \angle 3 = 55^\circ$$

(26)



زاويتان متجاورتان على مستقيم

$$m \angle 7 = 180^\circ - 110^\circ$$

$$m \angle 7 = 70^\circ$$

بالتقابل بالرأس

$$m \angle 5 = 110^\circ$$

$$m \angle 4 = 180^\circ - (110^\circ + 30^\circ)$$

$$m \angle 4 = 40^\circ$$

$$m \angle 2 = 180^\circ - (130^\circ + 30^\circ)$$

$$m \angle 2 = 20^\circ$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$$(\angle 30^\circ + \angle 2) + (\angle 8 + \angle 1) = 180$$

$$\therefore \angle 8 = \angle 1$$

$$(30^\circ + 20^\circ) + (\angle 1 + \angle 1) = 180$$

$$50^\circ + 2\angle 1 = 180$$

$$2\angle 1 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\angle 1 = 65^\circ$$

$$\angle 8 = 65^\circ$$

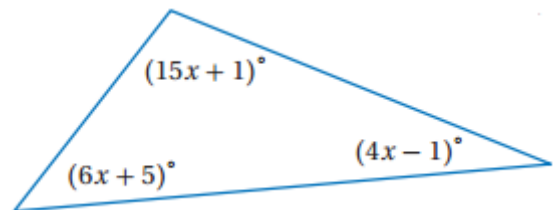
$$\angle 6 = 180^\circ - (\angle 8 + \angle 7)$$

$$\angle 6 = 180^\circ - (65^\circ + 70^\circ)$$

$$\angle 6 = 49^\circ$$

$$\begin{aligned}\angle 3 &= 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) \\ \angle 3 &= 180^\circ - (65^\circ + 20^\circ) \\ \angle 3 &= 95^\circ\end{aligned}$$

(27) جبر: صنف المثلث المجاور وفقا لزواياه. وفسر إجابتك.



منفرج الزاوية لأن مجموع قياسات الزوايا 180، لذلك فإن $x = 7$ ، وبالتعويض في العبارات الثلاث نجد أن قياسات الزوايا الثلاث هي 106 , 47 , 27

$$\begin{aligned}(15x + 1) + (6x + 5) + (4x - 1) &= 180^\circ \\ 25x + 5 &= 180^\circ \\ 25x &= 175 \\ x &= 7 \\ 15x + 1 &= 15 \times 7 + 1 = 106^\circ \\ 6x + 5 &= 47^\circ \\ 4x - 1 &= 27^\circ\end{aligned}$$

(28) قرر ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة:

صحيحة، بما أن مجموع قياسي الزاويتين الحادتين أكبر من 90 فإن قياس الزاوية الثالثة يساوي 180 ناقصا عددا أكبر من 90، وسيكون ناتج الطرح أقل من 90 بالتأكيد وعليه فإن زوايا هذه المثلث الثلاث حادة وهو مثلث حاد الزوايا.

(29) سيارات:



(a)

$$\angle 2 = 180 - (70^\circ + 71^\circ)$$

$$\angle 2 = 39^\circ$$

حسب نظرية مجموع زوايا المثلث

$$\angle 1 = (70^\circ + 71^\circ)$$

$$\angle 1 = 141^\circ$$

حسب نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

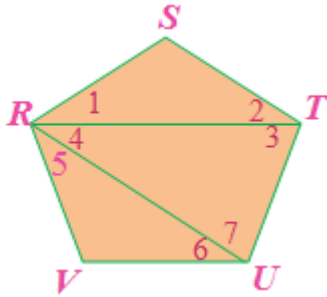
(b) سوف يزداد قياس الزاوية 1، لان غطاء السيارة سيقترّب من الساق الأخرى للمثلث المحاذية لرفوف السيارة.

(c) سوف يقل قياس الزاوية 2، لان قياس الزاوية 1 سوف يزداد ولان هاتين الزاويتين متجاورتان على مستقيم.

