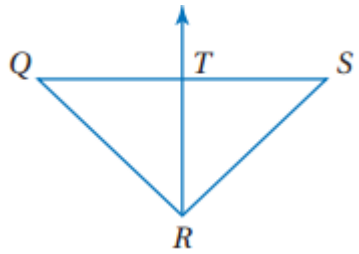
حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

3-4 إثبات تطابق المثلثات SSS , SAS

تحقق

صفحة ١٦٤

(1



ΔQRS متطابق الضلعين فيه $\overline{QR} \cong \overline{SR}$

معطى

$\overline{RT}$ ينصف $\overline{QS}$ في النقطة T

معطى

$\overline{RT} \cong \overline{RT}$

خاصية الانعكاس

T نقطة منتصف $\overline{QS}$

تعريف منصف القطع المستقيمة

$\overline{QT} \cong \overline{ST}$

نظرية نقطة المنتصف

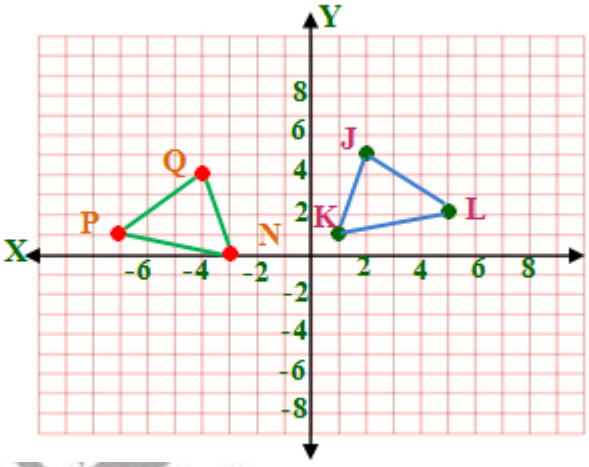
$\Delta QRT \cong \Delta SRT$

$S\ S\ S$

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

(2 (A



(B يبدو من الشكل أن للمثلثين الشكل نفسه والقياس نفسه لذلك يمكن أن نخمن أن المثلثين متطابقان.

(C

$K\ (1,1), L\ (5,2)$

$$d_{(K,L)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-1)^2}$$

$$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$J\ (2,5), K\ (1,1)$

$$d_{(J,K)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-5)^2}$$

$$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

$J(5,2), L(2,5)$

$d_{(J,L)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (5-2)^2}$

$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$JK = \sqrt{17},\ KL = \sqrt{17},\ JL = \sqrt{18}$

أطوال ΔNPQ

$P(-7,1), Q(-4,4)$

$d_{(P,Q)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-(-7))^2 + (4-1)^2}$

$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$N(-3,0), P(-7,1)$

$d_{(N,P)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-7-(-3))^2 + (1-0)^2}$

$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$N(-3,0), Q(-4,4)$

$d_{(N,Q)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-(-3))^2 + (4-0)^2}$

$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$PQ = \sqrt{18},\ NP = \sqrt{17},\ NQ = \sqrt{17}$

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

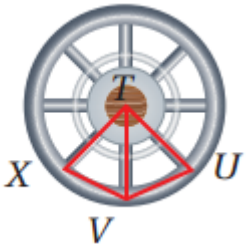
نلاحظ أن $JL = QP$, $LK = PN$, $NQ = KJ$ ومن تعريف التطابق القطع المستقيمة نستنتج أن القطع المتناظرة جميعها متطابقة. وعليه، فإن $\Delta JKL \cong \Delta QNP$ حسب SSS

3) طيران شرعي:

العبارات	المبررات
$\overline{FG} \cong \overline{GH}$ ، $\overline{JG}$ تنصف $\angle FGH$	معطي
$\angle FGJ = \angle HGJ$	تعريف منصف الزاوية
$JG = JG$	خاصية الانعكاس للتطابق
$\Delta FGJ = \Delta HGJ$	SAS

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

(4



1) $\overline{TU} \cong \overline{TX}$ معطى $\angle XTV \cong \angle VTU$

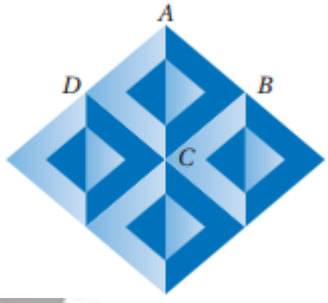
2) $m\angle XTV = m\angle UTV$ (تعريف الزوايا المتطابقة)

