

# التهيئة

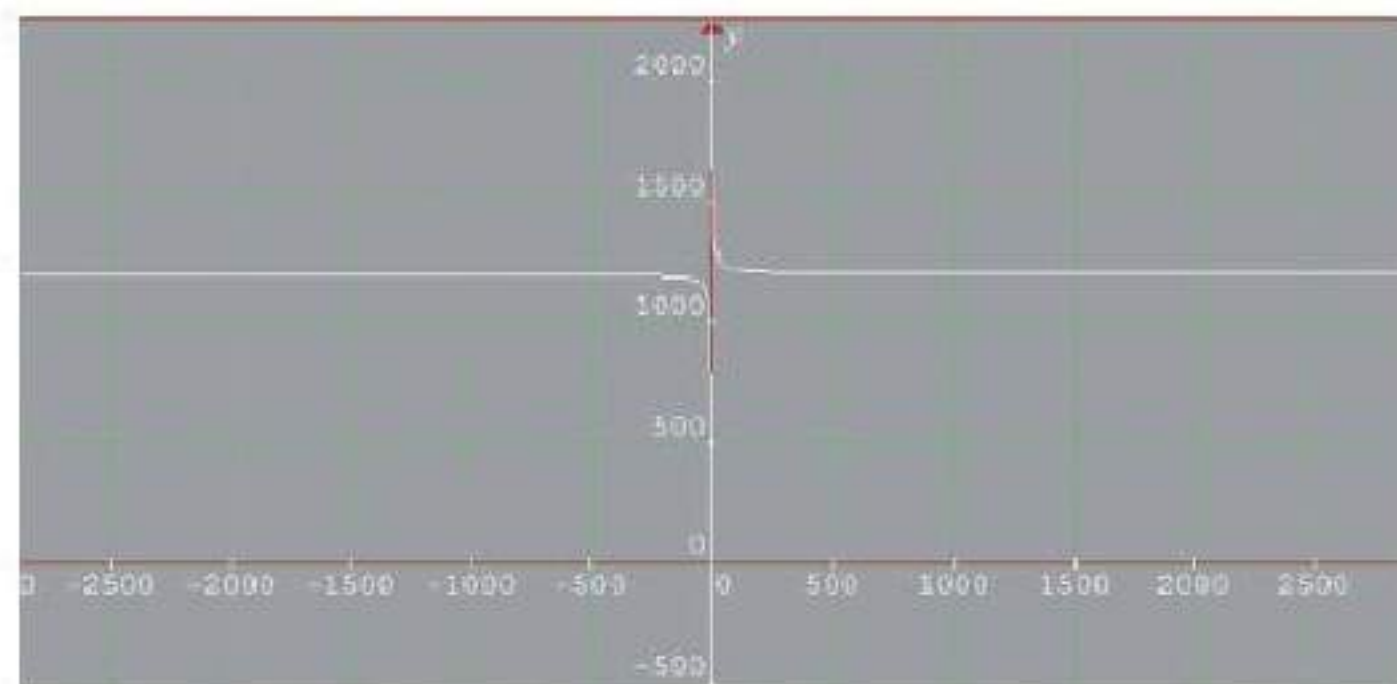
اختبار سريع:

(1) يظهر من المنحنى أن  $q(x) \rightarrow 0$  عندما  $x \rightarrow \infty$  ، و  $q(x) \rightarrow 0$  عندما  $x \rightarrow -\infty$

(2) يظهر من المنحنى أن  $m(x) \rightarrow -5$  عندما  $x \rightarrow \infty$  ، و  $m(x) \rightarrow -5$

عندما  $x \rightarrow -\infty$ .

(3)



تقترب قيمة  $A(x)$  من 1200 عندما تقترب  $x$  من موجب ما لا نهاية.

$$-17 \quad (4)$$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية والأفقية (إن وجدت) لكل دالة مما يأتي:

$$y = 2 \quad (5)$$

$$x = 10 \quad (6)$$

$$x = -2, x = 4, y = 1 \quad (7)$$

$$x = 2, y = 1 \quad (8)$$

$$-12, -17, -22, -27 \quad (9)$$

$$-19, -25, -31, -37 \quad (10)$$

$$80, -160, 320, -640 \quad (11)$$

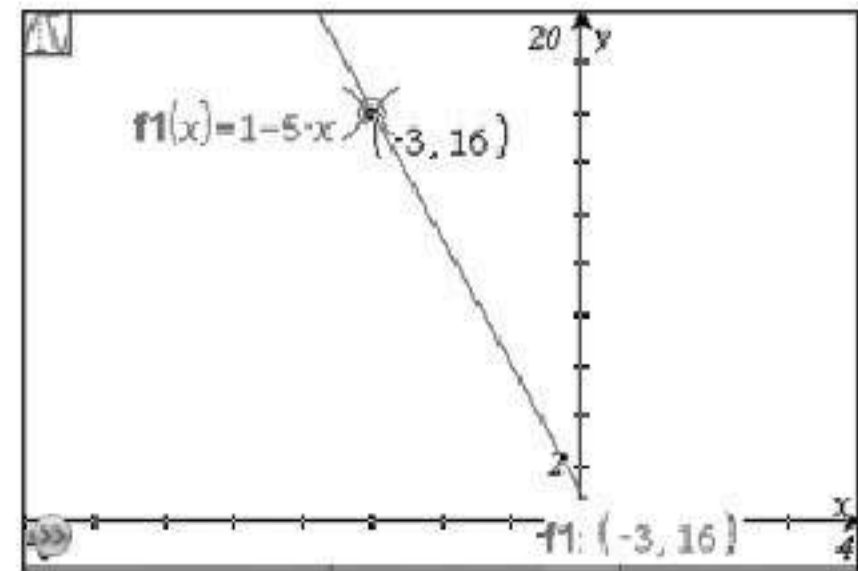
$$0, 7, 14, 21 \quad (12)$$

# تقدير النهايات بيانياً

4-1

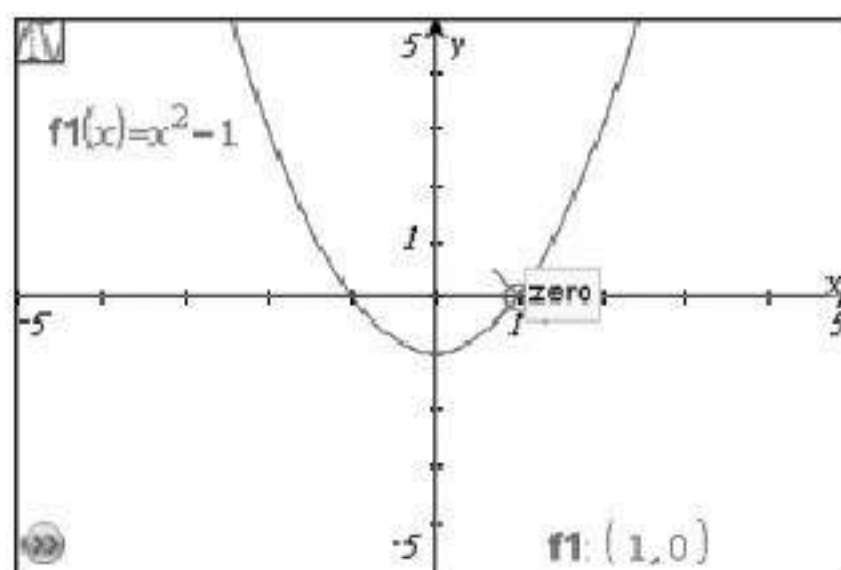
تحقق

16 (1A)



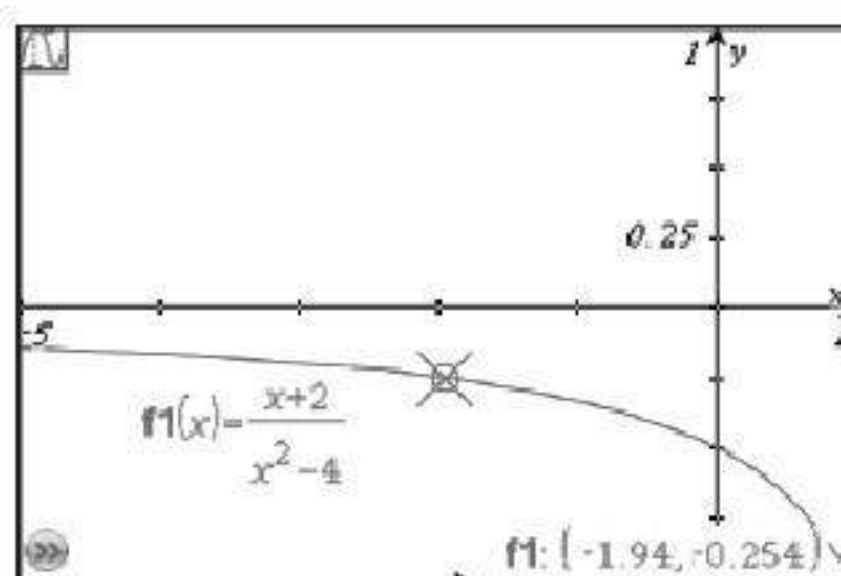
$x$	- 3.01	- 3.001	- 3	- 2.999	- 2.99
$f(x)$	16.05	16.005		15.995	15.95

0 (1B)



$x$	0.99	0.999	1	1.001	1.01
$f(x)$	-0.0199	-0.001999		0.002001	0.0201

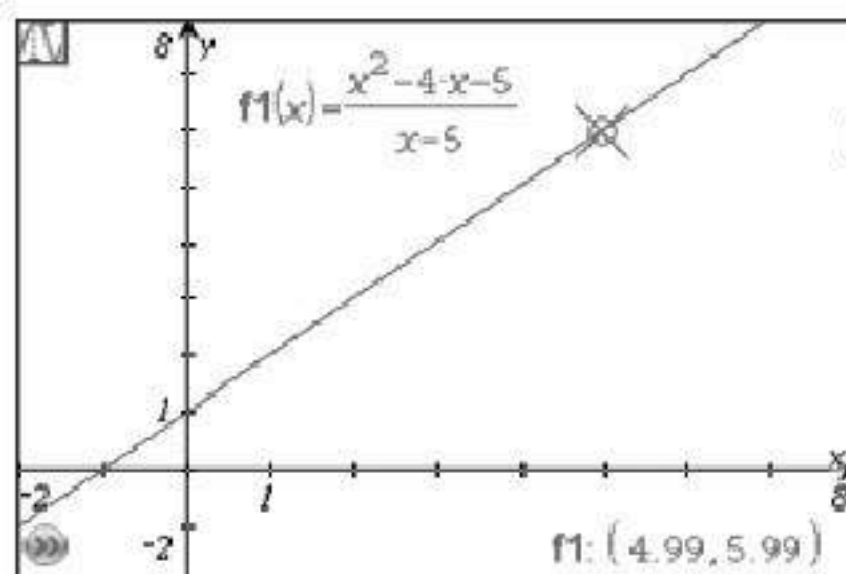
$-0.25$  (2A)



$x$	-1.99	-1.999	-2	-2.001	-2.01
$f(x)$	-0.2506	-0.2501		-0.2499	-0.2494

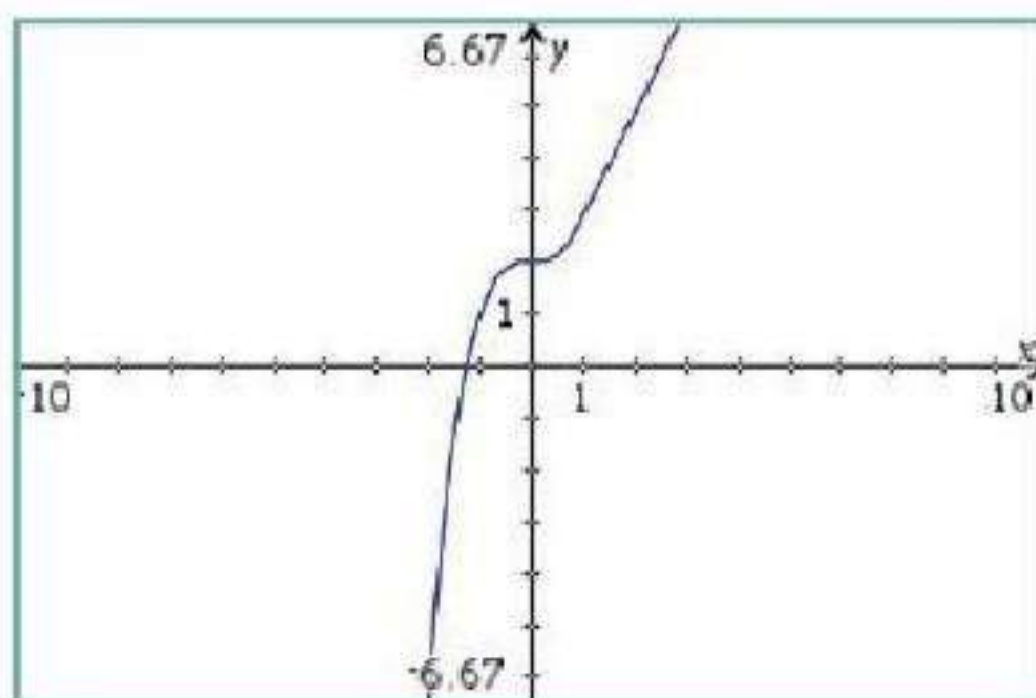


6 (2B)



$x$	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	5.99	5.999		6.001	6.01

(3A)

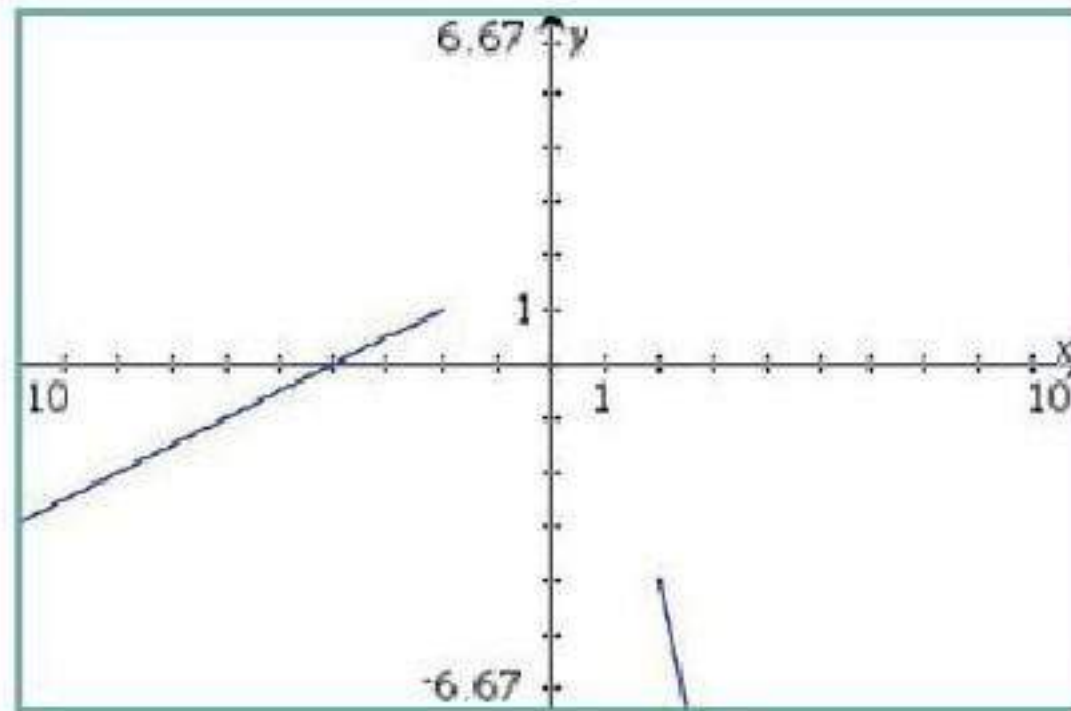


$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

(3B)



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = -4$$

$\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$  غير موجودة

(4A) غير موجودة

(4B)  $-\infty$

(5A) غير موجودة

(5B) 0

(6A) - 3

(6B) 0

(6C) غير موجودة

(7A)  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$  غير موجودة، حيث يتذبذب منحنى  $V(t)$  بين 165 و-165 كلما ازدادت  $t$

وهذا يعني أن الجهد الكهربائي في المقبس يتذبذب بين 165, 165- مع

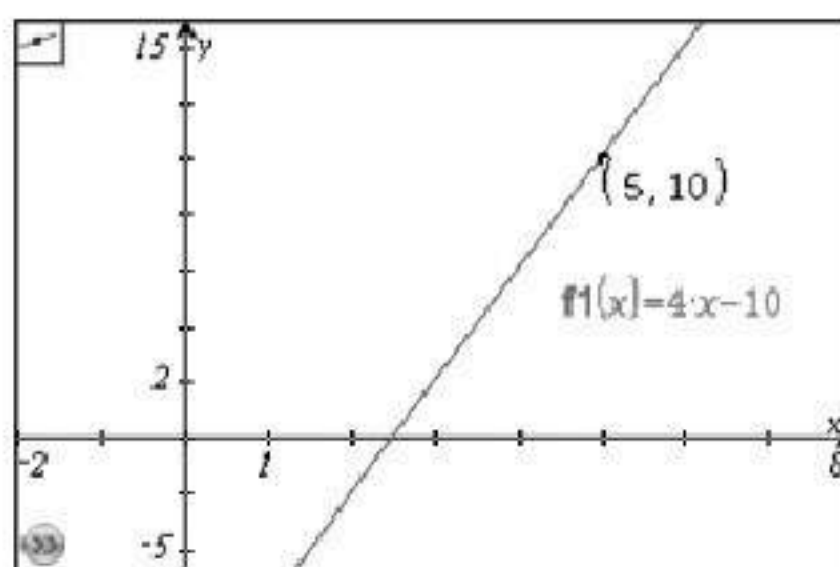
مرور الزمن

(7B)  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 230$  سيصبح عدد الذبذبات 230 ذبابة مع مرور الزمن.

