

تدرب وحل المسائل:



المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلية لكل من المضلعات المحدبة الآتية:

(12) ذو 12 ضلعًا

$$n = 12$$

$$(n - 2).180 = (12 - 2).180^\circ = 1800^\circ$$

(13) ذو 20 ضلعًا

$$n = 20$$

$$(n - 2).180 = (20 - 2).180^\circ = 3240^\circ$$

(14) ذو 29 ضلعًا

$$n = 29$$

$$(n - 2).180 = (29 - 2).180^\circ = 4860^\circ$$

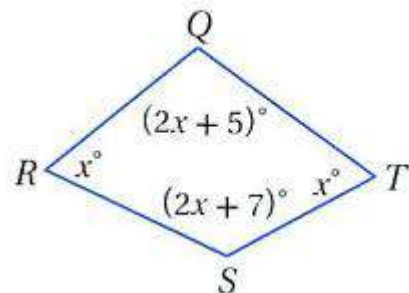
(15) ذو 32 ضلعًا

$$n = 32$$

$$(n - 2).180 = (32 - 2).180^\circ = 4500^\circ$$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعات الآتية:

(16)



بما أن الشكل رباعي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n - 2).180 = (4 - 2).180^\circ = 360^\circ$$

$$360^\circ = m\angle Q + m\angle R + m\angle S + m\angle T$$

$$360^\circ = (2x + 5) + x + (2x + 7) + x$$

$$360^\circ = 6x + 12$$

$$360 - 12 = 6x$$

$$348 = 6x$$

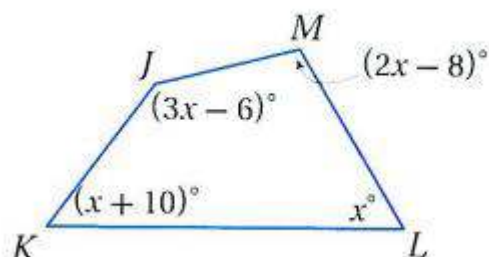
$$x = 58$$

$$m\angle R = m\angle T = 58^\circ$$

$$m\angle Q = (2x + 5) = (2 \times 58 + 5) = 121^\circ$$

$$m\angle S = (2x + 7) = (2 \times 58 + 7) = 123^\circ$$

(17)



بما أن الشكل رباعي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n - 2) \cdot 180 = (4 - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$$

$$360^\circ = m\angle J + m\angle M + m\angle L + m\angle K$$

$$360^\circ = (3x - 6) + (2x - 8) + x + (x + 10)$$

$$360^\circ = 7x - 4$$

$$360 + 4 = 7x$$

$$348 = 7x$$

$$x = 52$$

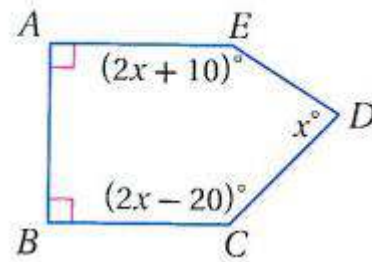
$$m\angle J = (3 \times 52 - 6) = 150^\circ$$

$$m\angle M = (2 \times 52 - 8) = 96^\circ$$

$$m\angle L = x = 52^\circ$$

$$m\angle K = (x + 10) = (52 + 10) = 62^\circ$$

(18)



بما أن الشكل خماسي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n - 2).180 = (5 - 2).180^\circ = 540^\circ$$

$$540^\circ = m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E$$

$$540^\circ = 90 + 90 + (2x - 20) + x + (2x + 10)$$

$$540^\circ = 5x + 170$$

$$540 - 170 = 5x$$

$$540 = 5x$$

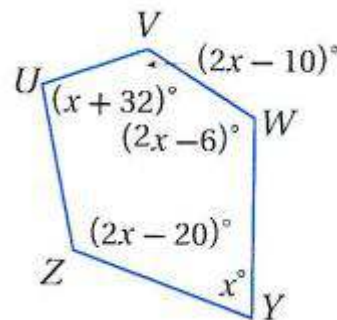
$$x = 74$$

$$m\angle D = 74^\circ$$

$$m\angle C = (2 \times 74 - 20) = 128^\circ$$

$$m\angle E = (2 \times 74 + 10) = 158^\circ$$

(19)



