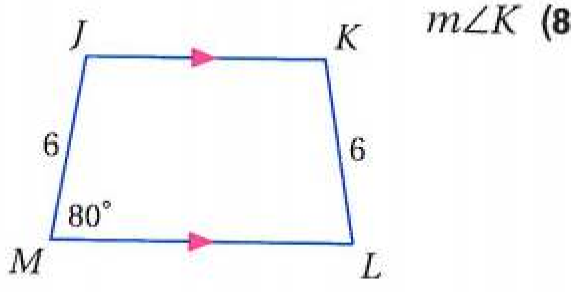
تدرب وحل المسائل:

أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

8) $m\angle K$



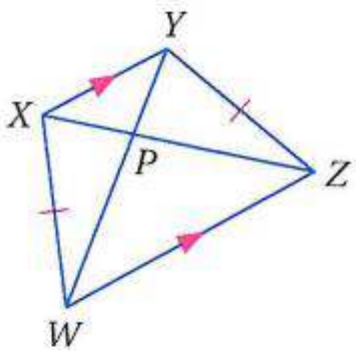
بما أن $JK \parallel ML$ و $KL = JM$ إذن الشكل شبه منحرف متطابق الضلعين
وبالتالي يكون زوايا القاعدة متساوية

$\angle J = 180 - 80 = 100$ نظرية الزوايا المتحالفة

$m\angle J = m\angle K = 100^\circ$

9) PW، إذا كان:

$XZ = 18, PY = 3$



بما أن $WZ \parallel XY$ و $XW = YZ$ إذن الشكل شبه منحرف متطابق
الضلعين ويكون قطراه متطابقان

$XZ = WY$

$18 = YP + PW$

$18 = 3 + PW$

$PW = 18 - 3 = 15$

هندسة إحداثيّة: بيّن أن الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، وحدد ما إذا كان متطابق الساقين؟

(10 $A(-2, 5), B(-3, 1), C(6, 1), D(3, 5)$

الخطوة1:

ميل $\overline{AB} = \frac{-2+3}{5-1} = \frac{1}{4}$

ميل $\overline{CD} = \frac{6-3}{1-5} = \frac{3}{-4}$

بما أن ميل كل من $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ليس متساويان إذن $\overline{CD} \nparallel \overline{AB}$

ميل $\overline{BC} = \frac{1-1}{-3-6} = \frac{0}{-9} = 0$

ميل $\overline{AD} = \frac{5-5}{3+2} = \frac{0}{5} = 0$

بما أن ميل كل من $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ متساويان إذن $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ وبما أن ABCD فيه ضلعان فقط متوازيان فهو شبه منحرف

الخطوة2:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2+3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(6-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

ABCD هو شبه منحرف، ولكن ليس متطابق الساقين؛ لأن $AB = \sqrt{17}$, $CD = 5$.

11) $J(-4,-6), K(6,2), L(1,3), M(-4,-1)$

الخطوة1:

ميل $\overline{JK} = \dfrac{-4-6}{-6-2} = \dfrac{-10}{-8} = \dfrac{5}{4}$

ميل $\overline{ML} = \dfrac{1+4}{3+1} = \dfrac{5}{4}$

بما أن ميل كل من $\overline{JK}, \overline{ML}$ متساويان إذن $\overline{JK} \parallel \overline{ML}$

ميل $\overline{KL} = \dfrac{6-1}{2-3} = \dfrac{5}{-1} = -5$

ميل $\overline{JM} = \dfrac{-4+4}{-6+1} = \dfrac{0}{-5}$

بما أن ميل كل من $\overline{KL}, \overline{JM}$ ليس متساويان إذن $\overline{KL} \nparallel \overline{JM}$ وبما أن JKLM فيه ضلعان فقط متوازيان وهما $\overline{JK}, \overline{ML}$ فهو شبه منحرف

الخطوة2:

$$\overline{KL} = \sqrt{(6-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{26}$$

$$\overline{JM} = \sqrt{(-4+4)^2 + (-6+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

JKLM هو شبه منحرف، ولكن ليس متطابق الساقين؛

لأن $JM = 5$, $KL = \sqrt{26}$.

12) $Q(2,5), R(-2,1), S(-1,-6), T(9,4)$

الخطوة1:

ميل $\overline{QR} = \dfrac{2+2}{5-1} = \dfrac{4}{4} = 1$

ميل $\overline{ST} = \dfrac{-1-9}{-6-4} = \dfrac{10}{10} = 1$

بما أن ميل كل من $\overline{QR}, \overline{ST}$ متساويان إذن $\overline{QR} \parallel \overline{ST}$

ميل $\overline{RS} = \dfrac{-2+1}{1+6} = \dfrac{-1}{7}$

ميل $\overline{QT} = \dfrac{2-9}{5-4} = \dfrac{-7}{1} = -7$

بما أن ميل كل من $\overline{RS}, \overline{QT}$ ليس متساويان إذن $\overline{RS} \nparallel \overline{QT}$ وبما أن QRST فيه ضلعان فقط متوازيان فهو شبه منحرف

الخطوة2:

$$\overline{RS} = \sqrt{(-2+1)^2 + (1+6)^2} = \sqrt{50}$$

$$\overline{QT} = \sqrt{(2-9)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{50}$$

بما أن $\overline{RS} = \overline{QT}$ فإن شبه المنحرف QRST متطابق الساقين

QRST هو شبه منحرف متطابق الساقين

13) $W(-5,-1), X(-2,2), Y(3,1), Z(5,-3)$

الخطوة1:

ميل $\overline{WX} = \dfrac{-5+2}{-1-2} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

ميل $\overline{YZ} = \dfrac{3-5}{1+3} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$

