التهيئة

-

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الاتية ثم أوجد احداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما:

1) $3, \left(-1, \frac{4}{2}\right)$

2) $5, \left(-5, \frac{11}{2}\right)$

3) $\sqrt{29}, \left(-1, -\frac{8}{2}\right)$

4) $\sqrt{53}, \left(-5, -\frac{9}{2}\right)$

أوجد قيمة x في كل مما يأتي مقربا الناتج إلى أقرب عشر:

5) 5.4

6) 11.1

7) 4.0

8) 36.1

9) بالون

22.8 ft

1-1 مقدمة في المتجهات

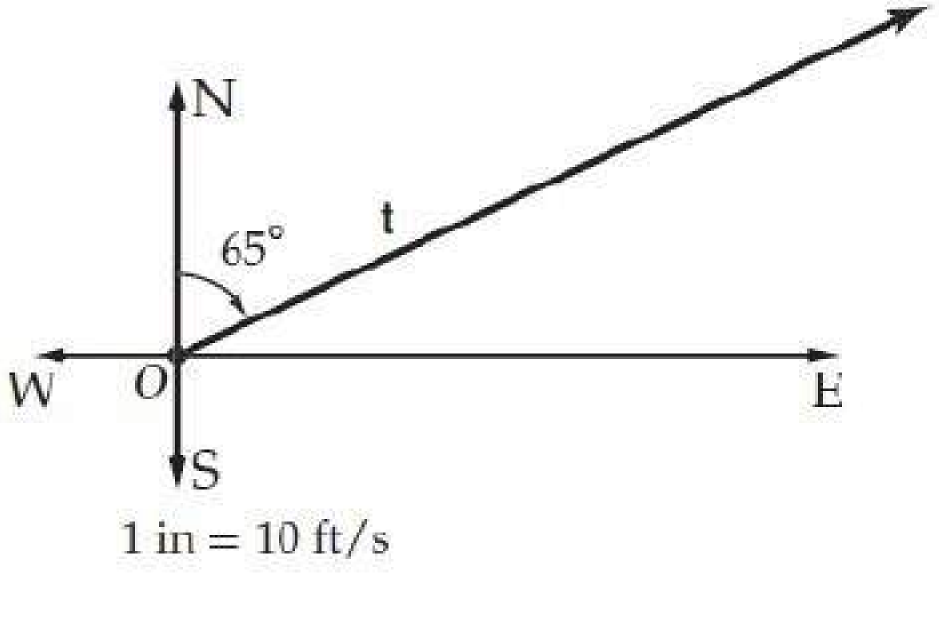
تحقق

1A) كمية متجهة

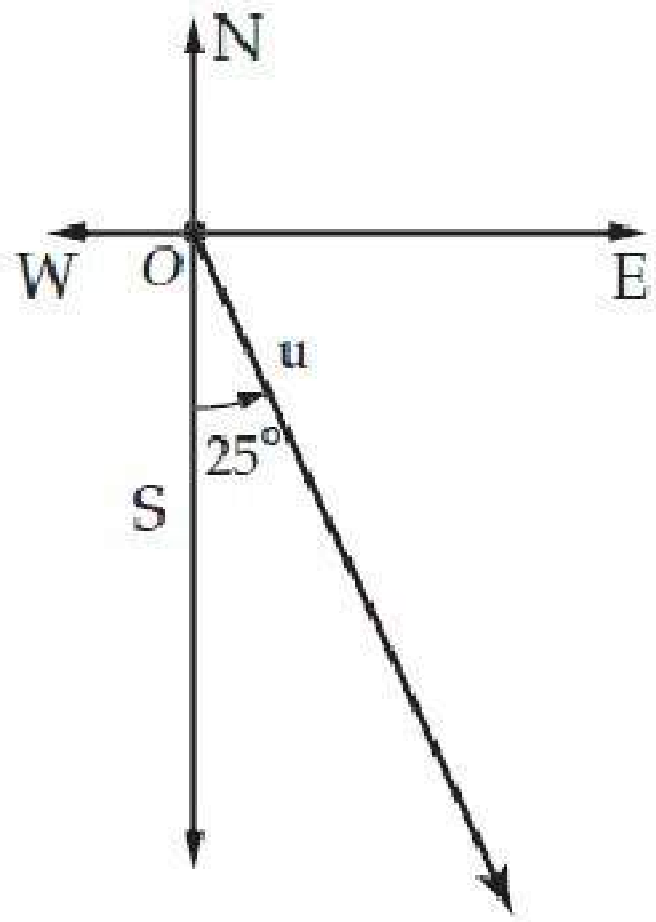
1B) كمية متجهة

1C) كمية قياسية

$1 in = 10 ft / s$ (2A

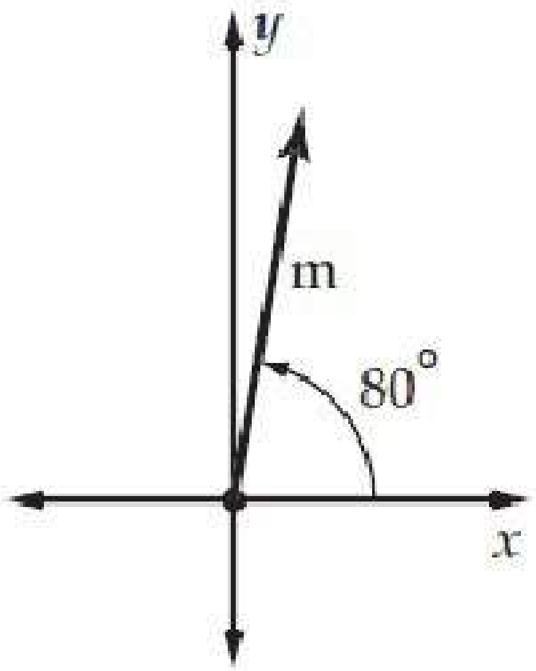


$1\,\text{in} = 10\,\text{mi}/\text{h}$ (2B



1 in = 10 mi/h

$1\,\text{cm} = 30\,\text{N}$ (2C



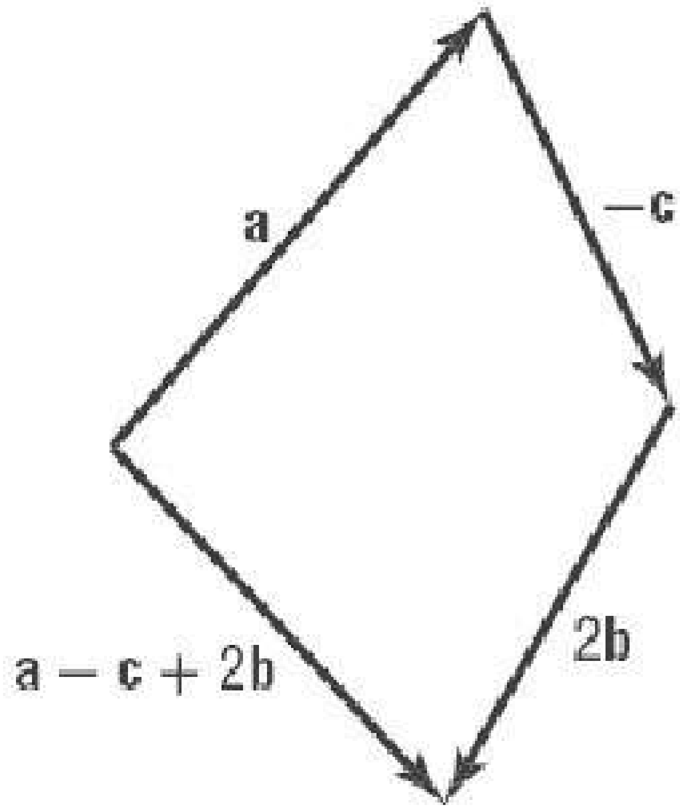
1 cm = 30 N

3 cm; 61° (3A

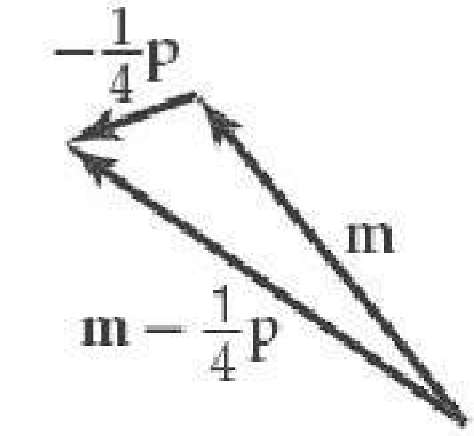
3 cm; 25° (3B

7.1 in/s; 343° :لعبة اطفال (3C

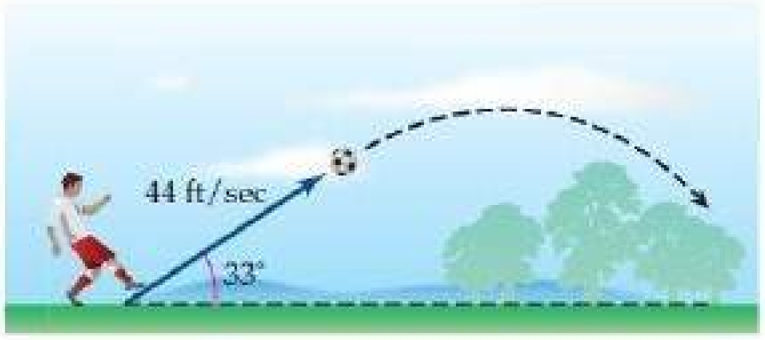
(4A



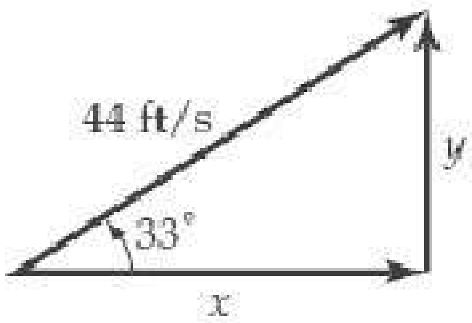
(4B



(6



(A



B) المركبة الأفقية تساوي تقريباً 36.90 ft/ s؛ المركبة الرأسية تساوي تقريباً 23.96 ft/ s.

تدرب وحل المسائل:

حدد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كل مما يأتي:

1) قياسية

2) قياسية

3) متجهة

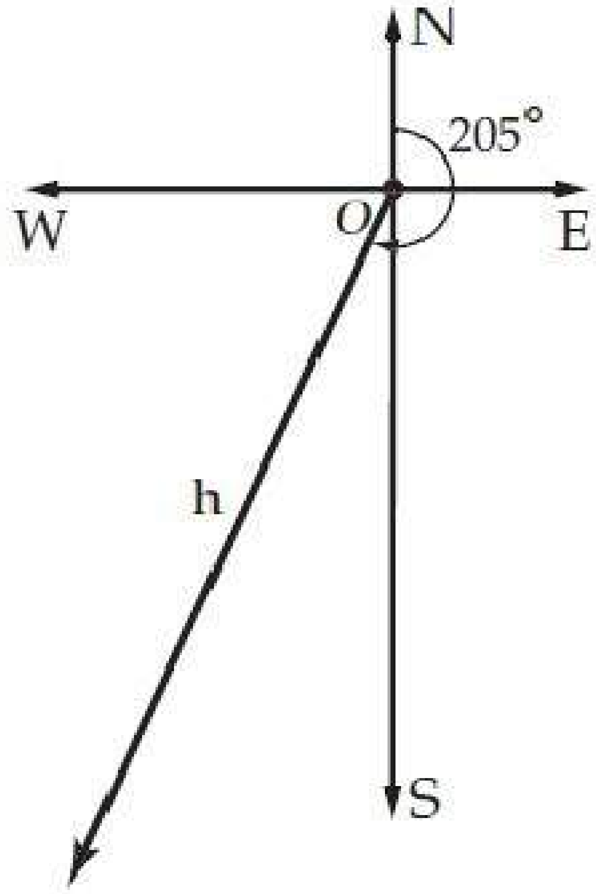
4) قياسية

5) متجهة

6) متجهة

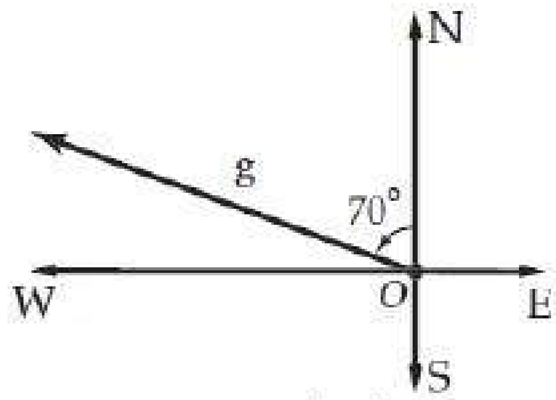
استعمل المسطرة والمنقلة لرسم متجه لكل من الكميات الاتية. واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

7) $1cm = 3in/s$



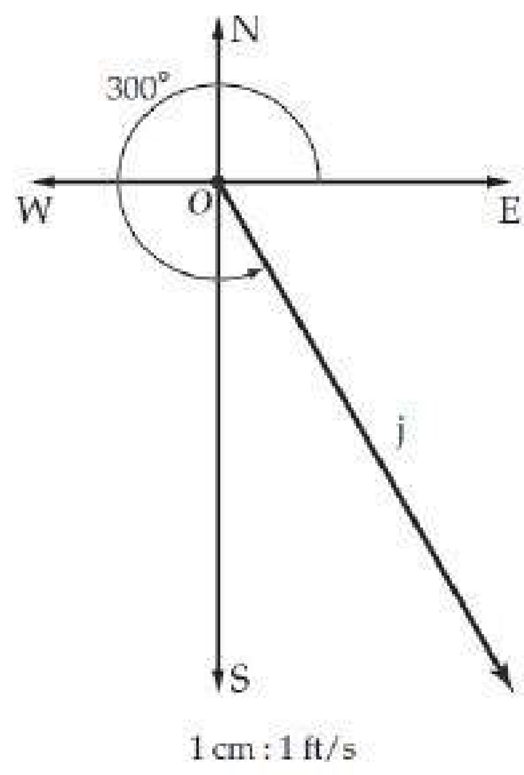
1 cm : 3 in/s

8) $1cm = 2km/h$

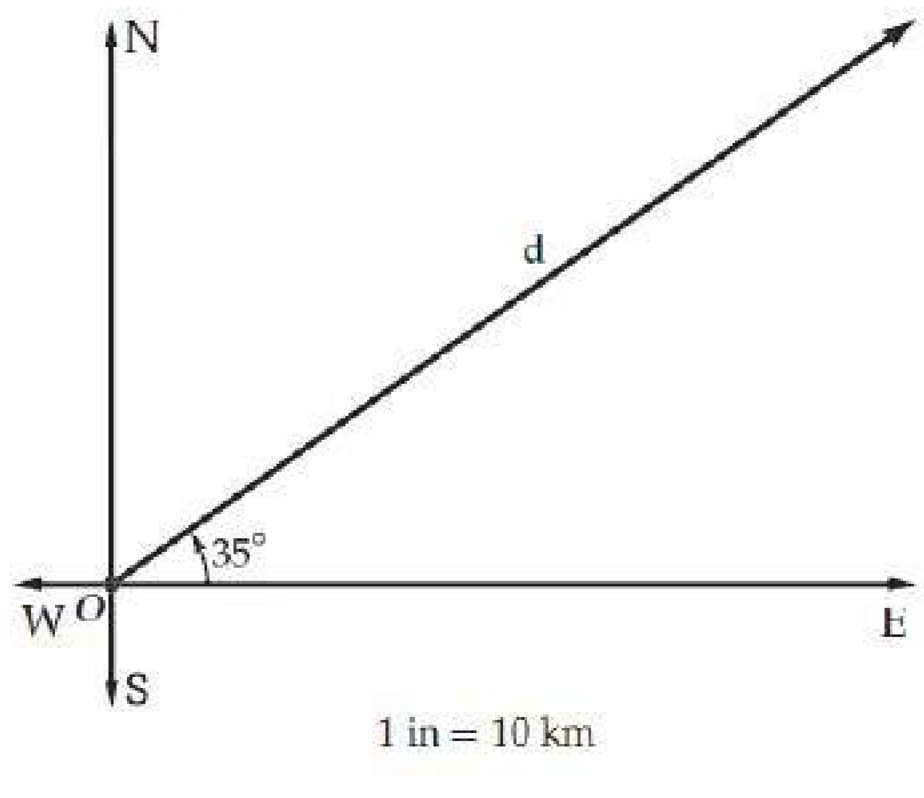


1 cm : 2 km/h

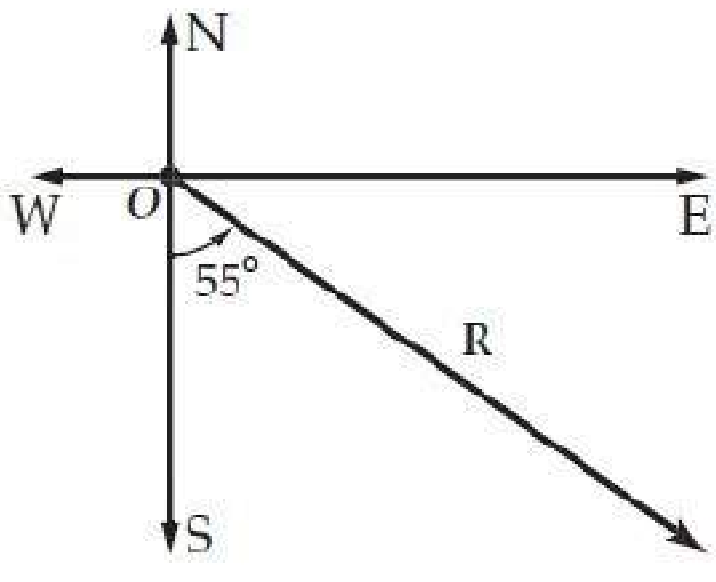
1cm = 1ft / s (9



1in = 10 km (10

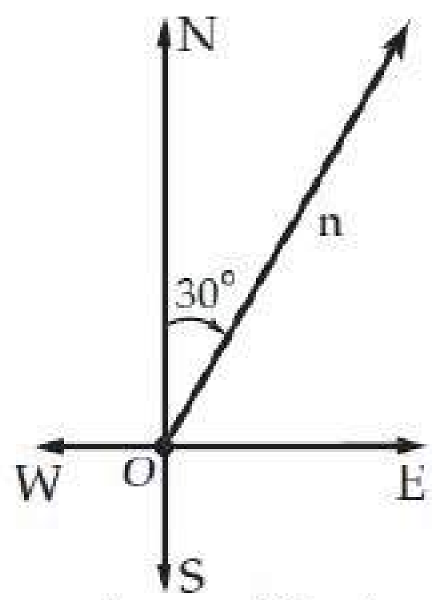


$1cm = 10\ m$ (11



1 cm = 10 m

$1cm = 10\ m/s$ (12



1 cm = 10 m/s

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث أو قاعدة متوازي الأضلاع،
قرب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي
مستعملاً المسطرة والمنقلة:

1.4 cm, 45° (13

1.0 cm, 58° (14

1.1 cm, 308° (15

16) $2.3\ cm, 188^\circ$

17) 20 ميلاً بحرياً، $N\ 11.7^\circ\ W$

حدد مقدار المحصلة الناتجة من جمع المتجهين واتجاهها في كل مما يأتي:

18) 2N للخلف

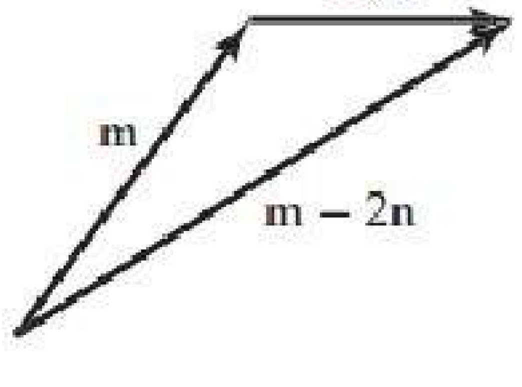
19) 250 m للجنوب

20) 23.35 mi باتجاه $S\ 47^\circ\ E$

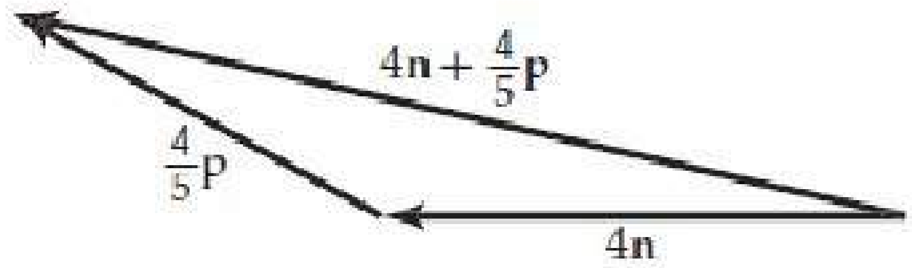
21) $8.15\ m/s^2$، 23° مع الأفقي.

استعمل المتجهات الاتية لرسم متجه يمثل كل عبارة مما يأتي:

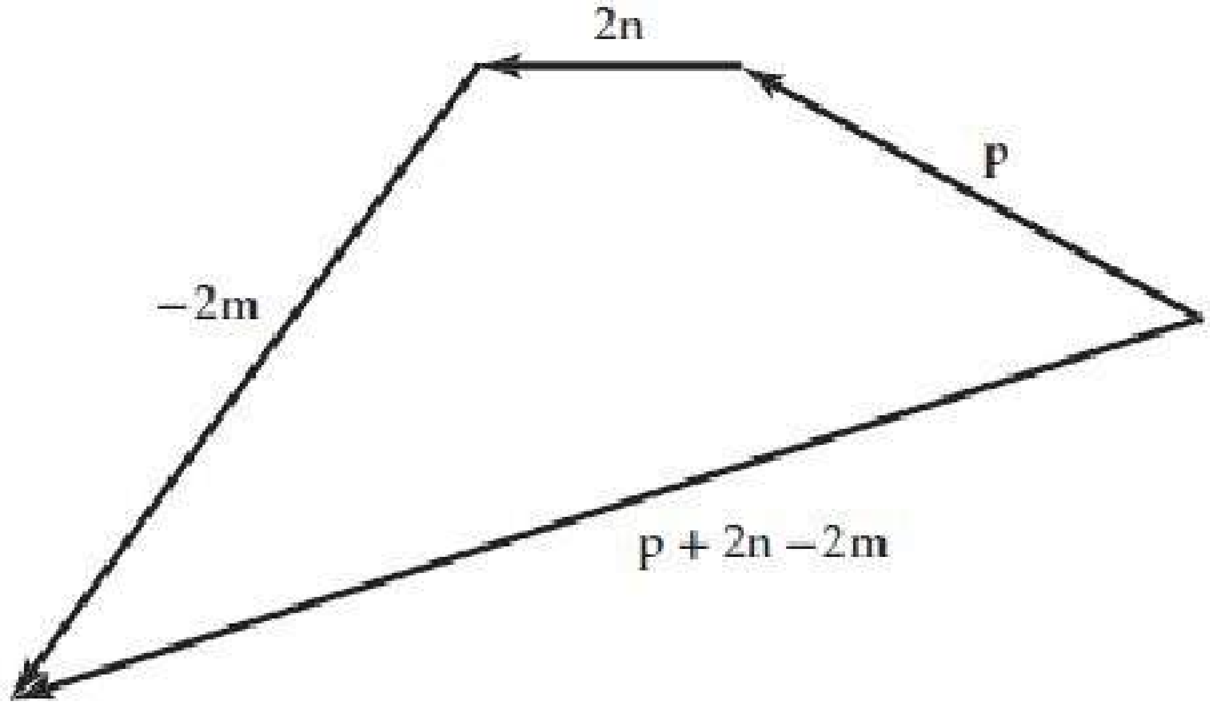
22)



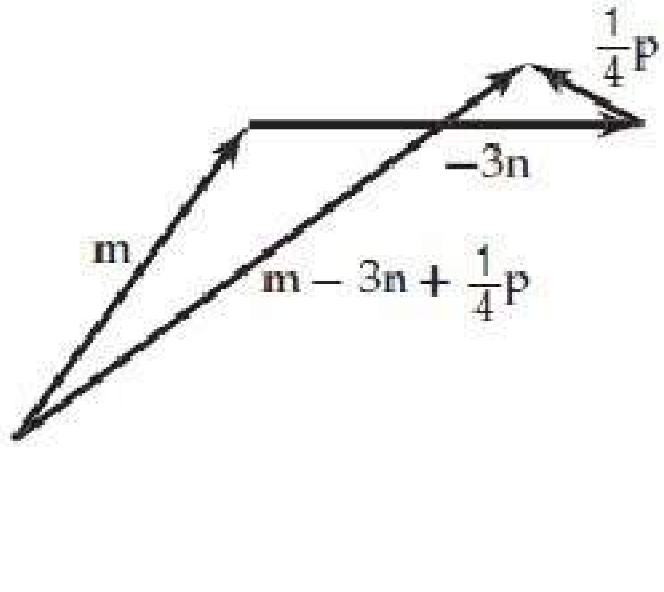
(23


$4\mathbf{n} + \frac{4}{5}\mathbf{p}$
$\frac{4}{5}\mathbf{p}$
$4\mathbf{n}$

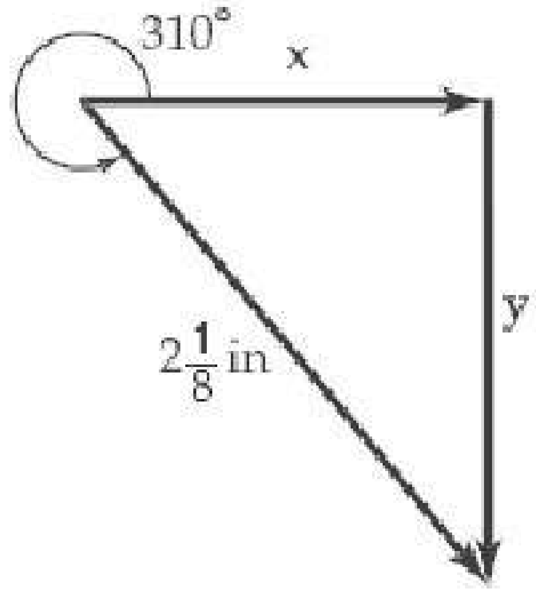
(24


$2\mathbf{n}$
$\mathbf{p}$
$-2\mathbf{m}$
$\mathbf{p} + 2\mathbf{n} - 2\mathbf{m}$

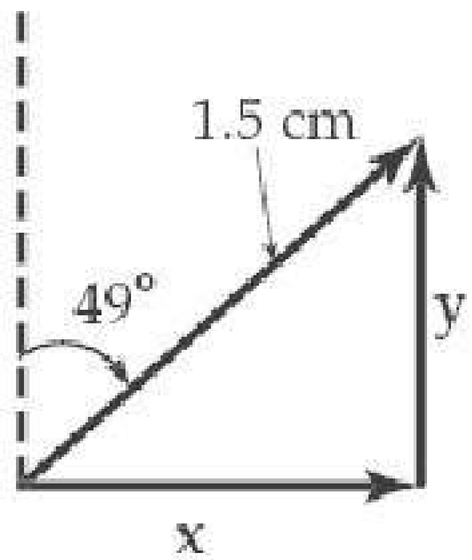
(25


$\frac{1}{4}\mathbf{p}$
$-3\mathbf{n}$
$\mathbf{m}$
$\mathbf{m} - 3\mathbf{n} + \frac{1}{4}\mathbf{p}$

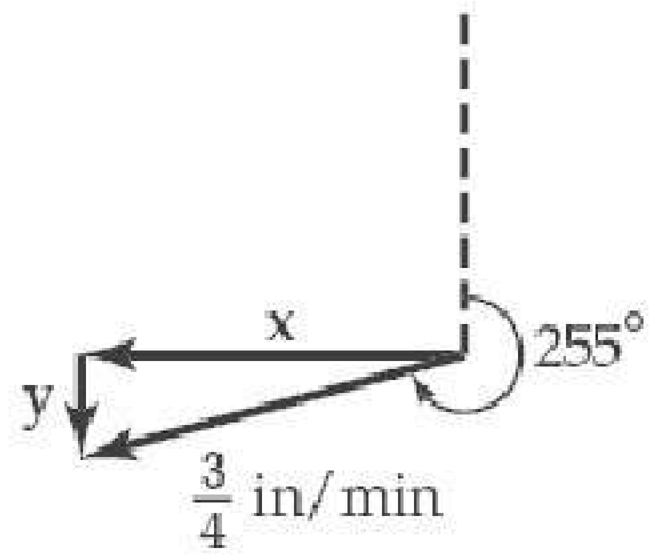
1.37 in/ s, 1.63 in/ s (26



1.13 cm, 0.98 cm (27

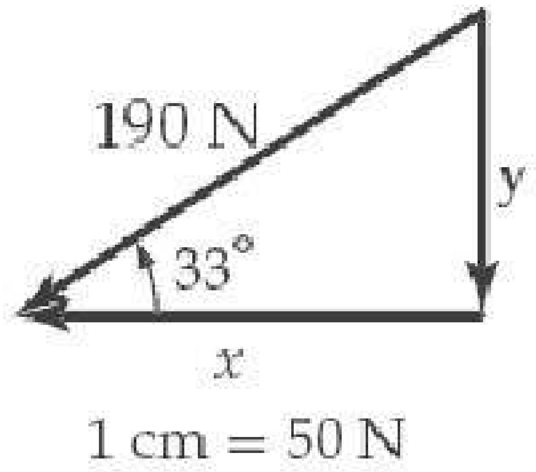


0.72 in/ min, 0.19 in/ min (28



29) تنظيف:

(a

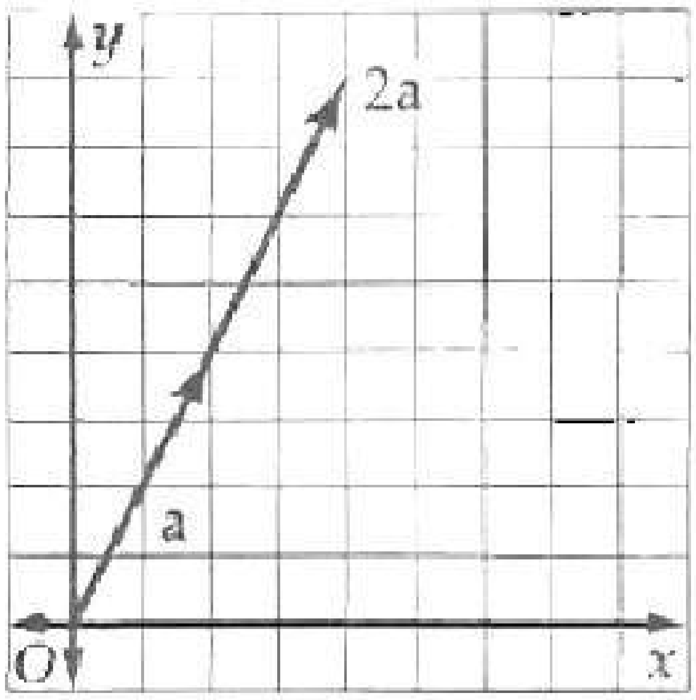


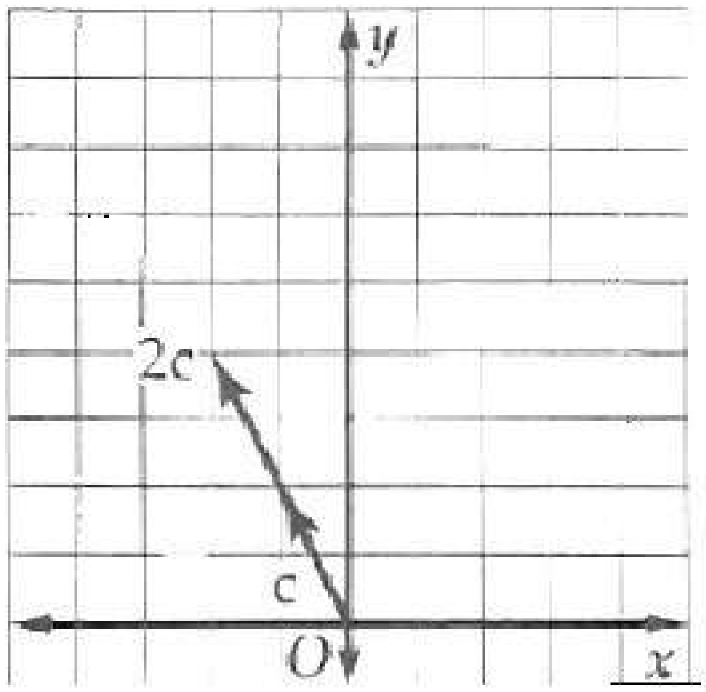
b) المركبة الأفقية: N 159.3، والمركبة الرأسية: N 103.5

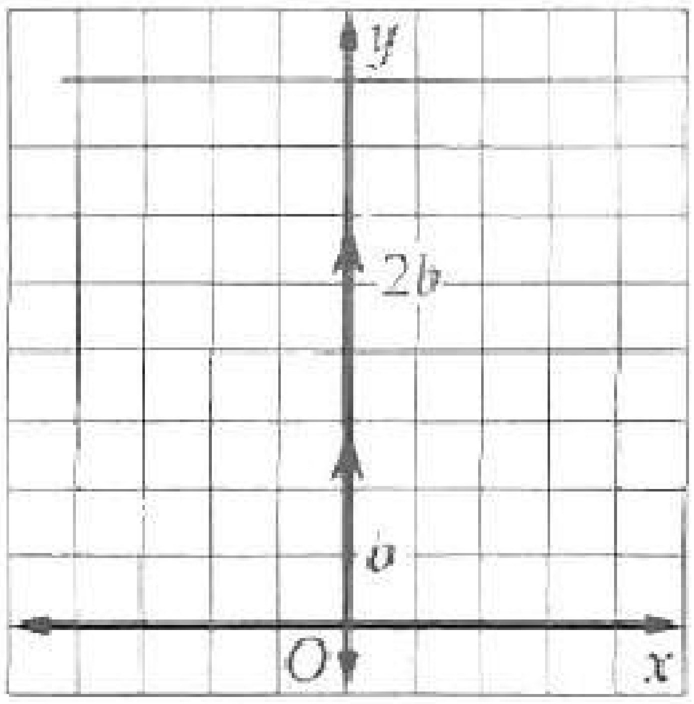
30) N 52 تقريباً

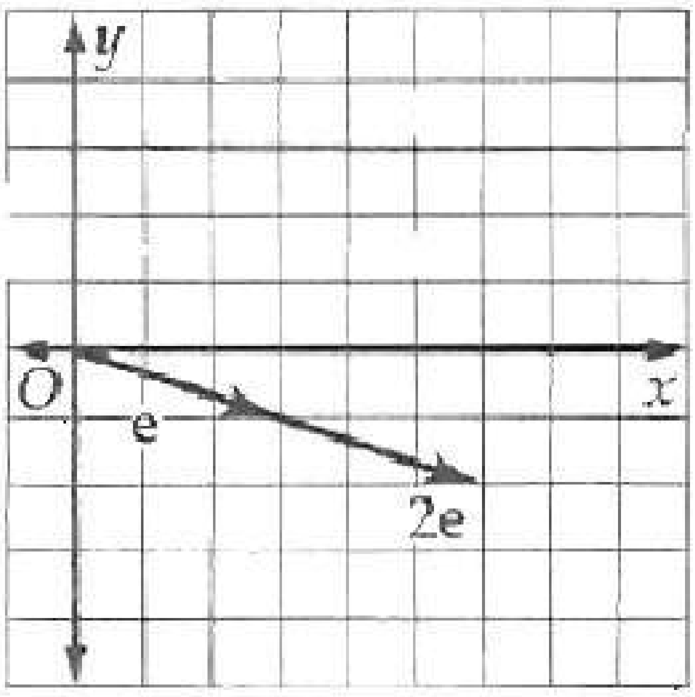
31) تمثيلات متعددة:

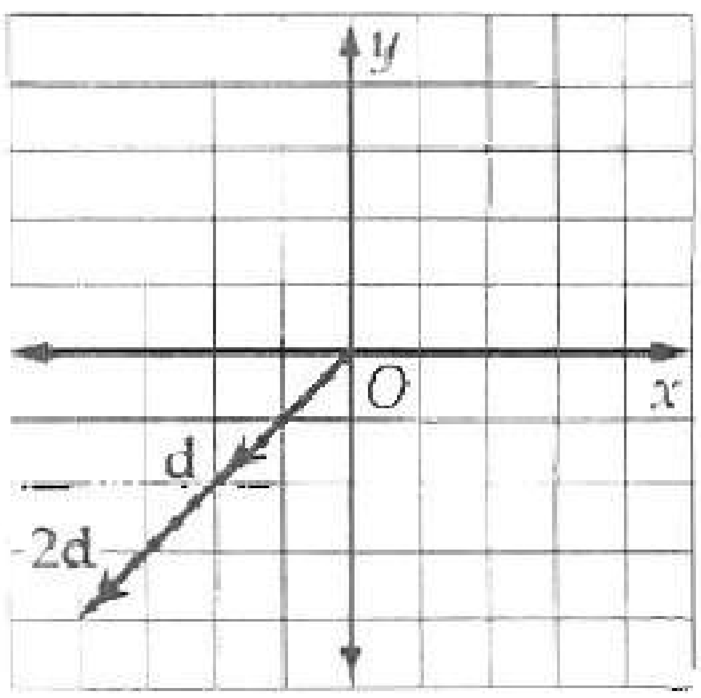
(a











(b

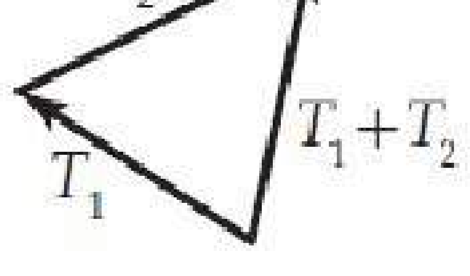
المتجه	نقطة النهاية للمتجه	نقطة النهاية للمتجه مضروباً في العدد k
a	(2, 4)	(4, 8)
b	(0, 3)	(0, 6)
c	(– 1, 2)	(– 2, 4)
d	(– 2, – 2)	(– 4, – 4)
e	(3, – 1)	(6, – 2)

(ka, kb) (c

32) 20.77 mi/ h باتجاه $270°$

33) كرة حديدية:

(a



(b T_1=23.18 باوند ، T_2 = 23.18 باوند

أوجد طول كل متجه واتجاهه مما يأتي بمعلومية مركبتيه الأفقية والرأسية، والمدى الممكن لزاوية كل منها:

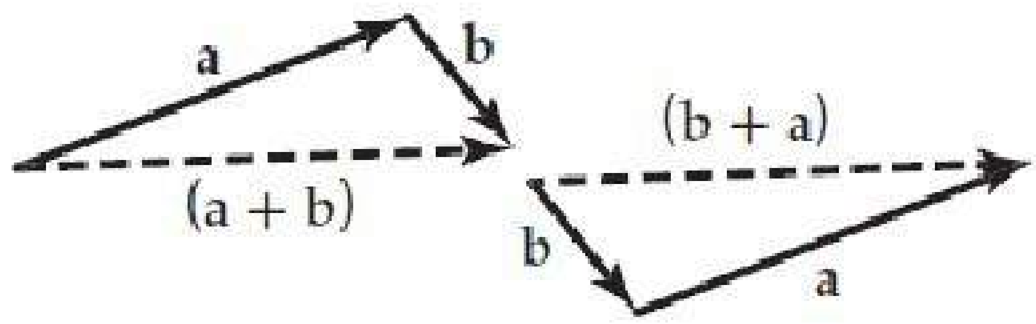
34) 2.3 in; 98°

35) 5.2 ft.; 54°

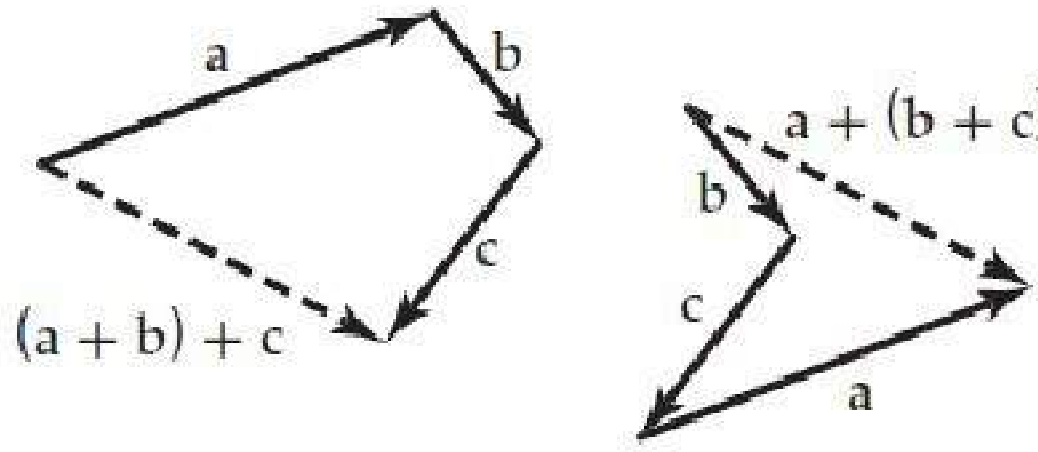
36) 10 cm; 285°

ارسم ثلاثة متجهات a,b,c، لتوضح صحة كل خاصية من الخصائص الاتية هندسياً:

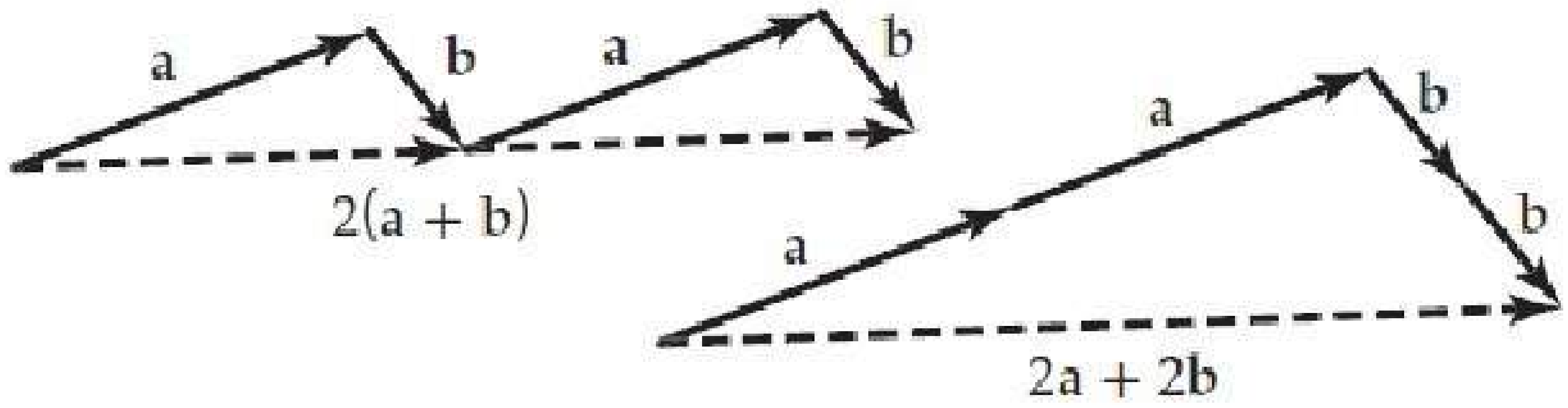
37)



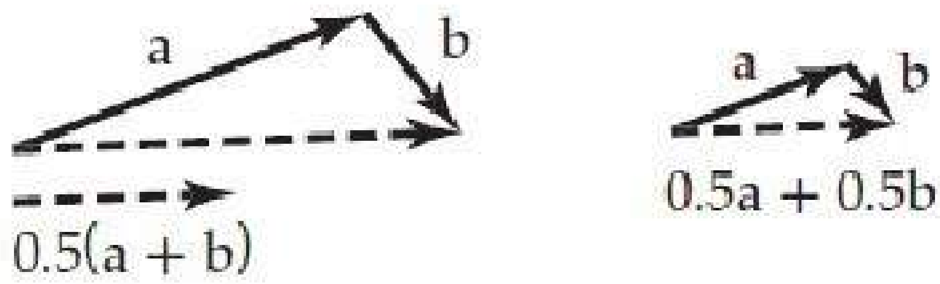
38)



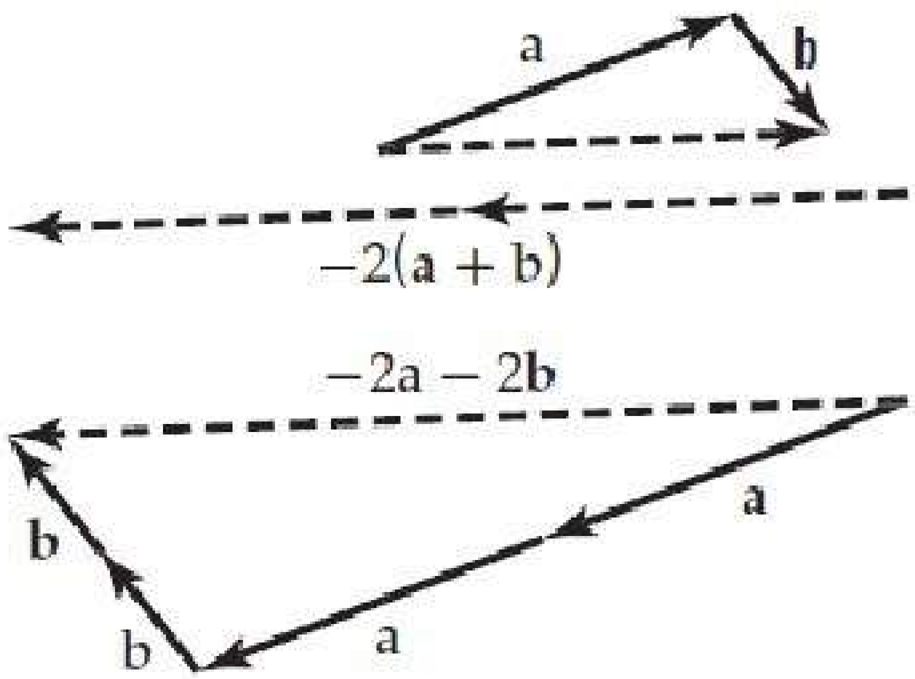
k = 2 (39



k = 0.5

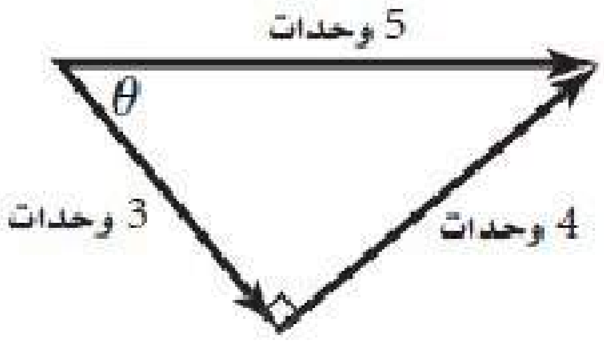


k = – 2



مسائل مهارات التفكير العليا:

40) إجابة ممكنة:



41) ليست صحيحة، إجابة ممكنة: إذا توازى متجهان، فإنهما يكونان في الاتجاه نفسه أو في اتجاهين متعاكسين. أما إذا وضع المتجهان بحيث تتطابق نقطتا بدايتهما، فعندها لا توجد زاوية بين المتجهين تسمح بتكوين متوازي أضلاع.

42) تبرير:

a) طول المتجه a مضافاً إلى طول المتجه b أكبر من أو يساوي طول المتجه الناتج من a + b.

b) صحيحة، إجابة ممكنة: المتجه الناتج من a + b يتأثر باتجاهي المتجهين وهذا قد يجعل مقدار

|a + b| صغيراً، إذا كان a، b متعاكسين في الاتجاه. ويكون مجموع المقدارين |b| + |a| أكبر قيمة ممكنة؛ لأنه لا يأخذ بعين الاعتبار اتجاهي المتجهين ويتساوى المقداران |b| + |a|، |a + b| إذا كان a، b متوازيين، ولهما الاتجاه نفسه.

43) مصطفى، إجابة ممكنة: وضع مصطفى نقطة بداية المتجه الثاني عند نقطة نهاية المتجه الأول، ثم رسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الثاني، وهي الطريقة الصحيحة لاستعمال قاعدة المثلث. أما حسين فقد وضع نقطتي بداية المتجهين معاً، وهي الخطوة الأولى لاستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، لكنه لم يكمل متوازي الأضلاع.

44) نعم، إجابة ممكنة: من الممكن أن يكون حاصل جمع متجهين يساوي أحد المتجهين، ويحدث ذلك عندما يكون أحد المتجهين هو المتجه الصفري.

45) إجابة ممكنة: عند استعمال قاعدة المثلث، تضع نقطة بداية المتجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه، وهكذا مع باقي المتجهات، ثم ترسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الأخير.

أما عند استعمال طريقة متوازي الأضلاع، فتضع نقطة بداية المتجهين عند نقطة واحدة، ثم تكمل متوازي الأضلاع وترسم المحصلة من نقطة البداية المشتركة للمتجهين إلى الرأس المقابل لمتوازي الأضلاع، يمكن استعمال كلتا القاعدتين، المثلث ومتوازي الأضلاع لإيجاد المحصلة لمتجهين أو أكثر.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كل مما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب عشر إن لزم ذلك:

46) 5.8

47) 22

48) 6

حل كل مثلث فيما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب عشر إن لزم ذلك:

49) $b = 19.8,\ a = 11.2,\ A = 32^\circ$

50) $\sin 2x - \cos x = 0$

$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$

$\cos x\,(2 \sin x - 1) = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ أو $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ أو $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

حيث n عدد صحيح.

تدريب على اختبار:

51) 6.74 km باتجاه °56.2 تقريباً مع الأفقي

52) B

1-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

تحقق

(1A $(8, 8)$

(1B $(-9, -11)$

(2A $\sqrt{128} \approx 11.3$

(2B $\sqrt{202} \approx 14.2$

(3A $(-19, 4)$

(3B $(12, -3)$

(3C $(3, 22)$

(4A $\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

(4B $\left\langle \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

$8i + 5j$ (5A

$10i + 9j$ (5B

$\left\langle 4\sqrt{2}\ ,\ 4\sqrt{2} \right\rangle$ (6A

$\left\langle -12\sqrt{3}\ ,\ -12 \right\rangle$ (6B

7A) 161.6° تقريباً

7B) 249.4° تقريباً

8) $30.75\ m/s$ وتصنع زاوية قياسها 31.6° مع الأفقي.

