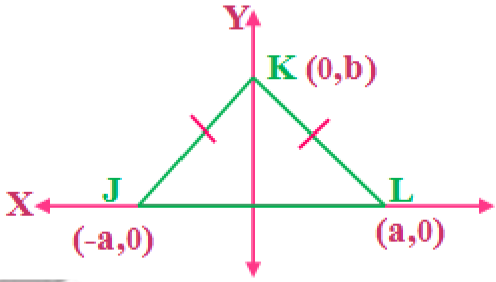
حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي
حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي

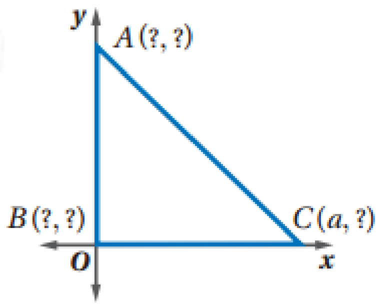
تحقق صفحة 190

(1



تحقق صفحة 191

(٢

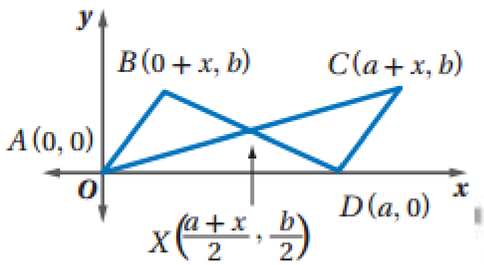


بما أن الرأس B يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0,0)$

وبما أن الرأس C يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y = 0$ وتكون الرأس C: $(a,0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين والرأس A يقع على المحور Y فإن الإحداثي $X = 0$
وتكون الرأس A: $(0,a)$

(3



نقطة منتصف $\overline{AC}$ هي

$$\left(\frac{0+a+x}{2}, \frac{0+b}{2}\right) = \left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

نقطة منتصف BD هي $\left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2}\right) = \left(\frac{0+x+a}{2}, \frac{b+0}{2}\right)$

$\overline{AC}$ ينصف $\overline{BD}$ و $\overline{BD}$ ينصف $\overline{AC}$ وذلك بتعريف المنصف.

$\overline{BX} \cong \overline{XD}$ و $\overline{AX} \cong \overline{XC}$ وذلك بتعريف المنصف.

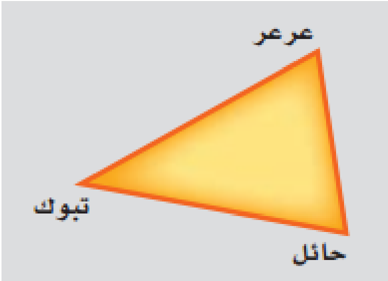
$$CD = \sqrt{\left((a+x)-a\right)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{x^2 + b^2}$$

$$AB = \sqrt{\left((0+x)-0\right)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{x^2 + b^2}$$

إذن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ بتعريف تطابق القطع المستقيمة.

$\Delta ABX \cong \Delta CDX$ بحسب SSS

4) جغرافيا:



افترض أن T ترمز لمدينة تبوك، A ترمز لمدينة عرعر، Hلمدينة حائل

$$AT=\sqrt{(28.37-30.9)^2+(36.6-41.13)^2}\approx 5.19$$

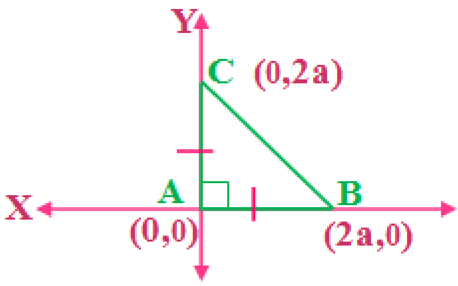
$$HT=\sqrt{(28.37-27.43)^2+(36.6-41.68)^2}\approx 5.17$$

$$AH=\sqrt{(30.9-27.43)^2+(41.13-41.68)^2}\approx 3.51$$

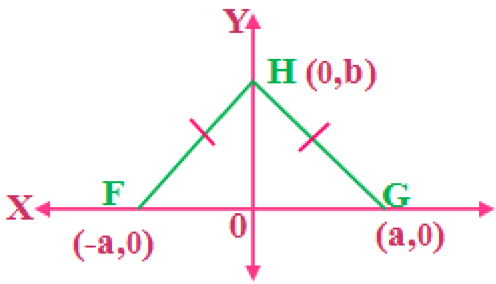
وبما أن $AT\cong HT$، فإن ΔATH متطابق الضلعين تقريباً.