3) $\overline{TV} \cong \overline{TV}$ (خاصية الانعكاس)

4) $\Delta XTV \cong \Delta UTV$ (SAS)

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

1) الخداع البصري: المثال١



a) عدد المثلثات المختلفة = ٢

b)

1) $AB = CD, DA \cong BC$ (معطيات)

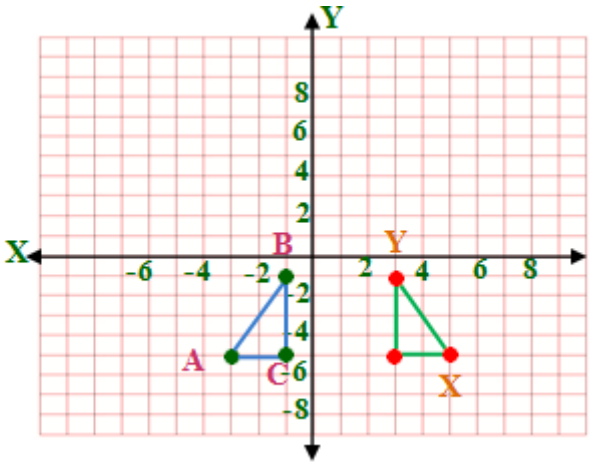
2) $\overline{AB} \cong \overline{CD},\ \overline{DA} \cong \overline{BC}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

3) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$ (خاصية الانعكاس في التطابق)

4) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (SSS)

2) إجابة مطولة: المثال٢

a)



b) يبدو من الشكل أن للمثلثين الشكل نفسه والقياس نفسه لذلك يمكن أن نخمن أن المثلثين متطابقان

c)

أطوال ΔABC

$A(-3,-5), B(-1,-1)$

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (-1-(-5))^2}$$

$$\sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$B(-1,-1), C(-1,-5)$

$$d_{(B,C)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1-(-1))^2 + (-5-(-1))^2}$$

$$\sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4$$

$A(-3,-5), C(-1,-5)$

$$d_{(A,C)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (-5-(-5))^2}$$

$$\sqrt{4+0} = \sqrt{4} = 2$$

$AB = \sqrt{20},\ BC = 4,\ AC = 2$

أطوال ΔXYZ

$X\ (5,-5), Y\ (3,-1)$

$$d_{(X,Y)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-5)^2 + (-1-(-5))^2}$$

$$\sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$Y\ (3,-1), Z\ (3,-5)$

$$d_{(Y,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (-5-(-1))^2}$$

$$\sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4$$

$X\ (5,-5), Z\ (3,-5)$

$$d_{(X,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-5)^2 + (-5-(-5))^2}$$

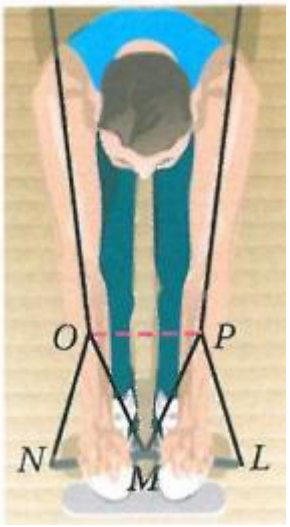
$$\sqrt{4+0} = 2$$

$XY = \sqrt{20}, YZ = 4, XZ = 2$

نلاحظ أن $XY = AB$, $YZ = BC$, $XZ = AC$ ومن تعريف التطابق القطع المستقيمة نستنتج أن القطع المتناظرة جميعها متطابقة. وعليه، فإن $\Delta XYZ \cong \Delta ABC$ حسب SSS

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

3) رياضة: المثال٣



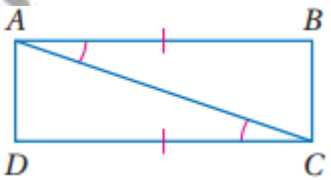
نعلم أن $\overline{LP} \cong \overline{NO}$, $\angle LPM \cong \angle NOM$.