بما أن ميل كل من $\overline{YZ}$, $\overline{WX}$ ليس متساويان إذن $\overline{YZ} \nparallel \overline{WX}$

ميل $\overline{XY} = \dfrac{-2-3}{2-1} = \dfrac{-5}{1} = -5$

ميل $\overline{WZ} = \dfrac{-5-5}{-1+3} = \dfrac{-10}{2} = -5$

بما أن ميل كل من $\overline{XY}$, $\overline{WZ}$ متساويان إذن $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$ وبما أن $XWYZ$ فيه ضلعان فقط متوازيان فهو شبه منحرف

الخطوة2:

$$\overline{WX} = \sqrt{(-5+2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{18}$$

$$\overline{YZ} = \sqrt{(3-5)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{20}$$

بما أن $\overline{YZ} \neq \overline{WX}$ فإن شبه المنحرف $WXYZ$ متطابق الساقين

شبه منحرف لأن $WX = \sqrt{18}$, $YZ = \sqrt{20}$.

في الشكل المجاور، S,V نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRTU$.

14) إذا كان $UT = 22$, $QR = 12$ ، فأوجد VS.

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ مجموع طولي القاعدة

$$VS = \frac{1}{2}(12+22)$$

$$VS = \frac{1}{2}(12+22) = 17$$

15) إذا كان $UT = 12$, $VS = 9$ ، فأوجد QR.

$$VS = \frac{1}{2}(QR + UT)$$

$$9 = \frac{1}{2}(QR + 12)$$

$$18 = QR + 12$$

$$QR = 18 - 12$$

$$QR = 6$$

16) إذا كان $VS = 11$, $RQ = 5$ ، فأوجد UT.

$$VS = \frac{1}{2}(QR + UT)$$

$$11 = \frac{1}{2}(5 + UT)$$

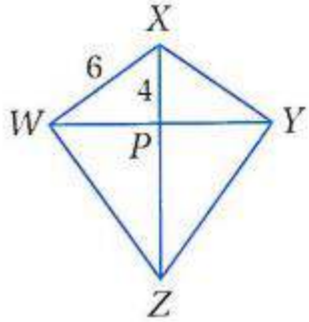
$$22 = 5 + UT$$

$$UT = 22 - 5$$

$$UT = 17$$

إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل مما يأتي :

WP (17



قطرا شكل الطائرة متعامدان وباستخدام فيثاغورث ينتج أن:

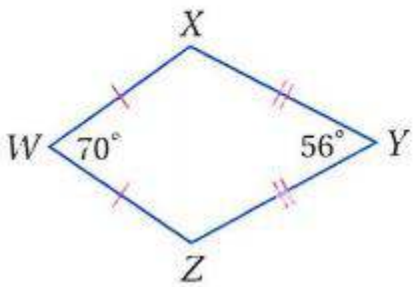
$$(WX)^2 = (XP)^2 + (WP)^2$$

$$(6)^2 = (4)^2 + (WP)^2$$

$$(WP)^2 = 36 - 16$$

$$(WP)^2 = \sqrt{20}$$

$m\angle X$ (18



بما أن الشكل رباعي إذن مجموع زواياه الداخلية = 360°

وبما أن الشكل طائرة ورقية إذن $\angle X = \angle Z$

$$\angle X + \angle Y + \angle Z + \angle W = 360^\circ$$

$$\angle X = \angle Z$$

$$2\angle X + 56 + 70 = 360^\circ$$

$$\angle X = 117^\circ$$

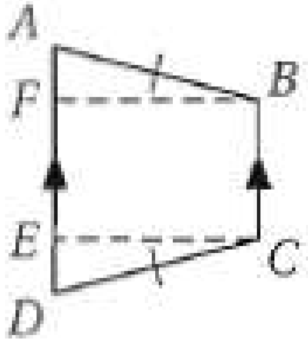
برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريات الآتية :

19) النظرية 1.21

المعطيات: ABCD شبه منحرف متطابق الساقين.

$\overline{BC} \cong \overline{AD}, \overline{AB} \cong \overline{CD}$

المطلوب: $\angle A \cong \angle D, \angle ABC \cong \angle DCB$



البرهان:

ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{BF}$ و $\overline{CE}$ بحيث يكون $\overline{BF} \perp \overline{AD}$ و $\overline{CE} \perp \overline{AD}$

وبما أن $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ، والمسافة بين المستقيمين المتوازيين ثابتة $\overline{BF} \cong \overline{CE}$

وبما أن المستقيمين المتعامدين يشكلان زوايا قائمة،

فإن $\angle BFA$, $\angle CED$ قائمتان،

إذن $\Delta BFA \cong \Delta CED$ بحسب حالة التطابق (HL)

وبما أن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة فإن $\angle D \cong \angle A$.

وبما أن $\angle CBF \cong \angle BCE$ قائمتان وجميع الزوايا القائمة متطابقة

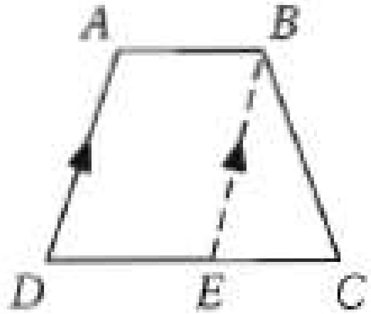
فإن $\angle BCE \cong \angle CBF$ و $\angle DCE \cong \angle ABF$.

لأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.

إذا $\angle DCB \cong \angle ABC$ وفق مسلمة جمع الزوايا.

20) النظريّة 1.22

المعطيات: ABCD شبه منحرف فيه $\angle C \cong \angle D$.
المطلوب: إثبات أن ABCD متطابق الساقين.