بما أن الشكل خماسي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n - 2).180 = (5 - 2).180^\circ = 540^\circ$$

$$540^\circ = m\angle U + m\angle V + m\angle W + m\angle Y + m\angle Z$$

$$540^\circ = (x + 32) + (2x - 10) + (2x - 6) + x + (2x - 20)$$

$$540^\circ = 8x - 4$$

$$x = 68$$

$$m\angle U = (68 + 32) = 100^\circ$$

$$m\angle V = (2 \times 68 - 10) = 126^\circ$$

$$m\angle W = (2 \times 68 - 6) = 130^\circ$$

$$m\angle Y = x = 68^\circ$$

$$m\angle Z = (2 \times 68 - 20) = 116^\circ$$

(20) ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع في الشكل المجاور؟

$$n = 5$$

$$(n - 2).180 = (5 - 2).180^\circ = 540^\circ$$

المثال 2 أوجد قياس زاوية داخلية لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

(21) الاثنا عشري

$$n = 12$$

$$(n - 2).180 = (12 - 2).180^\circ = 1800^\circ$$

$$\frac{1800}{12} = 150^\circ$$

(22) الخماسي

$$n = 5$$

$$(n - 2).180 = (5 - 2).180^\circ = 540^\circ$$

$$\frac{540}{5} = 108^\circ$$

(23) العشاري

$$n = 10$$

$$(n - 2).180 = (10 - 2).180^\circ = 1440^\circ$$

$$\frac{1440}{10} = 144^\circ$$

(24) التساعي

$$n = 9$$

$$(n - 2).180 = (9 - 2).180^\circ = 1260^\circ$$

$$\frac{1260}{9} = 140^\circ$$

المثال 3 إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

(25) 60°

$$60n = (n - 2).180$$

$$60n = n180 - 360$$

$$60n - n180 = -360$$

$$-120n = -360$$

$$n = 3$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 3 ضلعا يساوي 60°

(26) 90°

$$90n = (n - 2).180$$

$$90n = n180 - 360$$

$$90n - n180 = -360$$

$$-90n = -360$$

$$n = 4$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 4 ضلعا يساوي 90°

120° (27)

$$120n = (n - 2) \cdot 180$$

$$120n = n180 - 360$$

$$120n - n180 = -360$$

$$-n60 = -360$$

$$n = 6$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 6 ضلعا يساوي 120°

156° (28)

$$156n = (n - 2) \cdot 180$$

$$156n = n180 - 360$$

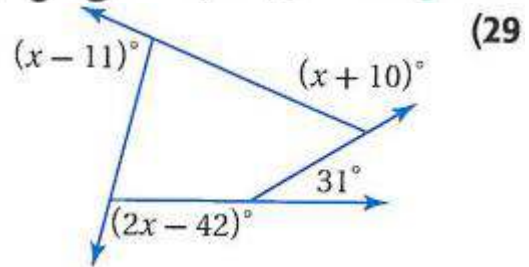
$$156n - n180 = -360$$

$$-24n = -360$$

$$n = 15$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 15 ضلعا يساوي 156°