وبما أن ΔMOP متطابق الأضلاع

فإن $\overline{MO} \cong \overline{MP}$ من تعريف المثلث المتطابق الأضلاع

ولذلك فإن $\Delta LMP \cong \Delta NMO$ حسب مسلمة التطابق SAS

4) اكتب برهان ذا عمودين: مثال٤



1) $\overline{BA} \cong \overline{DC}$, $\angle BAC \cong \angle DCA$ (معطيات)

2) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

3) $\Delta BCA \cong \Delta DAC$ (SAS)

4) $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة)

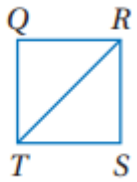
حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

تدرب وحل المسائل

برهان:اكتب برهانا من النوع المذكور في كل من السؤالين الآتيين: المثال ١

(5

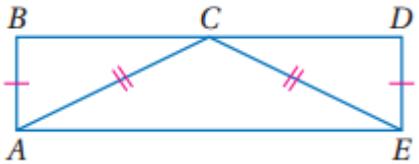


$QR = SR,\ ST = QT$

$RT = RT$ حسب خاصية الانعكاس

$\Delta QRT \cong \Delta SRT$ حسب SSS

(6



$AB = ED,\ CA = CE$

AC تنصف BD

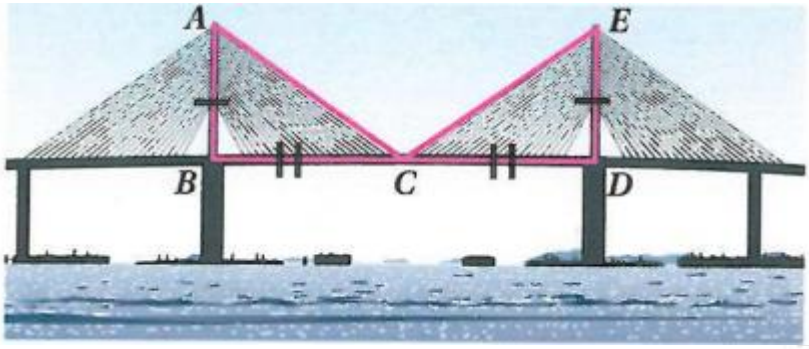
C منتصف BD

$BC = CD$

$\Delta ABC \cong \Delta EDC$ حسب SSS

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

7) جسور:



1) $\overline{AB} \cong \overline{ED}$، $\angle ABC$ و $\angle EDC$ قائمتان، C نقطة منتصف $\overline{BD}$ (معطيات)

2) $\angle ABC \cong \angle EDC$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

3) $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ (نظرية نقطة المنتصف)

4) $\Delta CDE \cong \Delta ABC$ حسب (SAS)

حدد ما إذا كان $\Delta MNO = \Delta QRS$ في كل من السؤالين الآتيين: المثال٢

8)

ΔQRS

$Q(-4,4), R(-7,1)$

$$d_{(Q,R)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-7-(-4))^2 + (1-4)^2}$$

$$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$R(-7,1), S(-3,0)$

$d_{(R,S)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3-(-7))^2 + (0-1)^2}$

$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$Q(-4,4), S(-3,0)$

$d_{(Q,S)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3-(-4))^2 + (0-4)^2}$

$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$QR = \sqrt{18},\ RS = \sqrt{17},\ QS = \sqrt{17}$

ΔMNO

$M(2,5), N(5,2)$

$d_{(M,N)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (2-5)^2}$

$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$N(5,2), O(1,1)$

$d_{(N,O)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (1-2)^2}$

$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

$M\ (2,5), O\ (1,1)$

$d_{(M,O)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-5)^2}$

$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$MN = \sqrt{18},\ NO = \sqrt{17},\ MO = \sqrt{17}$

$MN = \sqrt{18},\ NO = \sqrt{17},\ MO = \sqrt{17}$
$QR = \sqrt{18},\ RS = \sqrt{17},\ QS = \sqrt{17}$

بما أن كل زوج من الأضلاع المتناظرة متساويان في الطول فإنهما متطابقان إذن

$\Delta QRS \cong \Delta MNO$ حسب SSS

(9

ΔQRS

$Q\ (3,-3), R\ (4,-4)$

$d_{(Q,R)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-3)^2 + (-4-(-3))^2}$

$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$R\ (4,-4), S\ (3,3)$

$d_{(R,S)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (3-(-4))^2}$

$\sqrt{1+49} = \sqrt{50}$

$Q\ (3,-3), S\ (3,3)$

$d_{(Q,S)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (3-(-3))^2}$

$\sqrt{0+36} = 6$

$QR = \sqrt{2},\ RS = \sqrt{50}\ ,QS = 6$

ΔMNO

$M\ (0,-1), N\ (-1,-4)$

$d_{(M,N)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (-4-(-1))^2}$

$\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$N\ (-1,-4), O\ (-4,-3)$

$d_{(N,O)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-(-1))^2 + (-3-(-4))^2}$

$\sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

$M\ (0,-1), O\ (-4,-3)$

$d_{(M,O)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-0)^2 + (-1-(-3))^2}$