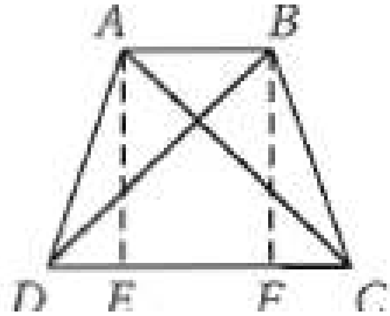


البرهان:
ارسم القطعة المستقيمة المساعدة EB بحيث تكون $\overline{AD} \parallel \overline{EB}$
وبذلك تكون $\angle BEC \cong \angle D$ حسب مسلمة الزوايا المتناظرة.
ونعلم أن $\angle C \cong \angle D$ ، إذن وحسب خاصية التعدي تكون $\angle C \cong \angle BEC$
إذن فالمثلث ΔEBC متطابق الضلعين، حيث $\overline{BC} \cong \overline{EB}$
ومن تعريف شبه المنحرف $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$
وبما أن كل ضلعين متقابلين للشكل ABED متوازيان فإنه متوازي أضلاع.
$\overline{EB} \cong \overline{AD}$ ، وحسب خاصية التعدي، يكون $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. لذلك فشبه المنحرف ABCD متطابق الساقين.

21) النظرية 1.23

المعطيات: ABCD شبه منحرف؛ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

المطلوب: إثبات أن شبه المنحرف ABCD متطابق الساقين.



البرهان:

نعلم أن ABCD شبه منحرف فيه $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

ارسم القطعتين المساعدتين $\overline{BF}$ و$\overline{AE}$ بحيث تكون $\overline{AE} \perp \overline{DC}$ و $\overline{BF} \perp \overline{DC}$

وبما أن المستقيمين المتعامدين يشكلان زوايا قائمة،

فإن $\angle AEF$ و $\angle BFE$ قائمتان، لذلك ΔAEC و ΔBFD قائما الزاوية حسب التعريف.

وبما أن $\overline{BF} \cong \overline{AE}$ لأن المستقيمين اللذين يقعان في نفس المستوى والعموديين على مستقيم واحد يكونان متوازيين، فإن $\overline{BF} \cong \overline{AE}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

ومن ذلك يكون $\Delta BFD \cong \Delta AEC$ حسب حالة التطابق(HL)

و $\angle BDC \cong \angle ACD$ لأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.

كذلك $\overline{DC} \cong \overline{DC}$ حسب خاصية الانعكاس للتطابق

إذن $\Delta BDC \cong \Delta ACD$ حسب حالة التطابق (SAS)

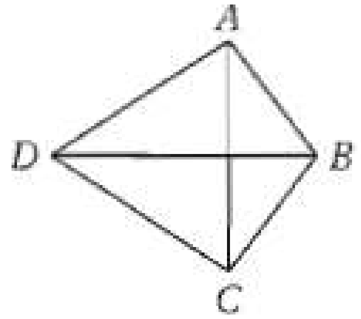
وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة فإن $\overline{BC} \cong \overline{AD}$

لذلك شبه المنحرف ABCD متطابق الساقين.

22) النظرية 1.25

المعطيات: ABCD شكل طائرة ورقيه فيه $\overline{BC} \cong \overline{AB}$ و $\overline{DC} \cong \overline{AD}$

المطلوب: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$



البرهان: تعلم أن $\overline{BC} \cong \overline{AB}$ و $\overline{AD} \cong \overline{AD}$

إذن B و D كلاهما على بعدين متساويين من A و C.

وإذا كانت نقطة على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة، فإنها تقع على العمود المنصف لتلك القطعة.

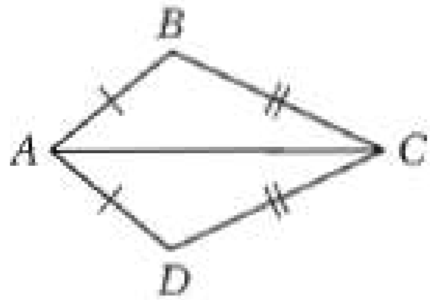
إذن فالمستقيم الذي يحوي النقطتين B وD عمود منصف لـ $\overline{AC}$ ، لأنه لا يوجد إلا مستقيم واحد فقط يمر في نقطتين مختلفتين

لذلك $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

23) النظرية 1.26

المعطيات: ABCD شكل طائرة ورقية

المطلوب: $\angle D \cong \angle B$



البرهان:

نعلم أن $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ و $\overline{CD} \cong \overline{BC}$ حسب تعريف شكل الطائرة الورقية.

$\overline{AC} \cong \overline{AC}$ خاصية الانعكاس

لذلك $\Delta ADC \cong \Delta ABC$ حسب (SSS)

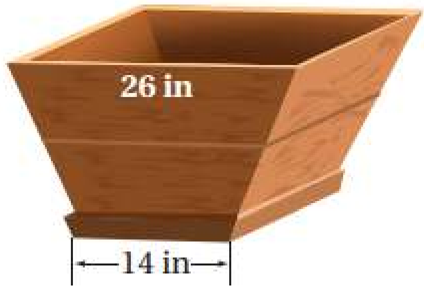
إذن $\angle D \cong \angle B$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة.

وإذا كان $\angle BCD \cong \angle BAD$ ، فإن ABCD متوازي أضلاع حسب التعريف

وهو ما لا يمكن أن يكون صحيحاً، لأننا نعلم أن ABCD شكل طائرة ورقية.

