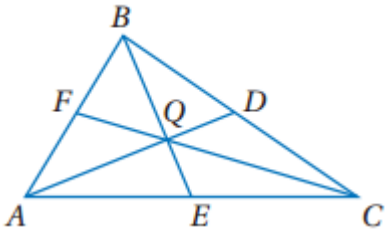
٤-٢ القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

تحقق صفحة 219



1A) بما أن Q هي مركز ΔABC إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$QC = \frac{2}{3}FC$$

$$QC = \frac{2}{3} \times 15$$

$$QC = 10$$

$$FQ = FC - QC$$

$$FQ = 15 - 10$$

$$FQ = 5$$

1B) بما أن Q هي مركز ΔABC إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$QC = \frac{2}{3}FC$$

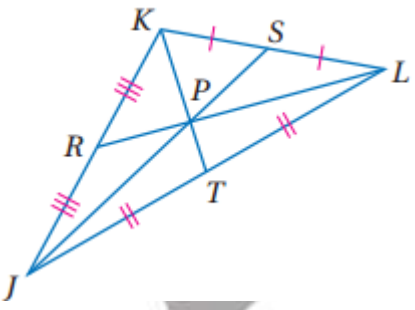
$$QC = \frac{2}{3} \times 15$$

$$QC = 10$$

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

تحقق

صفحة 220



(2A بما أن P هي مركز $\Delta JKLS$ و $RP = 3.5$ إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$PL = \frac{2}{3}LR$$

$$PL = \frac{2}{3}(PL + RP)$$

$$PL = \frac{2}{3}PL + \frac{2}{3}RP$$

$$PL - \frac{2}{3}PL = \frac{2}{3} \times 3.5$$

$$\frac{1}{3}PL = \frac{7}{3}$$

$$PL = 7$$

(2B

$$JP = \frac{2}{3}JS$$

$$9 = \frac{2}{3} \times JS$$

$$JS = 9 \div \frac{2}{3} = 9 \times \frac{3}{2}$$

$$JS = 13.5$$

$$PS = JS - JP = 13.5 - 9$$

$$PS = 4.5$$

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

تحقق

صفحة 221

٣)

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{AC}$

$A(0,4), C(12,1)$

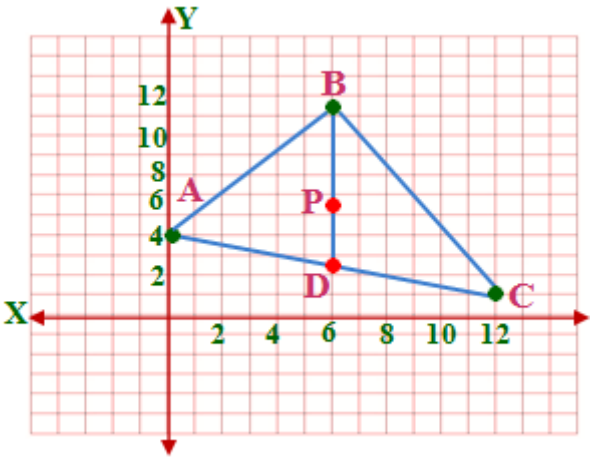
$D\left(\frac{0+12}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = D(6, 2.5)$

المسافة من $D(6,2.5)$ إلى $B(6,11.5)$ تساوي $11.5 - 2.5$ أي ٩ وحدات

واذا كانت P هي مركز ΔABC فإن $BP = \frac{2}{3}BD$ ولذلك يقع المركز على بعد

$9 \times \frac{2}{3}$ أو ٦ وحدات لأعلى وتكون احداثيات P هي $(6, 11.5-6)$ أو $(6, 5.5)$

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(6, 5.5)$

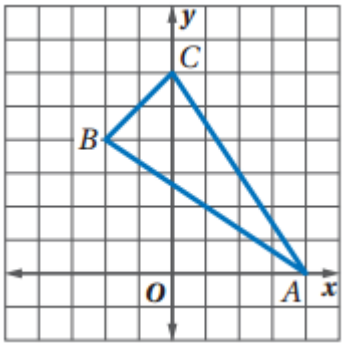


حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة إعداد أ. بندر الحازمي

تحقق

صفحة 222

٤)