ارسم كلا من المثلثين الآتيين في المستوي الاحداثي وحدد إحداثيات رؤوسه: المثال١

(1

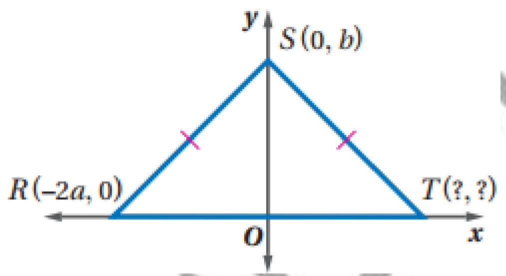


(2



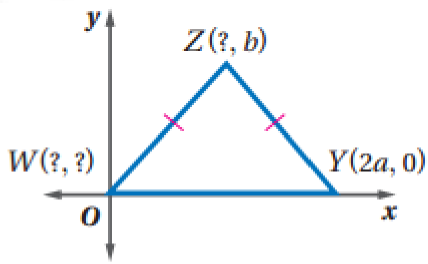
أوجد الإحداثيات المجهولة في كل من المثلثين الآتيين: المثال٢

(3



وبما أن الرأس T يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y = 0$ وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن النقطة T تقع عند النقطة $(2a, 0)$

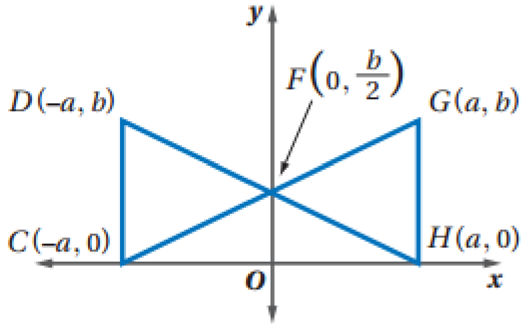
(4



بما أن الرأس W يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0,0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الإحداثي x للرأس Z يقع في منتصف المسافة بين $0, 2a$ ويكون a إذن الإحداثي الرأسي Z: (a,b)

5) اكتب برهانا احداثياً لإثبات أن $\Delta FDC \cong \Delta FGH$. المثال٣



$$DC = \sqrt{(-a-(-a))^2 + (b-0)^2} = b$$

$$GH = \sqrt{(a-a)^2 + (b-0)^2} = b$$

بما أن $DC = GH$، فإن $\overline{DC} \cong \overline{GH}$.

$$DF = \sqrt{(0-a)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b}{4}^2}$$

$$GF = \sqrt{(0+a)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b}{4}^2}$$

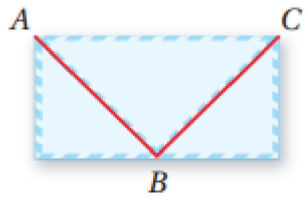
$$CF = \sqrt{(0+a)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b}{4}^2}$$

$$HF = \sqrt{(a-0)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b}{4}^2}$$

$\Delta FDC \cong \Delta FGH$ بحسب SSS

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

6) اكتب برهانا إحداثياً لإثبات أن المثلث ABC متطابق الضلعين: المثال٤



استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتجد AB و BC

$$A(0,10), B(10,0), C(20,10)$$

$$AB = \sqrt{(0-10)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{200}$$

$$BC = \sqrt{(20-10)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{200}$$

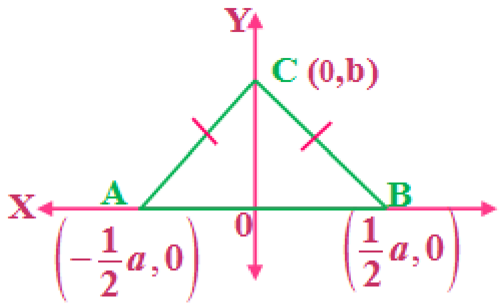
وبما أن $AB = BC$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ويكون الساقان متطابقتين، أي أن:

ΔABC متطابق الضلعين.