$\sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

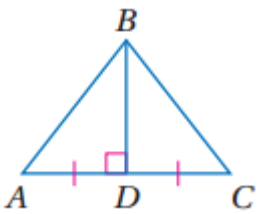
$MN = \sqrt{10},\ NO = \sqrt{10},\ MO = \sqrt{20}$

$QR = \sqrt{2},\ RS = \sqrt{50},\ QS = 6$

بما أن الأضلاع المتناظرة ليست متطابقة، فان المثلثين ليسا متطابقين

برهان: اكتب برهانا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين: المثال٣

10) برهان ذو عمودين



1) $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{BD}$ تنصف $\overline{AC}$ (معطيات)

2) $\angle BDA, \angle BDC$ قائمتان (تعريف التعامد)

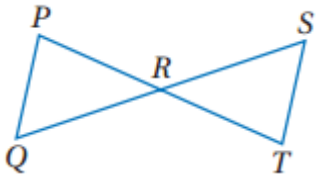
3) $\angle BDA \cong \angle BDC$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\overline{AD} \cong \overline{DC}$ (تعريف منصف القطعة المستقيمة)

5) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

6) $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ حسب مسلمة (SAS)

(11

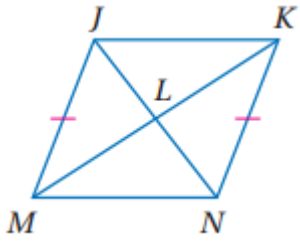


بما أن R نقطة المنتصف لكل من $\overline{PT}, \overline{QS}$ ، فإن $\overline{PR} \cong \overline{RT}$

و $\overline{RQ} \cong \overline{RS}$ من تعريف نقطة المنتصف، وكذلك $\angle PRQ \cong \angle TRS$ بحسب نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

إذن $\Delta PRQ \cong \Delta TRS$ حسب مسلمة (SAS)

12) برهان: اكتب برهانا تسلسلياً المثال٤



$\overline{JM} \cong \overline{NK}$ معطى

L نقطة منتصف كل من $\overline{JN}, \overline{KM}$ معطى

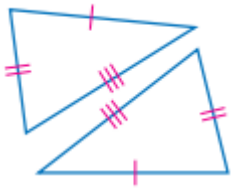
$\overline{LJ} \cong \overline{LN}$ ، $\overline{LM} \cong \overline{LK}$ تعريف نقطة المنتصف

$\Delta MJL \cong \Delta KNL$ SSS

$\angle MJL \cong \angle KNL$ العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين

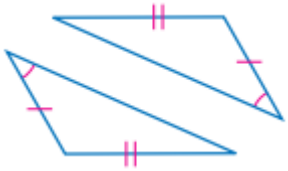
حدد ما إذا كان المثلثين في كل من الأسئلة الآتية متطابقين أم لا. وضح إجابتك.

13)



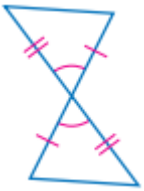
متطابقين (مسلمة): SSS

١٤)



لا يوجد تطابق

١٥)



متطابقين (مسلمة): SAS

16) إشارة تحذيرية: استعمل الشكل المجاور.

a) المجسم يسمى: هرم

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

(b

1) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ و $\overline{CB} \cong \overline{DC}$ (معطيات)

2) $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

3) $\Delta ACB \cong \Delta ACD$ حسب مسلمة (SSS)

c) المجسم ثلاثي الأبعاد ولذلك عندما يتم رسمه في المستوي الثنائي الأبعاد فان الرسم ألمنظوري يجعله يبدو وكأن المثلثين مختلفان.

١٧) برهان

$\angle TQR \cong \angle SRQ$ معطى

$\Delta TPQ \cong \Delta SPR$ معطى

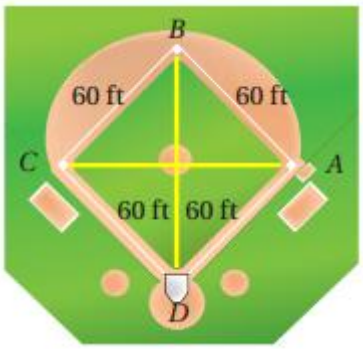
$\overline{QR} \cong \overline{RQ}$ خاصية الانعكاس للتطابق

$\overline{TQ} \cong \overline{RS}$ العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

$\Delta TQR \cong \Delta SRQ$

SAS

18) في الشكل المجاور $ABCD$ مربع:



حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

(a

1) $\overline{CB} \cong \overline{BA} \cong \overline{AD} \cong \overline{DC}$ (معطيات)

2) $\angle CBA, \angle BAD, \angle ADC, \angle DCB$ قوائم (معطيات)

3) $\angle BCD \cong \angle CDA$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\Delta BCD \cong \Delta CDA$ حسب مسلمة (SAS)

5) $\overline{DB} \cong \overline{AC}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

(b

1) $\overline{CB} \cong \overline{BA} \cong \overline{AD} \cong \overline{DC}$ (معطيات)

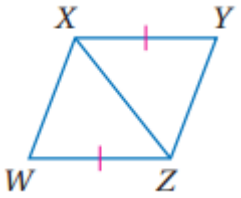
2) $\angle CBA, \angle BAD, \angle ADC, \angle DCB$ قوائم (معطيات)

3) $\angle BCD \cong \angle BAD$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\Delta BCD \cong \Delta BAD$ حسب مسلمة (SAS)

5) $\angle BDC \cong \angle BDA$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

19) برهان: اكتب برهان ذا عمودين.



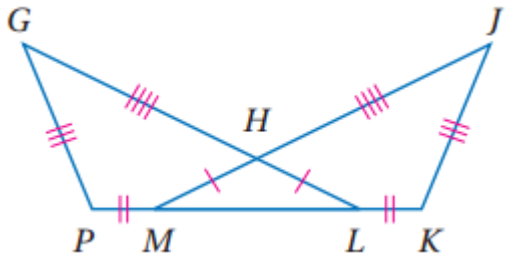
$\overline{YX} = \overline{WZ}$, $\overline{YX} \square \overline{ZW}$ (معطيات)

$\angle YXZ = \angle WZX$ (زاويتان متبادلتان داخليا)

$XZ = XZ$ (خاصية الانعكاس)

$\Delta YXZ = \Delta WZX$ حسب مسلمة (SAS)

20) برهان: اكتب برهانا حر:



$GH = JH, PG = KJ, HL = HM, PM = KL$

بما أن $GH = JH$ و $HL = HM$ إذن $GL = JM$

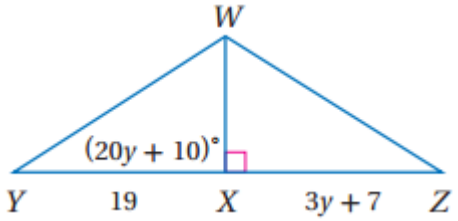
بما أن $GL = JM$, $PM = KL$ إذن $PL = KM$

إذن $\Delta GPL \cong \Delta JKM$

إذن $\angle G \cong \angle J$

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كل من السؤالين الآتيين:

21)



$\because \Delta WXY \cong \Delta WXZ$

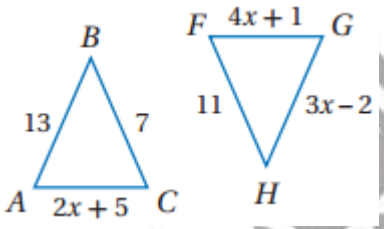
$\therefore XZ = XY$

$3y + 7 = 19$

$3y = 12$

$y = 4$

22)



$\because \Delta FGH \cong \Delta ABC$

$\therefore GH = BC$

$3x - 2 = 7$

$3x = 9$

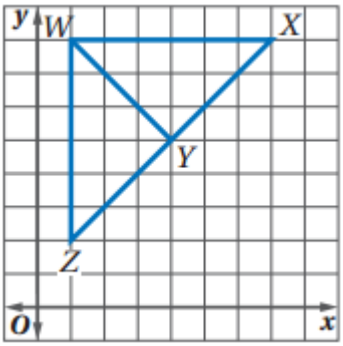
$x = 3$

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

مسائل مهارات التفكير العليا

23) تحد:



(a

الطريقة الأولى: تستعمل صيغة المسافة لإيجاد طول ضلع من الأضلاع، ثم تستعمل مسلمة التطابق SSS.

الطريقة الثانية: يمكن أن تجد ميل كل من $\overline{WY}, \overline{ZX}$ وتبرهن أنهما متعامدان، وبذلك تكون $\angle WYX, \angle WYZ$ كلتاهما قائمتين. ويمكن استعمال صيغة المسافة لإثبات أن XY تطابق YZ. وبما أن المثلثين يشتركان في الضلع $\overline{WY}$ ، فيمكن استعمال مسلمة SAS لإثبات تطابق المثلثين.