المثال 4 أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

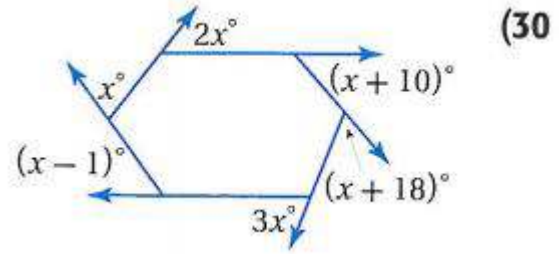


$$(x - 11) + (x + 10) + (2x - 42) + 31^\circ = 360^\circ$$

$$4x - 12 = 360$$

$$4x = 372$$

$$x = \frac{372}{4} = 93$$



$$(2x) + (x + 10) + (x + 18) + 3x + (x - 1) + x = 360^\circ$$

$$9x + 27 = 360$$

$$9x = 333$$

$$x = \frac{333}{9} = 37$$

أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:
(31) العشاري

نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$10n = 360$$

$$n = \frac{360}{10} = 36^\circ$$

(32) الخماسي

نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$5n = 360$$

$$n = \frac{360}{5} = 72^\circ$$

(33) السداسي

نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$6n = 360$$

$$n = \frac{360}{6} = 60^\circ$$

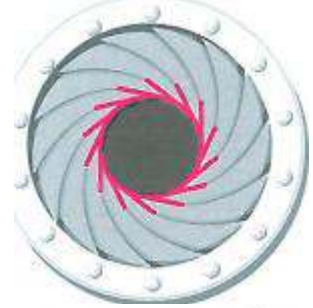
(34) ذو 15 ضلعاً

نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$15n = 360$$

$$n = \frac{360}{15} = 24^\circ$$

(35) **تصوير:** تشكّل الفتحة التي ينفذ منها الضوء إلى عدسة آلة التصوير في الشكل المجاور مضلعاً منتظماً ذا 14 ضلعاً.



(a) أوجد قياس زاوية داخلية؟

$$n = 14$$

$$(14 - 2).180 = 2160^\circ$$

$$\text{قياس الزاوية الداخلية} = \frac{2160}{14} = 154.3^\circ \text{ تقريباً}$$

(b) أوجد قياس زاوية خارجية؟

$$14n = 360^\circ$$

(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

(بقسمة كلا الطرفين على 14)

$$n = 25.7$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع = 25.7° تقريباً

أوجد قياس زاوية خارجية وزاوية داخلية للمضلع المنتظم المعطى عدد أضلاعه في كل إلى أقرب عُشر:

(36) 7

$$n = 7$$

$$(7 - 2).180 = 900^\circ$$

$$\text{قياس الزاوية الداخلية} = \frac{900}{7} = 128.6^\circ \text{ تقريباً}$$

(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

(بقسمة كلا الطرفين على 7)

$$7n = 360^\circ$$

$$n = 51.4$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع = 51.4° تقريباً

(37) 13

$$n = 13$$

$$(13 - 2).180 = 1980^\circ$$

$$\text{قياس الزاوية الداخلية} = \frac{1980}{13} = 152.3^\circ \text{ تقريباً}$$

(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

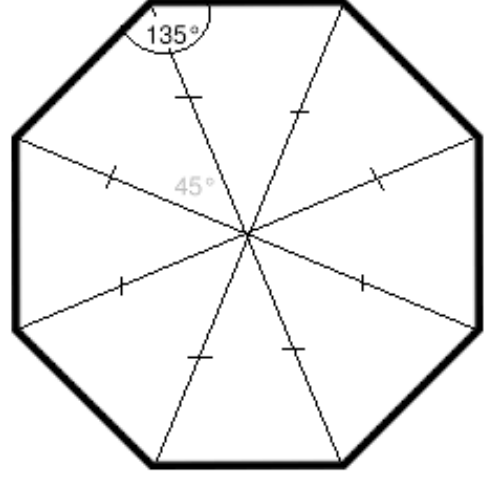
$$13n = 360^\circ$$

(بقسمة كلا الطرفين على 13)

$$n = 51.4$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع = 27.7° تقريباً

(38) أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع الثماني يساوي 1080° ، دون استعمال صيغة مجموع الزوايا الداخلية للمضلع.



يقسم المضلع الى ثمان مثلثات

$$\text{مجموع زوايا 8 مثلثات} = 180^\circ \times 8 = 1440^\circ$$

$$\text{مجموع الزوايا حول نقطة المركز} = 360^\circ$$

$$\therefore \text{مجموع زوايا المضلع الثماني الداخلية} = 1440^\circ - 360^\circ = 1080^\circ$$

$$\text{قياس الزاوية الداخلية للمضلع الثماني المنتظم} = 1080^\circ \div 8 = 135^\circ$$

(39) **برهان:** استعمل الجبر لإثبات نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع.