برهان:

(30) برهان ذو عمودين:

1) $RSTUV$ خماسي (معطى)



$$2) m \angle S + m \angle 1 + m \angle 2 = 180, m \angle 3 + m \angle 4 + m \angle 7 = 180, \\ m \angle 6 + m \angle V + m \angle 5 = 180$$

(نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)

$$3) m \angle S + m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 + m \angle 4 + m \angle 7 + m \angle 6 + \\ m \angle V + m \angle 5 = 540$$

خاصية الجمع للمساواة

$$4) m \angle VRS = m \angle 1 + m \angle 4 + m \angle 5$$

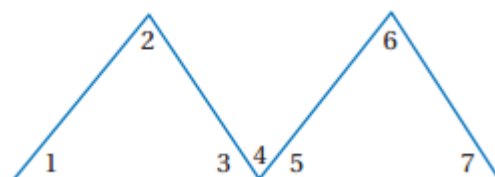
$$m \angle TUV = m \angle 7 + m \angle 6, m \angle STU = m \angle 2 + m \angle 3$$

(مسلمة جمع الزوايا)

$$5) m \angle S + m \angle STU + m \angle TUV + m \angle V + m \angle VRS = 540$$

(بالتعويض)

(31) برهان تسلسلي:



$$\begin{aligned} m\angle 1 + m\angle 2 &= m\angle 4 + m\angle 5 \\ m\angle 6 + m\angle 7 &= m\angle 3 + m\angle 4 \end{aligned}$$

نظرية الزاوية الخارجية

$$\angle 3 = \angle 5$$

معطى

$$m\angle 4 + m\angle 3 = m\angle 3 + m\angle 4$$

خاصية الإبدال

$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4 + m\angle 3$$

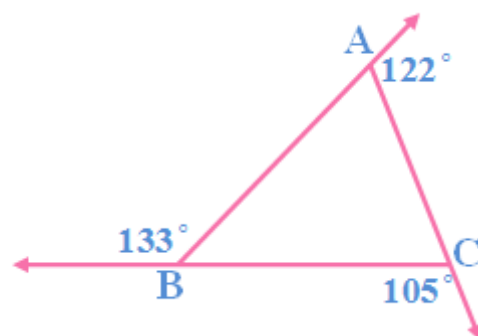
بالتعويض

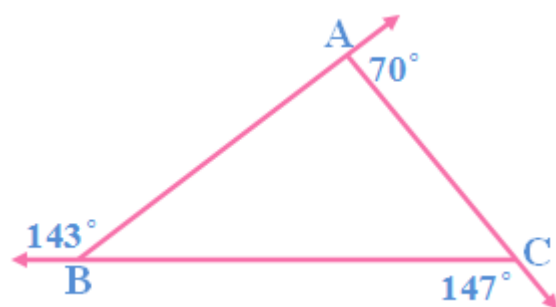
$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 6 + m\angle 7$$

بالتعويض

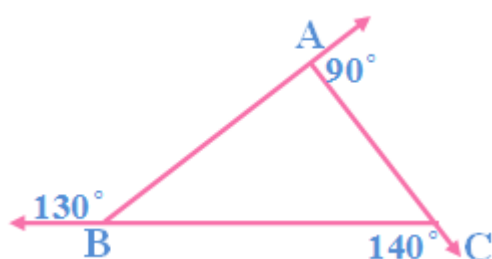
(32) تمثيلات متعددة:

(a) هندسيا:

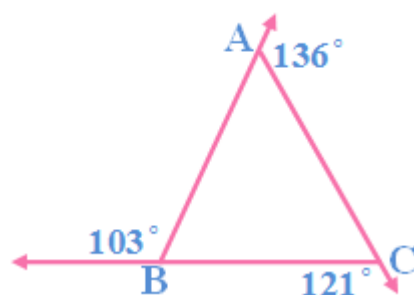




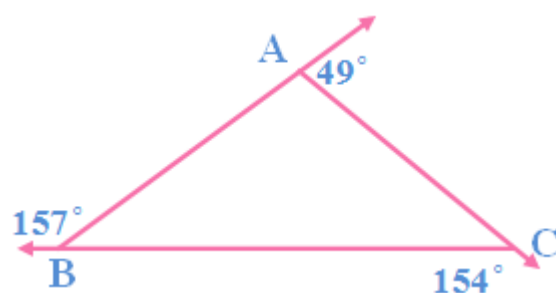
مثلث قائم الزاوية



مثلث حاد الزوايا



مثلث منفرج الزوايا



(b) جدوليا:

المجموع	$\angle 3$	$\angle 2$	$\angle 1$
٣٦٠	١٣٣	١٠٥	١٢٢
٣٦٠	١٤٣	١٤٧	٧٠
٣٦٠	١٣٠	١٤٠	٩٠
٣٦٠	١٠٣	١٢١	١٣٦
٣٦٠	١٥٧	١٥٤	٤٩

(c) لفظيا: مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث يساوي 360°

(d) جبريا: $m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 = 360^\circ$

(e) تحليليا:

تخبرنا نظرية الزاوية الخارجية بأن $m \angle 3 = m \angle CAB + m \angle BCA$

وأن $m \angle 2 = m \angle BAC + m \angle CBA$, $m \angle 1 = m \angle CBA + m \angle BCA$

وبالتعويض

$$m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 = m \angle CBA + m \angle BCA + m \angle BAC + m \angle CBA + m \angle BAC + m \angle CBA + m \angle BCA$$

ويمكن تبسيط هذه المعادلة بالشكل التالي:

$$m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 = 2m \angle CBA + 2m \angle BCA + 2m \angle BAC$$

وباستعمال خاصية التوزيع ينتج:

$$m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 = 2(m \angle CBA + m \angle BCA + m \angle BAC)$$

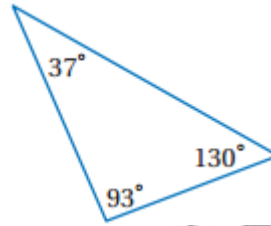
وتحبرنا نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث أن

$$m \angle CBA + m \angle BCA + m \angle BAC = 180^\circ \text{ وبالتعويض ينتج أن}$$

$$m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 = 2(180) = 360^\circ$$

مسائل مهارات التفكير العليا

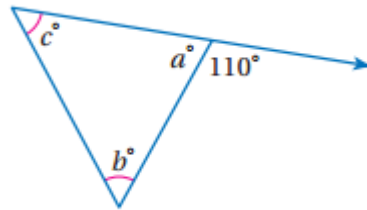
(33) اكتشف الخطأ:



تنص النتيجة 3.2 على أنه يمكن أن يكون في أي مثلث زاوية قائمة أو منفرجة واحدة على الأكثر، وبما أنه كتب في المثلث قياسان لزاويتين منفرجتين 130, 93 فإن واحدا على الأقل منها غير صحيح.

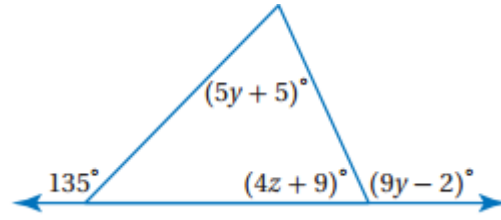
وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180 حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث ومجموع القياسات المسجلة في هذا المثلث $= 260^\circ$ فإن واحدا على الأقل من هذه القياسات غير صحيح

(34) اكتب:



$\angle a = 70^\circ$ لأن هذه الزاوية والزاوية التي قياسها 110° متجاورتان على مستقيم
وبما أن $m \angle c = m \angle b$ ومجموعهما يساوي 110° إذن $m \angle c = m \angle b = 55^\circ$