# تدرب وحل المسائل:

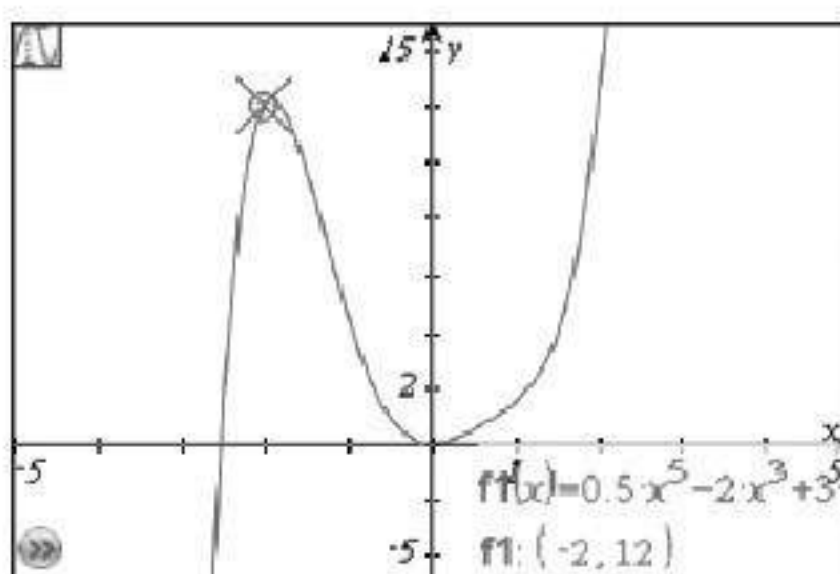


10 (1)



$x$	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	9.96	9.996		10.004	10.04

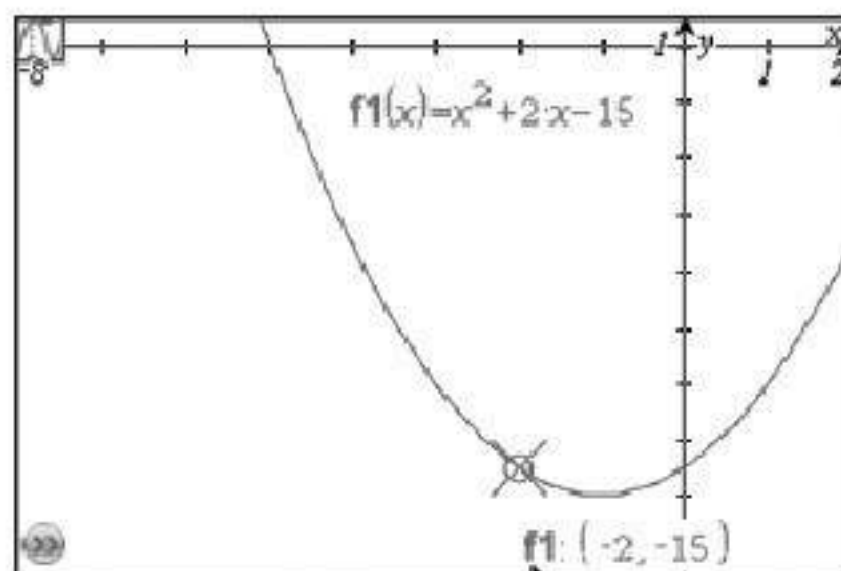
12 (2)



$x$	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	11.72	11.972		12.028	12.28

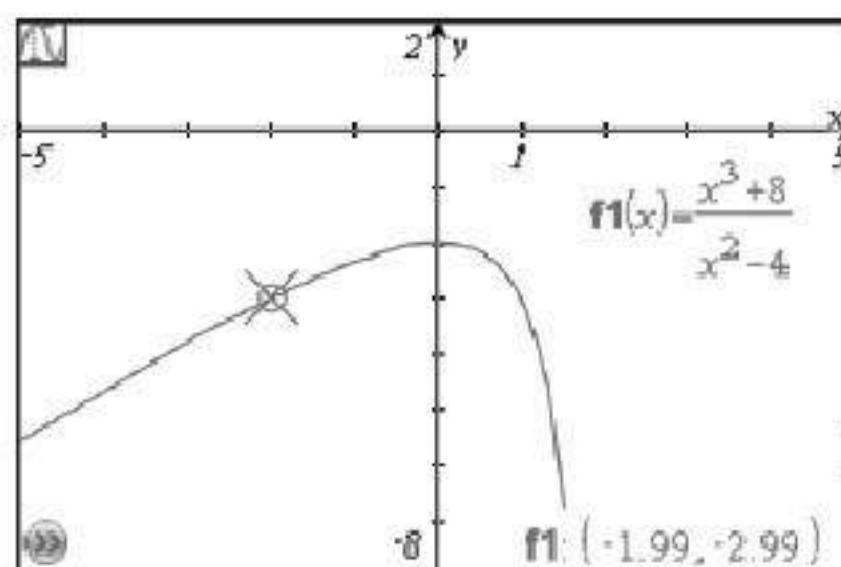


15 (3)



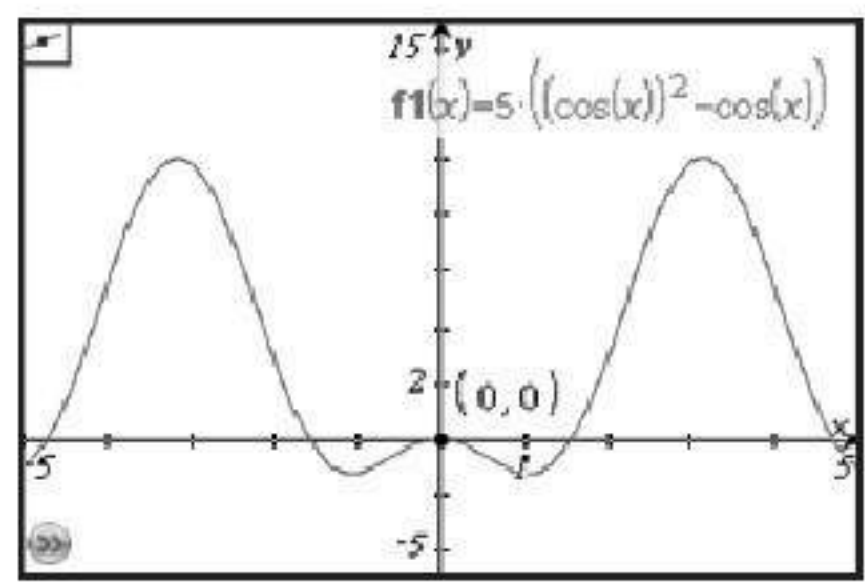
$x$	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99
$f(x)$	-14.98	-14.998		-15.002	-15.02

- 3 (4)



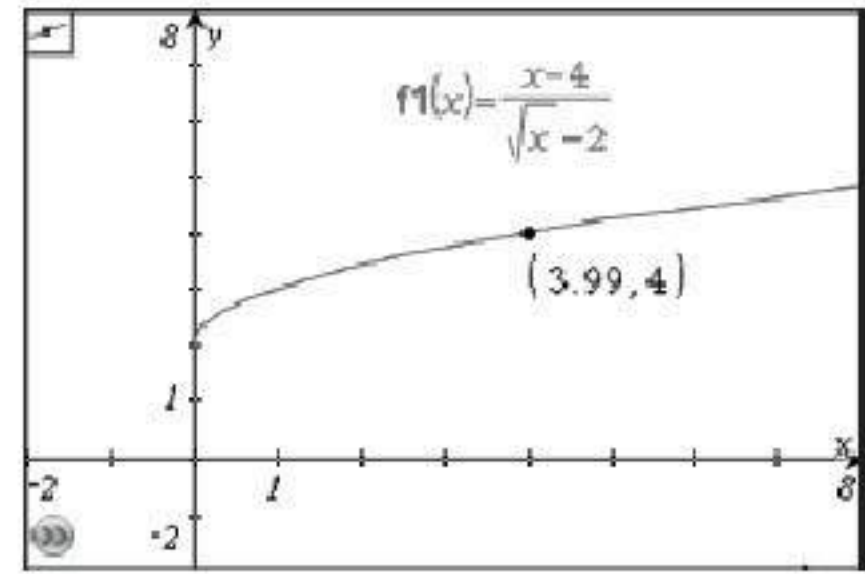
$x$	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99
$f(x)$	-3.008	-3.0008		-2.9993	-2.993

0 (5



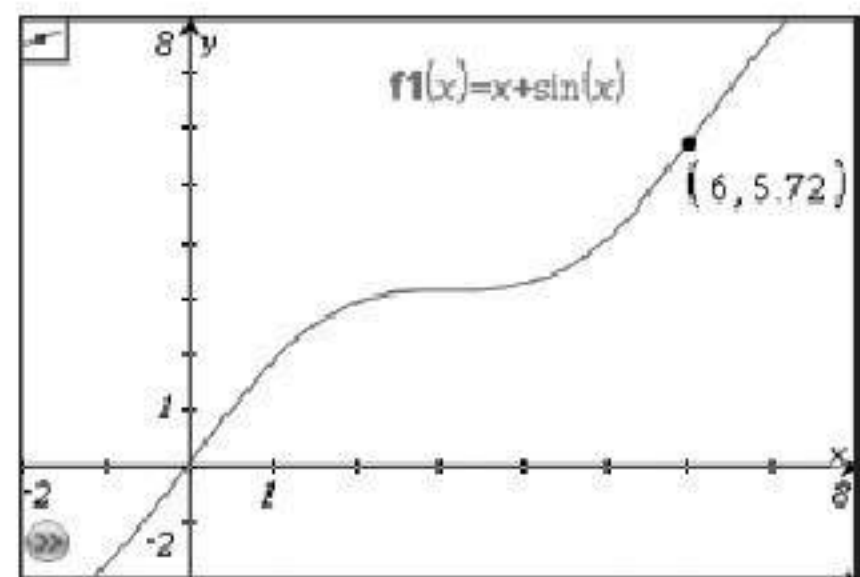
$x$	-0.01	-0.001	-2	0.001	0.01
$f(x)$	-0.0002	-0.000002		-0.000002	-0.0002

4 (6



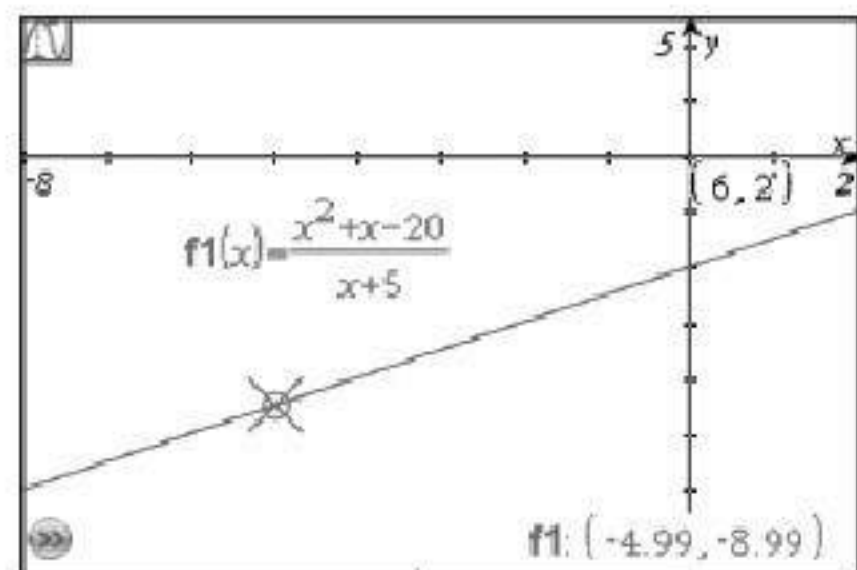
$x$	3.99	3.999	4	4.001	4.01
$f(x)$	3.998	3.9997		4.0002	4.003

5.72 (7



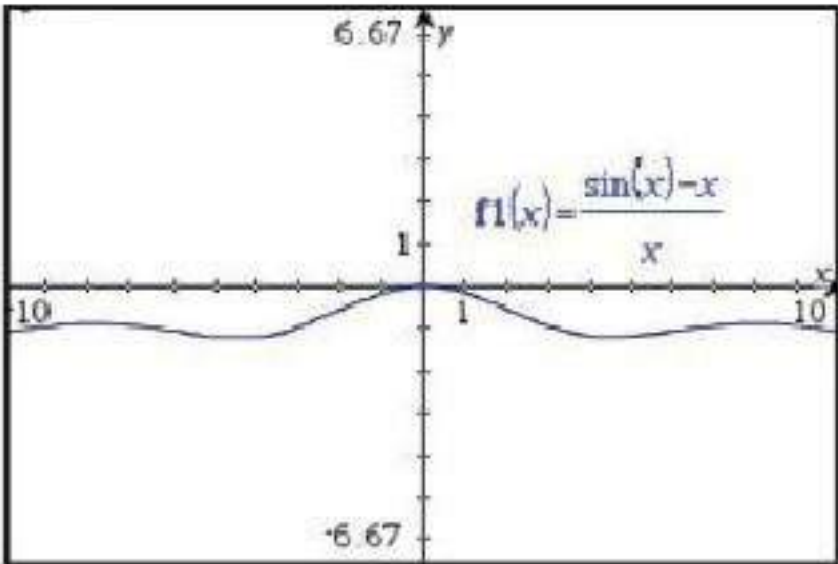
$x$	5.99	5.999	6	6.001	6.01
$f(x)$	5.70	5.719		5.723	5.74

– 9 (8)

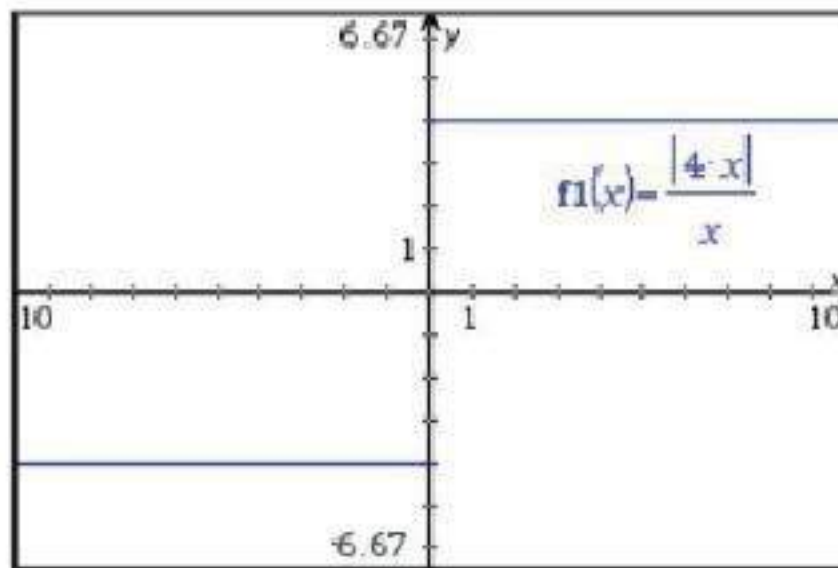


$x$	-5.01	-5.001	-5	-4.999	-4.99
$f(x)$	-9.01	-9.001		-8.999	-8.99

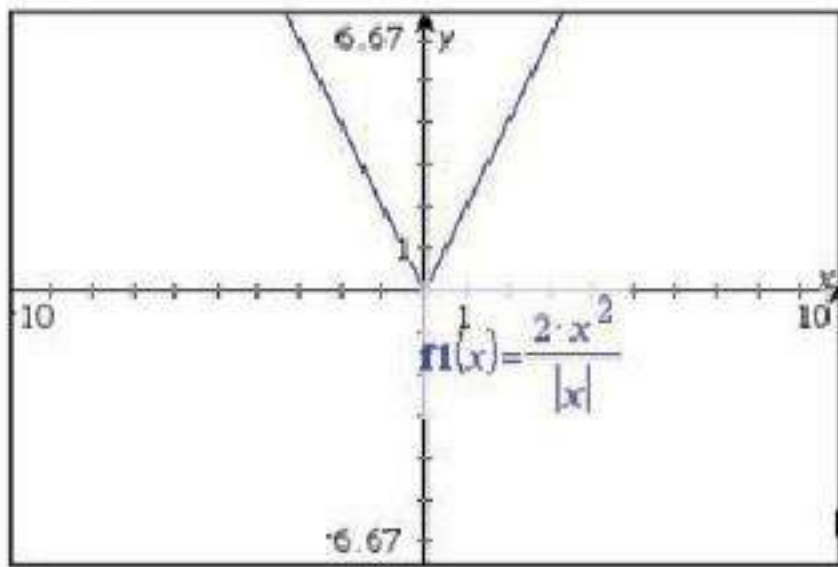
0 (9)