تدرب وحل المسائل:

أوجد الصورة الإحداثية وطول AB المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

1) $\langle 7, 4 \rangle, \sqrt{65} \approx 8.1$

2) $\langle -8, 16 \rangle, \sqrt{320} \approx 17.9$

3) $\langle -7, -3 \rangle, \sqrt{58} \approx 7.6$

4) $\langle 3, 4 \rangle, 5$

5) $\langle -6.5, 4.5 \rangle, \sqrt{62.5} \approx 7.9$

6) $\left\langle \frac{11}{2}, \frac{23}{2} \right\rangle, \sqrt{\frac{325}{2}} \approx 12.7$

إذا كان $f = (0, 8)$, $g = (-3, -5)$, $h = (-6, 2)$ فأوجد كلا مما يأتي:

7) $\langle -21, 13 \rangle$

8) $\langle -4, 4 \rangle$

9) $\langle 31, -11 \rangle$

10) $\langle 26, 6 \rangle$

11) $\langle -53, -23 \rangle$

12) $\langle -42, -18 \rangle$

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه v نفسه في كل مما يأتي:

13) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2\sqrt{53}}{53}, \frac{7\sqrt{53}}{53} \right\rangle$

14) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle$

15) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{8\sqrt{89}}{89}, \frac{5\sqrt{89}}{89} \right\rangle$

16) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right\rangle$

17) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{\sqrt{26}}{26}, -\frac{5\sqrt{26}}{26} \right\rangle$

18) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{10} , \frac{7\sqrt{2}}{10} \right\rangle$

اكتب DE المعطاة بدايته ونهايته في كل مما يأتي على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة i , j:

19) $i - 6j$

20) $-16i + 8j$

21) $-5i - 19j$

22) $-9.5i - 8.3j$

23) $13i + 11j$

24) $-\frac{33}{8}i - \frac{19}{7}j$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه v، المعطى طوله وزاوية اتجاهه مع المحور x الموجب في كل مما يأتي:

25) $\left\langle 6 , 6\sqrt{3} \right\rangle$

26) $\left\langle 8\sqrt{3} , -8 \right\rangle$

27) $\left\langle -2\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2} \right\rangle$

28) $\left\langle -8.6\ ,\ 12.3 \right\rangle$

أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهات الاتية مع المحور x الموجب:

29) 63.4° تقريباً

30) 111.8° تقريباً

31) 216.9° تقريباً

32) 119.1° تقريباً

33) ملاحة جوية:

a) 674 mi/ h

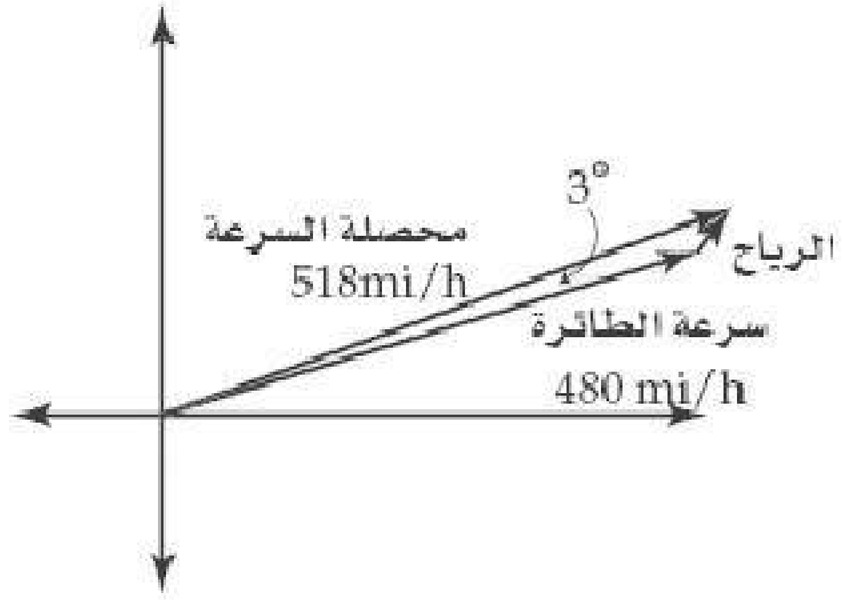
b) S 86° E

34) تجديف:

a) 5.8 mi/ h تقريباً

b) 59° تقريباً

35) ملاحة جوية:



بين إذا كان AB , CD المعطاة نقطتا البداية والنهاية لكل منهما فيما يأتي متكافئين أو لا. وإذا كانا متكافئين فأثبت أن AB = CD وإذا كانا غير ذلك فاذكر السبب.

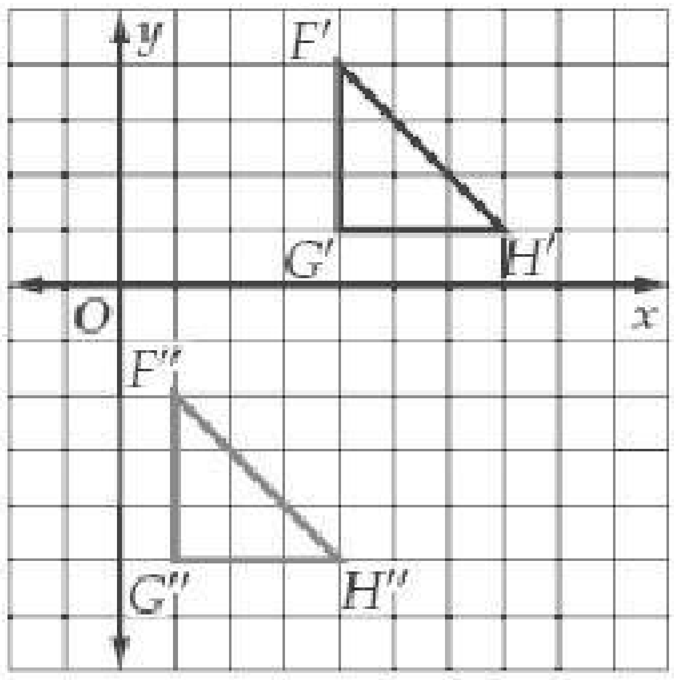
36) إجابة ممكنة: يختلف المقدار والاتجاه في كل من المتجهين؛ لذا فالمتجهان غير متكافئين.

37) نعم؛ إجابة ممكنة: للمتجهين المقدار والاتجاه نفساهما؛ لذا فهما متكافئان.

38) انسحاب:

(2, 5) (a

(b



(−1, −1) (c

أوجد نقطة نهاية ممكنة لكل متجه مما يأتي، إذا علمت طوله ونقطة بدايته:

39) إجابة ممكنة: (0, – 2)

40) إجابة ممكنة: (5, – 1)

41) آلة تصوير:

a) (– 756); (899); (544, – 441)

b) (688, 930)

c) 1157 N; 54°

42) يجب أن تكون قوة الاحتكاك مساوية لمركبة الجاذبية الموازية للسطح المائل.

مسائل مهارات التفكير العليا:

43) تبرير: إجابة ممكنة: إذا كانت نقطة بداية المتجه هي (a, b) ، وطول المتجه m، فإن أي نقطة (x, y) تحقق المعادل $m = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. يمكن أن تكون نقطة نهاية المتجه. وهي دائرة مركزها النقط (a, b) وطول نصف قطرها m.

44) تحد: $x = \dfrac{y}{\tan 4y}$

برهان:

45) $a + b = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = b + a$

46) $(a + b) + c = ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3)$

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)$

$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$

$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$

$= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$

$= a + (b + c)$

47) $k(a + b) = k((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$

$= k(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$= (k(x_1 + x_2), k(y_1 + y_2))$

$= (kx_1 + kx_2, ky_1 + ky_2)$

$$= (kx_1, ky_1) + (kx_2, ky_2)$$

$$= k\,(x_1, y_1) + k\,(x_2, y_2)$$

$$= ka + kb$$

$$|ka| = |k\,(x_1, y_1)|\ (48$$

$$= |(kx_1, ky_1)|$$

$$= \sqrt{(kx_1)^2 + (ky_1)^2}$$

$$= \sqrt{\left(k^2 x_1^{\,2} + k^2 y_1^{\,2}\right)}$$

$$= \sqrt{k^2\left(x_1^{\,2} + y_1^{\,2}\right)}$$

$$= \sqrt{k^2}\sqrt{\left(x_1^{\,2} + y_1^{\,2}\right)}$$

$$= |k|\,|(x_1, y_1)|$$

$$= |k|\,|a|$$

مراجعة تراكمية

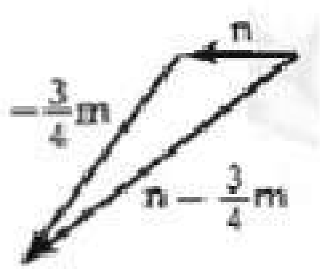
49) دمى الأطفال:

= 0.92 N, = 1.18 N (a

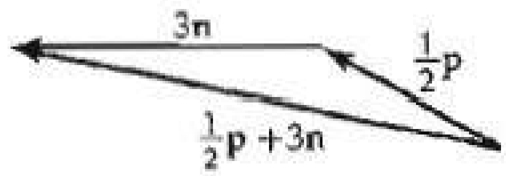
= 0.31 N, = 1.47 N (b

استعمل مجموعة المتجهات الآتية لرسم متجه يمثل كلا مما يأتي:

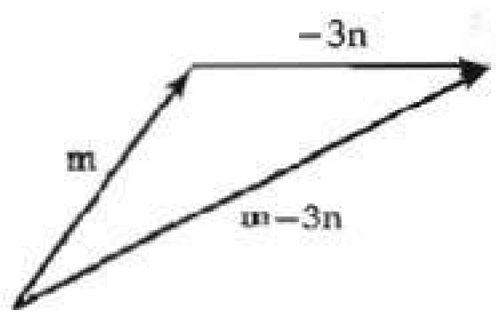
(50



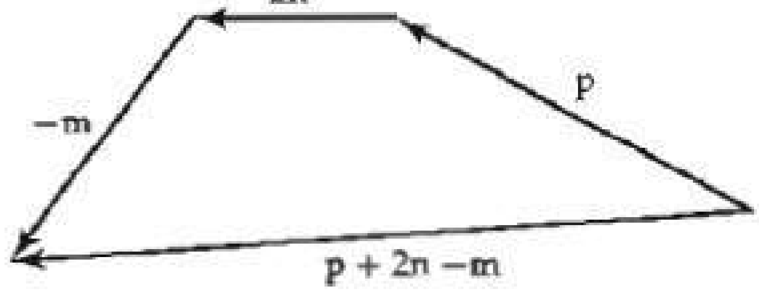
(51



(52



(53



تدريب على اختبار:

D (54

C (55

1-3 الضرب الداخلي

تحقق

1A) ليسا متعامدين

1B) 0؛ متعامدان

2A) 20

2B) $5\sqrt{2} = 7.07$

3A) 156.8°

3B) 101.5°

4) 75 جولاً

تدرب وحل المسائل:

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u ,v، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا:

1) 8؛ غير متعامدين

2) 0؛ متعامدان

3) 8؛ غير متعامدين

4) 0؛ متعامدان

5) 8؛ غير متعامدين

6) زيت الزيتون:

15620 (a

b) ثمن العلب جميعها هو 15620 ريالاً.

استعمل الضرب الداخلي، لإيجاد طول المتجه المعطى:

$\sqrt{130} = 11.4$ (7

$\sqrt{97} = 9.8$ (8

$5\sqrt{13} = 18.0$ (9

10) $\sqrt{785} = 28.0$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u , v في كل مما يأتي وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

11) $14.0°$

12) $100.0°$

13) $164.7°$

14) $82.9°$

15) مخيم كشفي: $161.6°$

16) 801 J

أوجد متجهاً يعامد المتجه المعطى في كل مما يأتي:

17) إجابة ممكنة: $\langle 3, -12 \rangle$

18) إجابة ممكنة: $\langle -6, 10 \rangle$

19) إجابة ممكنة: $\langle 14, 8 \rangle$

20) إجابة ممكنة: $\langle 1, 6 \rangle$

21) عجلة دوارة:

(a $(16.38, 11.47), (22.94, -32.77)$

(b $(20\cos 35^\circ)(40\cos 35^\circ) + (20\sin 35^\circ)(-40\sin 55^\circ) = 0$

إذا علمت كلا من $u \cdot v$, vفأوجد u في كل مما يأتي:

22) إجابة ممكنة: $u = (5, -3)$

23) إجابة ممكنة: $u = (-1, 7)$

24) مدرسة: 55.7 تقريباً

اختبر كل زوج من المتجهات في كل مما يأتي من حيث كونها متعامدة، أو متوازية او ليس كليهما:

25) بما أن $u \cdot v = 0$ ، فإن المتجهين متعامدان.

26) ليسا متعامدين، ولا متوازيين، حيث أن الزاوية بين المتجهين $\theta = 167^\circ$.

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كل مما يأتي. قرب الناتج إلى أقرب عشر:

(27 29.7°

(28 164.9°

(29 $37.8^\circ, 60.3^\circ, 81.9^\circ$

إذا علمت كلا من $|v|$,u والزاوية θ بين المتجهين u,v، فأوجد قيمة ممكنة للمتجه v، قرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة:

30) (3.16, – 9.49)

31) (– 5.36, 0.55)

مسائل مهارات التفكير العليا:

32) العبارة خاطئة؛ إذ قد تكون نقطة بداية للمتجهات الثلاثة واحدة ولا تشكل هذه المتجهات مثلثاً مطلقاً، إذا كان الأمر كذلك، فإن الزاوية بين المتجهين d و f تكون حادة أو قائمة أو منفرجة.

33) فيصل: $u \cdot v$ عدد ثابت وعليه فإن $(u \cdot v) \cdot w$ ليس معرفاً.

34) إجابة ممكنة: لأي متجهين غير صفريين (a, d), (c, b) يكون الضرب الداخلي لهما يساوي مجموع حاصل ضرب الإحداثيين x والإحداثيين y أو

$ac + bd$.

برهان:

35) $u \cdot v = v \cdot u$

$$(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) \stackrel{?}{=} (v_1, v_2) \cdot (u_1, u_2)$$

$$u_1v_1 + u_2v_2 \stackrel{?}{=} v_1u_1 + v_2u_2$$

$$u_1v_1 + u_2v_2 = u_1v_1 + u_2v_2$$

36) $(u_1, u_2) \cdot ((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) \stackrel{?}{=} (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) + (u_1, u_2) \cdot (w_1, w_2)$

$$(u_1, u_2) \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \stackrel{?}{=} (u_1v_1 + u_2v_2) + (u_1w_1 + u_2w_2)$$

$$u_1 (v_1 + w_1) + u_2 (v_2 + w_2) \stackrel{?}{=} u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2$$

$$u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 = u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2$$

37) $k (u \cdot v) = ku \cdot v = u \cdot kv$

$$k ((u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2)) \stackrel{?}{=} k (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) \stackrel{?}{=} (u_1, u_2) \cdot k (v_1, v_2)$$

$$k (u_1v_1 + u_2v_2) \stackrel{?}{=} (ku_1, ku_2) \cdot (v_1, v_2) \stackrel{?}{=} (u_1, u_2) \cdot (kv_1, kv_2)$$

$$ku_1v_1 + ku_2v_2 = ku_1v_1 + ku_2v_2 = ku_1v_1 + ku_2v_2$$

38) الزاوية بين u، v هي $\theta = 90°$

$$\cos 90° = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$

$$\cos 90° = 0$$

$$0 = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$

بضرب الطرفين في $|v| \cdot |u|$

$$v \cdot u = 0$$

مراجعة تراكمية

أوجد كلا مما يأتي:

39) $(-12, -34.2)$

40) $\left\langle -\frac{137}{4}, 9.2 \right\rangle$

41) $\left\langle \frac{163}{4}, -18.2 \right\rangle$

أوجد الزاوية اتجاه كل من المتجهات الآتية مع المحور x الموجب:

42) 251.6°

43) 150.95°

44) 135°

تدريب على اختبار:

45) B

46) C

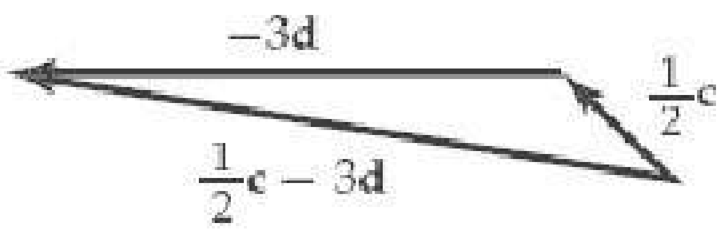
- اختبار منتصف الفصل

(1 6.2 cm, 185°

(2 1.1 cm, 57°

(3 40.96 N; 28.68 N

(4



اكتب BC المعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كل مما يأتي بدلالة متجهي الوحدة i,j :

(5 $i + -6j$

(6 $-18i + 8j$

(7 $-3i + -21j$

(8 $10i + 20j$

(9 B

10) كرة سلة:

a) راشد: (0 ,2.5)؛ الكرة: (6.5, 4.7)

b) $10.2\ m/s$ بزاوية قياسها $28°$ مع الأفقي.