(35) تحد:



$$(4z + 9)^\circ + (9y - 2)^\circ = 180^\circ$$

$$4z + 9 + 9y - 2 = 180$$

$$4z + 9y = 180^\circ - 7$$

$$4z + 9y = 173 \rightarrow 1$$

$$(5y + 5)^\circ + (4z + 9)^\circ = 135^\circ$$

$$5y + 5 + 4z + 9 = 135$$

$$5y + 4z = 135^\circ - 14$$

$$4z + 5y = 121 \times -1$$

$$-4z - 5y = -121 \rightarrow 2$$

بجمع المعادلة ١ و ٢

$$4y = 52$$

$$y = 13$$

$$4z + 9y = 173$$

$$4z + 9 \times 13 = 173$$

$$4z = 56$$

$$z = 14$$

(36) تبرير:

منفرج الزاوية، لأن الزاوية الخارجية حادة ومجموع الزاويتين البعديتين أقل من 90
لذا فإن الزاوية الثالثة ستكون أكبر من 90 حتماً.

تدريب على الاختبار المعياري

37) B

$$7x - 3(2 - 5x) = 8x$$

$$7x - 6 + 15x = 8x$$

$$22x - 6 = 8x$$

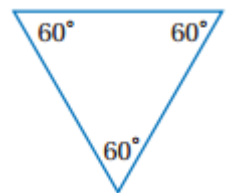
38) C

$$a + b = 90^\circ$$

مراجعة تراكمية

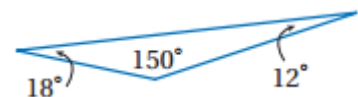
صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو
قائم الزاوية:

(39)



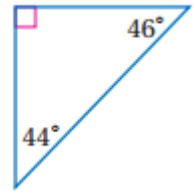
متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية في القياس

(40)



منفرج الزاوية لأن يوجد زاوية قياسها أكبر من 90°

(41)



قائم الزاوية لأن يوجد زاوية قياسها 90°

هندسة إحداثية:

42)

$(0, -2), (1, 3)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-2)}{1 - 0} = \frac{5}{1} = 5$$

$(1, 3)$

$$y = mx + b \rightarrow 3 = 5 \times 1 + b$$

$$b = 3 - 5$$

$$b = -2$$

$$y = 5x - 2 \quad \text{معادلة المستقيم } l$$

ميل المستقيم العمودي على l $\frac{-1}{5} = l$ لأن $\frac{-1}{5} \times 5 = -1$ ، $P(-4, 4)$

$$y = mx + b \rightarrow 4 = \frac{-1}{5} \times -4 + b$$

$$b = \frac{16}{5}$$

معادلة المستقيم العمودي على المستقيم l والمار بالنقطة $P(-4, 4)$ هي:

$$y = \frac{-1}{5}x + \frac{16}{5} \quad \leftarrow \text{ضرب المعادلة في } -1$$

$$-y = \frac{1}{5}x - \frac{16}{5}$$

$$\begin{array}{r} y = 5x - 2 \\ (+) -y = \frac{1}{5}x - \frac{16}{5} \\ \hline 0 = \frac{26}{5}x - \frac{26}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 5x - 2 \\ y = 5 \times 1 - 2 \\ y = 3 \end{array}$$

$$(1, 3), (-4, 4)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4 - 3)^2 + (-4 - 1)^2}$$

$$\sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

البعد بين L, P : $\sqrt{26}$ وحدة

(43)

المستقيم l الإحداثي الصادي للنقطتين المار بهما $= 0$ أي أن المستقيم هو المحور X
لذا فإن المسافة بين النقطة $P(4, 3)$ والمحور X هو الإحداثي الصادي للنقطة P
أي 3 وحدات.

استعد للدرس اللاحق

اكتب الخاصية المستعملة (الانعكاس، التماثل، التعدي) في كل عبارة مما يلي:

(44) الانعكاس

(45) التماثل

(46) التعدي