-4 (10)

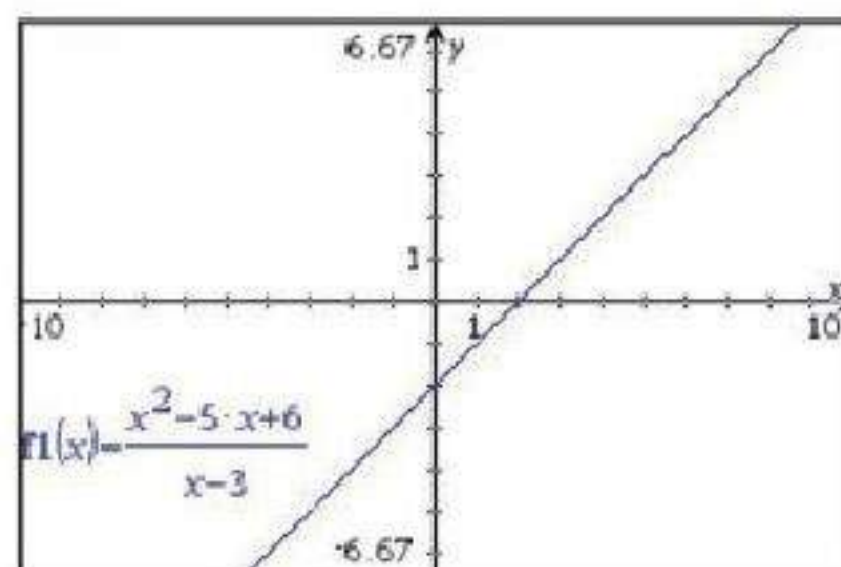


0 (11)

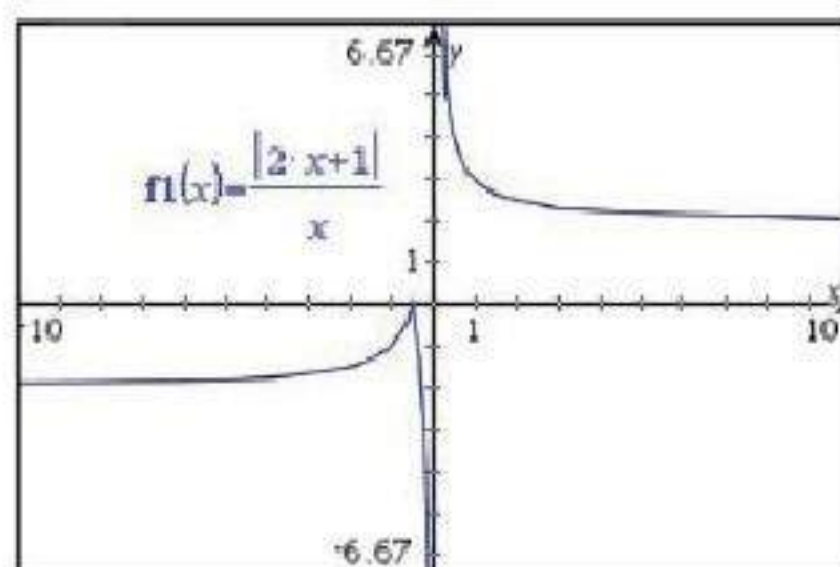




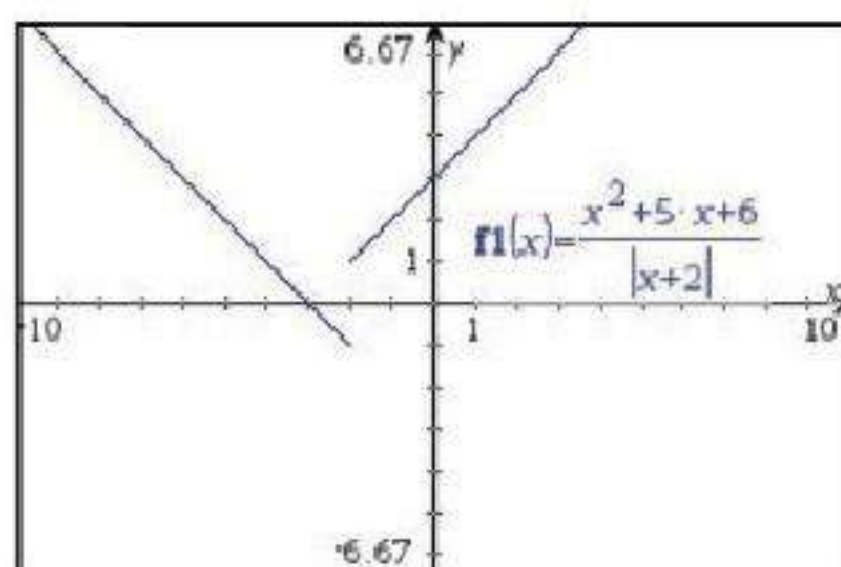
1 (12)



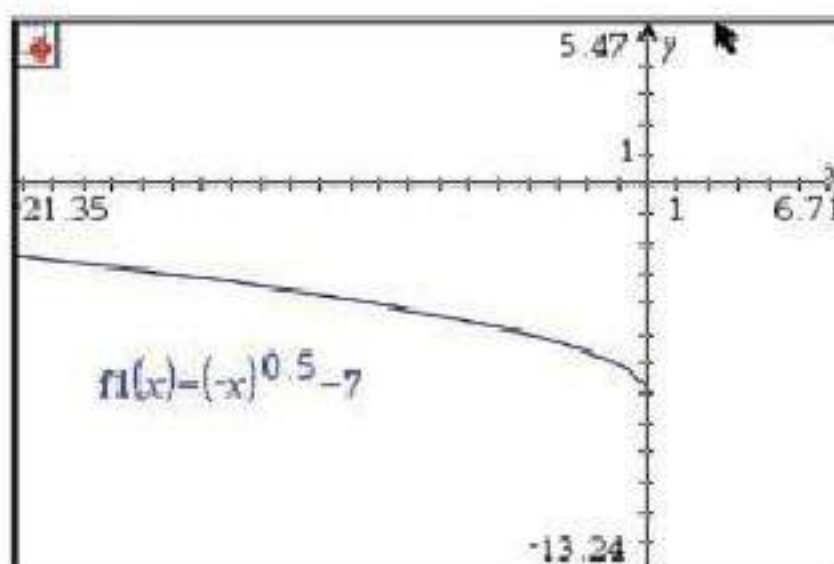
0 (13)



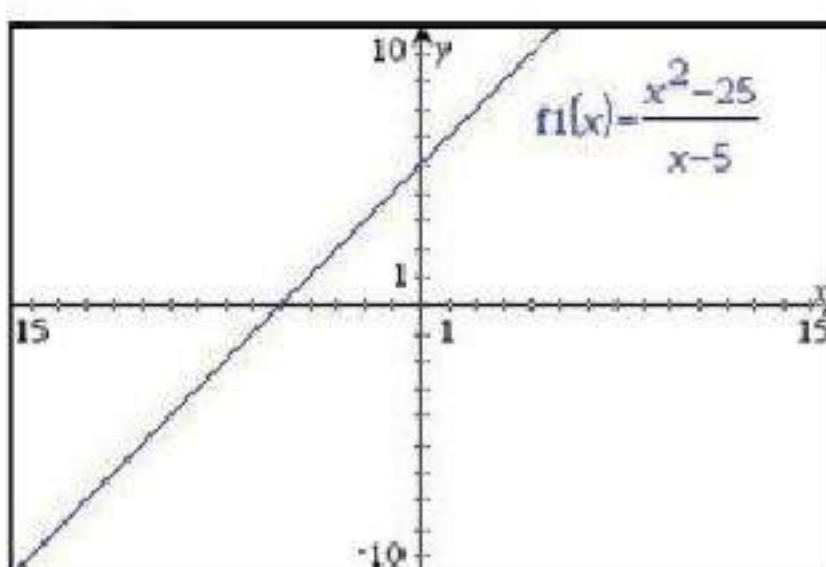
(14) غير موجودة



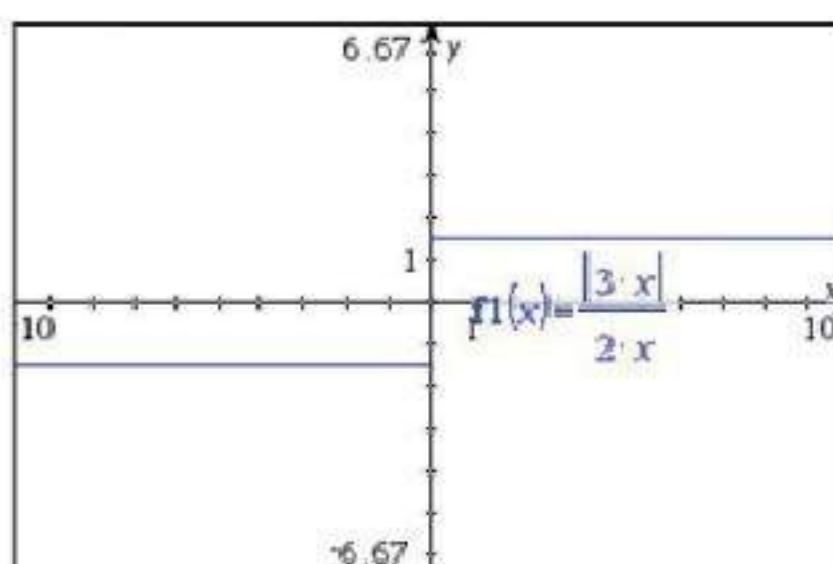
– 7 (15)



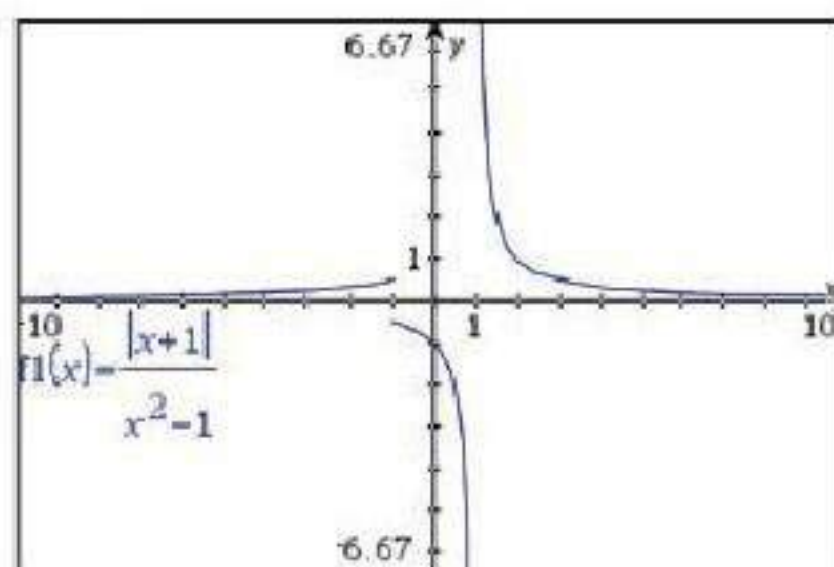
10 (16)



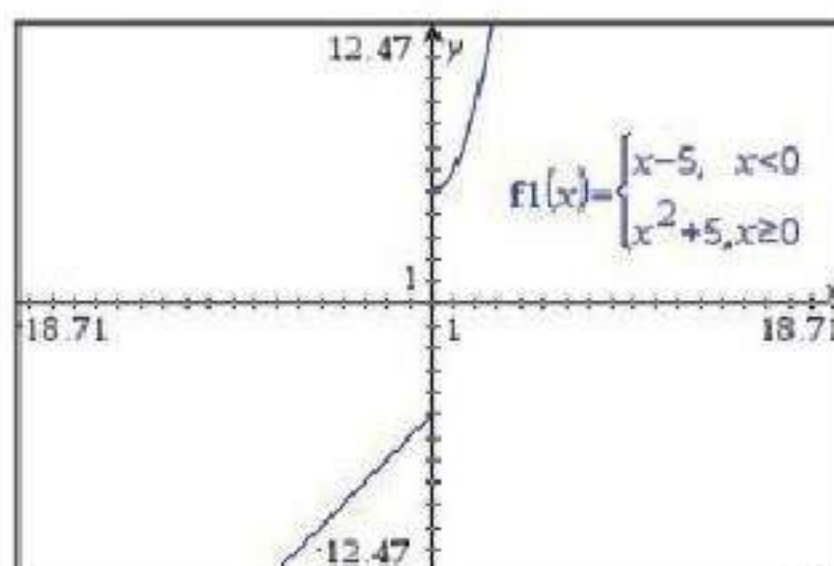
(17) غير موجودة



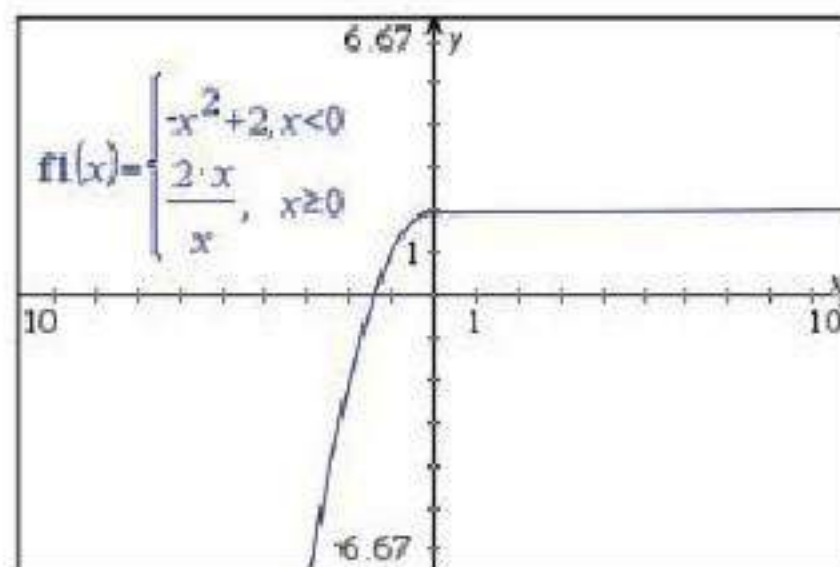
(18) غير موجودة



(19) غير موجودة



2 (20)



3 (21)

$\infty$  (22)

- 6 (23)

(24) غير موجودة

-  $\infty$  (25)

(26) غير موجودة



(27)  $\infty$

(28)  $\infty$

(29)  $-\infty$

(30) 0

(31) غير موجودة

(32) -1

(33) غير موجودة

(34) 0

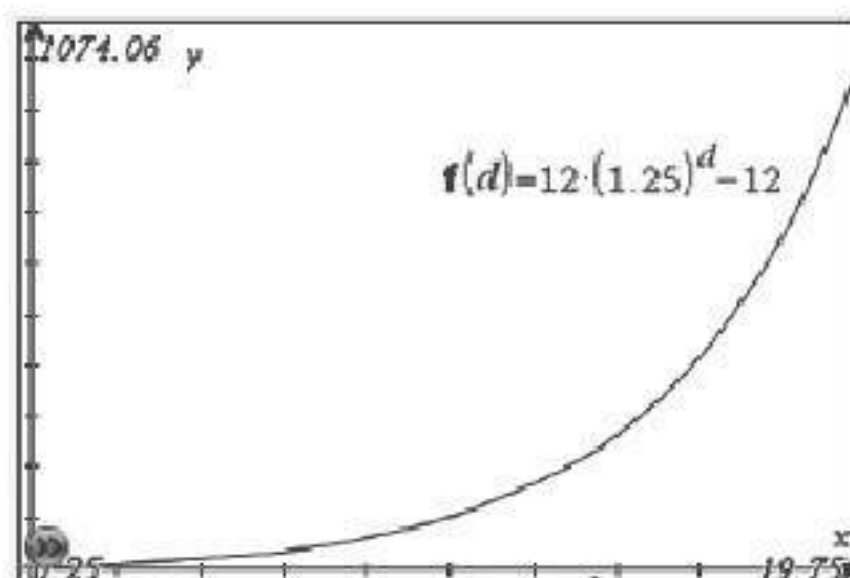
(35) دواء:

$$\lim_{w \rightarrow 1} f(w) = 250 ; \lim_{w \rightarrow 3} f(w) = 100 \text{ (a)}$$

(b) 0؛ إجابة ممكنة: سيقضي اللقاح على العدوى مع مرور الزمن.