$A(4,0), B(-2,4), C(0,6)$

أوجد معادلة ارتفاع من C إلى $\overline{AB}$

بما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي $\frac{-2}{3} = \frac{4}{-6} = \frac{4-0}{-2-4} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{AB}$ يساوي $\frac{3}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$C(0,6),\ m = \frac{3}{2}$

$y - 6 = \frac{3}{2}(x - 0)$

$y - 6 = \frac{3}{2}x$

$y = \frac{3}{2}x + 6 \rightarrow 1$

معادلة الإرتفاع من A إلى $\overline{BC}$

بما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي $1 = \frac{2}{2} = \frac{6-4}{0+2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{AB}$ يساوي -1

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$A(4,0),\ m = -1$

$y - 0 = -1(x - 4)$

$y = -x + 4 \rightarrow 2$

حل المعادلتين ١ و ٢

$y = \frac{3}{2}x + 6$

$y = -x + 4$

$\frac{3}{2}x + 6 = -x + 4$

$\frac{3}{2}x + x = 4 - 6$

$\frac{5}{2}x = -2$

$x = -\frac{4}{5}$

$y = -x + 4$

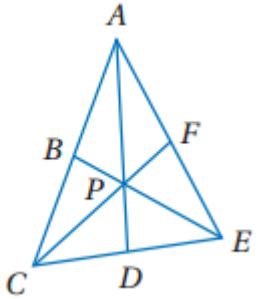
$y = \frac{4}{5} + 4$

$y = 4\frac{4}{5}$

إذن النقطة $\left(\frac{-4}{5}, 4\frac{4}{5}\right)$ هي ملتقي ارتفاعات المثلث.

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

أوجد طولي القطعتين الاتيتين: المثالان 1,2



١)

بما أن P هي مركز ΔACE إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$PC = \frac{2}{3}CF$$

$$PC = \frac{2}{3}(PF + CP)$$

$$PC = \frac{2}{3}(6 + CP)$$

$$PC = 4 + \frac{2}{3}CP$$

$$PC - \frac{2}{3}CP = 4$$

$$\frac{1}{3}CP = 4$$

$$CP = 12$$

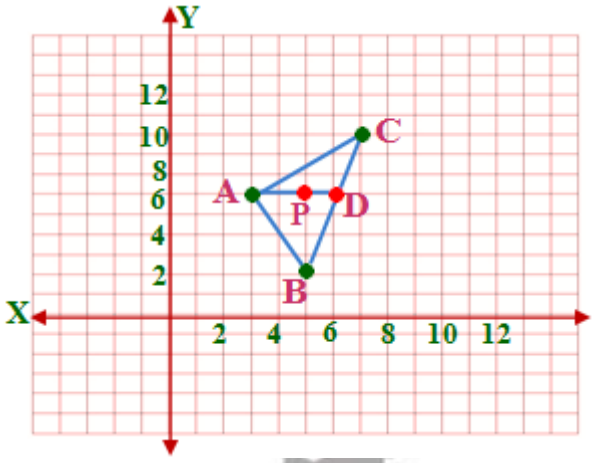
$$AP = \frac{2}{3}AD$$

$$AP = \frac{2}{3} \times 15$$

$$AP = 10$$

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

٣) تصميم داخلي:



بفرض ان اسماء نقاط المثلث هي ABC

$A(3,6), B(5,2), C(7,10)$

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{BC}$

$B(5,2), C(7,10)$

$$D\left(\frac{5+7}{2}, \frac{10+2}{2}\right) = D(6,6)$$

المسافة من $D(6,6)$ إلى $A(3,6)$ تساوي $6-3$ أي ٣ وحدات.