تدرب وحل المسائل

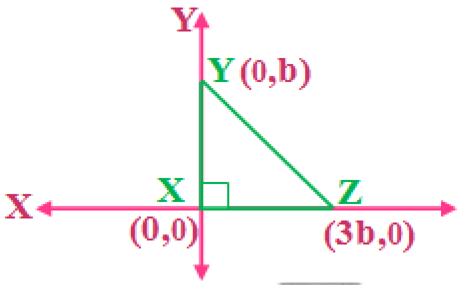
ارسم كلا من المثلثين الآتيين في المستوي الاحداثي وحدد إحداثيات رؤوسه:

(7



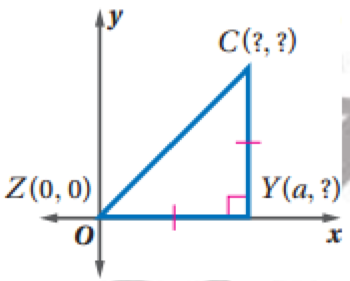
حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

8)



أوجد الإحداثيات المجهولة في كل مثلث مما يأتي: المثال٢

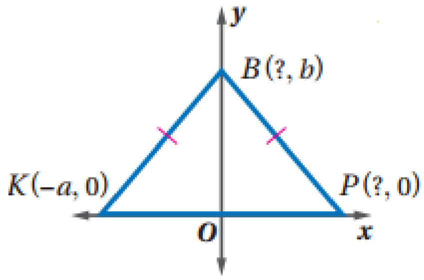
9)



وبما أن الرأس Y يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y = 0$ وتكون الرأس Y: $(a,0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين إذن تكون الرأس C: (a,a)

10)

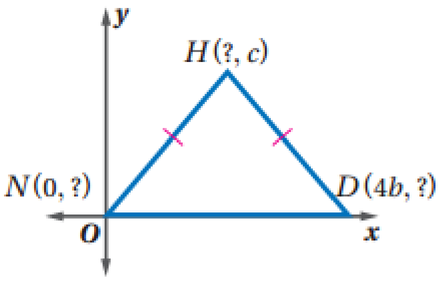


وبما أن الرأس B يقع على المحور Y فإن الإحداثي $X = 0$ وتكون الرأس B: $(0,b)$

بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن B تقع في المنتصف إذن النقطة P: $(a,0)$

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

(11



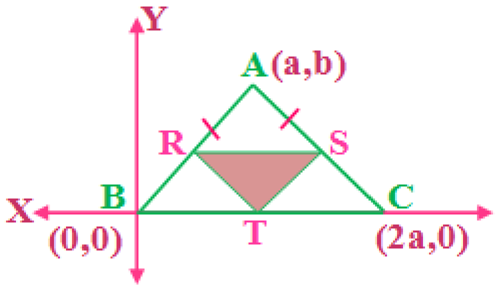
بما أن الرأس N يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0,0)$

وبما أن الرأس D يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y = 0$ وتكون الرأس D: $(4b,0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الإحداثي x للرأس H يقع في منتصف المسافة بين $0,4b$ ويكون $2b$ إذن الإحداثي الرأسي H: $(2b,c)$

برهان:

(12



إحداثيات R هي $\left(\frac{a+0}{2},\frac{b+0}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$

إحداثيات S هي $\left(\frac{a+2a}{2},\frac{b+0}{2}\right)=\left(\frac{3a}{2},\frac{b}{2}\right)$

إحداثيات T هي $\left(\frac{2a+0}{2},\frac{0+0}{2}\right)=(a,0)$

$$ST=\sqrt{\left(\frac{3a}{2}-a\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$$

$$RT=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-a\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$$

لاحظ أن $RT=ST$، وهذا يعني أن $\overline{ST}\cong\overline{RT}$، لذا فالمثلث ΔRST متطابق الضلعين.

13)

إحداثيات S هي $\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$

وإحداثيات T هي $\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$

$$ST=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}$$

$$AB=\sqrt{(a-0)^2+(0-0)^2}=a$$

اذن $ST=\frac{1}{2}AB$

14) جغرافيا:

المسافة بين جيزان ونجران: $1.69\approx\sqrt{(16.9-17.5)^2+(42.58-44.16)^2}$

المسافة بين جيزان وخميس: $1.42\approx\sqrt{(16.9-18.3)^2+(42.58-42.8)^2}$

المسافة بين نجران وخميس: $1.58\approx\sqrt{(17.5-18.3)^2+(44.16-42.8)^2}$ وبما أن هذه المسافات مختلفة، فإن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

أوجد ميل كل ضلع من أضلاعه ثم حدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا. ووضح إجابتك:

(15

$$m_{(x,y)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2h-0}{2h-0}=1$$

$$m_{(y,z)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-2h}{4h-2h}=-1$$

$$m_{(z,x)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-0}{4h-0}=0$$

ميل XY يساوي 1، ميل YZ يساوي -1 ميل ZX يساوي صفرا

وبما أن ناتج ضرب ميلي ضلعين في المثلث يساوي -1 فانه قائم الزاوية.