أعتقد أن الطريقة الثانية أفضل لأن فيها خطوتين بدل من ثلاث خطوات كما في الطريقة الأولى.

(b

$Y\ (4,5), W\ (1,8)$

$$m_{(YW)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-5}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$Z\ (1,2), X\ (7,8)$

$$m_{(ZX)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{7-1} = \frac{6}{6} = 1$$

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

ميل $\overline{WY}$ يساوي -1 وميل $\overline{ZX}$ يساوي ١، وبما أن ناتج ضربهما يساوي -1 فإن $\overline{WY} \perp \overline{ZX}$. وبما أنهما متعامدان فإن قياس كل من $\angle WYZ$ و $\angle WYX$ يساوي 90°. وباستعمال صيغة المسافة تجد أن طول $\overline{ZY}$ يساوي

$$\overline{ZY} = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2}$$

وكذلك طول $\overline{XY}$ يساوي

$$\overline{XY} = \sqrt{(4-7)^2 + (5-8)^2} = 3\sqrt{2}$$

وبما أن $\overline{WY} \cong \overline{WY}$، فإن $\Delta WYZ \cong \Delta WYX$ حسب مسلمة التطابق SAS.

24) اكتشف الخطأ:

خالد، لان الزاوية يجب أن تكون محصورة، والزاوية هنا ليست محصورة

25) اكتب:

نعم، الحالة الأولى: إذا علمت أن الوترين متطابقان وكان أحد ضلعي القائمة في الأول يطابق الضلع المناظر له في الثاني فسيكون ضلعا القائمة الآخران متطابقين حسب نظرية فيثاغورث، ولذلك يكون المثلثان متطابقين حسب SSS.

الحالة الثانية: إذا علمت أن ضلعي القائمة في المثلث الأول يطابقان ضلعي القائمة في المثلث الثاني، فسوف يكون المثلثان متطابقين بحسب SAS

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

تدريب على الاختبار المعياري

26) C

$\overline{BC} \cong \overline{YZ}$

27) C

$-2a + b = -7$

$-2a + (-1) = -7$

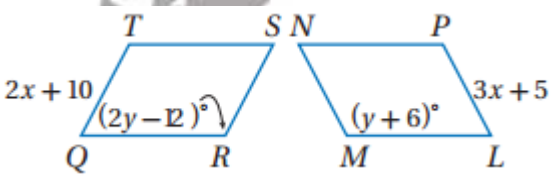
$-2a = -7 + 1$

$-2a = -6$

$a = 3$

مراجعة تراكمية

في الشكلين المجاورين، فأوجد:



28)

$\because LMNP \cong QRST$

$LP = QT$

$3x + 5 = 2x + 10$

$x = 5$

29)

$\angle LMN = \angle QRS$

$y + 6 = 2y - 12$

$y = 18$

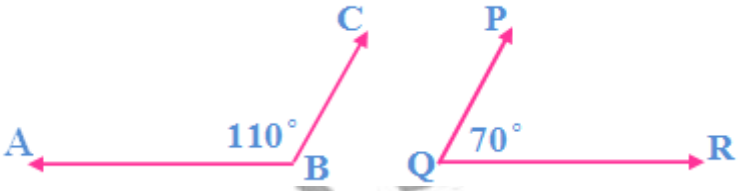
حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

30) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي:

العكس: إذا كانت الزاويتان متكاملتان فإنهما متجاورتان على مستقيم، صحيحة.

عكس العبارة الشرطية: إذ لم تكن الزاويتان متجاورتان على مستقيم فإنهما غير متكاملتان، عبارة خاطئة. والمثال المضاد هو:

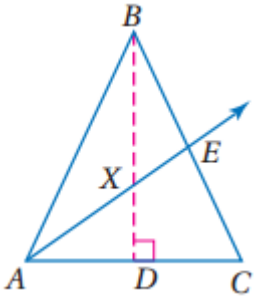
$\angle ABC$, $\angle PQR$ زاويتان متكاملتان، ولكنهما غير متجاورتين على مستقيم.



المعاكس الإيجابي: إذ لم تكن الزاويتان متكاملتان فإنهما غير متجاورتان على مستقيم وهي عبارة صحيحة.

استعد للدرس اللاحق

إذا علمت أن AE , BD ينصفان الزاويتين والضلعين اللذين يقطعانهما، فاذكر القطع المستقيمة والزوايا المشار إليها فيما يأتي:



31) $\overline{BE}$

32) $\angle CBD$

33) $\angle BDA$

34) $\overline{CD}$