واذا كانت P هي مركز ΔABC فإن $AP = \frac{2}{3}AD$ ولذلك يقع المركز على بعد

$3 \times \frac{2}{3}$ أو ٢ وحدة إلى اليمين من A وتكون احداثيات P هي $(5,6)$

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(5,6)$

4) هندسة احداثية:

$A(-3,3), B(-1,7), C(3,3)$

أوجد معادلة ارتفاع من C إلى $\overline{AB}$

بما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي $2 = \frac{4}{2} = \frac{7-3}{-1+3} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{AB}$ يساوي $-\frac{1}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$C(3,3),\ m = -\frac{1}{2}$

$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 3)$

$y - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 3$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \rightarrow 1$

معادلة الإرتفاع من A إلى $\overline{BC}$

بما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي -1 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-7}{3+1} = \frac{-4}{4} = -1$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{BC}$ يساوي 1

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$A(-3,3),\ m = 1$

$y - 3 = 1(x + 3)$

$y - 3 = x + 3$

$y = x + 6 \rightarrow 2$

بطرح المعادلتين ١ و ٢

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

$y = x + 6$

$0 = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}x = -\frac{3}{2}$

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

$x = -1$

$y = x + 6$

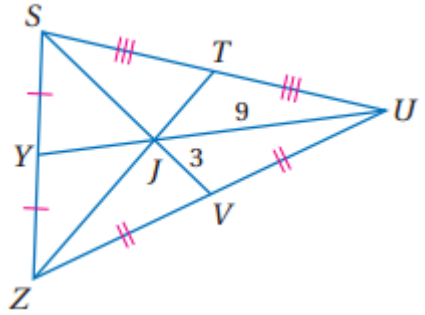
$y = -1 + 6$

$y = 5$

إذن احداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث هي $(-1,5)$

تدرب وحل المسائل

أوجد طول كل مما يأتي:



٥)

بما أن J هي مركز ΔSZU و $JU = 9$ إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$JU = \frac{2}{3}YU$$

$$JU = \frac{2}{3}(JU + YJ)$$

$$9 = \frac{2}{3}JU + \frac{2}{3}YJ$$

$$9 = \frac{2}{3} \times 9 + \frac{2}{3}YJ$$

$$9 = 6 +$$

$$\frac{2}{3}YJ = 9 - 6 = 3$$

$$YJ = 3 \div \frac{2}{3} = 4.5$$

(6

بما أن J هي مركز ΔSZU و $JV = 3$ إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$SJ = \frac{2}{3}SV$$

$$SJ = \frac{2}{3}(JV + SJ)$$

$$SJ = \frac{2}{3} \times 3 + \frac{2}{3}SJ$$

$$SJ - \frac{2}{3}SJ = \frac{2}{3} \times 3$$

$$\frac{1}{3}SJ = 2$$

$$SJ = 6$$

(7

$$YU = (JU + YJ)$$

$$YU = 9 + 4.5$$

$$YU = 13.5$$

(8

$$SV = (SJ + VJ)$$

$$SV = 6 + 3$$

$$SV = 9$$

(9

$$ZJ = \frac{2}{3}ZT$$

$$ZJ = \frac{2}{3} \times 18 = 12$$

$$JT = ZT - ZJ$$

$$JT = 18 - 12 = 6$$

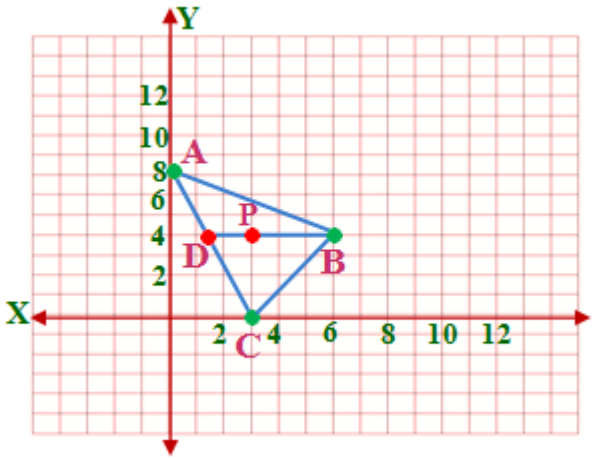
حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

(10

$$ZJ = \frac{2}{3}ZT$$

$$ZJ = \frac{2}{3} \times 18 = 12$$

(11 (3, 4) تصميم داخلي: المثال٣



بفرض ان اسماء نقاط المثلث هي ABC

$A(0,8), B(6,4), C(3,0)$

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{AC}$

$A(0,8), C(3,0)$

$$D\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+8}{2}\right) = D(1.5,4)$$

المسافة من $D(1.5,4)$ إلى $B(6,4)$ تساوي $6-1.5$ أي ٤,٥ وحدات.