لذلك $\angle BCD \cong \angle BAD$

24) **نباتات:** اشترى مشاري أصيصًا زراعيًا ليضعه في غرفته، ويريد أن يكون وجهه على شكل شبه منحرف أبعاده كما في الصورة المجاورة. فإذا أراد أن يصنع رفًا في الوسط لتستند إليه النباتات، فكم عرض هذا الرف؟



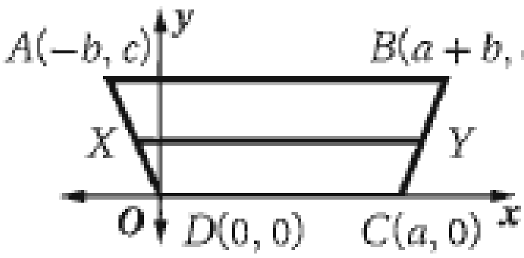
بما أن الشكل شبه منحرف والقطعة المتوسطة لهذا الرف $= \frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين

$$\frac{1}{2}(26+14)=\frac{1}{2}(40)=20$$

25) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًا للنظرية 1.24.

المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{XY}$ قطعة متوسطة.

المطلوب: $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$, $\overline{XY} \parallel \overline{DC}$



البرهان:

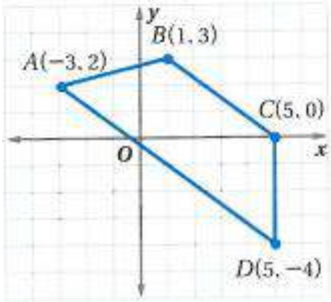
X نقطة منتصف $\overline{AD}$ ، وإحداثياتها $\left(\frac{-b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

Y نقطة منتصف $\overline{BC}$ ، وإحداثياتها $\left(\frac{2a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

وبما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي صفر، وميل $\overline{XY}$ يساوي صفر، وميل $\overline{DC}$ يساوي صفر فإن، $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$, $\overline{XY} \parallel \overline{DC}$

26) **هندسة إحداثية:** استعن بالشكل الرباعي $ABCD$ المجاور.

a) بين أن $ABCD$ شبه منحرف. وحدد ما إذا كان متطابق الساقين. وضّح إجابتك.



الخطوة1:

ميل $\overline{BC} = \frac{1-5}{3-0} = \frac{-4}{3}$

ميل $\overline{AD} = \frac{-3-5}{2+4} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$

ميل $\overline{CD} = \frac{5-5}{0+4} = \frac{0}{4} = 0$

ميل $\overline{AB} = \frac{-3-1}{2-3} = \frac{-4}{-1} = 4$

بما أن ميل كل من $\overline{BC}, \overline{AD}$ متساويان إذن $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

وميل كلا من $\overline{AB}, \overline{CD}$ غير متساويان إذن $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$

إذن الشكل $ABCD$ شبه منحرف

الخطوة2:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{17}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(5-5)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{25} = \sqrt{16} = 4$$

إذن $ABCD$ شبه منحرف ولكنه غير متطابق الساقين لأن $AB = \sqrt{17}$ و $CD = 4$.

b) هل القطعة المتوسطة محتواة في المستقيم الذي معادلته $y = -x + 1$؟ برّر إجابتك.

لا، لأن هذا المستقيم لا يوازي قاعدتي شبه المنحرف، حيث إن ميل كل من القاعدتين $\frac{-3}{4}$ ، على حين أن ميل المستقيم $y = -x + 1$ يساوي -1.

c) أوجد طول القطعة المتوسطة.

$$\overline{BC} = \sqrt{(5-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(-3-5)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{100} = 10$$

طول القطعة المتوسطة =

$$\frac{1}{2}(BC + AD)$$

$$\frac{1}{2}(5+10) = 7.5$$

جبر: في الشكل المجاور، $ABCD$ شبه منحرف.

27) إذا كان $BD = 2x + 8$, $AC = 3x - 7$ ، فأوجد قيمة x بحيث يكون $ABCD$ متطابق الساقين.

قطرا شبه المنحرف متطابقة

$$BD = AC$$

$$2x + 8 = 3x - 7$$

$$3x - 2x = 8 + 7$$

$$x = 15$$

28) إذا كان $m\angle ABC = (4x + 11)^\circ, m\angle DAB = (2x + 33)^\circ$ فأوجد قيمة x بحيث يكون $ABCD$ متطابق الساقين.

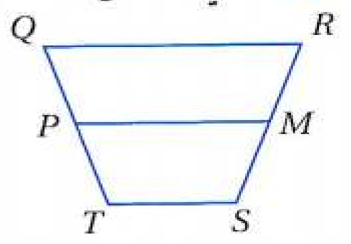
$$4x + 11 = 2x + 33$$

$$4x - 2x = 33 - 11$$

$$2x = 22$$

$$x = 11$$

جبر: في الشكل المجاور، P , M نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRST$.



29) إذا كان $QR = 16, PM = 12, TS = 4x$ ، فأوجد قيمة x.

$$PM = \frac{1}{2}(QR + TS)$$

$$12 = \frac{1}{2}(16 + 4x)$$

$$24 = 16 + 4x$$

$$4x = 24 - 16$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

30) إذا كان $TS = 2x, PM = 20, QR = 6x$ ، فأوجد قيمة x.

$$PM = \frac{1}{2}(QR + TS)$$

$$20 = \frac{1}{2}(6x + 2x)$$

$$40 = 6x + 2x$$

$$40 = 8x$$

$$x = 5$$

31) إذا كان $PM = 2x, QR = 3x, TS = 10$ ، فأوجد PM.

$$PM = \frac{1}{2}(QR + TS)$$

$$2x = \frac{1}{2}(3x + 10)$$

$$4x = 3x + 10$$

$$x = 10 \quad \therefore \quad PM = 2 \times 10 = 20$$

32) إذا كان $PM = 13$ ، $TS = 2x + 2$, $QR = 5x + 3$ ، فأوجد TS.