افرض أن N تساوي مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع عدد أضلاعه n .

N تساوي مجموع قياسات الأزواج الخطية مطروحاً منه مجموع قياسات الزوايا الداخلية.

$$= 180n - 180(n - 2)$$

$$= 180n - 180n + 360 = 360$$

لذا، فإن مجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع محدب يساوي 360° .

جبر: أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين :

(40) عشاري قياسات زواياه الداخلية:

$$x + 5, x + 10, x + 20, x + 30, x + 35, x + 40, x + 60, x + 70, x + 80, x + 90$$

$$(n - 2) \cdot 180 = (10 - 2) \cdot 180 = 1440^\circ$$

$$1440^\circ = (x + 5) + (x + 10) + (x + 20) + (x + 30) + (x + 35)$$

$$+ (x + 40) + (x + 60) + (x + 70) + (x + 80) + (x + 90)$$

$$1440^\circ = 10x + 440$$

$$1440^\circ - 440 = 10x$$

$$1000 = 10x$$

$$x = 100$$

$$(x + 5) = 100 + 5 = 105^\circ$$

$$(x + 10) = 100 + 10 = 110^\circ$$

$$(x + 20) = 100 + 20 = 120^\circ$$

$$(x + 30) = 100 + 30 = 130^\circ$$

$$(x + 35) = 100 + 35 = 135^\circ$$

$$(x + 40) = 100 + 40 = 145^\circ$$

$$(x + 60) = 100 + 60 = 160^\circ$$

$$(x + 70) = 100 + 70 = 170^\circ$$

$$(x + 80) = 100 + 80 = 180^\circ$$

$$(x + 90) = 100 + 90 = 190^\circ$$

الزوايا هي: $190^\circ, 180^\circ, 170^\circ, 160^\circ, 140^\circ, 135^\circ, 130^\circ, 120^\circ, 110^\circ, 105^\circ$

(41) الخماسي $ABCDE$ الذي قياسات زواياه الداخلية: $(x + 9)^\circ$, $(2x - 8)^\circ$, $(4x - 1)^\circ$, $6x$, $(4x + 13)^\circ$,

$$(n - 2) \cdot 180 = (5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

$$540^\circ = (4x - 1) + (2x - 8) + (x + 9) + (4x + 13) + 6x$$

$$540^\circ = 17x + 13$$

$$540^\circ - 13 = 17x$$

$$527 = 17x$$

$$x = 31$$

$$m\angle E = 4x - 1 = 4 \times 31 - 1 = 123^\circ$$

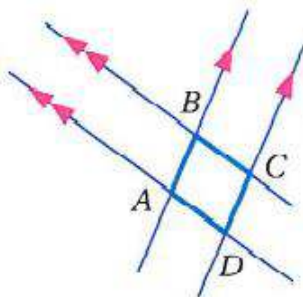
$$m\angle D = 2x - 8 = 2 \times 31 - 8 = 54^\circ$$

$$m\angle C = x + 9 = 31 + 9 = 40^\circ$$

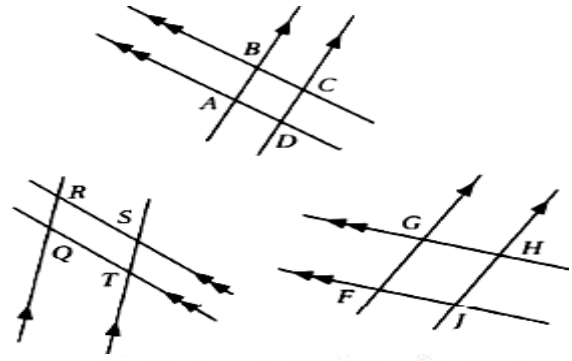
$$m\angle B = 4x + 13 = 4 \times 31 + 13 = 137^\circ$$

$$m\angle A = 6x = 6 \times 31 = 186^\circ$$

(42) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في أشكال رباعية خاصة.