واذا كانت P هي مركز ΔABC فإن $BP = \frac{2}{3}BD$ ولذلك يقع المركز على بعد

$AD = DC$ أو٣ وحدة إلى اليسار من B وتكون احداثيات P هي $(6-3,4)$

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(3,4)$

12) هندسة احداثية:

$J(3,-2), K(5,6), L(9,-2)$

أوجد معادلة ارتفاع من L إلى $\overline{JK}$

بما أن ميل $\overline{JK}$ يساوي 4 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6+2}{5-3}=\frac{8}{2}=4$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{JK}$ يساوي $-\frac{1}{4}$

صيغة الميل ونقطة $y-y_1=m(x-x_1)$

$L(9,-2),\ m=-\frac{1}{4}$

$y+2=-\frac{1}{4}(x-9)$

$y+2=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}-2$

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\rightarrow 1$

معادلة الإرتفاع من J إلى $\overline{KL}$

$J(3,-2), K(5,6), L(9,-2)$

بما أن ميل $\overline{KL}$ يساوي -2 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-6}{9-5}=\frac{-8}{4}=-2$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{KL}$ يساوي $\frac{1}{2}$

صيغة الميل ونقطة $y-y_1=m(x-x_1)$

$J(3,-2),\ m=\frac{1}{2}$

$$y+2=\frac{1}{2}(x-3)$$

$$y+2=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\times 3$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}-2$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}\rightarrow 2$$

بطرح المعادلتين ١ و ٢

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$$

$$0=\frac{1}{4}x-3.25$$

$$x=13$$

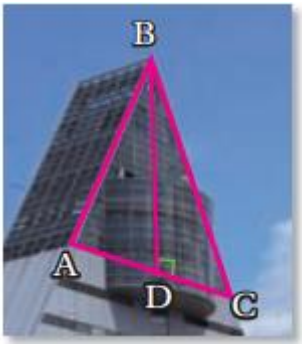
$$y=\frac{1}{2}\times 13-\frac{7}{2}$$

$$y=3$$

إذن احداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث هي $(13,3)$

صنف $\overline{BD}$ في كل من الأسئلة الآتية إلي ارتفاع أو عمود منصف أو قطعة متوسطة:

(13

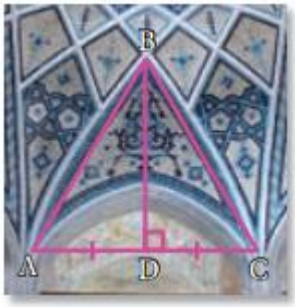


بما أن $\overline{BD}\perp\overline{AC}$ ولا ينصف $\overline{AC}$ إذن $\overline{BD}$ ارتفاع المثلث ΔABC

(14

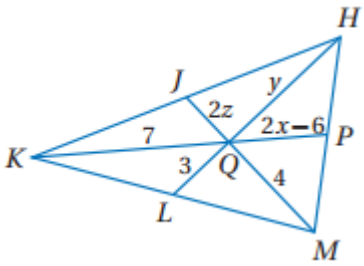
بما أن $\overline{BD}$ ليست عمودية و $AD = DC$ إذن $\overline{BD}$ قطعة متوسطة

(15



بما أن $\overline{BD}$ عمودية وتنصف $\overline{AC}$ إذن $\overline{BD}$ عمود منصف

(16 جبر:



بما أن L, P, J نقط منتصفات $\overline{KH}, \overline{HM}, \overline{MK}$

إذن $\overline{KP}, \overline{MJ}, \overline{LH}$ قطع متوسطة في ΔKHM لذلك فالنقطة P هي مركز ΔKHM إذن:

$$KQ = \frac{2}{3}KP$$

$$7 = \frac{2}{3}(QP + KQ)$$

$$7 = \frac{2}{3}(2x - 6 + 7)$$

$$7 = \frac{2}{3}(2x + 1)$$

$$7 = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{3}x = 7 - \frac{2}{3} = \frac{19}{3}$$

$$x = \frac{19}{3} \div \frac{4}{3}$$

$$x = 4.75$$

$$MQ = \frac{2}{3}MJ$$

$$MQ = \frac{2}{3}(JQ + QM)$$

$$4 = \frac{2}{3}(2z + 4)$$

$$4 = \frac{4}{3}z + \frac{8}{3}$$

$$\frac{4}{3}z = 4 - \frac{8}{3}$$

$$\frac{4}{3}z = \frac{4}{3}$$

$$z = 1$$

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

$$HQ = \frac{2}{3}HL$$

$$y = \frac{2}{3}(HQ + QL)$$

$$y = \frac{2}{3}(y + 3)$$

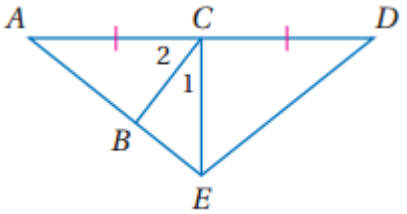
$$y = \frac{2}{3}y + 2$$

$$y - \frac{2}{3}y = 2$$

$$\frac{1}{3}y = 2$$

$$y = 6$$

17) جبر:



بما أن $\overline{CD} = \overline{AC}$ و $\overline{EC}$ ارتفاع ΔAED إذن $EC \perp AD$

$$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$(2x + 7) + (3x + 13) = 90^\circ$$

$$5x + 20 = 90^\circ$$

$$5x = 90 - 20$$

$$5x = 70$$

$$x = 14$$

$$m\angle 1 = 2x + 7$$

$$m\angle 1 = 2 \times 14 + 7$$

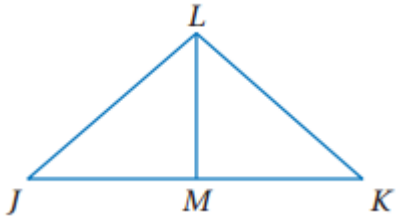
$$m\angle 1 = 35^\circ$$

$m\angle 2 = 3x + 13$

$m\angle 2 = 3 \times 14 + 13$

$m\angle 2 = 55^\circ$

في الشكل المجاور حدد ما إذا كانت $\overline{LM}$ عمودا منصف أو قطعة متوسطة أو ارتفاع لـ ΔJKL في كل حالة مما يأتي:



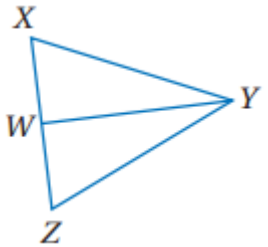
18) بما أن $\overline{LM} \perp \overline{JK}$ ولا ينصف $\overline{JK}$ إذن $\overline{LM}$ ارتفاع

19) بما أن $\Delta JLM \cong \Delta KLM$ إذن $\overline{JM} = \overline{MK}$ إذن $\overline{LM}$ قطعة متوسطة

20) بما أن $\overline{JM} = \overline{MK}$ إذن $\overline{LM}$ قطعة متوسطة

21) بما أن $\overline{LM} \perp \overline{JK}$ و $\overline{JL} \cong \overline{LK}$ إذن حسب عكس نظرية العمود المنصف $\overline{LM}$ ينصف $\overline{JK}$ إذن $\overline{LM}$ عمود منصف.

22) برهان: اكتب برهان حرا.



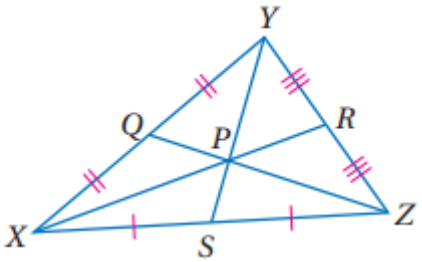
المعطيات: ΔXYZ متطابق الضلعين فيه $\overline{XY} \cong \overline{ZY}$، $\overline{WY}$ ينصف $\angle Y$.