$$PM = \frac{1}{2}(QR + TS)$$

$$13 = \frac{1}{2}(5x + 3 + 2x + 2)$$

$$26 = 7x + 5$$

$$7x = 26 - 5$$

$$7x = 21$$

$$x = 3$$

$$TS = 2x + 2$$

$$TS = 6 + 2 = 8$$

تسوّق: الوجه الجانبي لحقيبة التسوّق المبيّنة جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $EC = 9$ in, $DB = 19$ in ، $m\angle ABE = 40^\circ$, $m\angle EBC = 35^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :

33) AE

$$DB = AC$$

$$19 = AE + EC$$

$$19 = AE + 9$$

$$AE = 19 - 9$$

$$AE = 10in$$

34) AC

$$AC = EC + AE$$

$$AC = 9 + 10$$

$$AC = 19in$$

$m\angle BCD$ (35

نظرية الزاويتان المتحالفتان

$$m\angle ABC = m\angle ABE + m\angle EBC = 40 + 35 = 75^\circ$$

$$m\angle ABC + m\angle BCD = 180^\circ$$

$$m\angle ABC + m\angle BCD = 180^\circ$$

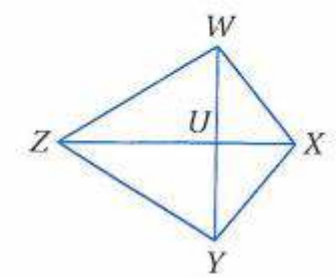
$$75 + m\angle BCD = 180^\circ$$

$$m\angle BCD = 105^\circ$$

$m\angle EDC$ (36

بما أن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ إذن $m\angle ABE = m\angle EDC = 40^\circ$

حسب نظرية التبادل داخليا



جبر: في الشكل المجاور، $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة.

(37 إذا كان $m\angle WZY = (4x)^\circ$ ، $m\angle WXY = 120^\circ$ ، $m\angle ZWX = (10x)^\circ$ ، فأوجد $m\angle ZYX$.

$m\angle ZWX \cong \angle ZYX$ (يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، نظرية 1.26)

لذا $m\angle ZYX = m\angle ZWX = 10x$

وعليه فإن

$$m\angle ZWX + m\angle WXY + m\angle ZYX + m\angle WZY = 360$$

(مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي)، وبالتعويض ينتج:

$$10x + 120 + 10x + 4x = 360$$

$$24x + 120 = 360$$

$$x = 10$$

لذا: $m\angle ZYX = 10x = 10(10) = 100^\circ$

38) إذا كان $m\angle WZY = 35°$ ، $m\angle WXY = (13x + 24)°$ ، $m\angle ZWX = (13x + 14)°$ ،
فأوجد $m\angle ZYX$.

$m\angle ZWX \cong \angle ZYX$ (يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، نظرية 1.26)

لذا $m\angle ZYX = m\angle ZWX = 13x + 14$

وعليه فإن

$m\angle ZWX + m\angle WXY + m\angle ZYX + m\angle WZY = 360$

(مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي)، وبالتعويض ينتج:

$$(13x + 14) + (13x + 24) + (13x + 14) + 35 = 360$$

$$39x + 87 = 360$$

$$39x = 360 - 87$$

$$x = 7$$

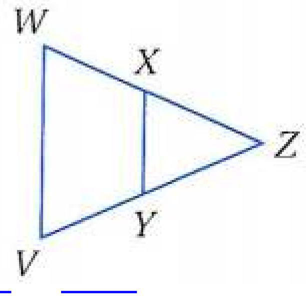
$$\angle ZYX = 13x + 14$$

$$\angle ZYX = 105°$$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

39) المعطيات: $\angle W \cong \angle ZXY$ ، $\overline{WZ} \cong \overline{ZV}$ ، $\overline{XY}$ تنصِّف كلًّا من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$.

المطلوب: $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين.



المعطيات: $\overline{ZV} \cong \overline{WZ}$ ، $\overline{XY}$ تنصف كل من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$ ،

$\angle W \cong \angle ZXY$

المطلوب: WXYV شبه منحرف متطابق الساقين.

العبارات (المبررات):

1) $\overline{ZV} \cong \overline{WZ}$ ، $\overline{XY}$ تنصف كلاً من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$. (معطيات)

2) $\frac{1}{2}ZV = \frac{1}{2}WZ$ (خاصية الضرب)

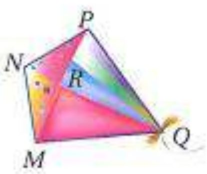
3) $WX = VY$ (تعريف نقطة المنتصف)

4) $\overline{WX} \cong \overline{VY}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

5) $\angle W \cong \angle ZXY$ (معطى)

6) $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$ (إذا كانت الزوايا المتناظرة فإن المستقيمين متوازيان)

7) WXYV شبه منحرف متطابق الساقين. (تعريف شبه المنحرف متطابق الساقين)



40) **طائرة ورقيّة:** استعن بالطائرة الورقيّة في الشكل المجاور. اكتب باستعمال خصائص الطائرة الورقية برهانًا ذا عمودين لبيان أنّ $\triangle MNR$ يطابق $\triangle PNR$.