### 36) برامج تلفزيونية:

(a)

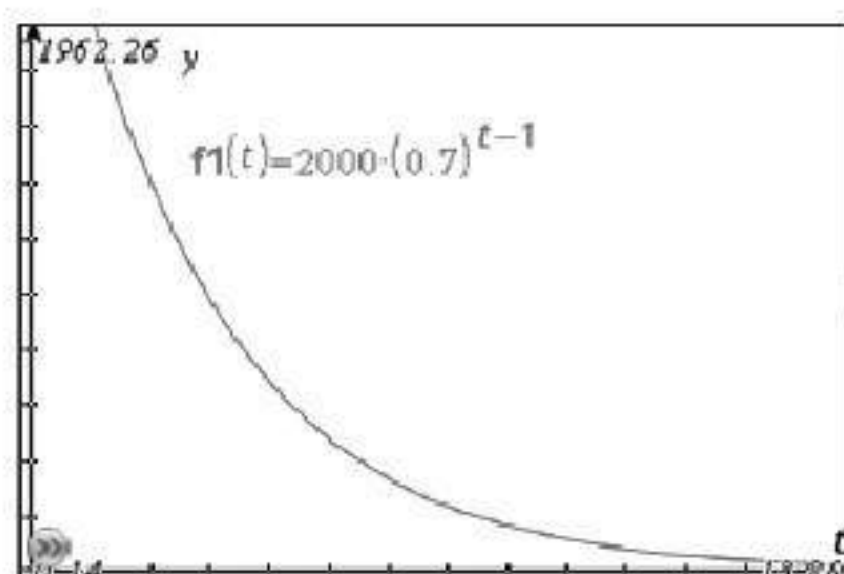


(b) نحو 25، نحو 100، نحو 1031، نحو 7875584 شخصاً سوف يشاهدون البرنامج بعد مرور شهرين.

(c)  $\infty$ ، إجابة ممكنة: يعني الناتج أن عدد مشاهدي البرنامج سيزداد بشكل لا نهائي.

### 37) كيمياء:

(a)



(b) 480.2 , 80.71 , 13.56

(c) 0

(d) لا؛ مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية  $6666.67 \text{ m}$  تقريباً، وهو أقل من  $7000 \text{ m}$ ، والذي يساوي بُعد المستشفى.

(38) - 1

(39) 4

(40) غير موجودة

(41) 1

(42) 6

(43) 2.5

حاسبة بيانية:

(44) غير موجودة؛ يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند  $x = 1$

(45) غير موجودة؛ يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند  $x = 2$

(46) غير موجودة؛ تنذب

(47) غير موجودة؛ تقترب قيم  $f(x)$  من قيمتين مختلفتين باقتراب قيم  $x$  من العدد 5 - من اليمين ومن اليسار.



## مسائل مهارات التفكير العليا:

(48) **اكتشف الخطأ:** كلاهما على خطأ، إذا اقتربت الدالة من قيمتين مختلفتين من اليمين واليسار، فإن النهاية غير موجودة عند تلك النقطة.

(49) **مسألة مفتوحة:** إجابة ممكنة:

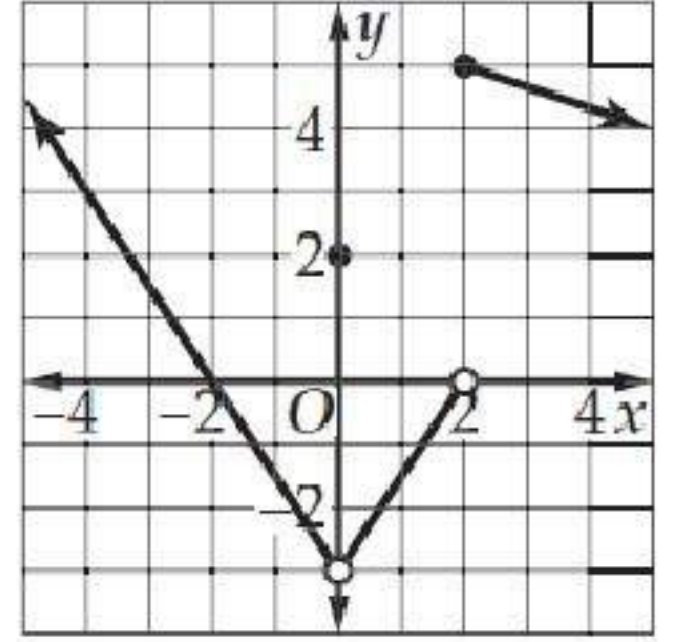
$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & x = 0 \\ x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

(50) **تحذير:**  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  غير موجودة؛  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  غير موجودة؛ إجابة ممكنة: إذا كان مقام

الدالة النسبية صفراً، والبسط لا يساوي صفراً عند نقطة معطاة، فإن النهاية غير موجودة.

(51) **تبرير:** أحياناً؛ إجابة ممكنة: لا تعتمد نهاية  $f(x)$  عندما تقترب  $x$  من  $c$  على قيمة الدالة عند النقطة  $c$ . فإذا كانت الدالة غير متصلة عند  $c$ ، وكان  $f(c) = L$ ، فإن نهاية الدالة قد تكون قيمة مختلفة عن  $L$ .

**(52) مسألة مفتوحة: إجابة ممكنة:**



**(53) تحد:**

(a) غير موجودة

(b) غير موجودة

(c) - 1

**(54) إجابة ممكنة:** إذا كانت الدالة  $f(x)$  متصلة عند  $x = a$ ، فإنه يمكنك إيجاد النهاية بالتعويض عن  $x$  بـ  $a$  في الدالة، أما إذا لم تكن الدالة متصلة، فبإمكانك التبسيط ثم التعويض عن  $x$  بـ  $a$ . وإذا لم تفد أي من الطريقتين، فإننا نقدر النهاية باستعمال التمثيل البياني.



## مراجعة تراكمية

(55)

$$\begin{aligned}
 & \sin \theta \left( \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\cot \theta} \right) \\
 &= \sin \theta \left( \frac{1}{\sin \theta} - \cos \theta \div \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \\
 &= \sin \theta \left( \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cancel{\cos \theta} \cdot \sin \theta}{\cancel{\cos \theta}} \right) \\
 &= \sin \theta \left( \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta} \right) \\
 &= \cancel{\sin \theta} \left( \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cancel{\sin \theta}} \right) \\
 &= \cos^2 \theta
 \end{aligned}$$

(56) الدالة متصلة عند جميع قيم  $x$  ما عدا عند  $x = -5$

$$h(-5) = \frac{0}{0} \text{ (غير معرفة) حيث أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} h(x) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)} = -10 \text{ لكن:}$$

و بما أن  $h(-5)$  غير معرفة،  $\lim_{x \rightarrow -5} h(x)$  موجودة فإنه يوجد نقطة عدم اتصال قابل للإزالة

عند  $x = -5$

(57) 0.219

63° (58

93.4° (59

تدريب على اختبار:

C (60

A (61



# حساب النهايات جبرياً

4-2

تحقق

(1A)  $-4$

(1B)  $\frac{1}{9}$

(1C)  $\sqrt{2}$

(2A)  $3$

(2B)  $-\frac{1}{7}$

(2C) بما أم هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما  $x = 2$  فلا يمكننا حسابها بالتعويض المباشر

(2D) غير ممكن؛ لأنه اذا كانت  $f(x) = x + 6$  فإن  $f(-8) = -8 + 6 < 0$  إذن لا يمكن

حساب  $\lim_{x \rightarrow -8} \sqrt{f(x)}$

20 (3A)

$\frac{1}{5}$  (3B)

10 (4A)

$-\frac{1}{4}$  (4B)

$-\infty$  (5A)

$\infty$  (5B)

$-\infty$  (5C)

0 (6A)

$-\infty$  (6B)

3.5 (6C)

0 (7A)

$\infty$  (7B)

3 (7C)

# تدرب وحل المسائل:



استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

(1)  $-25$

(2)  $29$

(3)  $21.11$

(4)  $-46$

(5)  $6$

(6)  $42$

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكناً، وإلا فذكر السبب:

(7) ليس ممكناً؛ فالمقام يساوي صفراً عندما  $x = 16$ .

(8)  $30$

(9) 2

(10) ليس ممكناً؛ قيمة الدالة  $f(x) = \sqrt{2-x}$  هي  $\sqrt{-1}$  عندما  $x = 3$  وهي ليست معرفة.

(11) 188

(12) - 66.84

(13) فيزياء:

$\lim_{v \rightarrow 0} m = m_0$  ، عندما تقترب سرعة الجسم من الصفر، فإن كتلته تقترب من كتلته الابتدائية، أو كتلته في وضع السكون.

احسب كل نهاية مما يأتي:

(14) 3

(15) 8

(16) 1.46



$$-2 \quad (17)$$

$$-8 \quad (18)$$

$$\frac{1}{6} \quad (19)$$

احسب كل نهاية مما يأتي:

$$\infty \quad (20)$$

$$\frac{3}{4} \quad (21)$$

$$-\infty \quad (22)$$

$$\infty \quad (23)$$

$$0 \quad (24)$$

$$2 \quad (25)$$

(26) اسفنج:

25 mm (a)

130 mm (b)

(c) لن يتعدى طول حيوان الإسفنج 130 mm

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إذا كانت موجودة:

0 (27)

- 4 (28)

2 (29)

$\infty$  (30)

$\frac{1}{4}$  (31)

$\infty$  (32)

$$-5 \quad (33)$$

$$5 \quad (34)$$

(35) غير موجودة

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إذا كانت موجودة:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0 \quad (36)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + 2^x - \cos x) = 1 + 0 + 2^0 - \cos 0 = 1 \quad (37)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x} = \frac{\tan \pi}{\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (38)$$

$$-0.5 \quad (39)$$

أوجد  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  لكل دالة مما يأتي:

(40) 2

(41) -9

(42)  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(43)  $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

(44)  $2x$

(45)  $2x + 8$

(46) فيزياء: 0.0000125



## مسائل مهارات التفكير العليا:

(47) برهان:  $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = \lim_{x \rightarrow c} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)$

$$\lim_{x \rightarrow c} p(x) = \lim_{x \rightarrow c} a_n x^n + \lim_{x \rightarrow c} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow c} a_2 x^2 + \lim_{x \rightarrow c} a_1 x + \lim_{x \rightarrow c} a_0$$

$$p(x) = a_n \left( \lim_{x \rightarrow c} x \right)^n + a_{n-1} \left( \lim_{x \rightarrow c} x \right)^{n-1} + \dots + a_2 \left( \lim_{x \rightarrow c} x \right)^2 + a_1 \lim_{x \rightarrow c} x + \lim_{x \rightarrow c} a_0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} p(x) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0 = p(c)$$

(48) برهان: أثبت أن العبارة صحيحة عند  $n = 1$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^1 = L^1 = L = \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]$$

أي أن العبارة صحيحة عند  $n = 1$ . افترض أن العبارة صحيحة عند  $n = k$  حيث  $k$  عدد صحيح

موجب أي:  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^k = L^k$

والمطلوب إثبات أن العبارة صحيحة عند  $n = k + 1$  أي  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{k+1} = L^{k+1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{k+1} &= \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^k \cdot \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^1 \\ &= L^k \cdot L^1 = L^{k+1} \end{aligned}$$

أي أن العبارة صحيحة عندما  $n = k + 1$ . وحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، فإن العبارة صحيحة لأي عدد صحيح موجب  $n$ .



(49) **تحد:** إذا كانت  $m > n$ ، فإن النهاية تساوي 0. إذا كانت  $m = n$

$$\frac{a_n}{b_m}$$

إذا كانت  $m < n$ ، فإن النهاية إما  $+\infty$  أو  $-\infty$ .

(50) **تبرير:** صحيحة أحياناً، تكون صحيحة إذا كانت  $r(x)$  معرفة عند  $c$ .

(51) اكتب: إجابة ممكنة:

الخاصية	التعريف	مثال
خاصية المجموع	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow 2} [x + 5] = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5$
خاصية الفرق	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow 2} [x - 5] = \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 5$
خاصية الضرب في ثابت	$\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 2} 2x = 2 \lim_{x \rightarrow 2} x$
خاصية الضرب	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow 2} [x^2(x - 5)] = \left( \lim_{x \rightarrow 2} x^2 \right) \left( \lim_{x \rightarrow 2} (x - 5) \right)$
خاصية القسمة	$\lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ شريطة $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$	$\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{x^2}{(x - 5)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 5)}$ شريطة $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 5) \neq 0$
خاصية القوة	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)^n] = \left[ \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$	$\lim_{x \rightarrow 2} [(x - 5)^2] = \left[ \lim_{x \rightarrow 2} (x - 5) \right]^2$
خاصية الجذر النوني	$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ عندما $n$ زوجي	$\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x - 5} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 9} (x - 5)}$



## مراجعة تراكمية

(52)  $-1 @ 1$

(56) 0، غير معرفة

(57) 2، 4

أوجد  $(f + g)(x)$   $(f - g)(x)$   $(f \cdot g)(x)$   $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$  لكل زوج من الدوال

الآتية، ثم حدّد مجال الدالة الناتجة:

(58)

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= x^2 - 2x + x + 9 \\ &= x^2 - x + 9\end{aligned}$$

المجال:  $(-\infty, \infty)$  أو  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^2 - 2x - x - 9 \\ &= x^2 - 3x - 9\end{aligned}$$

المجال:  $(-\infty, \infty)$  أو  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
 &= (x^2 - 2x) \cdot (x + 9) \\
 &= x^3 + 9x^2 - 2x^2 - 18x \\
 &= x^3 + 7x^2 - 18x
 \end{aligned}$$

المجال:  $(-\infty, \infty)$  أو  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\
 &= \frac{x^2 - 2x}{x + 9}
 \end{aligned}$$

المجال:  $\{x | x \neq -9, x \in \mathbb{R}\}$

(59)

$$\begin{aligned}
 (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\
 &= \frac{x}{x + 1} + x^2 - 1
 \end{aligned}$$

المجال:  $\{x | x \neq -1, x \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned}
 (f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\
 &= \frac{x}{x + 1} - x^2 + 1
 \end{aligned}$$

المجال:  $\{x | x \neq -1, x \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
 &= \frac{x}{\cancel{x+1}} \cdot (x-1) \cancel{(x+1)} \\
 &= x(x-1)
 \end{aligned}$$

المجال:  $\{x | x \neq -1, x \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\
 &= \frac{x}{x+1} \div (x^2 - 1) \\
 &= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x^2 - 1}
 \end{aligned}$$

المجال:  $\{x | x \neq -1, x \neq 1, x \in \mathbb{R}\}$

تدريب على اختبار:

C (60

A (61

B (62



# استكشاف: معمل الحاسبة البيانية: ميل المنحنى

4-3

تمارين:

(1) 6 -

(2) 12

(3) 1

(4) 0.5

حل النتائج

(5) إجابة ممكنة: كلما اقتربت نقاط تقاطع القاطع من نقطة  $(a, b)$  ، على المنحنى، فإن القاطع يقترب أكثر فأكثر من المماس للمنحنى عند النقطة  $(a, b)$ .

(6) إجابة ممكنة: إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة عند تلك النقطة.