(a) **هندسيًا:** ارسم زوجين من المستقيمات المتوازية تتقاطع كما في الشكل المجاور، وسمّ الشكل الرباعي الناتج $ABCD$. ثم كرّر هذه الخطوات لتكوين شكلين آخرين: $FGHJ$, $QRST$.



(b) جدولياً : أكمل الجدول الآتي :

أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا								الشكل الرباعي
97	$m\angle D$	101	$m\angle C$	97	$m\angle B$	101	$m\angle A$	ABCD
0.6cm	DA	0.6cm	CD	0.6cm	BC	0.6cm	AB	
104	$m\angle J$	76	$m\angle H$	104	$m\angle G$	76	$m\angle F$	FGHJ
0.9cm	JF	1cm	HJ	0.9cm	GH	1cm	FG	
95	$m\angle T$	121	$m\angle S$	95	$m\angle R$	121	$m\angle Q$	QRST
1.2cm	TQ	0.5cm	ST	1.2cm	RS	0.5cm	QR	

(c) لفظياً : خَمِّن العلاقة بين كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمتان المتوازيات.

في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمتان المتوازيات تكون الزاويتان المتقابلتان متطابقتين.

(d) لفظياً : خَمِّن العلاقة بين كل زاويتين متحالفتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمتان المتوازيات.

في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمتان المتوازيات تكون الزاويتان المتحالفتان متكاملتين.

(e) لفظياً : خَمِّن العلاقة بين كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمتان المتوازيات.

في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمتان المتوازيات تكون الضلعان المتقابلان متطابقين.

مسائل مهارات التفكير العليا:

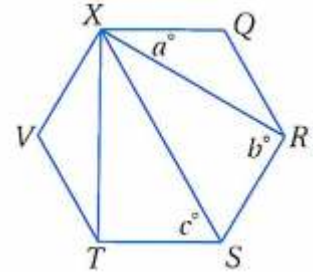
(43) **اكتشف الخطأ:** قالت مريم: إن مجموع قياسات الزوايا الخارجية للعشاري أكبر

منه للسباعي؛ لأن عدد أضلاع العشاري أكثر من أضلاع السباعي. وقالت لبنى:

إن مجموع قياسات الزوايا الخارجية لكلا المضلعين متساو. فهل أيُّ منهما إدعاؤها صحيح؟ وضح تبريرك.

لبنى؛ حسب نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية، سيكون مجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع محدب يساوي 360° .

(44) **تحذّر:** أوجد قيم a, b, c في الشكل السداسي المنتظم $QRSTVX$ المجاور. برّر إجابتك.



$60^\circ, 90^\circ, 30^\circ$ ؛ حسب نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية يكون مجموع قياسات الزوايا الداخلية 720° ، وبما أن المضلع $QRSTVX$ منتظم فإن له 6 زوايا متطابقة. وقياس كل زاوية 120° ، لذلك

$$XQ = QR \text{ وكذلك } m\angle XVT = m\angle XQR = 120^\circ$$

وحسب نظرية المثلث متطابق الضلعين يكون

$$m\angle QXR = m\angle QRX$$

وبما أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث 180° ، فإن

$$m\angle QXR + m\angle QRX + m\angle XQR = 180^\circ$$

وبالتعويض ينتج أن $a + a + 120^\circ = 180^\circ$ ، أي أن $2a = 60^\circ$ ومنها $a = 30^\circ$

وحسب مسلمة جمع الزوايا $m\angle QRS = m\angle QRX + m\angle XRS$

$$\text{وبالتعويض، } m\angle XRS + 30^\circ = 120^\circ$$

$$m\angle XRS = 90^\circ \text{ وبالطرح يكون } m\angle XRS + 30^\circ = 120^\circ$$

$$\text{إذن } b = 90^\circ$$

وحسب (SAS) يكون $\triangle XVT = \triangle XQR$ و $\triangle XTS = \triangle XRS$