المطلوب: $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.

البرهان: بما أن ΔXYZ متطابق الضلعين فيه $\overline{XY} \cong \overline{ZY}$ ومن تعريف منصف الزاوية تعلم أن $\angle XYW \cong \angle ZYW$ كما أن $\overline{YW} = \overline{YW}$ حسب خاصية الانعكاس. لذلك وبحسب SAS يكون $\Delta XYW \cong \Delta ZYW$.

إذن $\overline{XW} \cong \overline{ZW}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة وحسب نقطة المنتصف تكون W نقطة منتصف $\overline{XZ}$ ومن تعريف القطعة المتوسطة تكون $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.

23) اكتب برهانا جبريا:



المعطيات: $\overline{XR}, \overline{YS}, \overline{ZQ}$ قطع متوسطة لـ ΔXYZ

المطلوب: $\frac{XP}{PR} = 2$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\overline{XR}, \overline{YS}, \overline{ZQ}$ قطع متوسطة لـ ΔXYZ (معطيات)

2) $XP = \frac{2}{3}XR$ (نظرية مركز المثلث)

3) $XR = XP + PR$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

4) $XP = \frac{2}{3}(XP + PR)$ (بالتعويض)

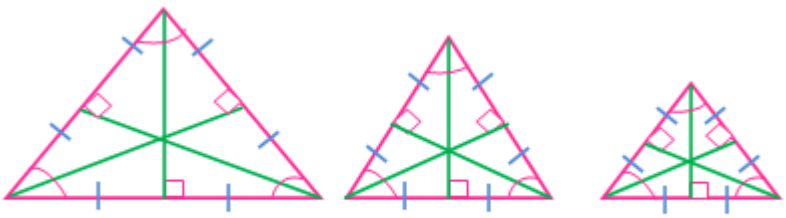
5) $XP = \frac{2}{3}XP + \frac{2}{3}PR$ (خاصية التوزيع)

6) $\frac{1}{3}XP = \frac{2}{3}PR$ (خاصية الطرح)

7) $XP = 2RP$ (خاصية الضرب)

8) $\frac{XP}{PR} = 2$ (خاصية القسمة)

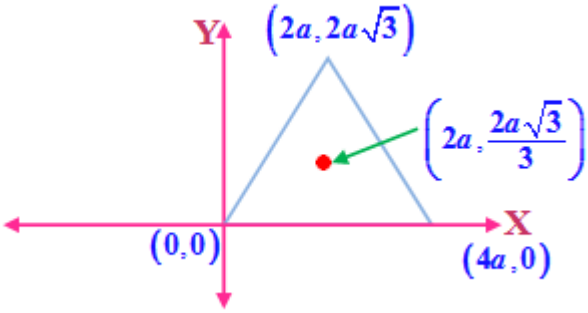
24a) تمثيلات متعددة:



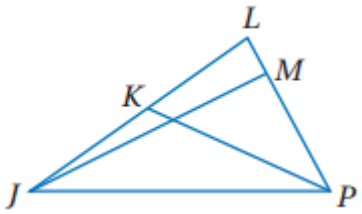
24b) لفظياً:

نقطة التلاقي الأربع للمثلث متطابق الأضلاع هي النقطة نفسها.

24c) بيانياً:



25) جبر:



بما أن $\overline{JM}$ ارتفاع ΔJLP إذن $\overline{JM} \perp \overline{LP}$ إذن $\angle JMP = 90^\circ$

$$3x - 6 = 90$$

$$3x = 96$$

$$x = 32$$

26)