المعطيات: MNPQ شكل طائرة ورقية

المطلوب: $\triangle MNR \cong \triangle PNR$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1) MNPQ شكل طائرة ورقية (معطى)

2) $\overline{NM} \cong \overline{NP}$, $\overline{QM} \cong \overline{PQ}$ (تعريف شكل الطائرة الورقية)

3) $\overline{QN} \cong \overline{QN}$ (خاصية الانعكاس)

4) $\triangle NMQ \cong \triangle NPQ$ (SSS)

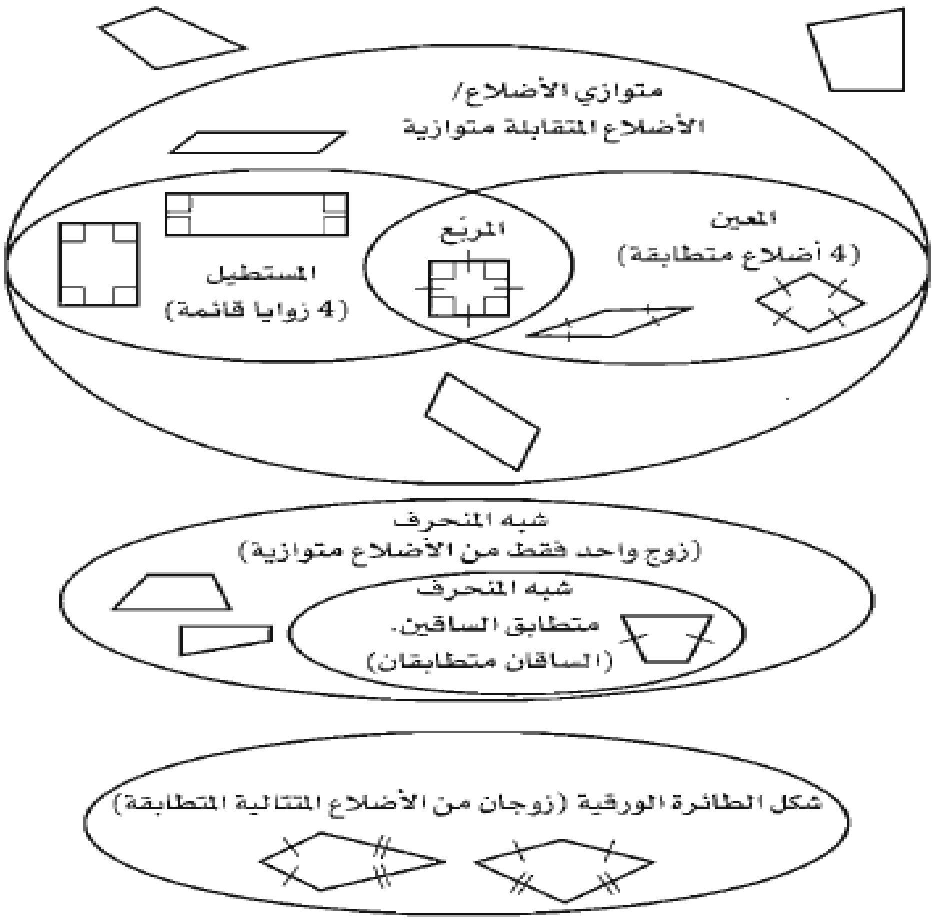
5) $\angle MNR \cong \angle PNR$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

6) $\overline{NR} \cong \overline{NR}$ (خاصية الانعكاس)

7) $\triangle MNR \cong \triangle PNR$ (SAS)

(41) أشكال فن: ارسم شكل فن يوضح جميع الأشكال الرباعيّة متضمنًا شبه المنحرف متطابق الساقين، وشكل الطائرة الورقيّة وعموم الأشكال الرباعيّة التي لا أسماء خاصة لها.

(41



هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان الشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، أم متوازي أضلاع، أم مربع، أم معين، أم هو شكل رباعي فحسب؟ اختر أكثر المسمّيات تحديدًا، ووضح إجابتك.

(42 $A(-1, 4), B(2, 6), C(3, 3), D(0, 1)$

ميل $\overline{AB} = \frac{4-6}{-1-2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

ميل $\overline{CD} = \frac{3-1}{3-0} = \frac{2}{3}$

ميل $\overline{BC} = \frac{2-3}{6-3} = \frac{-1}{3}$

ميل $\overline{AD} = \frac{-1-0}{4-1} = \frac{-1}{3}$

بما أن ميل كل ضلعين متقابلين متساوي إذن الشكل متوازي أضلاع، لأن أضلاعه المتقابلة متطابقة ولا يوجد زوايا قوائم، وأضلاعه المتتالية غير متطابقة.

(43 $W(-3, 4), X(3, 4), Y(5, 3), Z(-5, 1)$

ميل $\overline{WX} = \frac{4-4}{-3-3} = \frac{0}{-6}$

ميل $\overline{YZ} = \frac{3-1}{5+5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

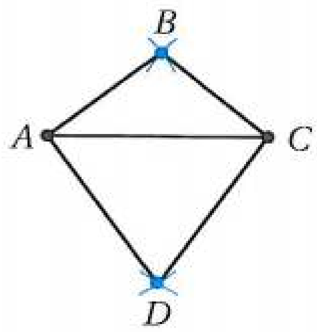
ميل $\overline{XY} = \frac{4-3}{3-5} = \frac{1}{-2}$

ميل $\overline{WZ} = \frac{4-1}{-3+5} = \frac{3}{2}$

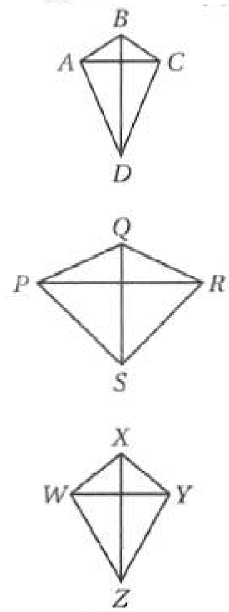
ميل $\overline{WZ} \neq \overline{XY} \neq \overline{YZ} \neq \overline{WX}$

إذن شكل رباعي فقط ليس فيه أضلاع متوازية.