وبناءً على مسلمة جمع الزوايا يكون

$$m\angle VXQ = m\angle VXT + m\angle TXS + m\angle SXR + m\angle RXQ$$

وبالتعويض

$$m\angle TXS + m\angle SXR + 30^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

إذن $m\angle TXS + m\angle SXR = 60^\circ$ وبما أن

$m\angle TXS + m\angle SXR$ ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين

متطابقة، فإن $m\angle TXS = m\angle SXR = 30^\circ$

وفي $\triangle XTS$ ، $m\angle XTS + m\angle TSX + m\angle SXT = 180^\circ$

وبالتعويض $c + 30^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ، إذن $c = 60^\circ$

(45) تبرير: إذا مَدَّ ضلعان لسداسي منتظم بحيث يلتقيان في نقطة خارجه، فهل يكون المثلث الناتج متطابق الأضلاع دائماً، أو أحياناً، أو لا يمكن أن يكون متطابق الأضلاع أبداً؟ برّر إجابتك.

دائماً؛ حسب نظرية مجموع الزوايا الخارجية

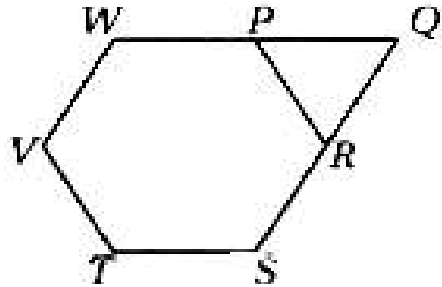
$$m\angle QRP = 60^\circ, m\angle QPR = 60^\circ$$

ولما كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي 180° ، فإن

$$180^\circ - m\angle QPR - m\angle QRP = m\angle PQR$$

$$180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

إذن فالمثلث $\triangle PQR$ متطابق الأضلاع.



(46) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا، وأوجد مجموع قياسات زواياه الداخلية. ما عدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخلية مثلًا المجموع الذي أوجدته؟ برّر إجابتك.

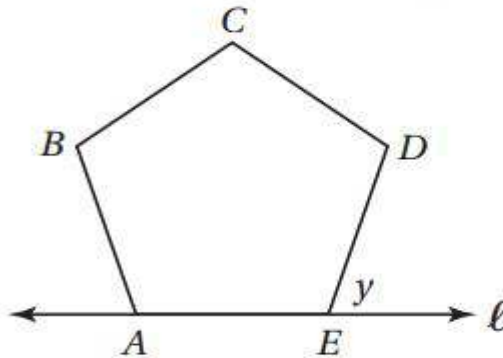


مجموع قياسات الزوايا الداخلية لهذا المضلع يساوي $180^\circ \cdot (5 - 2) = 540^\circ$ ومثلاً هذا المجموع يساوي (540). 2. أو 1080
وعدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخلية 1080° هو حل المعادلة $180^\circ \cdot (n - 2) = 1080^\circ$ ومنها $n = 8$.

(48) **اكتب:** وضح العلاقة بين المثلثات ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع. اشتقت نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع من النمط الذي يربط عدد أضلاع المضلع بعدد المثلثات. والصيغة هي حاصل ضرب مجموع قياسات زوايا المثلث أي 180° في عدد المثلثات في المضلع.

تدريب على اختبار

(48) **إجابة قصيرة:** الشكل $ABCDE$ خماسي منتظم، والمستقيم ℓ يحوي \overline{AE} . ما قياس $\angle y$ ؟



$$(5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

$$\angle DEA = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$\angle Y = 180 - 108^\circ = 72^\circ$$

(49) إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع مثلي مجموع قياسات زواياه الخارجيّة، فما نوع هذا المضلع؟