(16

$$m_{(x,y)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{h-0}{1-0}=h$$

$$m_{(y,z)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-h}{2h-1}=\frac{-h}{2h-1}$$

$$m_{(z,x)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-0}{2h-0}=0$$

ميل XY يساوي h، ميل YZ يساوي $\frac{-h}{2h-1}$ ميل ZX يساوي صفرا

ولا يوجد ميلان ناتج ضربهما يساوي -1 إذن المثلث ليس قائم الزاوية

17) نزهة:

ميل الطريق الواصل بين الخيميتين يساوي:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{9-25}{12-0}=\frac{-16}{12}=\frac{-4}{3}$$

وميل الطريق بين موقع الإدارة والخيمة الواقعة عند $(12,9)$ يساوي:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{9-0}{12-0}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

وبما أن $\frac{3}{4}\times\frac{-4}{3}=-1$، فإن المثلث المتشكل من الخيمتين وإدارة المتنزة مثلث قائم الزاوية.

18) رياضة مائية:

(a

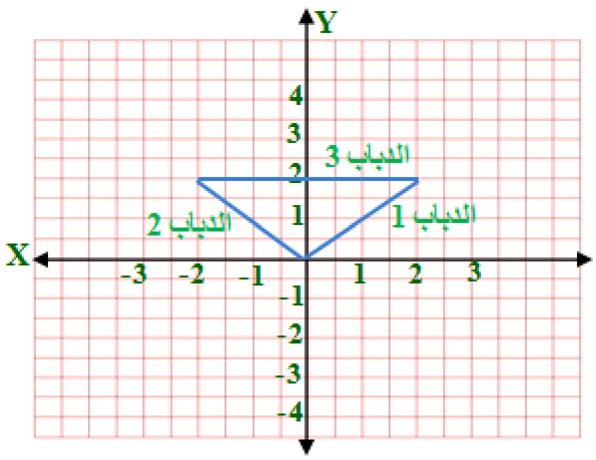
القارب الأول يسير نفس عدد الوحدات للشمال و للشرق من نقطة الأصل و الجزء المقطوع من محور الصادات = 0

لذا ميل معادلة سير القارب الأول = 1، معادلته هي $y = x$

بالمثل القارب الثاني يسير نفس عدد الوحدات للشمال و للغرب من نقطة الأصل و الجزء المقطوع من محور الصادات = 0

لذا ميل معادلة سير القارب الثاني = (-1) و معادلته هي $y=-x$

القارب الثالث يسير إلى الشمال و هذا يعني على محور الصادات، لذا معادلة المستقيم هي $x=0$



(b

المسافة بين الرصيف وكل من القاربين الأول والثاني $300m$ ، لذا فإن هذين الضلعين متطابقان. ويكون المثلث المتكون من الرصيف وكل من القاربين الأول والثاني متطابق الضلعين بحسب تعريف المثلث المتطابق الضلعين.

(c

الدباب الأول سار نفس الوحدات الى الشمال و الشرق من نقطة الأصل لذا مسار الدباب الاول يعتبر وتر للمثلث القائم المتطابق الأضلاع .

نفرض x طول الساقين المتطابقين للمثلث القائم و المتطابق الأضلاع .

بتطبيق نظرية فيثاغورث

$$2x^2 = 300 \times 300 = 90000$$

$$x = \sqrt{\frac{90000}{2}} = \sqrt{45000} = 150\sqrt{2}$$

بالمثل للدباب الثاني نفرض ان y طول الساقين المتطابقين للمثلث القائم و المتطابق الاضلاع.

$$2y^2 = 300 \times 300 = 90000$$

$$y = \sqrt{\frac{90000}{2}} = \sqrt{45000} = 150\sqrt{2}$$

حيث أن مسار الدباب الاول يقع في الربع الاول ، لذا فإن احداثياته هي:

$$\left(150\sqrt{2}\ ,\ 150\sqrt{2}\right)$$

بالمثل الدباب الثاني يقع في الربع الثاني، لذا فإن إحداثياته هي:

$$\left(-150\sqrt{2}\ ,150\sqrt{2}\right)$$

الدباب الثالث سار إلى الشمال $212\ yd.$ على محور الصادات، لذا احداثياته هي $(0\ ,\ 212)$.