44) تمثيلات متعدّدة: سوف تستقصي في هذه المسألة التناسب في شكل الطائرة الورقيّة.



a) هندسيًا: ارسم قطعة مستقيمة. وأنشئ عمودًا منصفًا لها لا تنصفه القطعة المستقيمة ولا تساويه طولًا. ثم صِلْ أطراف القطعتين المستقيمتين لتكوِّن الشكل الرباعي $ABCD$. كرّر هذه العملية مرتين، وسمِّ الشكلين الرباعيين الجديدين $PQRS$, $WXYZ$.



b) جدوليًّا: انقل الجدول الآتي وأكمله.

الشكل	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول
ABCD	AB	0.8 cm	BC	0.8 cm	CD	1.6 cm	DA	1.6 cm
PQRS	PQ	1.4 cm	QR	1.4 cm	RS	1.8 cm	SP	1.8 cm
WXYZ	WX	0.4 cm	XY	0.4 cm	YZ	1.5 cm	ZW	1.5 cm

c) **لفظيًا:** اكتب تخمينًا حول الشكل الرباعي الذي قطراه متعامدان وغير متطابقين، وأحدهما فقط ينصِّف الآخر.

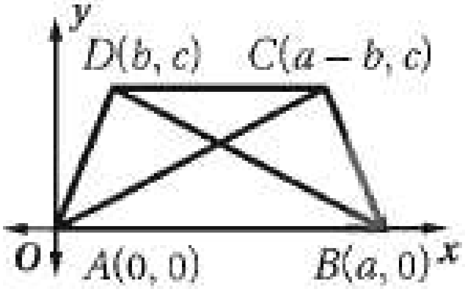
إذا كان قطرا شكل رباعي متعامدين وليسا متطابقين وأحدهما فقط ينصف الآخر، فإن الشكل الرباعي هو شكل طائرة ورقية.

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل من العبارتين الآتيتين:

45) قطرا شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقان.

المعطيات: $ABCD$ **شبه منحرف متطابق الساقين فيه** $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\overline{BD} \cong \overline{AC}$



البرهان:

$$DB = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

$$= \sqrt{(a-b)^2 + (c)^2}$$

$$AC = \sqrt{((a-b)-0)^2 + (c-0)^2}$$

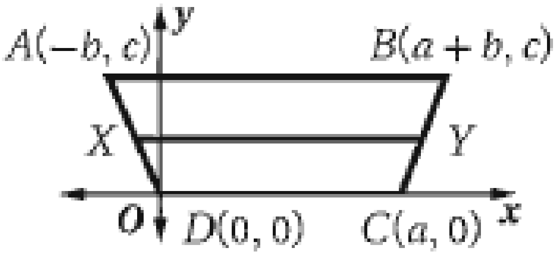
$$= \sqrt{(a-b)^2 + (c)^2}$$

إذن $BD = AC$ **ومن ذلك** $\overline{BD} \cong \overline{AC}$

46) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف المتطابق الساقين توازي كلًّا من القاعدتين.

المعطيات: ABCD شبه منحرف فيه $\overline{XY}$ قطعة متوسطة.

المطلوب: $\overline{XY} \parallel \overline{AB} , \overline{XY} \parallel \overline{DC}$



البرهان:

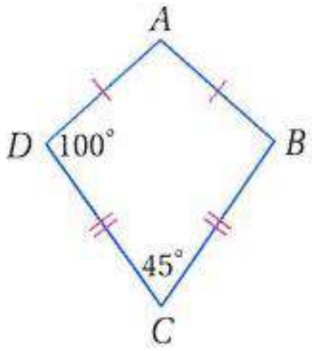
X نقطة منتصف $\overline{AD}$ ، وإحداثياتها $\left(\frac{-b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

Y نقطة منتصف $\overline{BC}$ ، وإحداثياتها $\left(\frac{2a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

وبما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي صفر، وميل $\overline{XY}$ يساوي صفر، وميل $\overline{DC}$ يساوي صفر فإن، $\overline{XY} \parallel \overline{AB} , \overline{XY} \parallel \overline{DC}$

مسائل مهارات التفكير العليا:

47) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من عادل وسعيد $m\angle A$ في شكل الطائرة الورقيّة $ABCD$ المجاور . هل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضح إجابتك.



عادل	سعيد
$m\angle A = 115°$	$m\angle A = 45°$

عادل؛ $m\angle D = m\angle B$

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^\circ$$

$$m\angle A + 100 + 45 + 100 = 360^\circ$$

$$m\angle A = 115^\circ$$

48) **تحدٍّ:** إذا كان الضلعان المتوازيان في شبه منحرف محتويين في المستقيمين $y = x - 8$ ، $y = x + 4$، فما معادلة المستقيم الذي يحتوي القطعة المتوسطة لشبه المنحرف؟

الفطعة المتوسطة = $\frac{1}{2}$ مجموع طول القاعدتين

$$\frac{1}{2}\left[(y = x - 8) + (y = x + 4)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[(2y = 2x - 4)\right]$$

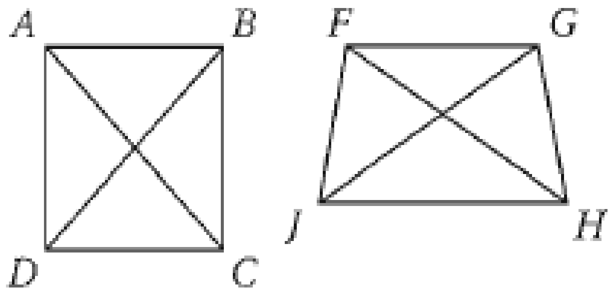
$$\frac{1}{2}\left[2(y = x - 2)\right]$$

$$y = x - 2$$

49) **تبرير:** هل العبارة " *المربع هو أيضا طائرة ورقيّة* " صحيحة أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة أبدًا ؟ وضّح إجابتك.

غير صحيحة أبداً، أضلاع المربع الأربعة متطابقة بينما لا يوجد ضلعان متقابلان في شكل الطائرة الورقية متطابقان.