# المماس والسرعة المتجهة

4-3

تحقق

$$6 \text{ (1A)}$$

$$-4 \text{ (1B)}$$

$$m = 2x - 4 \text{ (2A)}$$

$$m = 3x^2 \text{ (2B)}$$

$$17 \text{ ft/s إلى الأعلى. (3)}$$

$$- 224 \text{ ft/s (4)}$$

$$v(t) = 90 - 32t \text{ (5)}$$

# تدرب وحل المسائل:



أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة:

(1)  $-3, 5$

(2)  $-3, -3$

(3)  $-3, -\frac{1}{3}$

(4)  $12, 3$

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

(5)  $m = -2$

(6)  $m = -2x + 4$

(7)  $m = -2x$



$$m = -\frac{2}{x^3} \quad (8)$$

$$m = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2} \quad (9)$$

$$m = -6x^2 \quad (10)$$

(11) تزلج:

$$m = 0.18t^2 - 2.16t \quad (a)$$

$$-3.6, -6.3, -6.3 \quad (b)$$

تمثل  $s(t)$  في كلٍ مما يأتي بعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأميال بعد  $t$  دقيقة. أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم بالميل لكل ساعة في الفترة الزمنية المعطاة (تذكر بأن تحوّل الدقائق إلى ساعات):

$$45 \text{ mi/h تقريباً} \quad (12)$$

$$65 \text{ mi/h تقريباً} \quad (13)$$

(14) 49 mi/h تقريباً

(15) 45 mi/h تقريباً

(16)  $\frac{-64t^2 + 130t + 2625}{2t - 15}$

تمثل  $f(t)$  في كل مما يأتي بعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد  $t$  ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللحظية لهذا الجسم عند الزمن المعطى:

(17) -96 ft/s

(18) 12.4 ft/s

(19) - 512 ft/s

(20) - 121.6 ft/s

(21) -58.2 ft/s



$$-57.6 \text{ ft/s} \quad (22)$$

تمثل  $s(t)$  في كلٍ مما يأتي المسافة التي يقطعها جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية  $v(t)$  للجسم عند أي زمن :

$$v(t) = 28t \quad (23)$$

$$v(t) = 1 - 6t \quad (24)$$

$$v(t) = 5 \quad (25)$$

$$v(t) = -2t + 4 \quad (26)$$

$$v(t) = 24t - 6t^2 \quad (27)$$

$$v(t) = 9t^2 + 6 \quad (28)$$

(29) قفز مظلي:

$$-112 \text{ ft/s} \quad (a)$$

$$-64 \text{ ft/s}, -160 \text{ ft/s} \quad (b)$$

$$v(t) = -32t \text{ (c)}$$

**(30) غوص:**

$$-7.4 \text{ m/s (a)}$$

$$v(t) = -9.82t - 0.04, -29.5 \text{ m/s (b)}$$

**(31) كرة قدم:**

$$-32t + 75 \text{ (a)}$$

$$59 \text{ ft/s (b)}$$

$$t \approx 2.344 \text{ s (c)}$$

$$90.39 \text{ ft تقريباً (d)}$$

**(32) فيزياء:**

$$9t^2 + 8 \text{ (a)}$$

$$44 \text{ m, } 152 \text{ m, } 332 \text{ m (b)}$$

## مسائل مهارات التفكير العليا:

(33) **اكتشف الخطأ:** جميل؛ إجابة ممكنة: ميل المنحنى هو  $-1$  عندما  $x < 0$ ،  $1$  عندما  $x > 0$ .  
لذا، فإن التمثيل البياني للميل يتكون من مستقيمين أفقيين:

$$y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \text{؛ ولذلك يكون غير متصل.}$$

$$(34) \quad m = 8x^3 + 9x^2 - 2$$

(35) **خاطئة؛** إجابة ممكنة: إذا لم يكن المنحنى دائرة فمن الممكن أن يقطع المماس هذا المنحنى في نقاط أخرى غير نقطة التماس، على سبيل المثال، المنحنى الذي يمثل الدالة  $y = \sin x$ .

(36) **صح،** إجابة ممكنة: بما أن  $s(t)$  دالة خطية، فإن ميلها ثابت ويساوي  $a$ ، وبذلك تكون السرعة المتجهة اللحظية للجسم تساوي  $a$  دائماً.

(37) **إجابة ممكنة:** إذا مثلت دالة المسافة التي يقطعها جسم بيانياً، فإن المماس عند نقطة القيمة العظمى (أو الصغرى) يكون أفقياً؛ أي موازياً للمحور  $x$ ، وميله يساوي صفراً. ولذلك تكون السرعة المتجهة اللحظية تساوي صفراً عند نقطة القيمة العظمى (أو الصغرى).

## مراجعة تراكمية

22 (38)

1 (39)

0 (40)

$\frac{3}{2}$  (41)

0 (42)

تدريب على اختبار:

A (43)

C (44)

C (45)



# اختبار منتصف الفصل

قدّر كل نهاية مما يأتي:

1 (1

1 (2

12 (3

0 (4

0.66 (5

2 (6

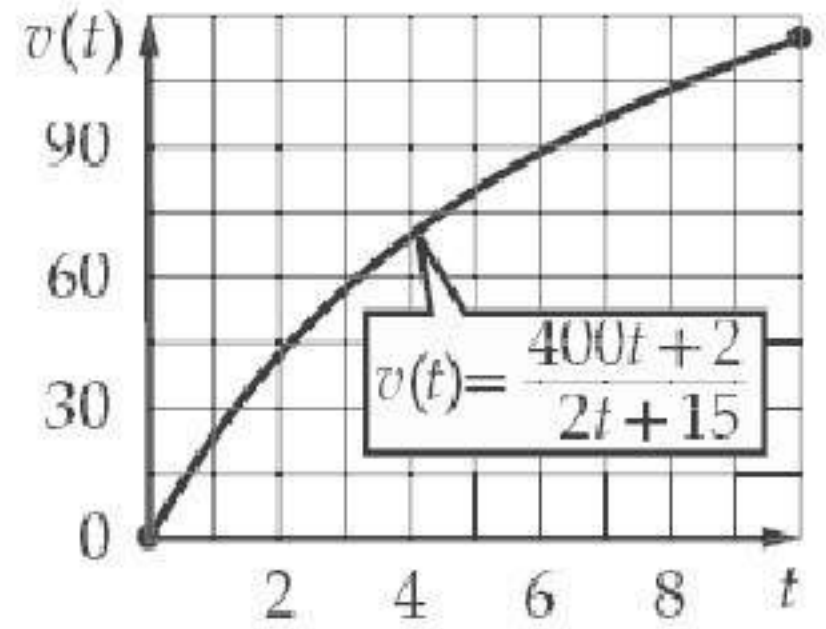
-1 (7

0.33 (8



(9)

(a)



(b) 42000, 80000, 115000 ريال

(c) 200

(d) إن قيمة التحفة لن تزيد عن 200000 ريال.

احسب كل نهاية مما يأتي بالتعويض المباشر ، إذا كان ممكناً، وإلا فاذكر السبب.

(10) ليس ممكناً؛ عندما  $x = 9$ ، فإن المقام يساوي صفراً.

(11) - 20

(12) حياة بريّة: 500 غزال

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

$$\infty \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \quad (14)$$

$$0 \quad (15)$$

$$-\infty \quad (16)$$

$$A \quad (17)$$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة:

$$1, -5 \quad (18)$$

$$-5, -5 \quad (19)$$

$$-5, 3 \quad (20)$$

(21) ألعاب نارية:

$$v(t) = -32t + 90 \text{ (a)}$$

$$74 \text{ ft/s (b)}$$

$$129.76 \text{ ft (c) تقريباً}$$

(22) اختيار من متعدد: H

تعطى المسافة التي يقطعها جسم متحرك بالأميال بعد  $t$  دقيقة بالدالة  $s(t)$ .  
أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم في كل مما يأتي بالميل لكل ساعة على الفترة الزمنية المعطاة. تذكر أن تحول الدقائق إلى ساعات.

$$42 \text{ mi/h (23)}$$

$$123 \text{ mi/h (24)}$$

$$54 \text{ mi/h (25) تقريباً}$$

$$120 \text{ mi/h (26) تقريباً}$$

أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية  $v(t)$  لجسم يعطى موقعه عند أي زمن بالعلاقة  $h(t)$  في كل مما يأتي:

$$v(t) = 8t - 9 \quad (27)$$

$$v(t) = 2 - 26t \quad (28)$$

$$v(t) = 2 - 10t \quad (29)$$

$$v(t) = 12t - 3t^2 \quad (30)$$

# المشتقة

4-4

تحقق

$$f'(x) = 12x, f'(2) = 24, f'(5) = 60 \quad (1A)$$

$$f'(x) = -10x + 2, f'(1) = -8, f'(4) = -38 \quad (1B)$$

$$j'(x) = 4x^3 \quad (2A)$$

$$k'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \quad (2B)$$

$$m'(x) = -\frac{5}{x^6} \quad (2C)$$



$$f'(x) = 10x^4 - 3x^2 \quad (3A)$$

$$g'(x) = 15x^4 + 24x^3 \quad (3B)$$

$$h'(x) = 12x^2 - 3 \quad (3C)$$

$$v(t) = 55 - 32t \quad (4)$$

(5) أقصى ارتفاع وقدره 330 ft، وذلك عند 0 s، وأدنى ارتفاع 10 ft عند 4 s.

$$h'(x) = (5x^4 + 26x)(7x^3 - 5x^2 + 18) + (x^5 + 13x^2)(21x^2 - 10x) \quad (6A)$$

$$h'(x) = (2x + 3x^2 + 1)(8x^2 + 3) + (x^2 + x^3 + x)(16x) \quad (6B)$$

$$\frac{155}{(12x + 5)^2} \quad (7A)$$

$$\frac{-12x^2 + 24}{(2x^2 + 4)^2} \quad (7B)$$

## تدرب وحل المسائل:



أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة:

$$(1) \quad f'(x) = 8x, \quad f'(2) = 16, \quad f'(-1) = -8$$

$$(2) \quad g'(t) = -2t + 2, \quad g'(5) = -8, \quad g'(3) = -4$$

$$(3) \quad m'(j) = 14, \quad m'(-7) = 14, \quad m'(-4) = 14$$

$$(4) \quad v'(n) = 10n + 9, \quad v'(7) = 79, \quad v'(2) = 29$$

$$(5) \quad r'(b) = 6b^2 - 10, \quad r'(-4) = 86, \quad r'(-3) = 44$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

$$(6) \quad y'(f) = -11$$

$$(7) \quad z'(n) = 4n + 7$$

$$g'(h) = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{h^{\frac{2}{3}}} - 3h^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$b'(m) = 2m^{-\frac{1}{3}} - 3m^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$n'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{6}{t^3} - \frac{6}{t^4} \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \quad (11)$$

$$q'(c) = 9c^8 - 15c^4 + 10c - 3 \quad (12)$$

$$p'(k) = 5.2k^{4.2} - 38.4k^{3.8} + 3 \quad (13)$$

(14) درجات الحرارة:

$$f'(h) = -0.0108h^2 - 0.02h + 2.04 \quad (a)$$

$$f'(2) \approx 1.96^\circ F, f'(14) \approx -0.36^\circ F, f'(20) \approx -2.68^\circ F \quad (b)$$



$$68.92^{\circ}F \text{ (c)}$$

استعمل الاشتقاق لإيجاد النقاط الحرجة، ثم أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لكل دالة مما يأتي على الفترة المعطاة.

15) نقطة حرجة  $(-2, -8)$  ، صغرى  $(-2, -8)$  ، عظمى  $(-5, 10)$

16) لا يوجد نقاط حرجة في الفترة  $[1, 4]$  ، صغرى  $(1, 5)$  ، عظمى  $(4, 350)$

17) نقطة حرجة  $(-5, -10)$  ، صغرى  $(-6, -11)$  ، عظمى  $(-3, -2)$

18) نقطة حرجة  $(-9, 405)$  ، صغرى  $(-11, 385)$  ، عظمى  $(-9, 405)$

19) نقطة حرجة  $(1, 1)$  ، صغرى  $(0, 0)$  ، عظمى  $(3, 9)$

20) نقطتان حرجتان  $(-3, 21.5)$  و  $(2, 0.67)$  ، صغرى  $(2, 0.67)$  ، عظمى

$$(5, 32.17)$$



(21) رياضية:

$$h'(t) = 65 - 32t \quad (a)$$

$$(b) \quad (0, 3) \text{ تقريباً}, (2.03, 69.02)$$

(c) نعم؛ أقصى ارتفاع يمكن أن تبلغه الكرة هو 69.02 ft تقريباً. وهذا أعلى من 68 ft.

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

$$f'(x) = 4(x^2 + 9) + 2x(4x + 3) \quad (22)$$

$$g'(x) = (12x^3 + 2)(5 - 3x) - 3(3x^4 + 2x) \quad (23)$$

$$s'(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t}(3t^{11} - 4t) + (\sqrt{t} + 2)(33t^{10} - 4) \quad (24)$$

$$g'(x) = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2\right) + (0.5x^4 - 3x) + (3x^3 - 3)\left(x^{\frac{3}{2}} + 2x\right) \quad (25)$$

(26)

$$'(t) = (3t^2 + 2 - 7t^6)(t^6 + 3t^4 - 22t) + (t^3 + 2t - t^7) \cdot (6t^5 + 12t^3 - 22)$$

$$q'(a) = \left( \frac{8}{9}a^{\frac{1}{8}} - \frac{1}{4}a^{-\frac{5}{4}} \right) \left( a^{\frac{5}{4}} - 13a \right) + \left( a^{\frac{9}{8}} + a^{-\frac{1}{4}} \right) \cdot \left( \frac{5}{4}a^{\frac{1}{4}} - 13 \right) \quad (27)$$

(28)

$$f'(x) = (7x^4 + 2.7)(7.3x^9 - 0.8x^5) + (1.4x^5 + 2.7x) \cdot (65.7x^8 - 4x^4)$$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$f'(m) = -\frac{12}{(3 + 2m)^2} \quad (29)$$

$$r'(t) = \frac{10t}{(3 - t^2)^2} \quad (30)$$

$$m'(q) = \frac{q^6 - 2q^4 - 8q^3 - 9q^2 - 8q}{(q^3 - 2)^2} \quad (31)$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 3x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} + 12}{2(-x^2 + 3)^2} \quad (32)$$

$$q'(r) = \frac{r^2 - 15}{r^4} \quad (33)$$

$$t'(w) = \frac{1}{2}w^{-\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}w^{\frac{5}{2}} \quad (34)$$

$$(35)$$

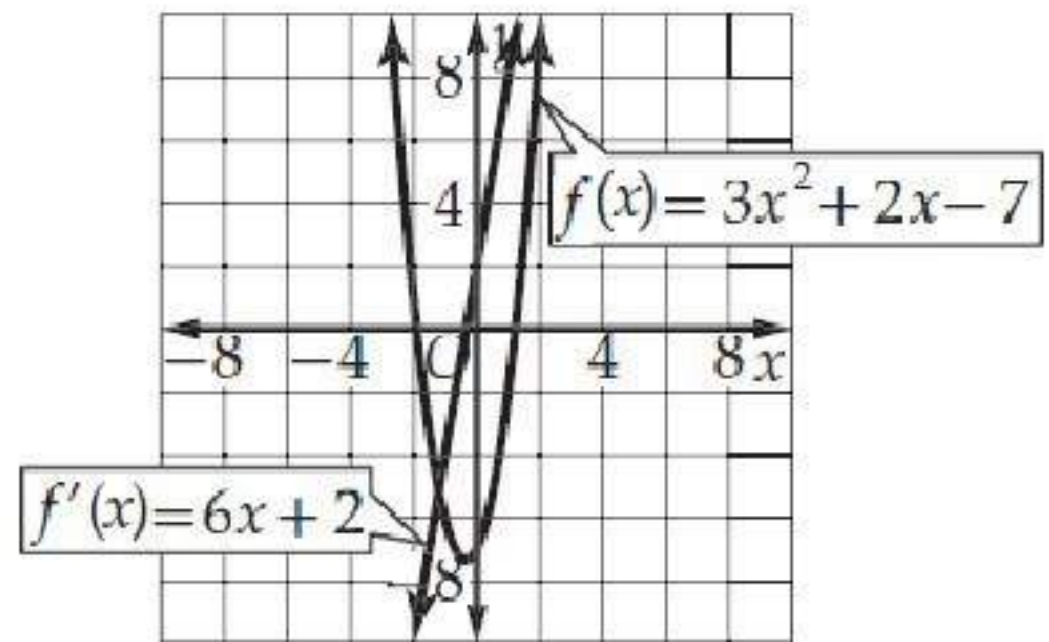
$$r(d) = d(80 - 2d) \quad (a)$$

$$r'(d) = -4d + 80 \quad (b)$$

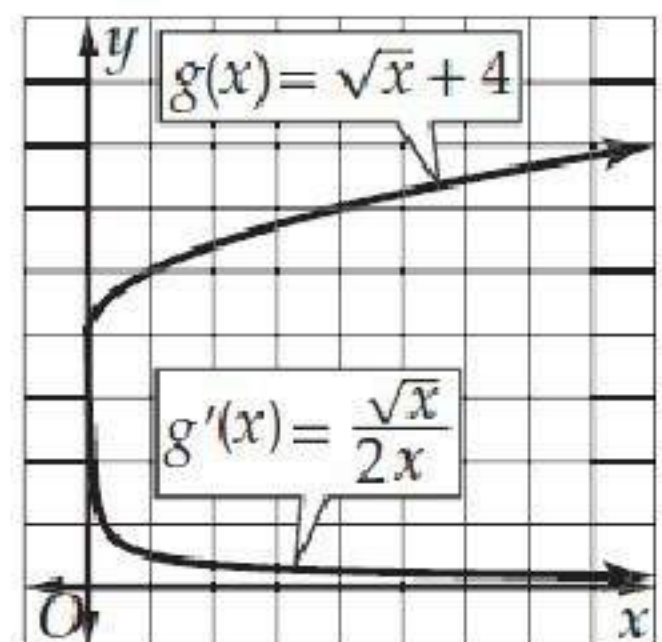
$$(c) \text{ 20 ريالاً}$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي، ثم مثل الدالة والمشتقة بيانياً على المستوى الإحداثي نفسه.