بما أن $\overline{PK}$ قطعة متوسطة إذن $\overline{KL} = \overline{KJ}$

$$5y - 8 = 3y - 2$$

$$5y - 3y = -2 + 8$$

$$2y = 6$$

$$y = 3$$

$$LK = 5y - 8$$

$$LK = 5 \times 3 - 8$$

$$LK = 7$$

مسائل مهارات التفكير العليا

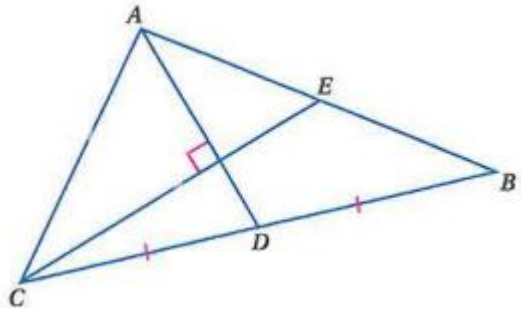
27) اكتشف الخطأ:

إجابة عبد الكريم هي الصحيحة فحسب نظرية مركز المثلث $AP = \frac{2}{3}AD$ وقد بدلت أطوال القطع المستقيمة.

28) تبرير:

صحيحة؛ في المثلث قائم الزاوية يكون الارتفاعان المرسومان من رأسي الزاويتين الحادتين هما ساقي المثلث الذين يتقاطعان عند رأس الزاوية القائمة. وبما أن الارتفاع إلى وتر المثلث يبدأ من الرأس فإن الارتفاعات الثلاثة تتقاطع عند رأس الزاوية القائمة. لذلك فرأس الزاوية القائمة هو دائما ملتقى الارتفاعات.

29) تحد:



بما أن $\overline{AD}, \overline{CE}$ قطعتين متوسطتين إذن يقعان داخل المثلث وتتلاقي القطع في نقطة واحدة P ولتكن تسمى مركز المثلث إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$\because \overline{AE} = \overline{EB}$

$\overline{AB} = 10$

$\therefore \overline{AE} = \overline{EB} = 5$

$CP = \frac{2}{3}CE$

$CP = \frac{2}{3} \times 9$

$CP = 6$

$EP = CE - CP$

$EP = 9 - 6 = 3$

$(AE)^2 = (PE)^2 + (AP)^2$

$(5)^2 = (3)^2 + (AP)^2$

$25 = 9 + (AP)^2$

$(AP)^2 = 25 - 9 = 16$

$AP = 4$

$(AC)^2 = (PC)^2 + (AP)^2$

$(AC)^2 = (6)^2 + (4)^2$

$AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

30) اكتب:

بما أن كل قطعة متوسطة تقسم المثلثين متساويين في المساحة فيمكن أن يتزن المثلث على أي قطعة متوسطة. ولموازنة مثلث على يجب أن أجد النقطة التي تتقاطع عندها خطوط الاتزان الثلاثة. ونقطة الاتزان لمستطيل هي نقطة تقاطع القطعتين المستقيمتين اللتين تصلان بين منتصفي ضلعين متقابلين فيه لأن كل قطعة واصلة بين منتصفي ضلعين متقابلين تقسم المستطيل إلى جزأين متساويين في المساحة.

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة

تدريب على الاختبار المعياري

31) C: $\overline{FJ}$ قطعة متوسطة في ΔFGH

32) B: 2

$$4x - 6y = 12$$

$$\frac{4x}{2} - \frac{6y}{2} = \frac{12}{2}$$

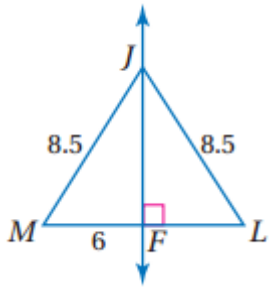
$$2x - 3y = 6$$

إذن المقطع x هو 2

مراجعة تراكمية

أوجد قياس كل مما يأتي:

33)



بما أن $JF \perp ML$ وبحسب فيثاغورث:

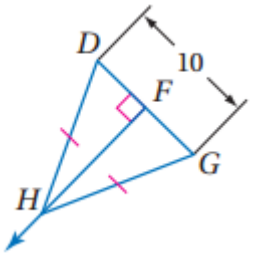
$$(JM)^2 = (JF)^2 + (FM)^2$$

$$(8.5)^2 = (JF)^2 + (6)^2$$

$$(JF)^2 = 72.25 - 36$$

$$(JF)^2 = 36.25$$
$$JF \approx 6$$
$$(JL)^2 = (LF)^2 + (6)^2$$
$$(LF)^2 = (8.5)^2 - (6)^2$$
$$(LF)^2 = 72.25 - 36$$
$$(LF)^2 = 36.25$$
$$LF \approx 6$$
$$ML = MF + FL$$
$$\therefore ML = 6 + 6 = 12$$