أوجد الصورة الإحداثية، وطول المتجه المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي، قرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

11) $(7, 4);\ \sqrt{65} = 8.1$

12) $(-8, 13);\ \sqrt{233} = 15.3$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u, v، وقرب الناتج إلى أقرب درجة:

13) $93°$

14) $90°$

15) $114°$

16) B

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كل مما ياتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا:

17) -2؛ غير متعامدين

18) 16؛ غير متعامدين

19) -43؛ غير متعامدين

20) 0؛ متعامدان

21) عربة:

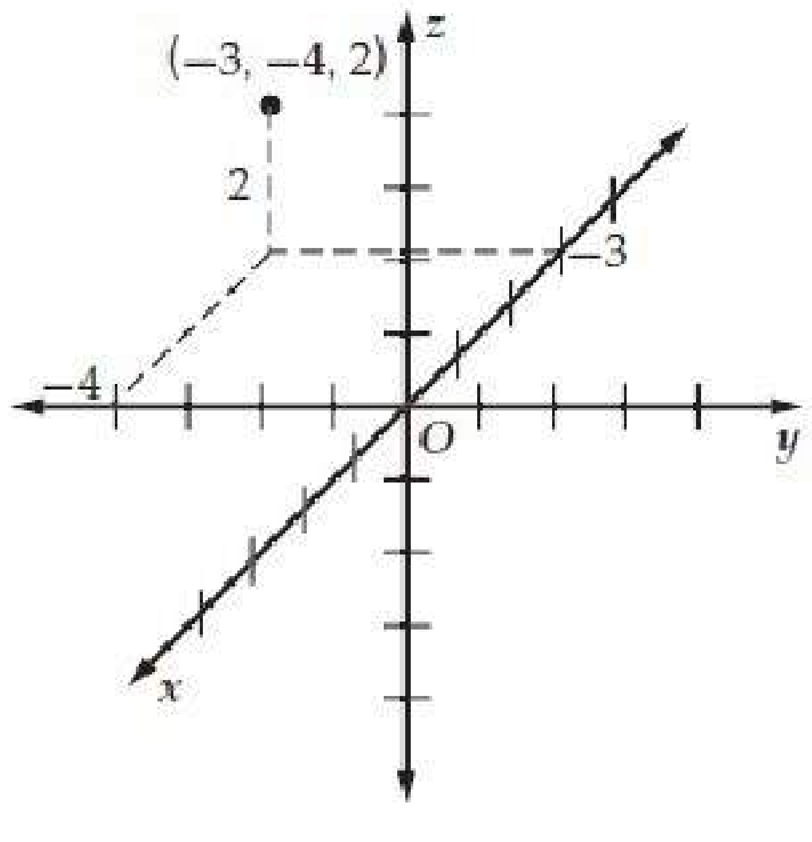
a) 3247.6 جولاً

b) أقل؛ سيبذل 2872.7 جولاً

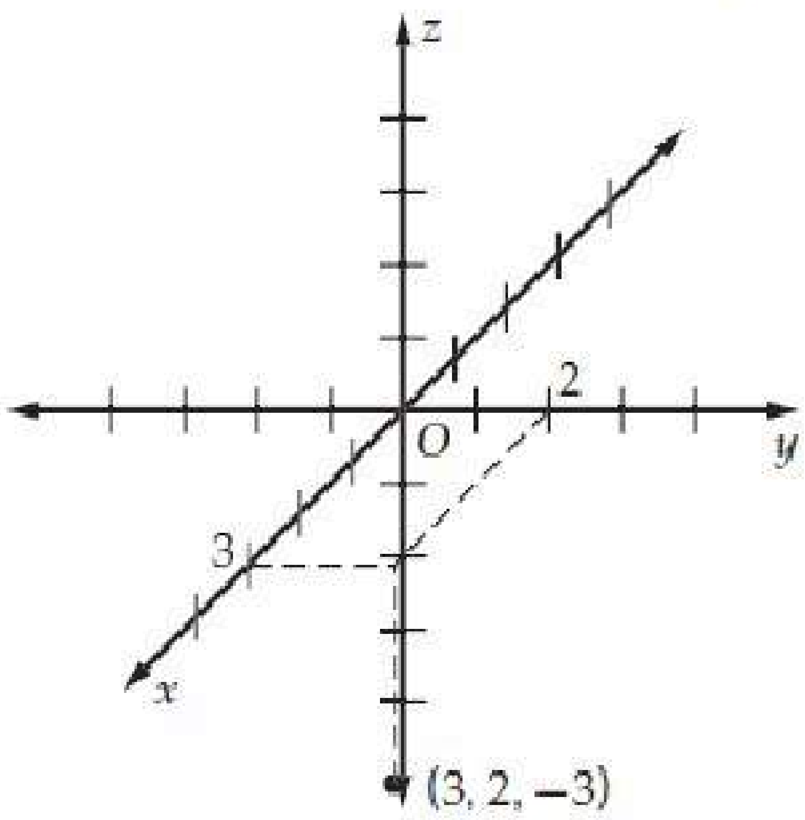
1-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

تحقق

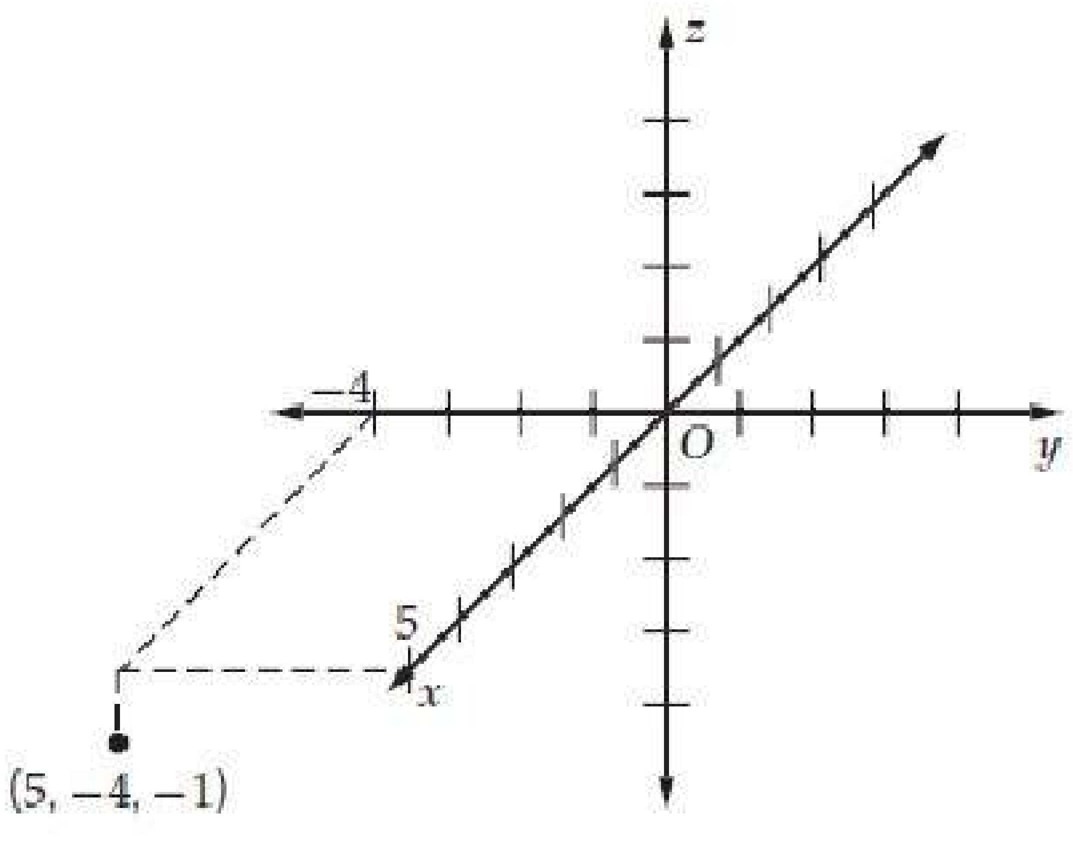
(1A



(1B



(1C

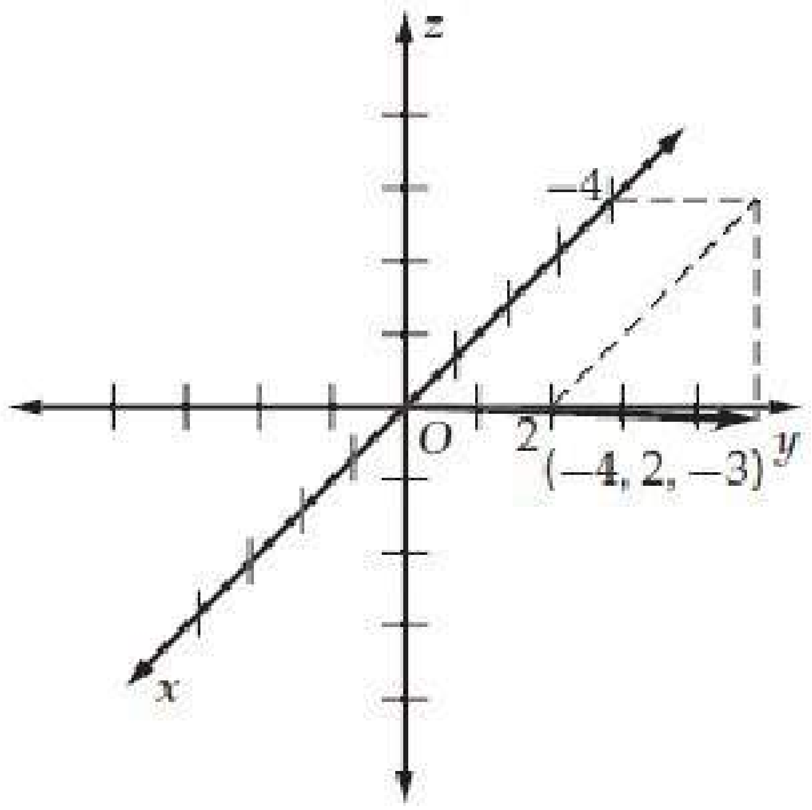


2) طائرات:

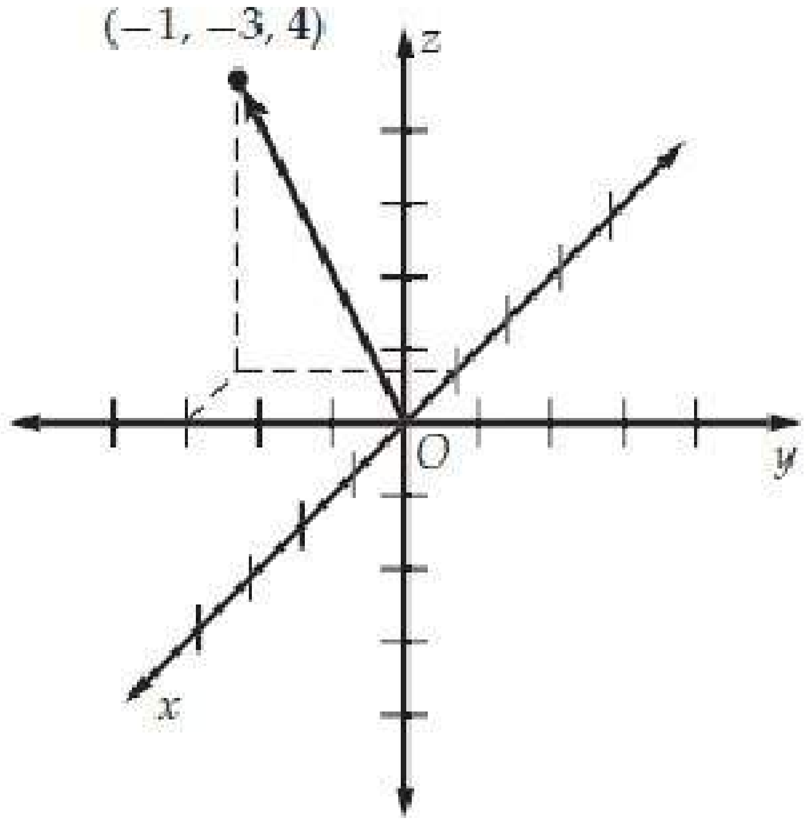
A) نعم؛ تبعد الطائرتان حوالي 2045 قدماً، وهذه المسافة أقل من المسافة المسموح بها وهي نصف ميل تقريباً.

(375, – 50, 29000) (B

(3A



(3B



(12, 16, – 56) (4A

(9, – 42, 45) (4B

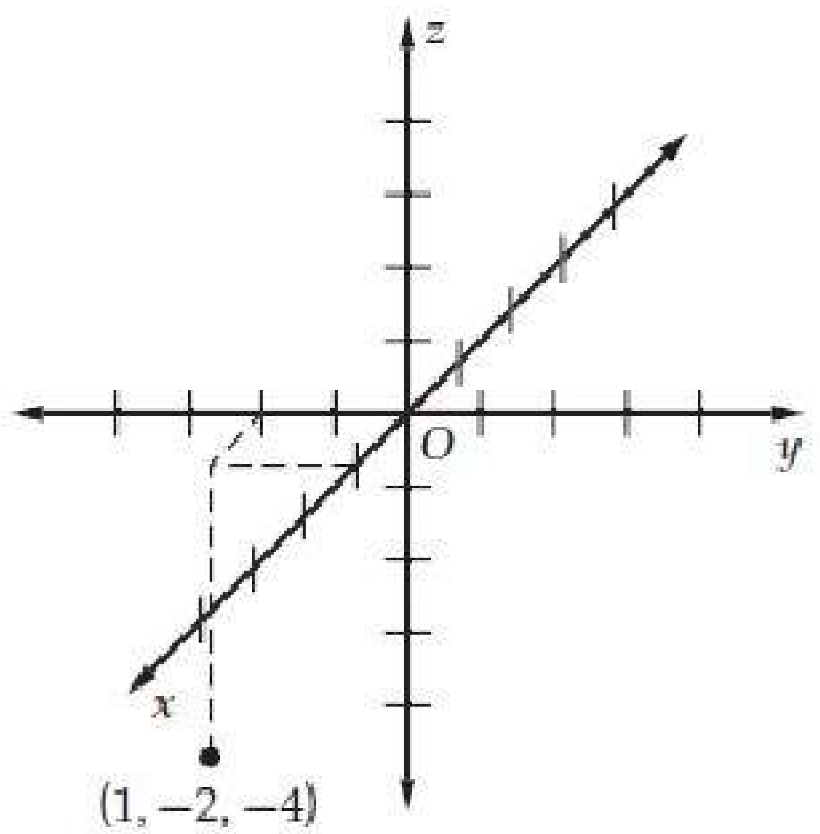
$$\left\langle 1,9,3\right\rangle ;\sqrt{91}\ ;\left\langle \frac{\sqrt{91}}{91},\frac{9\sqrt{91}}{91},\frac{3\sqrt{91}}{91}\right\rangle \text{(5A}$$

$$\left\langle 4,-1,2\right\rangle ;\sqrt{21}\ ;\left\langle \frac{4\sqrt{21}}{21},\frac{-\sqrt{21}}{21},\frac{2\sqrt{21}}{21}\right\rangle \text{(5B}$$

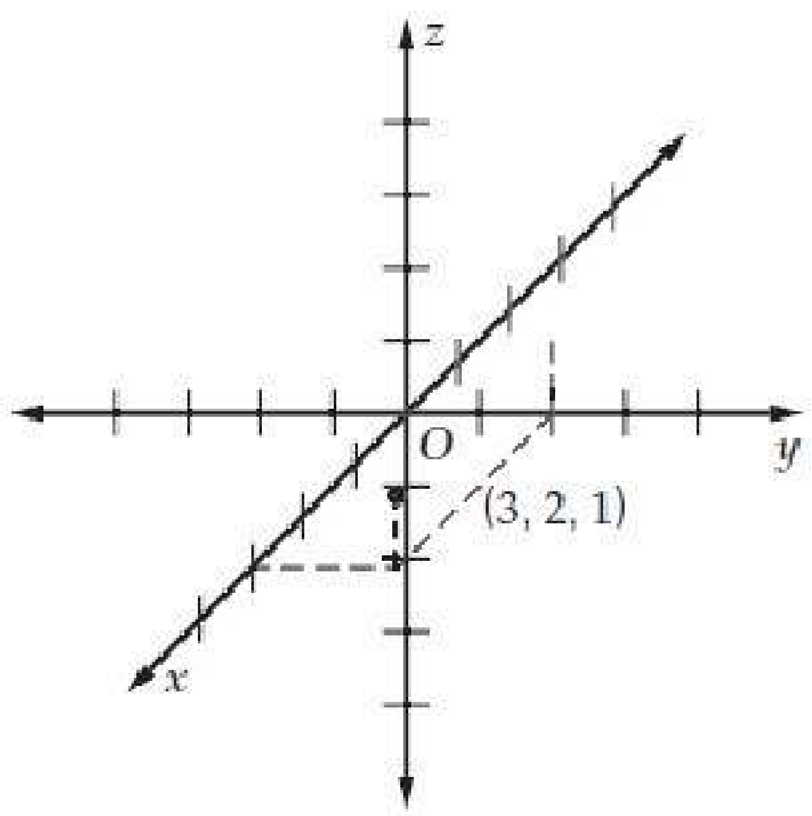
تدرب وحل المسائل:

عين كل نقطة مما يأتي في نظام الحداثيات الثلاثي الأبعاد:

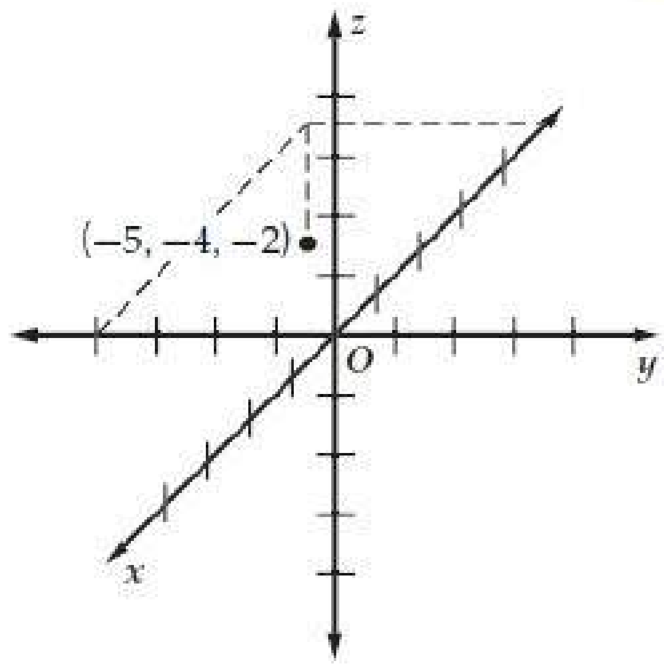
1)



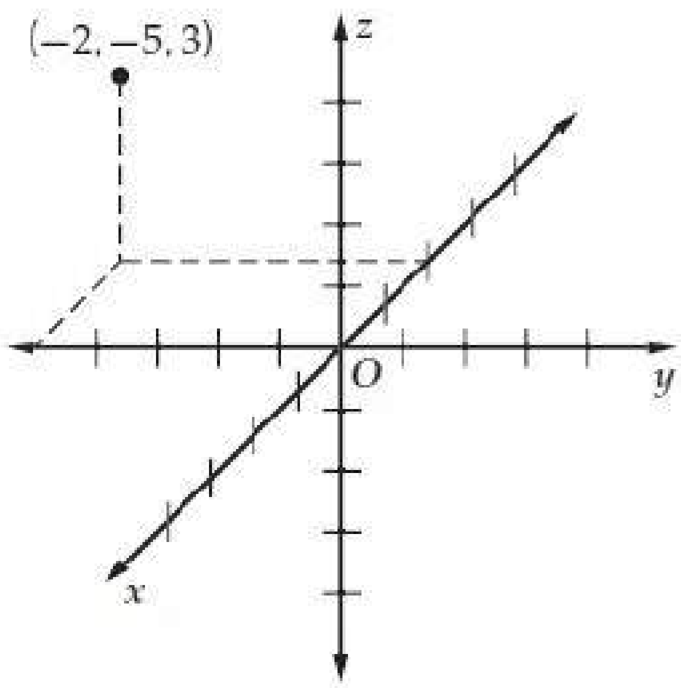
2)