$$f'(x) = 6x + 2 \quad (36)$$

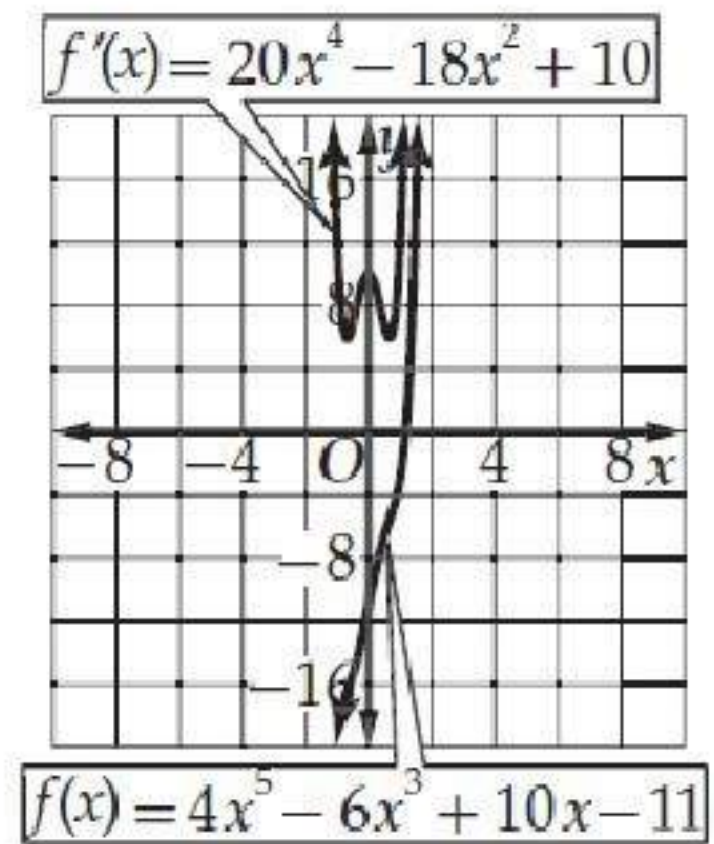


$$g'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x} \quad (37)$$

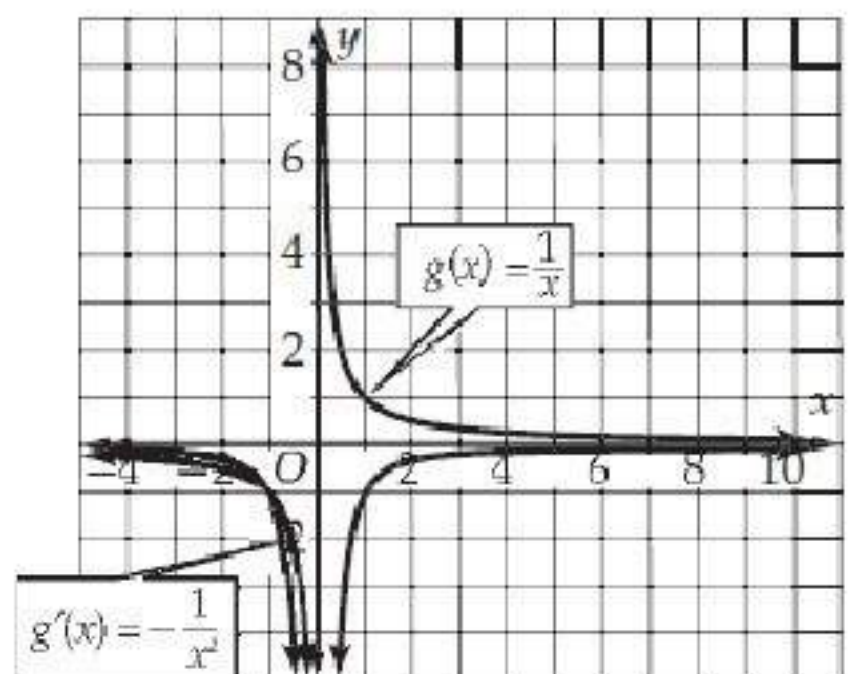




$$f'(x) = 20x^4 - 18x^2 + 10 \quad (38)$$



$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \quad (39)$$



(40)

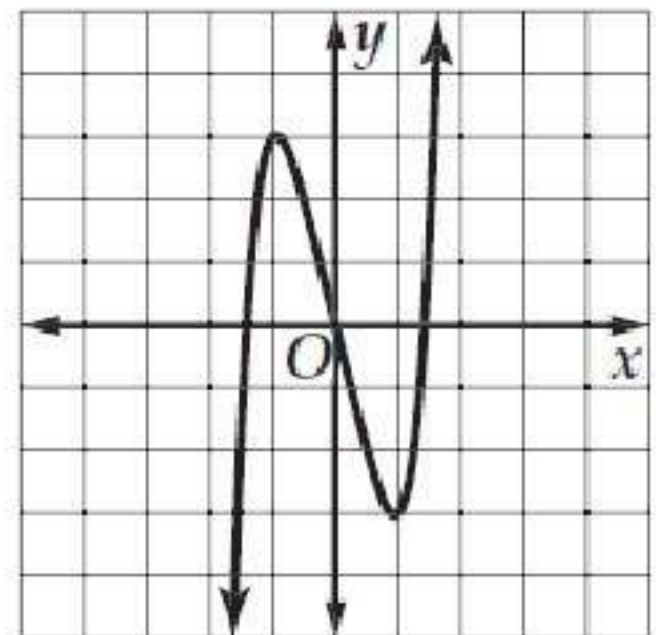
$$f''(x) = 80x^3 - 12x \quad (a)$$

$$g'''(x) = -420x^4 + 96x - 42 \quad (b)$$

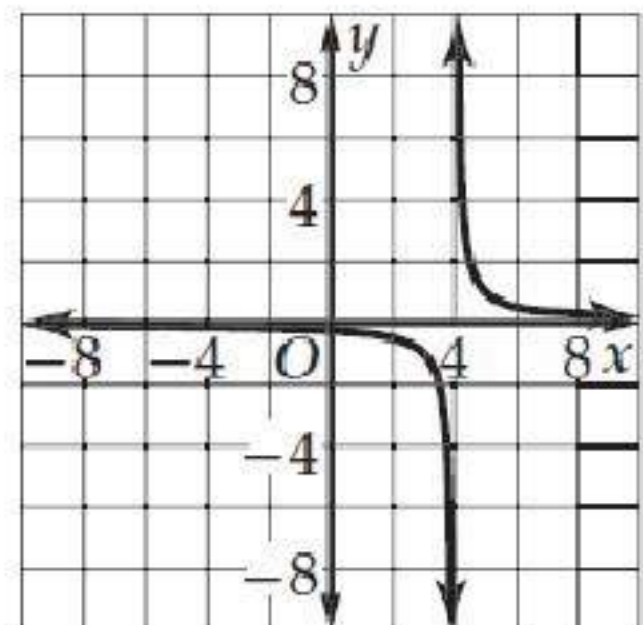
$$h^{(4)}(x) = 1080x^{-7} + 240x^{-6} \quad (c)$$

مثّل منحنى دالة لها الخصائص المعطاة في كلّ مما يأتي:

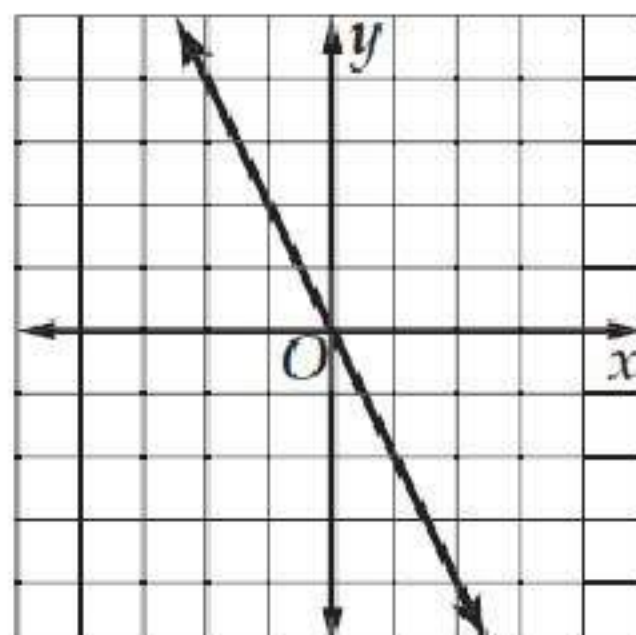
(41) إجابة ممكنة:



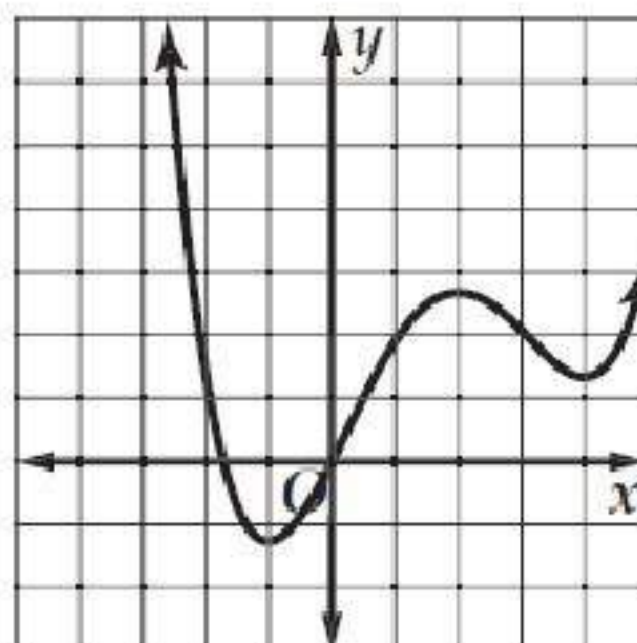
(42) إجابة ممكنة:



(43) إجابة ممكنة:



(44) إجابة ممكنة:

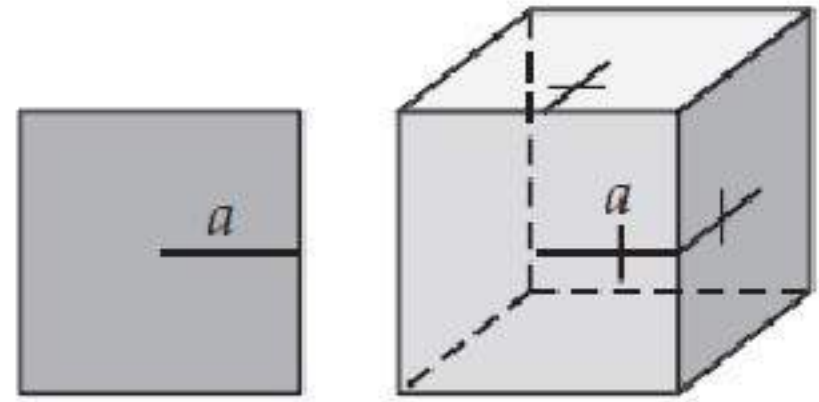


(45) تمثيلات متعددة:

$$A' = 2\pi r \text{ (a)}$$

(b) إجابة ممكنة: مشتقة صيغة مساحة الدائرة هي صيغة محيط الدائرة.

(c)



$$A = 4a^2, A' = 8a, V = 8a^3, V' = 24a^2 \text{ (d)}$$

(e) عند كتابة مساحة المربع بدلالة بعد المركز عن الأضلاع، فإن مشتقة صيغة المساحة هي محيط المربع. وعند كتابة حجم المكعب بدلالة بعد المركز عن الأوجه، فإن مشتقة صيغة الحجم هي مساحة السطح الكلية للمكعب.



## مسائل مهارات التفكير العليا:

(46) **اكتشف الخطأ:** عبد الله، إجابة ممكنة: وجد عبد الله  $f'(x) = 12x + 4$ ، ثم رُبّع الطرفين. أما أحمد فقد رُبّع الدالة الأصلية، ثم أوجد المشتقة.

(47) **نُحد:**  $f'(y) = 30x^2y^2 - 12xy - 11x^8z^7$

(48) **برهان:** إجابة ممكنة:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x) \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \left[ \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \right] + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
 \end{aligned}$$



(49) **تبرير:** صحيحة؛ إجابة ممكنة: إن قوة  $f(x)$  هي  $5n + 3$ . بحسب قاعدة مشتقة القوة، تصبح هذه القوة معامل في المشتقة. وتصبح القوة في المشتقة أقل بواحد من  $5n + 3$  أي  $(5n + 3) - 1$  أو  $5n + 2$ .

(50) **برهان:** إجابة ممكنة:

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x) - \frac{g(x+h) - g(x)}{h}f(x)}{g(x+h)g(x)} \\
 &= \frac{g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x) \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)} \\
 &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}
 \end{aligned}$$

(51) **اكتب:** إجابة ممكنة: من الممكن أن يكون لدالتين مختلفتين المشتقة نفسها؛ لأن مشتقة أي ثابت هي 0، أي أنه لأي دالتين مختلفتان باتسحاب رأسي فإن لهما المشتقة نفسها. فمثلاً للدالتين  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = x^2 + 3$  المشتقة نفسها وهي  $2x$ .

## مراجعة تراكمية

$$-3, 3 \text{ (52)}$$

$$-2, -2 \text{ (53)}$$

$$6, 12 \text{ (54)}$$

$$-8 \text{ (55)}$$

$$-\frac{1}{3} \text{ (56)}$$

$$-\frac{1}{2} \text{ (57)}$$

$$7 \text{ (58)}$$

$$3 \text{ (59)}$$

تدريپ علي اختبار:

D (60

C (61

A (62



# المساحة تحت المنحنى والتكامل

4-5

تحقق

(1) المساحة باستعمال 6 مستطيلات = 2240 وحدة مربعة،

المساحة باستعمال 8 مستطيلات = 2268 وحدة مربعة،

المساحة باستعمال 12 وحدة مستطيلة = 2288 وحدة مربعة.

(2) المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي 15.4 وحدة مربعة،

الأطراف اليسرى = 25 وحدة مربعة،

الوسط = 20.2 وحدة مربعة.

(3A) وحدة مربعة

(3B) 4.5 وحدة مربعة

(4A)  $\frac{26}{3}$  وحدات مربعة

(4B) 60 وحدة مربعة

(5) **طلاء:** لا؛ مساحة كل جزء من الجدار  $16.67 \text{ ft}^2$  تقريباً، بما أن المطلوب طلاء جزأين من الجدار، أي (16.67) 2 ، ويساوي  $33.34 \text{ ft}^2$  تقريباً.  
إذن كمية الطلاء لا تكفي.