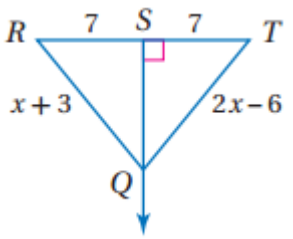
(34



بما أن المثلث DHG متطابق الضلعين و $HF \perp DG$ إذن حسب عكس نظرية العمود المنصف:

$$DF = FG$$
$$DF = 10 \div 2$$
$$DF = 5$$

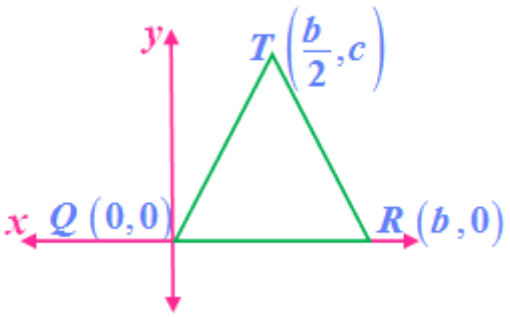
(35



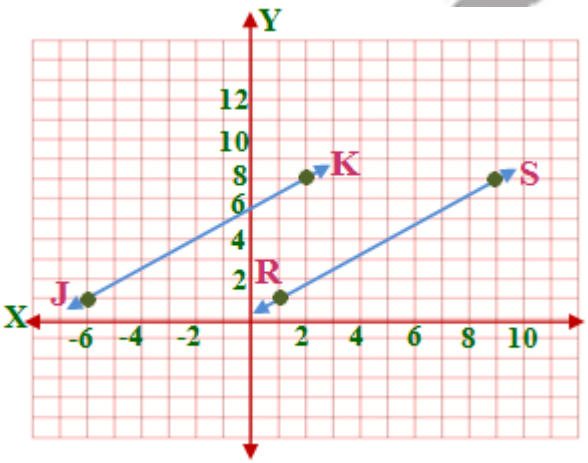
بما أن $RS = ST$ و $QS \perp RT$ إذن حسب نظرية العمود المنصف

$$QT = QR$$
$$2x - 6 = x + 3$$
$$2x - x = 3 + 6$$
$$x = 9$$
$$TQ = 2x - 6$$
$$TQ = 2 \times 9 - 6$$
$$TQ = 12$$

(36



(37



$R(1,1), S(9,8), J(-6,1), K(2,8)$

أولا حساب ميل $\overleftrightarrow{JK}$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-1}{2+6} = \frac{7}{8}$$

ثانيا ميل $\overleftrightarrow{RS}$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-1}{9-1} = \frac{7}{8}$$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{JK}$ و $\overleftrightarrow{RS}$ متساوي إذن هما متوازيان.

استعد للدرس اللاحق

اكتب > أو < داخل ◯ لتحصل على عبارة صحيحة:

(38 $-\frac{18}{25} < \frac{19}{27}$ لأن الطرف الأيمن موجب والطرف الثاني سالب

(39

أولاً توحيد المقامات

$\frac{5}{16} \square \frac{6}{16}$

$\frac{6}{16} > \frac{5}{16}$

$\therefore \frac{3}{8} > \frac{5}{16}$

(40

تحويل الكسر لرقم عشري ومقارنتة بالطرف الأخر

$\frac{3}{5} \square 2.7$

$0.6 \square 2.7$

$2.7 > 0.6$

$\therefore 2.7 > \frac{3}{5}$

(41

$\frac{-19}{4} \square -4.25$

$-4.75 \square -4.25$

$\therefore -4.25 > -4.75$

$-4.25 > \frac{-19}{4}$

حقيبة إنجاز المعلم والمعلمة