(d

$$\because 150\sqrt{2} \approx 212.13$$

لذا يعتبر الثلاث دبابات لهما تقريبا نفس الإحداثي الصادي، أي تقريبا على استقامة واحدة

منتصف المسافة بين الدباب الاول و الثاني:

$$\left(\frac{150\sqrt{2}+\left(-150\sqrt{2}\right)}{2}\ \ ,\ \ \frac{212+212}{2}\right)=(0\ ,\ 212)$$

و هذا هو موقع الدباب الثالث.

مسائل مهارات التفكير العليا

تحد:

19) $L:(a,0)$

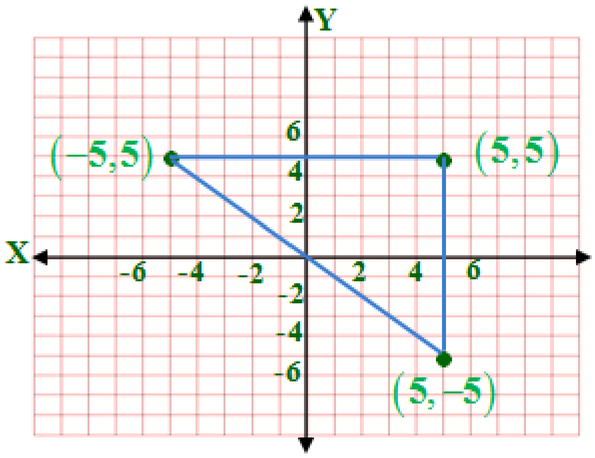
20) $L:(2a,0)$

21)

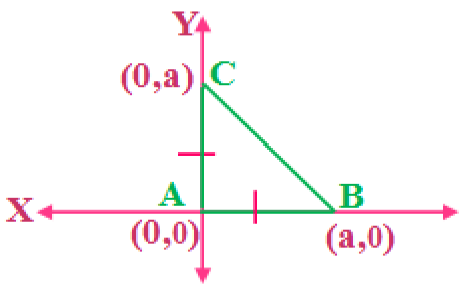
بما أن المثلث متطابق الضلعين والنقطة K تقع في متصف المسافة بين الرأس J , L

إذن النقطة $L:(4a,0)$

22) مسألة مفتوحة:



23) تبرير:



بما أن الرأس الثالث يقع على محور y إذن $x = 0$ وتكون إحداثيات الرأس $(0,a)$

24) اكتب:

a) استعمال نقطة الأصل رأسا للمثلث يسهل العمليات الحسابية لان إحداثيات نقطة الأصل (0,0)

b) رسم ضلع واحد على الأقل للمثلث على المحور X أو المحور y يسهل الحسابات عند إيجاد أطوال أضلاع لان احد الإحداثيات يكون 0

c) رسم المثلث في الربع الأول يجعل جميع إحداثيات رؤوسه موجبة وهذا يسهل إجراء العمليات الحسابية.

تدريب على الاختبار المعياري

25) D

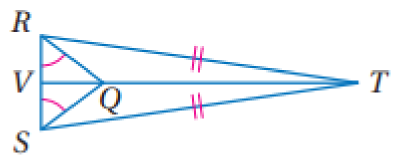
$$m\angle B = 76^\circ$$
$$m\angle A = 76^\circ \div 2 = 38^\circ$$
$$m\angle C = 180 - \left(76^\circ + 38^\circ\right)$$
$$m\angle C = 66^\circ$$

26) B

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الإحداثي x للرأس R يقع في منتصف المسافة بين $0, 2a$ ويكون a إذن الإحداثي الرأسي R: (a, b)

مراجعة تراكمية

انظر إلى الشكل المجاور



27) $\angle TSR = \angle TRS$

28) $RQ = QS$

29) $\Delta RQV \cong \Delta SQV$

30) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-6)}{2-(-2)} = \frac{12}{4} = 3$

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية وقرب الناتج الى اقرب عشر:

31) $X(5,4), Y(2,1)$

$XY = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (1-4)^2}$

$\sqrt{9+9} = \sqrt{18} \approx 4.2$

32) $A(1,5), B(-2,-3)$

$AB = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-3-5)^2}$

$\sqrt{9+64} = \sqrt{73} \approx 8.5$

33) $J(-2,6), K(1,4)$

$JK = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (4-6)^2}$

$\sqrt{9+4} = \sqrt{13} \approx 3.6$