A مربع

B خماسي

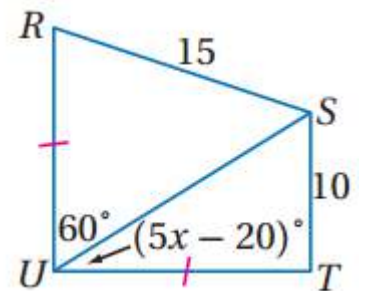
C سداسي

D ثماني

C سداسي

مراجعة تراكمية

(50) جبر: اكتب متباينة تمثّل مدى القيم الممكنة لـ x (الدرس 4-6)



$$60 + 5x - 20 = 90$$

$$40 + 5x = 90$$

$$5x = 90 - 40$$

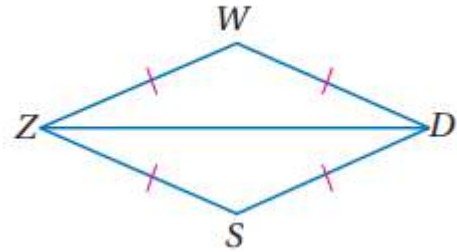
$$5x = 50$$

$$x = 10$$

بيّن في كل مما يأتي أن المثلثين متطابقان، وحدّد حالة التطابق، ثم اكتب عبارة

تطابق : (الدرسان 3-4, 3-5)

(51)

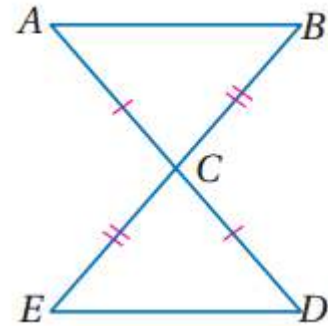


(معطى) $\overline{WD} \cong \overline{DS}$, $\overline{WZ} \cong \overline{SZ}$

$\overline{ZD} \cong \overline{ZD}$ حسب خاصية الانعكاس

إذا $\triangle ZWD \cong \triangle ZSD$ حسب SSS

(52)

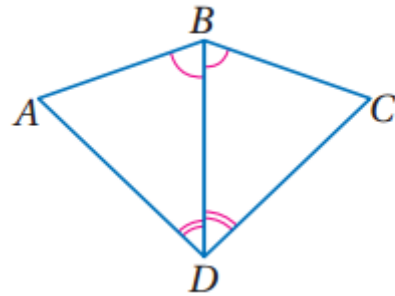


(معطى) $\overline{CB} \cong \overline{CE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CD}$

$\angle ACB \cong \angle ECD$ بالتقابل بالرأس

$\triangle ACB \cong \triangle ECD$ حسب SAS

(53)



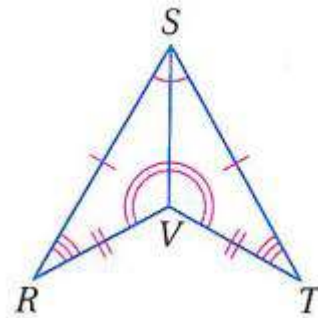
$$\triangle CBD \cong \triangle ABD$$

$$\angle CBD = \angle ABD$$

$$\angle BDC = \angle BDA$$

$$(خاصية الانعكاس) \quad BD = BD$$

(54)



$$(حسب خاصية الانعكاس) \quad SV = SV$$

$$(معطى) \quad ST = SR$$

$$(معطى) \quad VR = VT$$

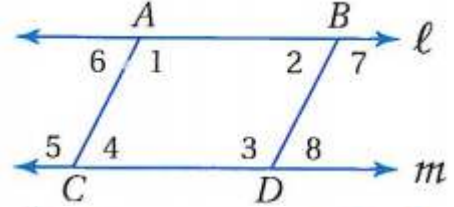
$$\angle TSV = \angle RSV$$

$$\angle SVT = \angle SVR$$

لأن جميع الأضلاع المتناظرة متطابقة وجميع الزوايا المتناظرة متطابقة $\triangle SVT \cong \triangle SVR$

استعد للدرس اللاحق

في الشكل المجاور $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ، $\ell \parallel m$ ، حدد جميع أزواج الزوايا في كل مما يأتي:



(54) زاويتان متبادلتان داخلياً.

الزوايا 1 و5؛ 4 و6؛ 2 و8؛ 3 و7

(55) زاويتان متحالفتان.

الزوايا 1 و4؛ 2 و3؛ 1 و2؛ 3 و4؛ 8 و7؛ 6 و5