# تدرب وحل المسائل:



قرب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة مستعملا الطرف المعطى لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عددها في كل من الأشكال أدناه:

(1) 15 وحدة مربعة تقريبا

(2) 9.25 وحدات مربعة تقريبا

(3) 14.29 وحدة مربعة تقريبا

(4) 0.65 وحدة مربعة تقريبا

(5) أرضيات:

(a) طرفا منحنى نصف الدائرة هما طرفا الفترة  $[1, 10]$  ، وباستعمال الأطراف اليسرى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة نجد أن



$$\begin{aligned}
R_1 &= 1 \cdot f(0) = (-0^2 + 10 \cdot 0)^{0.5} = 0 \\
R_2 &= 1 \cdot f(1) = (-1^2 + 10 \cdot 1)^{0.5} = 3 \\
R_3 &= 1 \cdot f(2) = (-2^2 + 10 \cdot 2)^{0.5} = 4 \\
R_4 &= 1 \cdot f(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3)^{0.5} \approx 4.58 \\
R_5 &= 1 \cdot f(4) = (-4^2 + 10 \cdot 4)^{0.5} \approx 4.90 \\
R_6 &= 1 \cdot f(5) = (-5^2 + 10 \cdot 5)^{0.5} = 5 \\
R_7 &= 1 \cdot f(6) = (-6^2 + 10 \cdot 6)^{0.5} \approx 4.90 \\
R_8 &= 1 \cdot f(7) = (-7^2 + 10 \cdot 7)^{0.5} \approx 4.58 \\
R_9 &= 1 \cdot f(8) = (-8^2 + 10 \cdot 8)^{0.5} = 4 \\
R_{10} &= 1 \cdot f(9) = (-9^2 + 10 \cdot 9)^{0.5} = 3
\end{aligned}$$

المساحة الكلية تساوي 37.96 وحدة مربعة تقريباً.

(b) في هذا الجزء من السؤال، سوف نستعمل الأطراف اليمنى لمستطيلات، والأطراف اليسرى لمستطيلات أخرى.

$$\begin{aligned}
R_1 &= 1 \cdot f(0) = (-0^2 + 10 \cdot 0)^{0.5} = 0 \\
R_2 &= 1 \cdot f(1) = (-1^2 + 10 \cdot 1)^{0.5} = 3 \\
R_3 &= 1 \cdot f(2) = (-2^2 + 10 \cdot 2)^{0.5} = 4 \\
R_4 &= 1 \cdot f(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3)^{0.5} \approx 4.58 \\
R_5 &= 1 \cdot f(4) = (-4^2 + 10 \cdot 4)^{0.5} \approx 4.90 \\
R_6 &= 1 \cdot f(6) = (-6^2 + 10 \cdot 6)^{0.5} \approx 4.90 \\
R_7 &= 1 \cdot f(7) = (-7^2 + 10 \cdot 7)^{0.5} \approx 4.58 \\
R_8 &= 1 \cdot f(8) = (-8^2 + 10 \cdot 8)^{0.5} = 4 \\
R_9 &= 1 \cdot f(9) = (-9^2 + 10 \cdot 9)^{0.5} = 3 \\
R_{10} &= 1 \cdot f(10) = (-10^2 + 10 \cdot 10)^{0.5} = 0
\end{aligned}$$

المساحة الكلية تساوي 32.96 وحدة مربعة تقريباً.



(c) 39.27 وحدة مربعة، التقريب الأول أفضل.

إجابة ممكنة: المساحة الإضافية الواقعة خارج نصف الدائرة والمحتواه في التقريب الأول تساعد على حساب مساحة المنطقة التي لم تدخل في حسابات المستطيلات. نصف القطر يساوي 5 وحدات.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} \pi 5^2 \\ &= 12.5\pi \\ &\approx 39.27 \end{aligned}$$

التقريب الأول هو الأقرب إلى المساحة الحقيقية.

إجابة ممكنة: المساحات خارج نصف الدائرة، والمحتواة داخل مستطيلات التقريب الأول تعوض المساحة داخل نصف الدائرة، وغير المحصورة بالمستطيلات.

قرب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة في كلٍ من الأشكال الآتية مستعملا الأطراف اليمنى ثم اليسرى؛ لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عرض كلٍ منها، ثم أوجد الوسط للتقريبين:

(6) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 13.5 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 10.5 وحدات مربعة، الوسط للمساحة هو 12 وحدة مربعة.

(7) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 12.75 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 12.25 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 12.5 وحدة مربعة.

(8) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 162.94 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 171.94 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 167.44 وحدة مربعة.

(9) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 18.91 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 19.66 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 19.28 وحدة مربعة.

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور  $x$  والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

(10) 84 وحدة مربعة

(11) 12 وحدة مربعة

(12)  $\frac{70}{3}$  وحدة مربعة

(13)  $\frac{32}{3}$  وحدة مربعة

(14)  $\frac{26}{3}$  وحدات مربعة

(15) 12 وحدة مربعة

(16)  $\frac{100}{3}$  وحدة مربعة



(17) 48 وحدة مربعة

(18) طباعة: 3750 ريالاً

(19)

(a) الارتفاع = 4 وحدات،

القاعدة = 4 وحدات،

المساحة = 8 وحدات مربعة.

(b) 8 وحدات مربعة

(20)  $\frac{2}{3}$  وحدة مربعة

(21) 1.75 وحدة مربعة

(22)  $\frac{52}{3}$  وحدة مربعة

(23) 12.5 وحدة مربعة

(24) 8 وحدات مربعة

(25) 0.75 وحدة مربعة

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور  $x$  ، والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

(26)  $\frac{32}{3}$  وحدات مربعة

(27) 4 وحدات مربعة

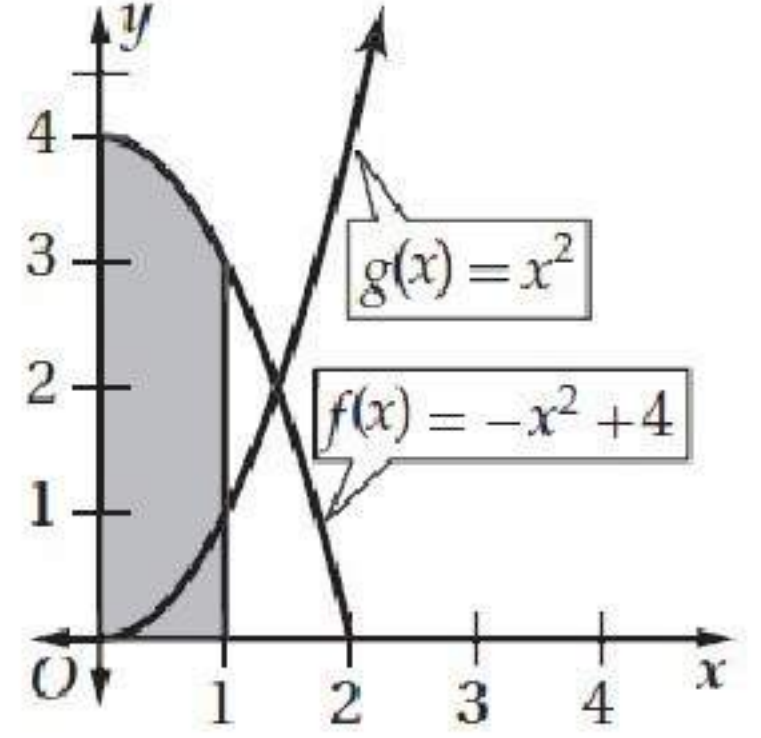
(28) 14 وحدة مربعة

(29) 3.75 وحدات مربعة



(30) تمثيلات متعددة:

(a)



$$\int_0^1 (-x^2 + 4) dx = 3\frac{2}{3} \quad (b)$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

(c) إجابة ممكنة: إذا أردنا إيجاد المساحة المحصورة بين المنحنيين، فإننا نبدأ بالتكامل

$\int_0^1 (-x^2 + 4) dx$ ، والذي يمثل المساحة الكلية بين  $f(x)$  والمحور  $x$ . وبما أننا لا نحتاج للمساحة

تحت  $g(x)$ ، لذا فإننا نطرح المساحة الناتجة عن التكامل  $\int_0^1 x^2 dx$  من  $\int_0^1 (-x^2 + 4) dx$

لنحصل على  $3\frac{1}{3}$  أو 3.33 تقريباً

$$3\frac{1}{3}, -2x^2 + 4 \quad (d)$$

(e) عند حساب المساحة المحصورة بين منحنى دالتين، بإمكاننا حساب المساحة المحصورة تحت كل منحنى، ثم نطرح المساحة الصغرى من المساحة الكبرى، أو نطرح الدالة الصغرى من الدالة الكبرى، و نحسب تكامل الدالة الناتجة.

## مسائل مهارات التفكير العليا:

**31) اكتشف الخطأ:** كلاهما خطأ؛ إجابة ممكنة: إذا كانت الدالة متزايدة، فإن استعمال الأطراف اليمنى للمستطيلات سيعطي مساحات أكبر من تلك المساحة تحت المنحنى، في حين يُعطي استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات مساحات أصغر. أما إذا كانت الدالة متناقصة، فإن استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات، سيعطي قيمة أكبر للمساحة ويُعطي استعمال الأطراف اليمنى قيمة أصغر.

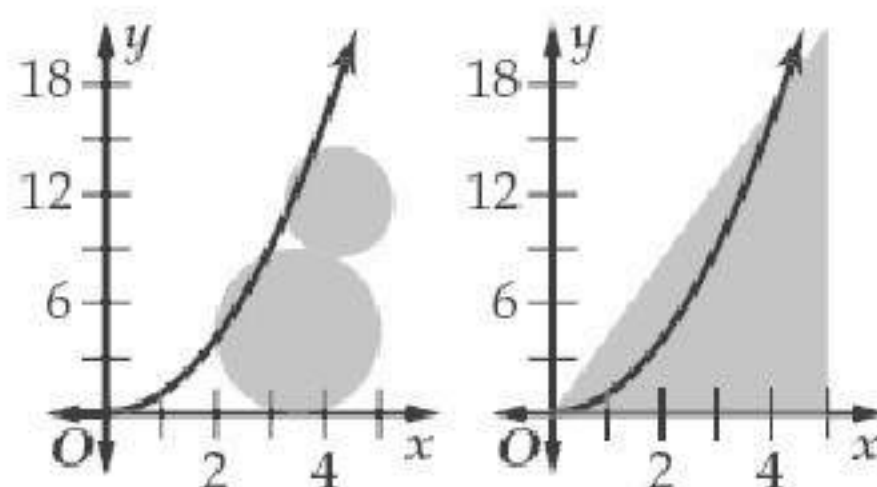
**32) تبرير:** إجابة ممكنة: يعطي التكامل مساحة كل مقطع عرضي، ونحصل على حجم النفق بضرب هذه المساحة في طول النفق.

**33) اكتب:** انظر إجابات الطلاب.

**34) تحد:**  $\frac{t^3}{3} + 2t$



**(35) اكتب:** إجابة ممكنة: يُعطي المثلث تقريباً جيداً للمساحة، وذلك اعتماداً على شكل المنحنى كما هو مبين أدناه، أما إذا كان للدالة عدة نقاط حرجة، فإنه من الصعب استعمال المثلثات، أما الدوائر فيصعب استعمالها؛ وذلك لأنها تترك مساحات واسعة خارجها؛ لذا فإن المثلثات أسهل للاستعمال عند تقريب المساحة؛ بسبب مرونة التعامل معها مقارنة مع الدوائر.





## مراجعة تراكمية

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$j'(x) = (6x^2 + 11)(2x^8 - 12x^2) + (2x^3 + 11x)(16x^7 - 24x) \quad (36)$$

$$f'(k) = (15k^{14} + 2k + 2)(k - 7k^2) + (k^{15} + k^2 + 2k)(1 - 14k) \quad (37)$$

$$s'(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t}(3t^8 - 5t) + (\sqrt{t} - 7)(24t^7 - 5) \quad (38)$$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عندما  $x = 1$ :

$$3 \quad (39)$$

$$-7 \quad (40)$$

$$1 \quad (41)$$

$$3 \quad (42)$$

(43) 1 –

(44)  $\frac{2}{9}$

تدريب على اختبار:

(45) A

(46) D

(47) D

# النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

4-6

تحقق

أوجد دالتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

(1A) إجابة ممكنة:  $x^2$  ,  $x^2 + 5$  ,  $x^2 - 7$  ,  $x^2 + 28$

(1B) إجابة ممكنة:  $x^{-3}$  ,  $x^{-3} + 33$  ,  $x^{-3} - 4$  ,  $x^{-3} + 9$

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

$$F(x) = \frac{6}{5}x^5 + C \quad (2A)$$

$$F(x) = \frac{-5}{x^2 + C} \quad (2B)$$

$$F(x) = x^8 + 3x^2 + 2x + C \quad (2C)$$

(3) سقوط حر:

$$s(t) = -16t^2 + 120 \quad (A)$$

(B) تصل المحفظة إلى سطح الأرض بعد 2.74 s.

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

$$117 \quad (4A)$$

$$46 \quad (4B)$$

احسب كل تكامل مما يأتي:

$$2x^3 + 4x^2 - 3x + C \quad (5A)$$

$$15.6 \quad (5B)$$

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

$$116.62 \text{ J} \quad (6A)$$

$$501.76 \text{ J} \quad (6B)$$



## تدرب وحل المسائل:



$$F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C \quad (1)$$

$$F(z) = \frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} + C \quad (2)$$

$$Q(r) = \frac{15}{28}r^{\frac{7}{5}} + \frac{15}{32}r^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} + C \quad (3)$$

$$W(u) = \frac{1}{9}u^6 + \frac{1}{24}u^4 + \frac{1}{5}u^2 + C \quad (4)$$

$$U(d) = \frac{3}{d^4} - \frac{5}{2d^2} - 2d^3 + 3.5d + C \quad (5)$$

$$M(t) = 4t^4 - 4t^3 + 10t^2 - 11t + C \quad (6)$$

(7) سقوط حر:

$$s(t) = -16t^2 + C \text{ (a)}$$

$$s(t) = -16t^2 + 64 \text{ (b)}$$

$$28 \text{ ft (c)}$$

احسب كل تكامل مما يأتي:

$$3m^2 + 3m^4 + C \text{ (8)}$$

$$127.5 \text{ (9)}$$

$$46.5 \text{ (10)}$$

$$7.99 \text{ (11)}$$

$$0.68t^5 - 0.3t^4 + 1.15t^2 - 5.7t + C \text{ (12)}$$

$$2w^{7.1} - 3w^{6.7} + 4w^{3.3} + 3w + C \text{ (13)}$$

(14) حشرات:

$$s(t) = -16t^2 + 34t \text{ (a)}$$

$$2.125 \text{ s (b)}$$

$$264600 \text{ ft}^2 \text{ (15)}$$

احسب كل تكامل مما يأتي:

$$12 \text{ (16)}$$

$$27 \text{ (17)}$$

$$2.5 \text{ (18)}$$

$$16.4 \text{ (19)}$$

$$28.5 \text{ (20)}$$

(21) مقذوفات:

$$237 \text{ ft (a)}$$

$$\text{(b) تقريباً } -123.16 \text{ ft/s}$$

$$-x^3 - 4x^2 + 24 \text{ (22)}$$

$$2x^5 - 4x^3 + 5x - 5775 \text{ (23)}$$

$$-92 \text{ (24)}$$

$$-3x^3 - 2x^2 - 576 \text{ (25)}$$

$$4x^8 - 5x^6 - 4x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 7x \text{ (26)}$$

$$-7x^3 + 44x + 57 \text{ (27)}$$

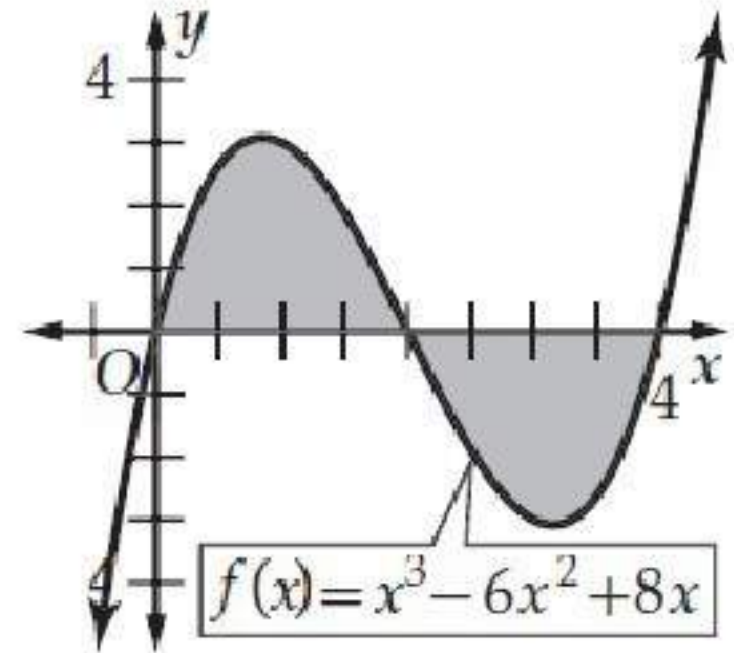
$$\text{(28) حجم الكرة: } \frac{4}{3}\pi R^3$$



(29) مساحات: 6 وحدات مربعة

(30) تمثيلات متعددة:

(a)



(b) 4, - 4

(c) إجابة ممكنة: يظهر أن المساحة فوق المحور  $x$  موجبة، والمساحة تحت المحور  $x$  هي سالب التكامل.