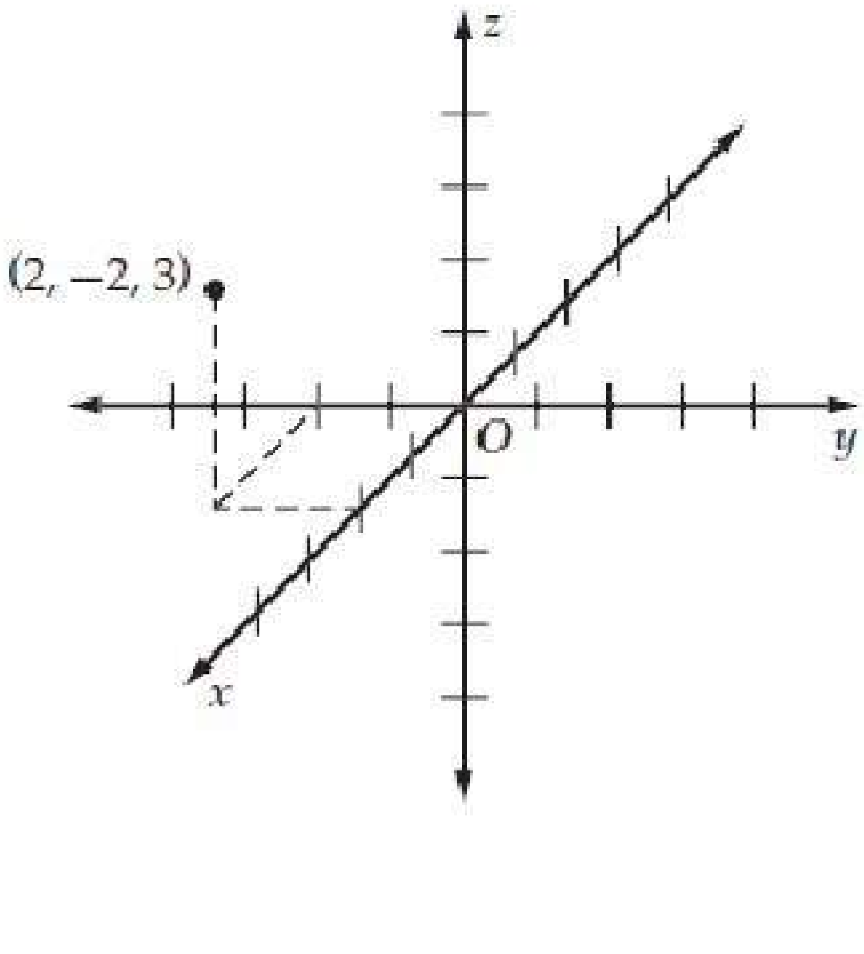
(3



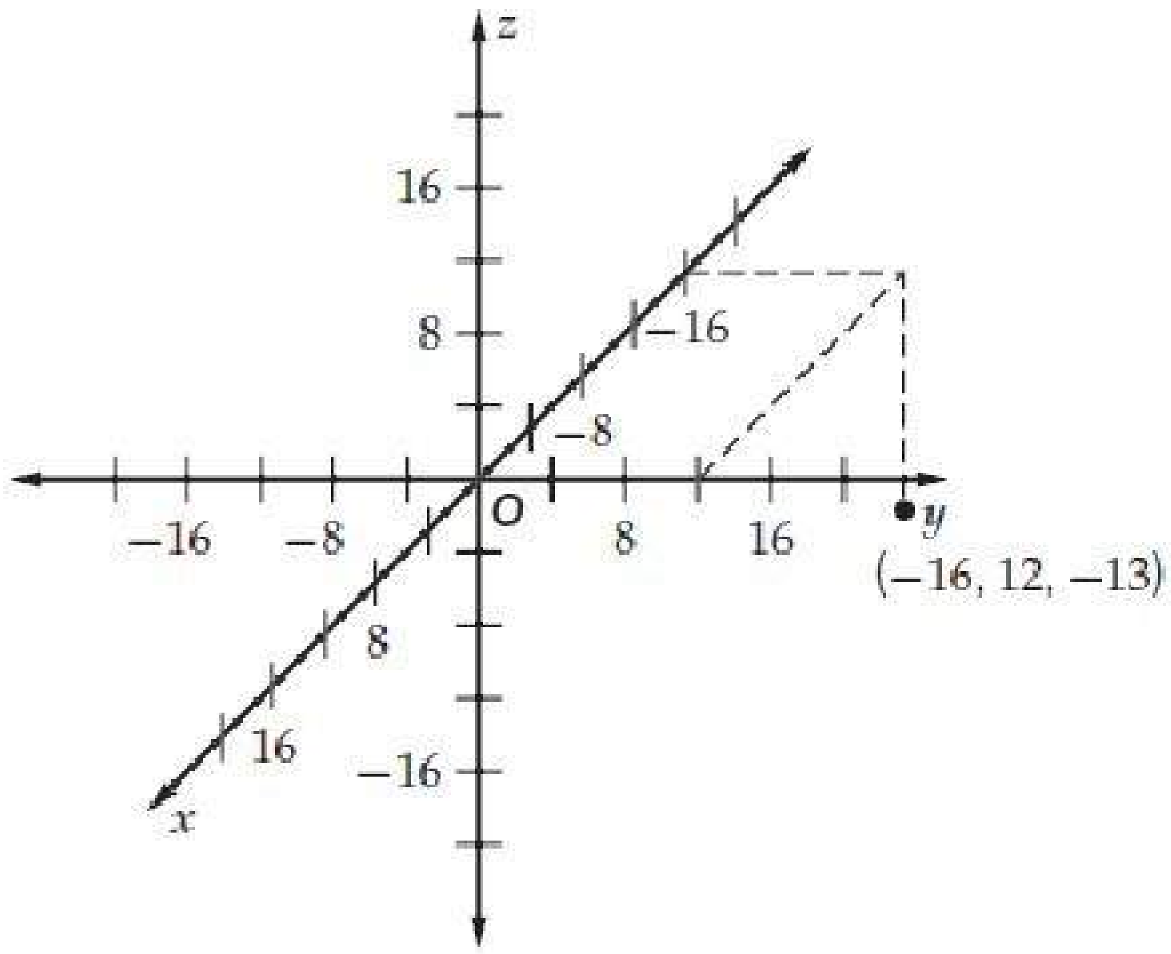
(4



(5



(6



أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كل مما يأتي:

7) $12.25, \left(-\frac{3}{2}, 5, \frac{13}{2}\right)$

8) $9.90, \left(-\frac{15}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$

9) $15.65, \left(2, -2, \frac{9}{2}\right)$

10) $9.11, \left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{13}{2}\right)$

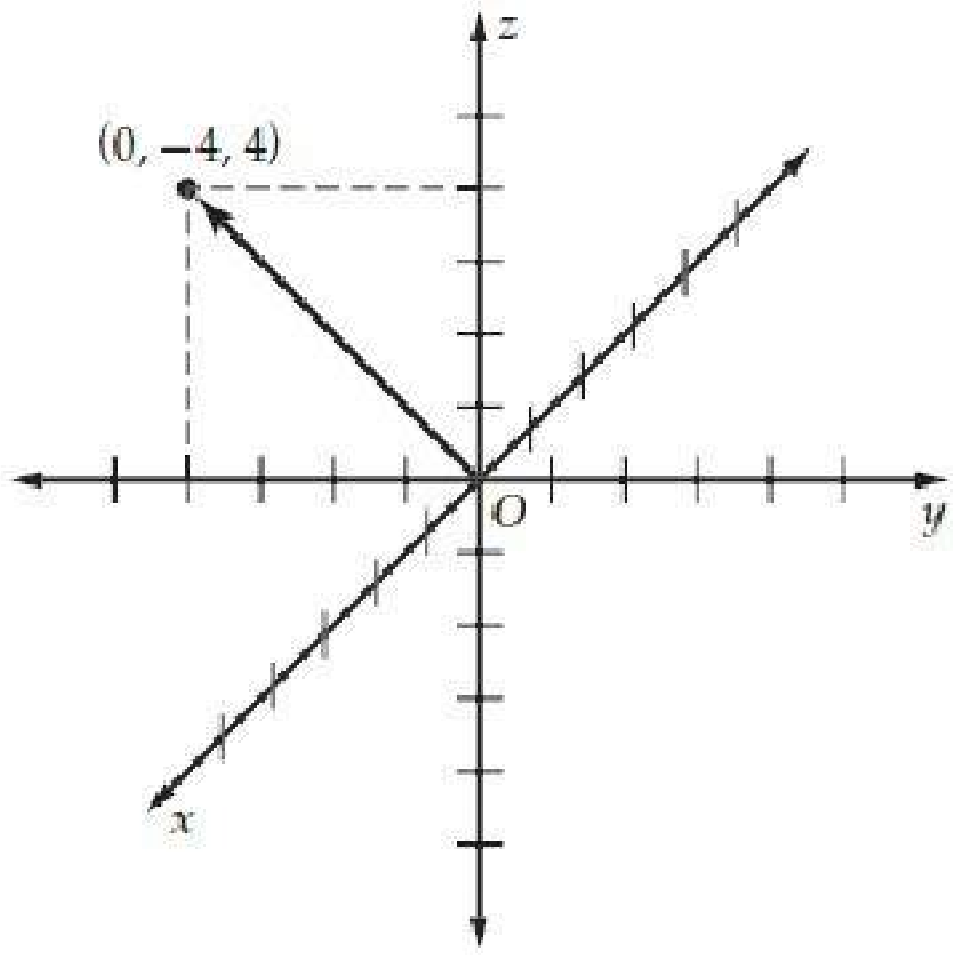
11) طيارون:

a) 3445 ft

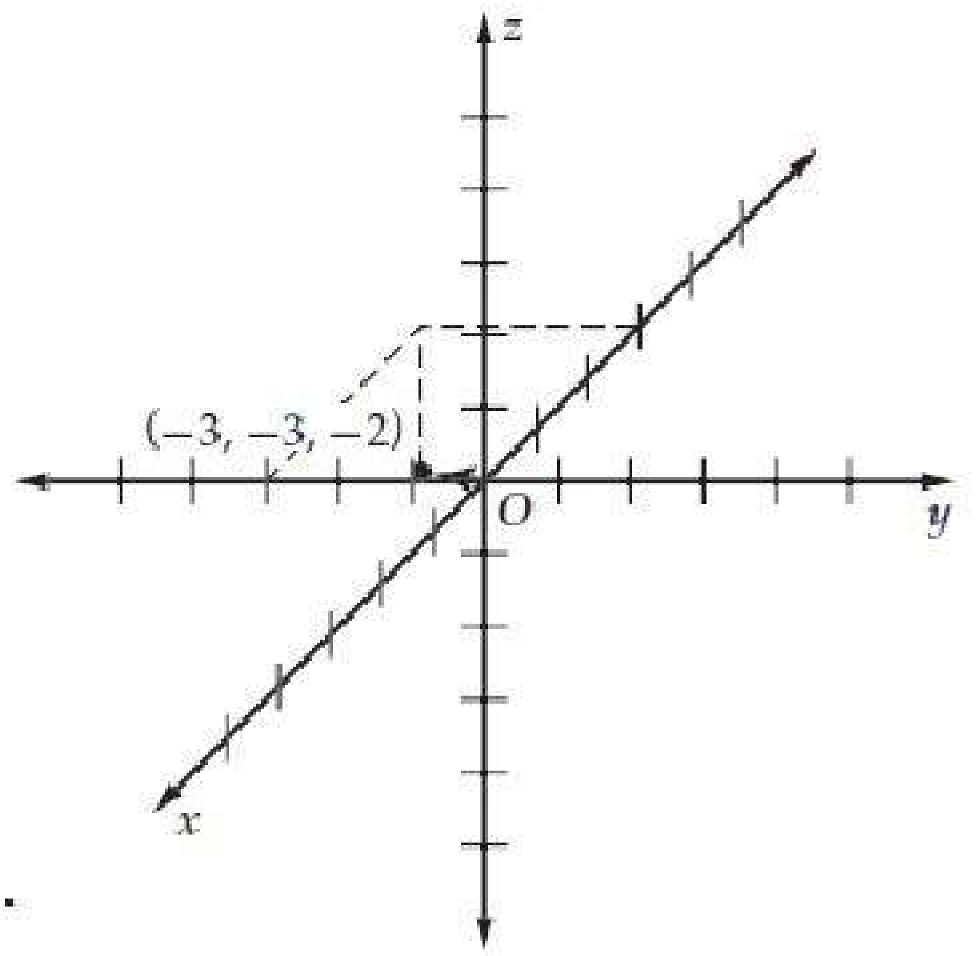
b) (193, 297, 17700)

عين موقع كل من المتجهات الآتية في الفضاء، ثم مثله بيانياً:

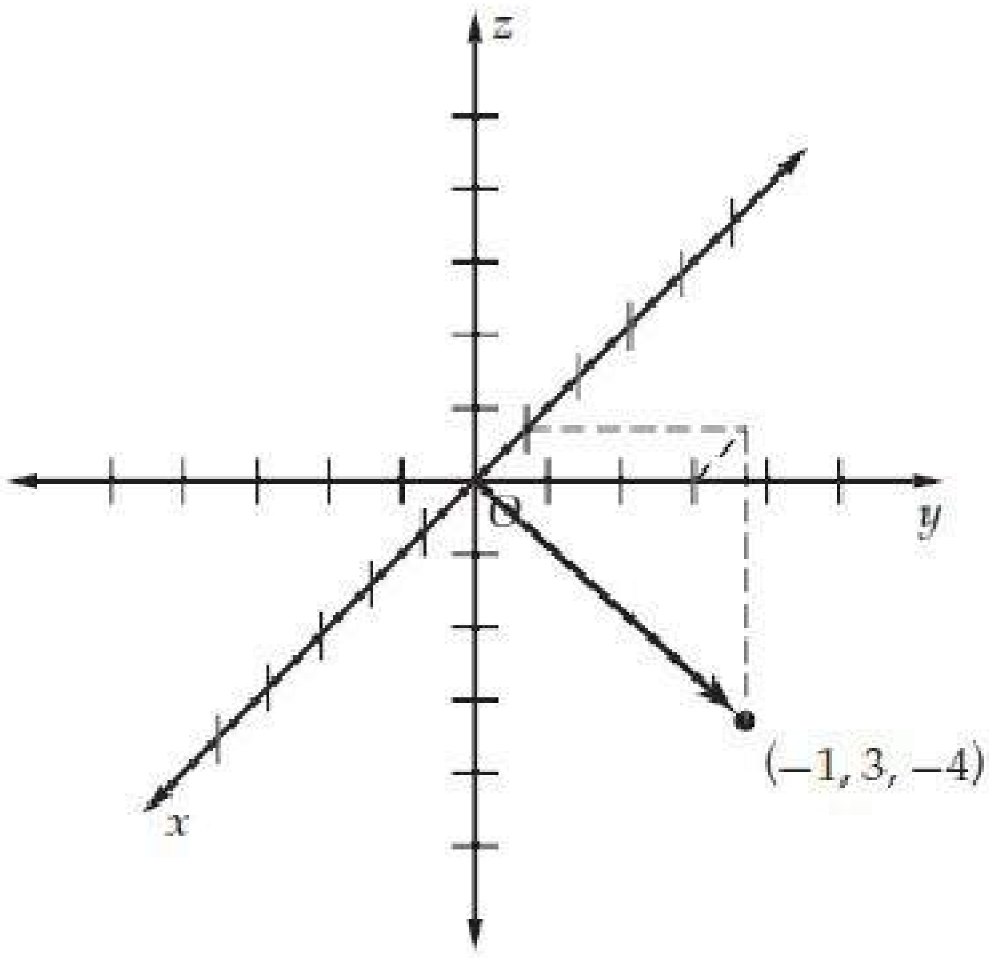
(12



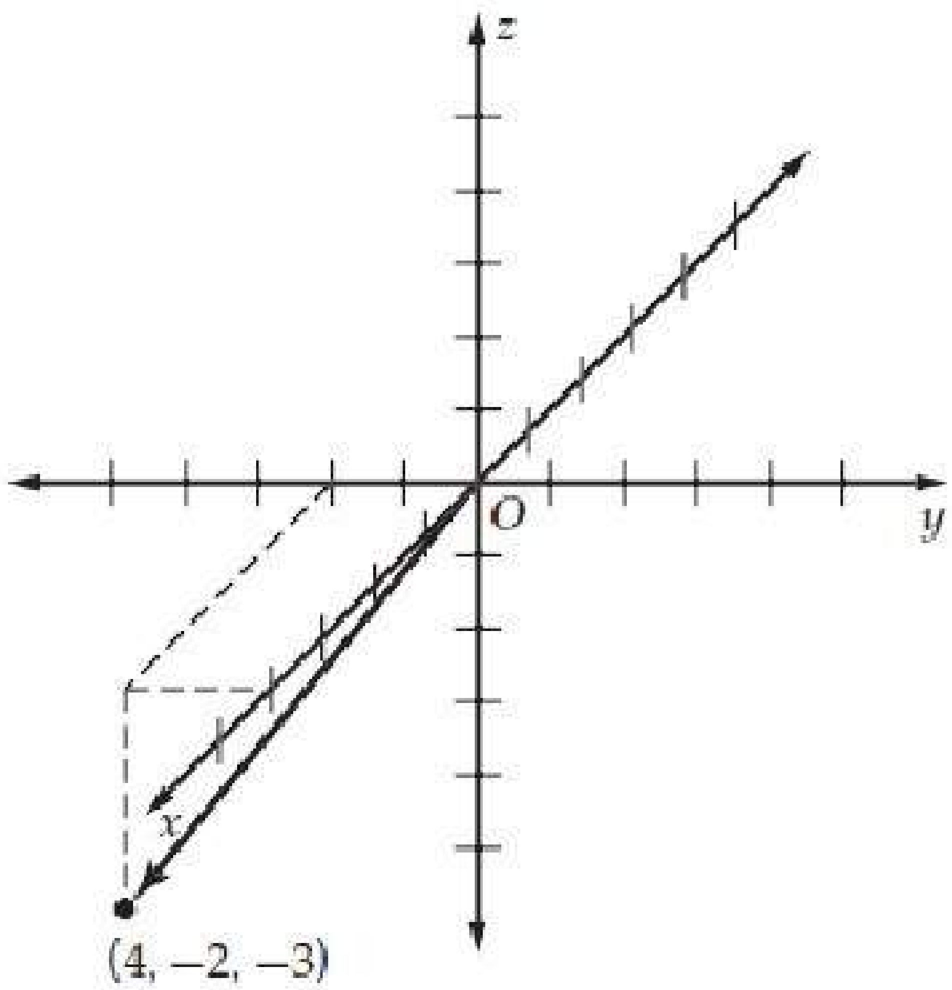
(13



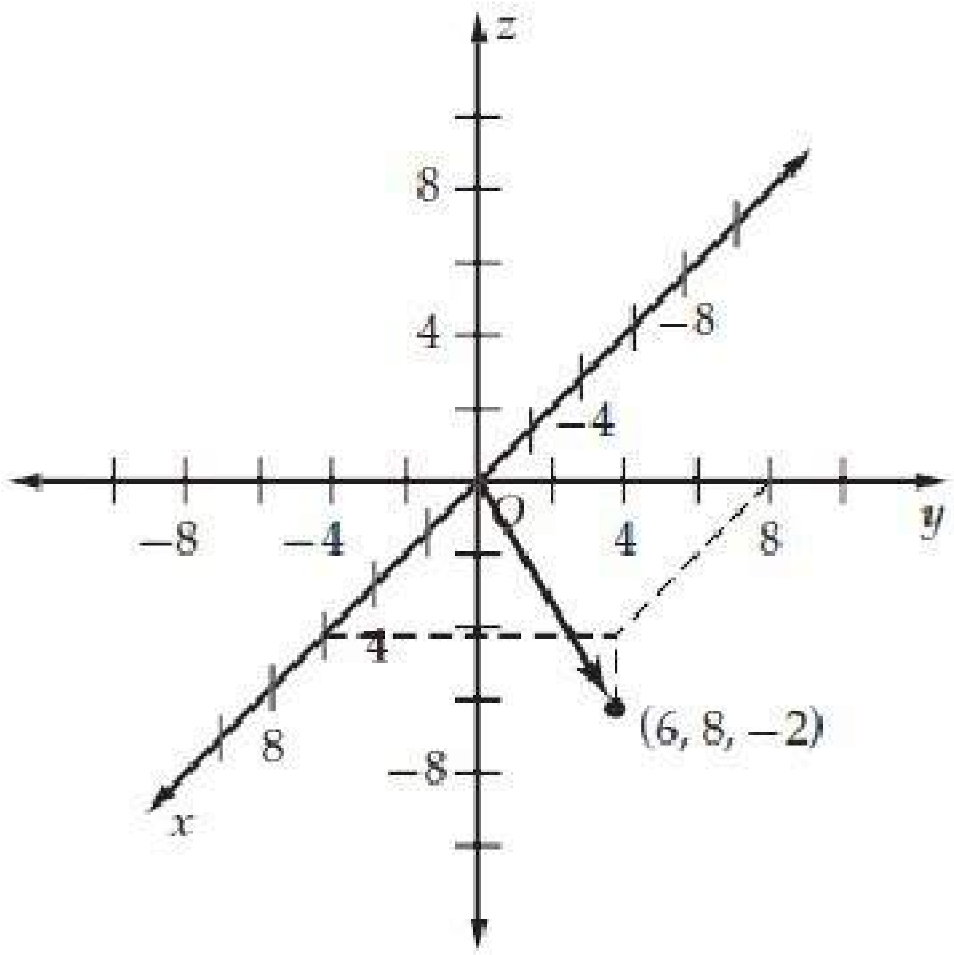
(14



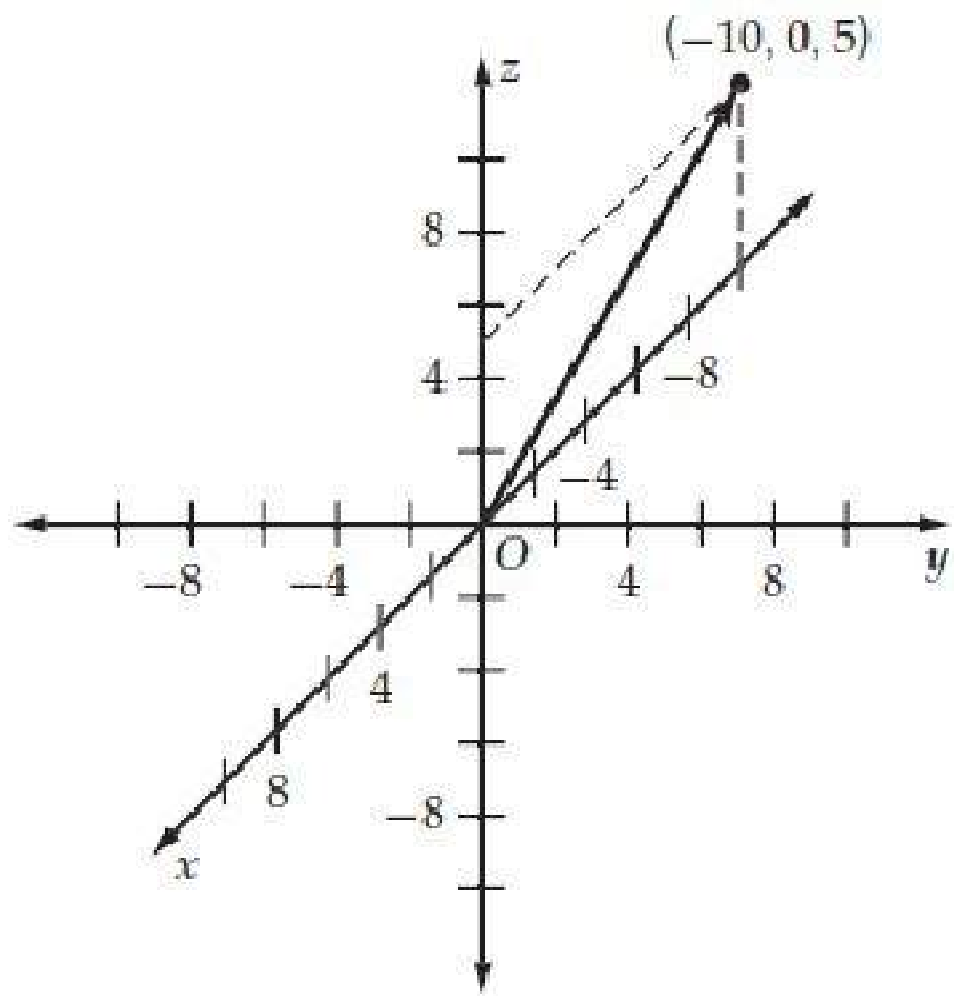
(15



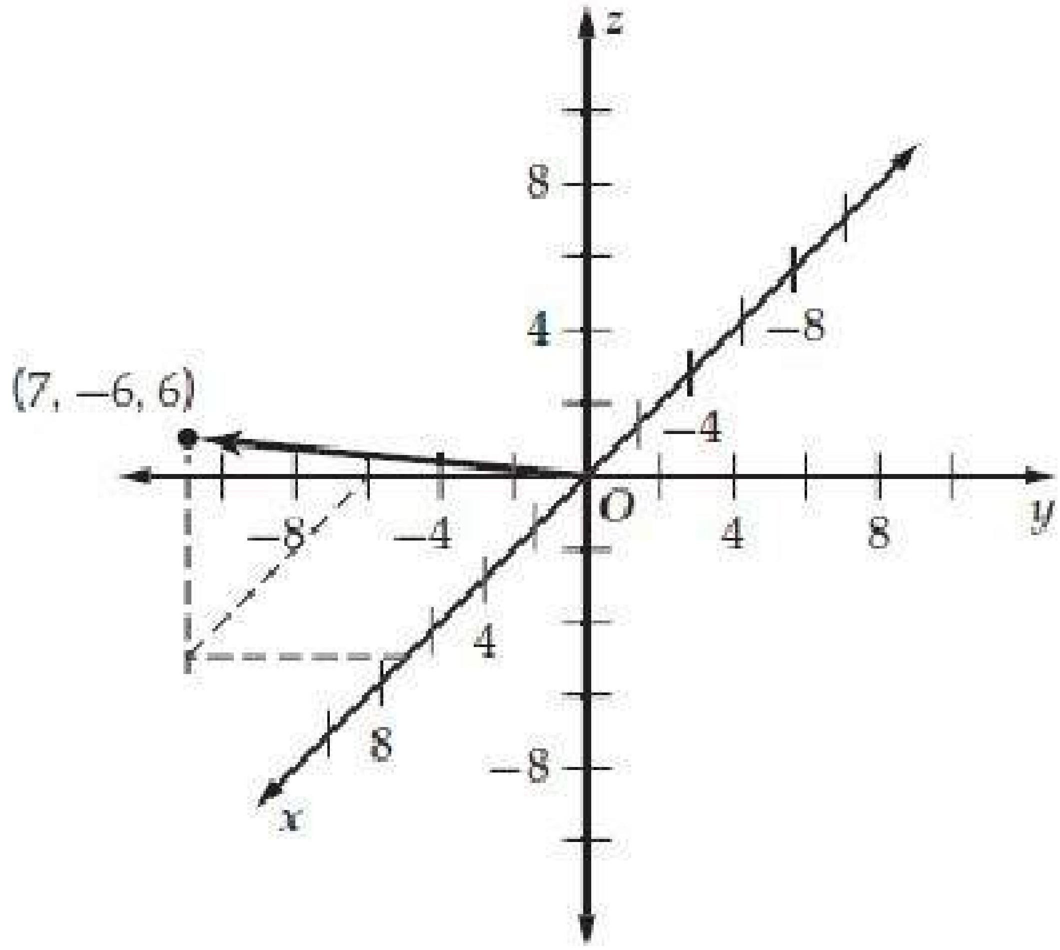
(16



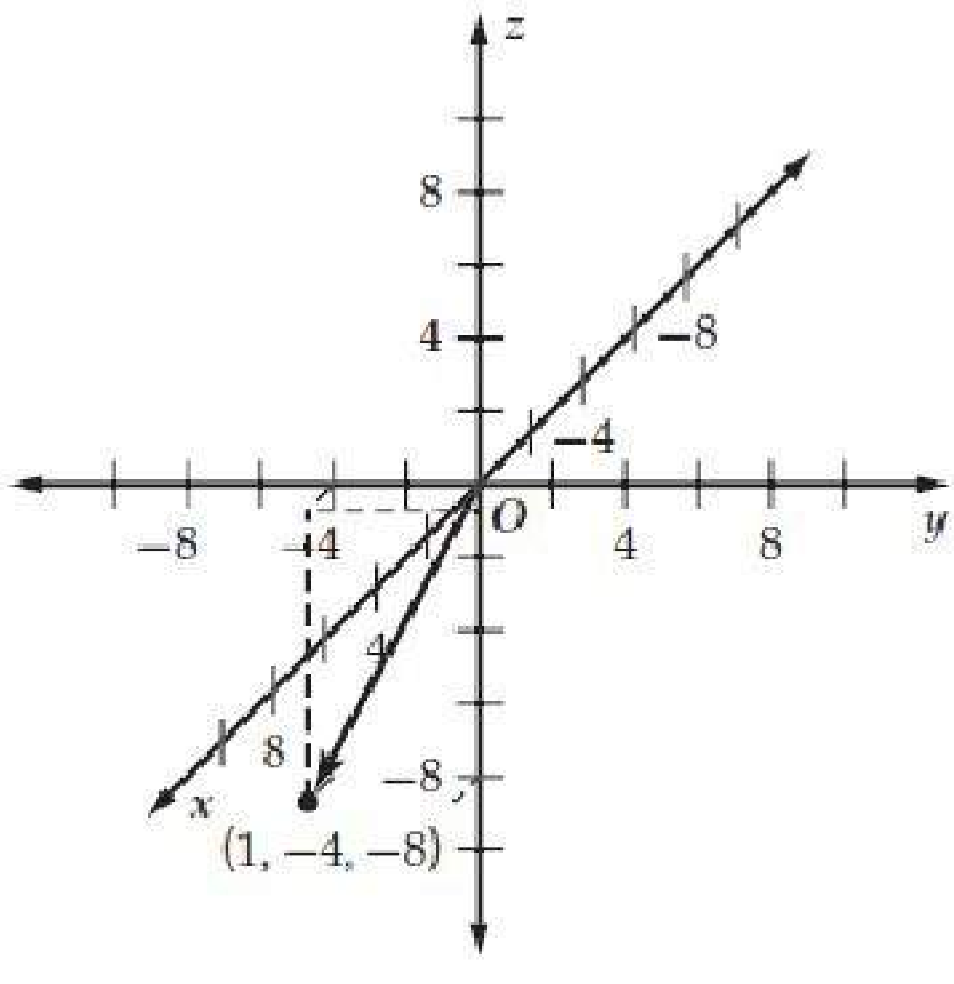
(17



(18



(19



أوجد كلا مما يأتي للمتجهات :

20) $(-88, 6, 99)$

21) $(-65, -18, 56)$

22) $(38, -36, -65)$

23) $(48, 12, -38)$

24) $(-68, -24, 55)$

25) $(22, 36, 3)$

أوجد كلا مما يأتي للمتجهات :

26) $(-27, 16, -21)$

27) $(-63, 28, 56)$

28) $(-22, 14, -1)$

29) $(50, -18, 10)$

30) $(-18, -6, 6)$

31) $(-13, 2, 21)$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول AB المعطاة بدايته ونهايته، في كل مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه AB:

32) $\langle 16,2,8\rangle, 18, \left\langle \frac{8}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9} \right\rangle$

33) $\langle 0,-8,12\rangle, \left\langle 0, -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$

34) $\langle -3,-5,-10\rangle, \sqrt{134}, \left\langle -\frac{3\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{67} \right\rangle$

35) $\langle -4,8,20\rangle, 4\sqrt{30}, \left\langle -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right\rangle$

36) $\langle -1,8,-10\rangle, \sqrt{165}, \left\langle -\frac{\sqrt{165}}{165}, \frac{8\sqrt{165}}{165}, -\frac{2\sqrt{165}}{33} \right\rangle$

37) $\langle -6,-15,4\rangle, \sqrt{277}, \left\langle -\frac{6\sqrt{277}}{277}, -\frac{15\sqrt{277}}{277}, \frac{4\sqrt{277}}{277} \right\rangle$

38) $\langle 4,-15,5\rangle, \sqrt{266}, \left\langle -\frac{2\sqrt{266}}{133}, -\frac{15\sqrt{266}}{266}, \frac{5\sqrt{266}}{266} \right\rangle$

39) $\langle 20,32,42\rangle, 2\sqrt{797}, \left\langle \frac{10\sqrt{797}}{797}, \frac{16\sqrt{797}}{797}, \frac{21\sqrt{797}}{797} \right\rangle$

إذا كانت N منتصف MP فأوجد إحداثيات النقطة P في كل مما يأتي:

40) $(4, -2, -1)$

41) $(-3, 6, -1)$

$(3, -2, 7)$ (42

$(-\frac{11}{2}, -8, 2)$ (43

44) تطوع: 34 ft.

حدد نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط الثلاث في كلٍّ مما يأتي (قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع):

(45

$$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (-1-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$
$$Bc = \sqrt{(1-5)^2 + (3+1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$
$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

بما أن: $AB = Ac \neq Bc$ فالمثلث متطابق الضلعين

(46

$$AB = \sqrt{(4-4)^2 + (6-3)^2 + (4-4)^2} = 3$$
$$Bc = \sqrt{(4-4)^2 + (3-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$
$$Ac = \sqrt{(4-4)^2 + (3-3)^2 + (6-4)^2} = 2$$

بما أن: $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 2^2 + 3^2$ اذن المثلث قائم الزاوية، و بما أن أطوال اضلاعه مختلفة،

إذن فهو مختلف الأضلاع

(47

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (5-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$
$$Bc = \sqrt{(0-2)^2 + (-6-5)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{4+121+25} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$$
$$Ac = \sqrt{(0+1)^2 + (-6-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{1+100+9} = \sqrt{110}$$

بما أن أطوال أضلاع المثلث مختلفة، إذن المثلث مختلف الأضلاع.