50) **مسألة مفتوحة:** ارسم شبه المنحرف $ABCD$ وشبه المنحرف $FGHJ$ غير المتطابقين وفيهما $\overline{FH} \cong \overline{AC}$ و $\overline{GJ} \cong \overline{BD}$.

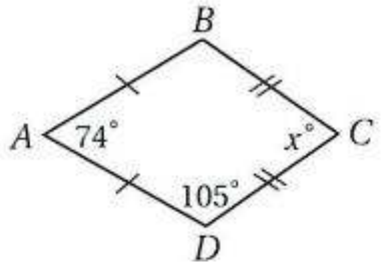


51) **اكتب:** قارن بين خصائص كلٍّ من: شبه المنحرف وشبه المنحرف المتطابق الساقين وشكل الطائرة الورقيّة.

شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يسميان قاعدتي شبه المنحرف ويسمى الضلعان غير المتوازيين ساقي شبه المنحرف.
شبه المنحرف المتطابق الساقين: هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان ومتطابقان وزوايا القاعدة متطابقة.
شكل الطائرة الورقية: هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورةالمتطابقة وعلى عكس متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين ليسا متطابقين ولا متوازيين.

تدريب على الاختبار المعياري

52) **إجابة شبكيّة:** إذا كان $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة، فما قياس $\angle C$؟



$\angle B = \angle D$ من خصائص الطائرة الورقية

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^\circ$$

$$74 + 105 + x + 105 = 360^\circ$$

$$x = 360 - 284$$

$$x = 76^\circ$$

53) ما الشكل الذي يمكن أن يكون مثالًا مضادًّا للتخمين الآتي؟

إذا كان قطرا شكل رباعي متطابقين فإنه مستطيل .

F المربّع

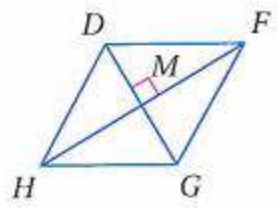
G المعين

H متوازي الأضلاع

J شبه المنحرف المتطابق الساقين

J شبه المنحرف المتطابق الساقين

مراجعة تراكمية



جبر: استعن بالمعين $DFGH$ فيما يأتي: (الدرس 5-1)

54) إذا كان $m\angle FGH = 118°$ ، فأوجد $m\angle MHG$.

من خصائص المعين أنه يوجد ضلعين متتاليين متطابقين

إذن $\overline{FG} = \overline{HG}$

إذن $\angle HFG = \angle FHG$

وبما أن $\angle FGH = 118°$ إذن الزاويتين الأخرتين في ΔHFG

$180 - (118) = 62°$ وبما أن $\angle HFG = \angle FHG$

إذن $\angle MHG = \dfrac{62}{2} = 31°$

55) إذا كان $MG = x + 6$, $DM = 4x - 3$ ، فأوجد DG.

قطرا المعين ينصف كل منهما الأخر

$$MG = MD$$
$$x + 6 = 4x - 3$$
$$4x - x = 6 + 3$$
$$3x = 9$$
$$x = 3$$
$$DG = MG + MD$$
$$DG = x + 6 + 4x - 3$$
$$DG = 5x + 3$$
$$DG = 18$$

56) إذا كان $HD = 15$, $HM = 12$ ، فأوجد MG.

من خصائص المعين أن كل ضلعين متتالين متطابقين

$$HD = HG = 15$$

$$HM = 12$$

حسب نظرية فيثاغورث:

$$(HG)^2 = (MH)^2 + (MG)^2$$

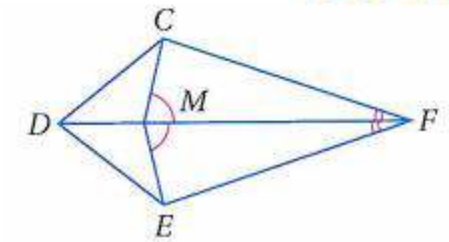
$$(15)^2 = (12)^2 + (MG)^2$$

$$(HG)^2 = (15)^2 - (12)^2$$

$$(HG)^2 = 81$$

$$HG = 9$$

57) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (مهارة سابقة)



المعطيات: $\angle CMF \cong \angle EMF$ ،

$\angle CFM \cong \angle EFM$

المطلوب: $\triangle DMC \cong \triangle DME$

المعطيات: $\angle CMF \cong \angle EMF, \angle CFM \cong \angle EFM$

المطلوب: $\Delta DMC \cong \Delta DME$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\angle CMF \cong \angle EMF, \angle CFM \cong \angle EFM$ **(معطيات)**

2) $\overline{MF} \cong \overline{MF}$, $\overline{DM} \cong \overline{DM}$ **(خاصية الانعكاس)**

3) $\Delta CMF \cong \Delta EMF$ **(ASA)**

4) $\overline{CM} \cong \overline{EM}$ **(العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)**

5) $\angle DMC, \angle CMF$ متكاملتان $\angle DME, \angle EMF$ متكاملتان. **(نظرية الزوايا المتكاملة)**

6) $\angle DMC \cong \angle DME$ **(مكملات الزوايا المتطابقة تكون متطابقة)**

7) $\Delta DMC \cong \Delta DME$ **(SAS)**

أوجد ميل القطعة المستقيمة المعطاة إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

$(x, 4y), (-x, 4y)$ (58

الميل: $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{4y - 4y}{x + x} = \frac{0}{2x} = 0$

$(-x, 5x), (0, 6x)$ (59

الميل: $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{5x - 6x}{-x - 0} = \frac{-x}{-x} = 1$

$(y, x), (y, y)$ (60

الميل: $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - y}{y - y} = \frac{x - y}{0}$

الميل غير معرف