(d) 0, 8

(e) التكامل هو حاصل جمع التكاملين فوق وتحت المحور  $x$ .

أما المساحة الكلية فهي حاصل جمع القيم المطلقة للتكاملين.

## مسائل مهارات التفكير العليا:

(31) تحد:  $\frac{1}{2}\pi r^2$

تبرير: حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً.  
برر إجابتك:

(32) أحياناً؛ إجابة ممكنة: يؤدي تغيير ترتيب حدود التكامل إلى تغيير إشارته ما لم تكن قيمة التكامل صفراً.

(33) أحياناً؛ إجابة ممكنة: إذا كانت  $f(x)$  دالة زوجية، فإن العبارة تكون صحيحة دائماً.

(34) أحياناً؛ إجابة ممكنة: إذا كان  $f(x)$  دالة زوجية وكل من  $a, b$  سالباً.

(35)

$$\int_a^b (n + m) dx = \int_a^b n dx + \int_a^b m dx$$

$$nx + mx \Big|_a^b = nx \Big|_a^b + mx \Big|_a^b$$

$$(nb + mb) - (na + ma) = (nb - na) + (mb - ma)$$
$$nb + mb - na - ma = nb + mb - na - ma$$

**(36)** بما أن التمثيل البياني للدالة  $f(x)$  يقع تحت المحور  $x$ ، فإن إشارة  $f(x)$  سالبة. وبما أن  $f(x)$

سالبة و  $\Delta x$  موجبة، فإن كل حد في  $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$  سالب.

وعليه فإن المجموع سالب؛ لأن  $\int_a^b f(x) dx$  هو نهاية مجاميع سالبة، لذا يكون سالباً.

**(37)** إجابة ممكنة: إذا احتوت الدالة  $F(x)$  على الثابت  $C$ ، فإنه سيظهر في كل من  $F(a)$  و  $F(b)$  ولأننا نطرح هاتين القيمتين، فإن  $C$  تحذف.



## مراجعة تراكمية

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور  $x$  ، والمعطاة بالتكامل في كل مما يأتي:

512 (38)

30 (39)

استعمل قاعدة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$\frac{8k^{11} + 55k^{10} + 42k^4 + 154k^3}{(2k^4 + 11k^3)^2} \quad (40)$$

$$\frac{2n^4 + 2n^2 + 4}{(n^2 + 1)^2} \quad (41)$$

$$a = 6 \quad (42)$$



أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

$$m = 2x \quad (43)$$

$$m = 3x^2 \quad (44)$$

تدريب على اختبار:

$$C \quad (45)$$

# دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك:

(1) معدل التغير اللحظي

(2) التكامل المحدد

(3) التعويض المباشر

(4) دالة أصلية

(5) الصيغة غير المحددة

(6) الاشتقاق

(7) المؤثر التفاضلي

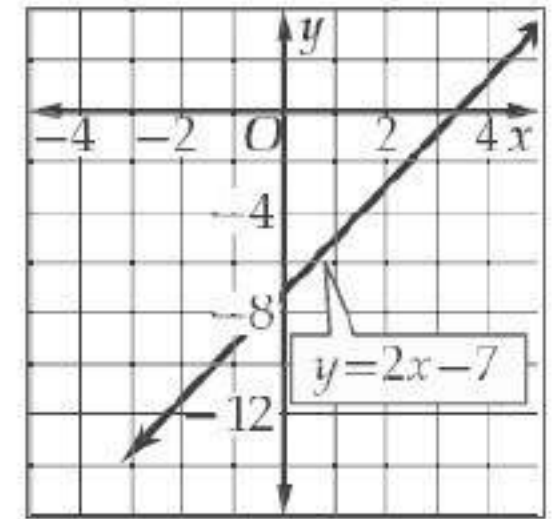
(8) السرعة المتجهة اللحظية

## مراجعة الدروس:

### 1 - 4: تقدير النهايات بيانياً:

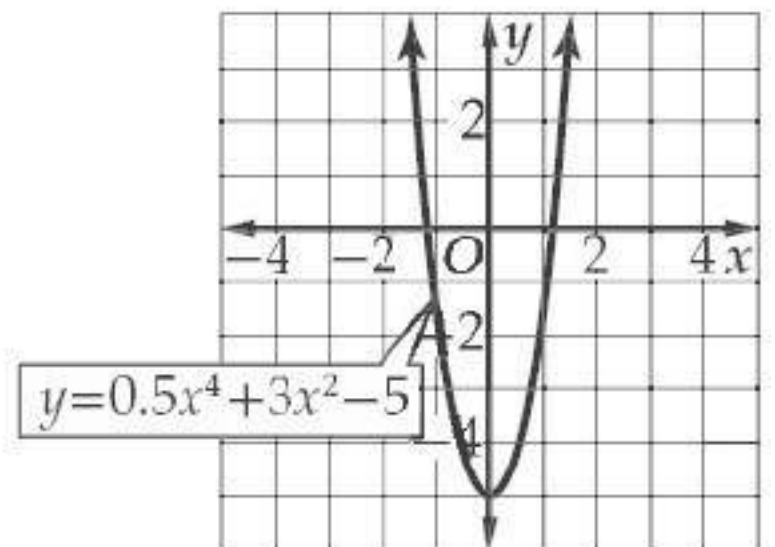
قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك باستعمال جدول قيم:

(9) - 1



$x$	2.99	2.999	3	3.001	3.01
$f(x)$	-1.02	-1.002		-0.998	-0.998

(10) - 1.5



$x$	0.99	0.999	1	1.001	1.001
$f(x)$	-1.579	-1.508		-1.499	-1.492



قدّر كل نهاية مما يأتي:

(11) 5

(12) غير موجودة

(13)  $\infty$

(14) غير موجودة

2 - 4 : حساب النهايات جبرياً:

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

(15) 9

(16) 19

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكناً، وإلا فاذكر السبب.

(17) ليس ممكناً؛ فالمقام يساوي صفراً عند  $x = 25$ .

(18) - 17

احسب كل نهاية مما يأتي:

(19)  $-\frac{1}{6}$

(20)  $-\infty$

3 - 4: المماس والسرعة المتجهة:

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة :

$$(21) -1, -1$$

$$(22) 0, -2$$

$$(23) m = -2x + 3$$

$$(24) m = 3x^2 + 4$$

تمثل  $s(t)$  في كل مما يأتي موقع جسم بالأقدام بعد  $t$  ثانية . أوجد سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند الزمن المعطى:

$$(25) v(0.5) = -1 \text{ ft/s}$$

$$(26) v(3.5) = -147 \text{ ft/s}$$

$$(27) v(t) = 24t$$

$$(28) v(t) = -4t + 3$$

#### 4 - 4 : المشتقات :

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي باستعمال النهايات ، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة.

$$g'(t) = -2t + 5, g'(-4) = 13, g'(-1) = 3 \quad (29)$$

$$m'(j) = 10; m'(5) = 10, m'(-3) = 10 \quad (30)$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$p'(v) = -9 \quad (31)$$

$$z'(n) = 8n + 9 \quad (32)$$

$$t'(x) = -\frac{18}{5}x^{\frac{1}{5}} \quad (33)$$

$$g'(h) = 3h^{\frac{1}{4}} - 4h^{-\frac{1}{2}} \quad (34)$$



استعمل قاعدة مشتقة القسمة؛ لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$f'(m) = \frac{-25}{(5+2m)^2} \quad (35)$$

$$m'(q) = \frac{4q^5 - 96q^3 + 6q}{(q^2 - 12)^2} \quad (36)$$

#### 5 - 4 : المساحة تحت المنحنى والتكامل:

قرب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى كل دالة مما يأتي باستعمال الأطراف اليمنى و  
5 مستطيلات:

(37) 5.16 وحدة مربعة

(38) 11.28 وحدة مربعة

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور  $x$  ، والمعطى  
بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

(39) 4.67 وحدات مربعة تقريباً

(40) 37.5 وحدة مربعة تقريباً

(41) 4.67 وحدات مربعة تقريباً

(42) 55.5 وحدة مربعة تقريباً

6-4: النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل:

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

$$G(n) = \frac{5}{2}n^2 - 2n + C \quad (43)$$

$$R(q) = -q^3 + \frac{9}{2}q^2 - 2q + C \quad (44)$$

$$M(t) = \frac{3}{2}t^4 - 4t^3 + t^2 - 11t + C \quad (45)$$

$$p(h) = h^7 + \frac{2}{3}h^6 - 3h^4 - 4h + C \quad (46)$$

احسب كل تكامل مما يأتي:

$$\frac{8}{3}x^3 + C \quad (47)$$

$$\frac{2}{3}x^3 - 4x + C \quad (48)$$

$$2466.53 \text{ وحدة مربعة} \quad (49)$$

**(50) 3294 وحدة مربعة**



## تطبيقات ومسائل:

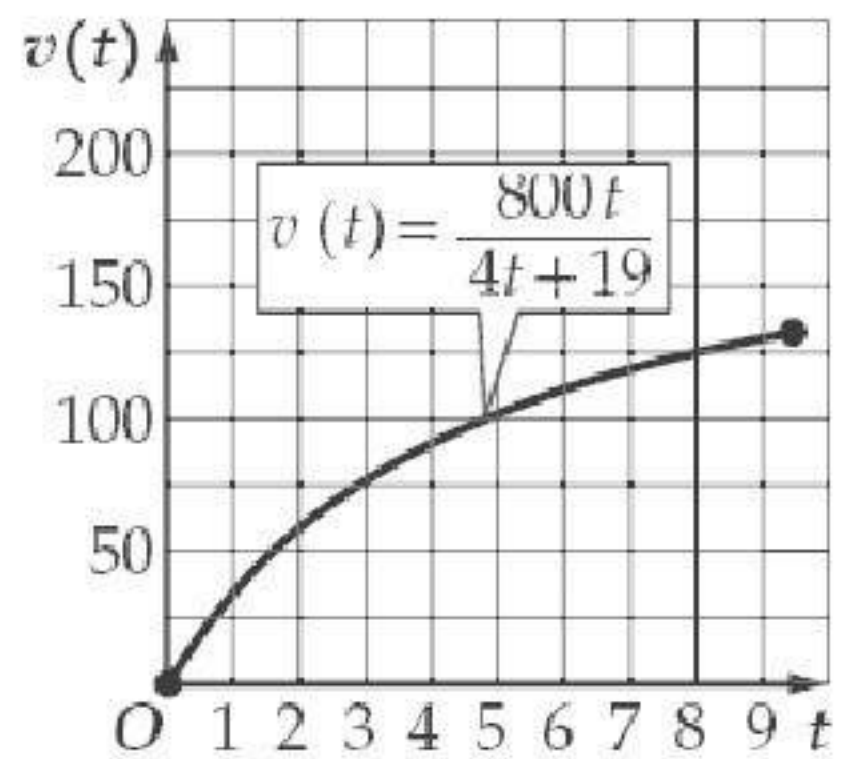
(51) حيوانات:

(a) 2966 حيواناً

(b) 800

(52) تحف فنية:

(a)



(b) 7674, 11114, 13524

(c) 20000

(d) لن تزيد قيمة التحفة عن 20000 ريال.

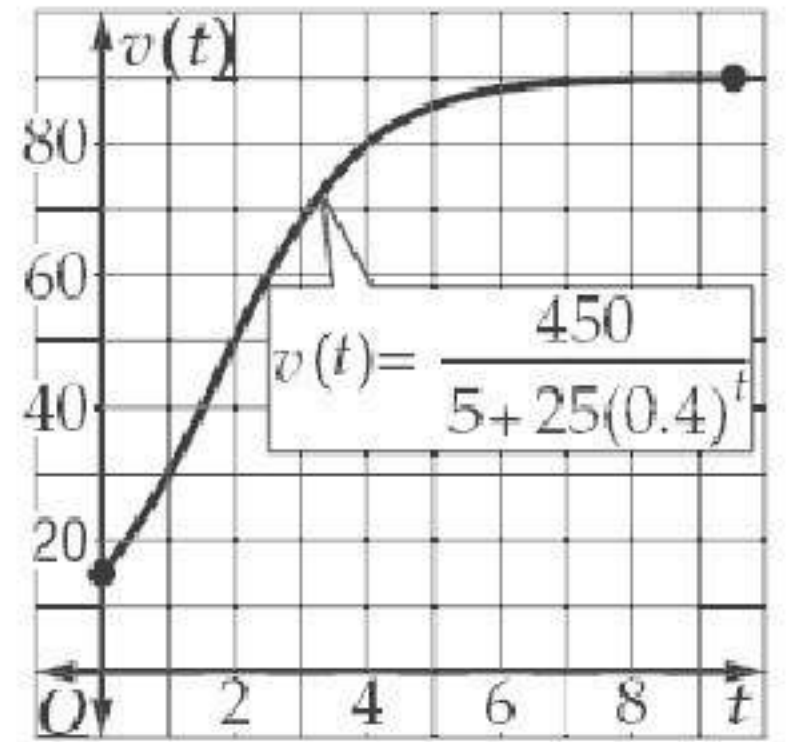
(e) نعم؛ العرض أفضل من قيمة التحفة.

**(53) مبيعات:**

(a)

$t$	0	1	2	3
$v$	15	30	50	68.2

(b)



**(c) 90**

(d) إجابة ممكنة: أقصى سعر يمكن أن تصله السلعة هو 90 ريالاً.

**(54) صواريخ:**

$$-32t + 150 \text{ (a)}$$

$$102 \text{ ft/s (b)}$$

$$\approx 4.69 \text{ s (c)}$$

$$\approx 359.8 \text{ ft (d)}$$

**(55) رماية:**

$$-32t + 35 \text{ (a)}$$

$$19 \text{ ft/s (b)}$$

$$\approx 1.09 \text{ s (c)}$$

$$\approx 20.64 \text{ ft (d)}$$

(56) تصميم:  $607.5 \text{ in}^2$

(57) ضفادع:

$$s(t) = -16t^2 + 26t \text{ (a)}$$

$$1.63 \text{ s (b)}$$

(58) طيور:

$$s(t) = -16t^2 + 20 \text{ (a)}$$

$$1.12 \text{ s (b)}$$



# اختبار الفصل

قدر كل نهاية مما يأتي:

(1) 6 –

(2) 8

(3) غير موجودة

(4)  $\infty$

(5) إلكترونيات:

(a) 100

(b) إجابة ممكنة: رغم تقلب متوسط تكلفة الجهاز الإلكتروني، إلا أن متوسط التكلفة سيقترّب من 100 ريال لكل جهاز.

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكناً، وإلا فذكر السبب:

(6) 25 –

(7) 1353

(8) ناد رياضي:

(a) 4

(b) 200

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

(9)  $\infty$

(10)  $\infty$

(11) 0

(12) 0

(13) اختيار من متعدد: A

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة:

$$(14) -8, -2$$

$$(15) -12, -\frac{3}{4}$$

$$(16) -20, 4$$

أوجد السرعة المتجهة اللحظية  $v(t)$  لجسم يعطى موقعه عند أي زمن بالدالة  $h(t)$  في كل مما يأتي:

$$(17) h(t) = 9 + 6t$$

$$(18) v(t) = 20t - 21t^2$$

$$(19) v(t) = 9t^2 + 4$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$(20) f'(x) = -3$$

$$b'(c) = \frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{16}{3c^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{c^{\frac{1}{5}}} \quad (21)$$

$$w'(y) = 4y^{\frac{1}{3}} + 3y^{-\frac{1}{2}} \quad (22)$$

$$g'(x) = 6x^2 - 10x - 8 \quad (23)$$

$$h'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2} \quad (24)$$

(25) صناعة:

$$C(x) = 15x - 0.0025x^2 \quad (a)$$

(b) 3125 ريالاً

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور  $x$ ، والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

(26) 10.5 وحدات مربعة تقريباً

(27) 65050 وحدة مربعة تقريباً



(28) 156 وحدة مربعة تقريباً

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

$$D(a) = a^4 + 3a^3 - a^2 + 8a + C \quad (29)$$

$$W(z) = \frac{3}{20}z^5 + \frac{1}{18}z^3 - \frac{2}{5}z + C \quad (30)$$

احسب كل تكامل مما يأتي:

$$\frac{5}{4}x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + C \quad (31)$$

(32) 45

(33) مساحات: C