48) كرات: الكرة هي مجموعة النقاط في الفضاء التي تبعد عن مركز الكرة ٌ بعداثابتا (نصف القطر) إذن إذا كانت النقطة (z, y, x) نقطة تقع على الكرة التي مركزها m (y, k, h) ، فإنه يجب أن تكون المسافة بين A و M تساوي r

نفترض أن النقطة A(x, y, z) نقطة تقع على الكرة التي مركزها m(h, k, l) نستخدم صيغة المسافة بين نقطتين.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2}$$
$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2$$

استعمل الصيغة العامة لمعادة الكرة التي وجدتها في السؤال48، لإيجاد معادلة الكرة المعطى مركزها، وطول نصف قطرها في كل مما يأتي:

$(x + 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$ (49

$(x - 6)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = \frac{1}{4}$ (50

51) $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=3$

52) $x^2+(y-7)^2+(z+1)^2=144$

53) $(0, 3.5, -4)$

54) إجابة ممكنة: يمكن استعمال بُعدين أكثر منطقية عند وصف موقع على الخارطة؛ لأن الخارطة نفسها مرسومة ببعدين. ويكون استعمال ثلاثة أبعاد أكثر منطقية عند وصف موقع على الكرة الأرضية؛ لأن للكرة الأرضية أبعاداً ثلاثة.

مراجعة تراكمية

أوجد الصورة الإحداثية وطول $\overline{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

55) $(-13, -3), \sqrt{178}=13.3$

56) $(5, 14), \sqrt{221}=14.9$

57) $(6, 18), \sqrt{360}=19.0$

اكتب $\overline{DE}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته بدلالة متجهي الوحدة i,j في كل مما يأتي:

$\frac{21}{5}i + -\frac{2}{3}j$ (58

$\frac{1}{4}\ i + \frac{1}{7}\ j$ (59–

$15.8i + -6.1j$ (60–

تدريب على اختبار:

B (61

1-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

تحقق

1A) 0؛ متعامدان

1B) 4؛ غير متعامدين

2) 124.6°

3A)

$$\begin{aligned}&(u \times v)\cdot u\\&= \langle 9,-21,-6\rangle\cdot\langle 4,2,-1\rangle\\&= 9(4)+(-21)(2)+(-6)(-1)\\&= 36+(-42)+6\\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(u \times v)\cdot v\\&= \langle 9,-21,-6\rangle\cdot\langle 5,1,4\rangle\\&= 9(5)+(-21)(1)+(-6)(4)\\&= 45+(-21)+(-24)\\&= 0\end{aligned}$$

3B)

$$\begin{aligned}&(u \times v)\cdot u\\&= \langle -1,-7,3\rangle\cdot\langle -2,-1,-3\rangle\\&= (-1)(-2)+(-7)(-1)+3(-3)\\&= 2+7+(-9)\\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(u \times v)\cdot v\\&= \langle -1,-7,3\rangle\cdot\langle 5,1,4\rangle\\&= (-1)(5)+(-7)(1)+3(4)\\&= -5+(-7)+12\\&= 0\end{aligned}$$

4) $\sqrt{545}$ أو حوالي 23.35 وحدة مربعة.

5) 86 وحدة مكعبة.

تدرب وحل المسائل:

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u,v في كل مما يأتي، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أو لا:

1) 0؛ متعامدان

2) 14؛ غير متعامدين

3) 0؛ متعامدان

4) 15 –؛ غير متعامدين

5) 8 –؛ غير متعامدين

6) 0؛ متعامدان

7) كيمياء: 109.5°

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u,v في كل مما يأتي، قرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

8) 88.9°

9) 45.4°

37.5° (10

152.3° (11

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u,v في كل مما يأتي، ثم بين ان u×v عمودي على كل من :u,v

(21, 7, 0) (12

$$\begin{aligned}&(u\times v)\cdot u\\&=\langle 21,7,0\rangle\cdot\langle -1,3,5\rangle\\&=21(-1)+7(3)+0(5)\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(u\times v)\cdot v\\&=\langle 21,7,0\rangle\cdot\langle 2,-6,-3\rangle\\&=21(2)+7(-6)+0(-3)\\&=0\end{aligned}$$

(25, 6, 71) (13

$$\begin{aligned}&(u\times v)\cdot u\\&=\langle 25,6,71\rangle\cdot\langle 4,7,-2\rangle\\&=25(4)+6(7)+71(-2)\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(u\times v)\cdot v\\&=\langle 25,6,71\rangle\cdot\langle -5,9,1\rangle\\&=25(-5)+6(9)+71(1)\\&=0\end{aligned}$$

(38, 26, 21) (14

$$\begin{aligned}&(u\times v)\cdot u\\&=\langle 38,26,21\rangle\cdot\langle 3,-6,2\rangle\\&=38(3)+26(-6)+21(2)\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(u\times v)\cdot v\\&=\langle 38,26,21\rangle\cdot\langle 1,5,-8\rangle\\&=38(1)+26(5)+21(-8)\\&=0\end{aligned}$$

15) (7, 23, 12)

$$\begin{aligned}&(u\times v)\cdot u\\&=\langle 7,23,12\rangle\cdot\langle -2,-2,5\rangle\\&=7(-2)+23(-2)+12(5)\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(u\times v)\cdot v\\&=\langle 7,23,12\rangle\cdot\langle 7,1,-6\rangle\\&=7(7)+23(1)+12(-6)\\&=0\end{aligned}$$

أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه u,v ضلعان متجاوران في كل مما يأتي:

16) $13\sqrt{9}$ أو 56.7 وحدة مربعة تقريباً.

17) $\sqrt{186}$ أو 13.6 وحدة مربعة تقريباً.

18) $\sqrt{6821}$ أو 82.6 وحدة مربعة تقريباً.

19) $3\sqrt{74}$ أو 25.8 وحدة مربعة تقريباً.

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه t,u,v أحرف متجاورة في كل مما يأتي:

20) 429 وحدة مكعبة

21) 85 وحدة مكعبة

22) 40 وحدة مكعبة

23) 69 وحدة مكعبة

أوجد متجهاً غير صفري يعامد المتجه المعطى في كل مما يأتي:

24) إجابة ممكنة: (4, 3, 3)

25) إجابة ممكنة: (5, 5, 3)

26) إجابة ممكنة: (1, 9, 1)

27) إجابة ممكنة: (– 8, 0, 7)

إذا علم كل من v, u.v فأوجد u في كل مما يأتي:

28) إجابة ممكنة: (3, 4, 2)

29) إجابة ممكنة: (– 1, – 3, 4)

30) إجابة ممكنة: (– 3, 1, – 7)

حدد مما إذا كانت النقاط المعطاة واقعة على استقامة واحدة:

31) ليست على استقامة واحدة

32) ليست على استقامة واحدة

حدد ما إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أو لا:

33) متوازيان

34) غير متوازيين

$\langle 1,4,4\sqrt{3} \rangle$ (35

حدد مما إذا كان الشكل الرباعي ABCD المعطاة إحداثيات رؤوسه متوازي أضلاع، وإذا كان كذلك فأوجد مساحة سطحه، وحدد ما إذا كان مستطيلاً أو لا:

36) ليس متوازي أضلاع

37) متوازي أضلاع؛ 9.4 وحدة مربعة تقريباً؛ مستطيل.

38) عرض جوي:

إجابة ممكنة: لا؛ لأن الزاوية بين المتجهين لا تساوي 0° ولا 180° ، و عليه فالمتجهان غير متوازيين

إذا كان: $u = \langle 3,2,-2 \rangle, v = \langle -4,4,5 \rangle$ ، فأوجد كلا مما يأتي إن أمكن:

0 (39

40) ليس ممكناً، لأن $u \cdot v$ كمية قياسية و ليست متجهاً، و الضرب الاتجاهي يكون لمتجهين

إذا كانت v, w, u تمثِّل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي السطوح في الشكل المجاور، وكان حجمه 7 وحداٍ ت مكعبة، فما قيمة C؟

41) حجم متوازي السطوح يساوي $\left| u \cdot (v \times w) \right|$

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2i + k$$

$$u \cdot (v \times w) = \langle C, -3, 1 \rangle \cdot \langle 2, 0, 1 \rangle$$
$$= 2C + 1$$

$$|2C + 1| = 7$$

إذن $C = 3$ أو $C = -4$

مسائل مهارات التفكير العليا:

42) تبرير: دائماً صحيحة، إجابة ممكنة: الضرب الاتجاهي في الفضاء يعطي متجهاً يعامد كلاً من المتجهين الأصليين.

43) تحد: 2

44) تبرير: إجابة ممكنة: إن تعريف الضرب الاتجاهي للمتجهين a, b هو متجه عمودي على المستوى الذي يحوي كلاً من a, b. وللحصول على متجه عمودي على مستوى ثنائي الأبعاد تحتاج لبعد ثالث.

45) اكتب: إجابة ممكنة: للتحقق من توازي أو تعامد متجهين، يمكنك استعمال قاعدة حساب الزاوية بين متجهين، إذا كان قياس الزاوية $0°$ أو $180°$ ، يكونان متوازيين، وإذا كان قياسها $90°$ يكونان متعامدين. يمكنك كذلك إيجاد الصورة الإحداثية للمتجهين واستعمال النسب بين الإحداثيات المتناظرة للتحقق مما إذا كان المتجهان متوازيين، إذا كانت النسب بين الإحداثيات الثلاثة المتناظرة في الصيغة المركبة نفسها، يكون المتجهان متوازيين، ولا يمكن استعمال هذه الطريقة إذا كان المتجهان متعامدين. وللتحقق من تعامد متجهين يمكنك إيجاد الضرب الداخلي بينهما، فإذا كان الناتج صفراً يكون المتجهان متعامدين، لا يمكن استعمال طريقة الضرب الداخلي هذه للتحقق من التوازي.

مراجعة تراكمية

أوجد طول كل قطعة مستقيمة مما يأتي، والمعطاة نقطتا طرفيها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها:

46) $22.67;\ \left(-\frac{1}{2}\ ,16,\frac{7}{2}\right)$

47) $23.71;\ \left(\frac{33}{2}\ ,9,-\frac{37}{2}\right)$

48) $36.62;\ \left(-6\ ,17\ ,-\frac{7}{2}\right)$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين v,u في كل مما يأتي ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا:

49) 22 –؛ ليسا متعامدين

50) 58 –؛ ليسا متعامدين

51) 33 –؛ ليسا متعامدين

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية، مستعملاً قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع ثم حدد إتجاهها بالنسبة للأفقي:

52) $3\ cm,\ 45^\circ$

53) $0.5\ cm,\ 60^\circ$

تدريب على اختبار:

D (54

A (55

دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك:

حدد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) خطأ؛ ينتهي عنده

2) خطأ؛ $-4(3) + 1(2)$

3) صحيحة

4) خطأ؛ الصورة الإحداثية للمتجه

5) صحيحة

6) خطأ؛ 90°

7) صحيحة

8) صحيحة

9) خطأ؛ $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

مراجعة الدروس:

1–1: مقدمة في المتجهات:

حدد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كل مما يأتي:

10) كمية متجهة

11) كمية قياسية

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملا المسطرة والمنقلة:

12) $6.3\ cm, 11^\circ$

13) $1.2\ cm, 130^\circ$

14) $2.8\ cm, 297^\circ$

15) $4.8\ cm, 195^\circ$

16) 80 m للشرق

17) 20 N للخلف

2–1: المتجهات في المستوى الإحداثي:

أوجد الصورة الإحداثية وطول AB المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

18) $(6, 1);\ \sqrt{37} \approx 6.1$

19) $(-16, 8);\ \sqrt{320} = 8\sqrt{5} \approx 17.9$

20) $(14, 5);\ \sqrt{221} \approx 14.9$

21) $(1, 5);\ \sqrt{26} \approx 5.1$

إذا كان $\mathbf{p} = \langle 4,0 \rangle, \mathbf{q} = \langle -2,-3 \rangle, \mathbf{t} = \langle -4,2 \rangle$ فأوجد كلا مما يأتي:

22) $(-8, -6)$

23) $(-4, 4)$

24) $(-18, -1)$

25) $(10, 11)$

أوجد متجه وحدة u باتجاه v في كل مما يأتي:

26) $\left\langle -\frac{7\sqrt{53}}{53}, \frac{2\sqrt{53}}{53} \right\rangle$

27) $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

$$\left\langle -\frac{5\sqrt{89}}{89}, \frac{8\sqrt{89}}{89} \right\rangle \quad (28$$

$$\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle \quad (29$$

1–3: الضرب الداخلي:

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u,v في كل مما يأتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا:

30) 1 –؛ غير متعامدين

31) 48؛ غير متعامدين

32) 0؛ متعامدان

33) 7؛ غير متعامدين

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u,v في كل مما يأتي:

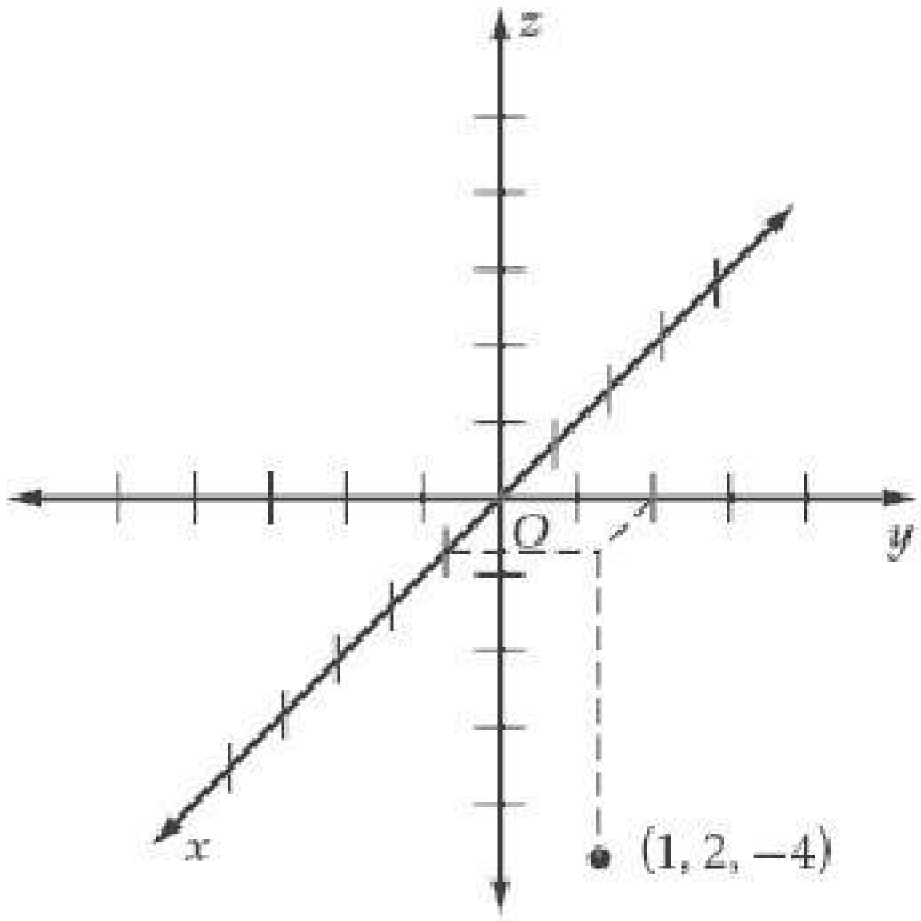
34) 135°

35) 70.6°

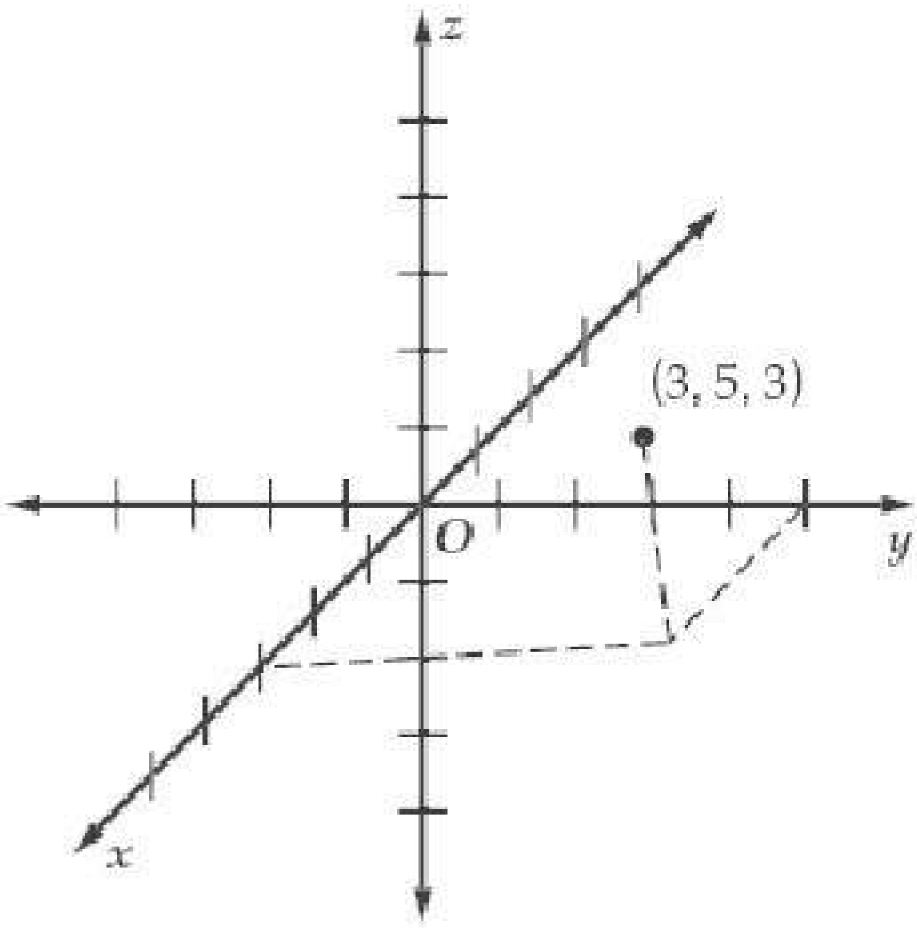
41-: المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد:

عين كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد:

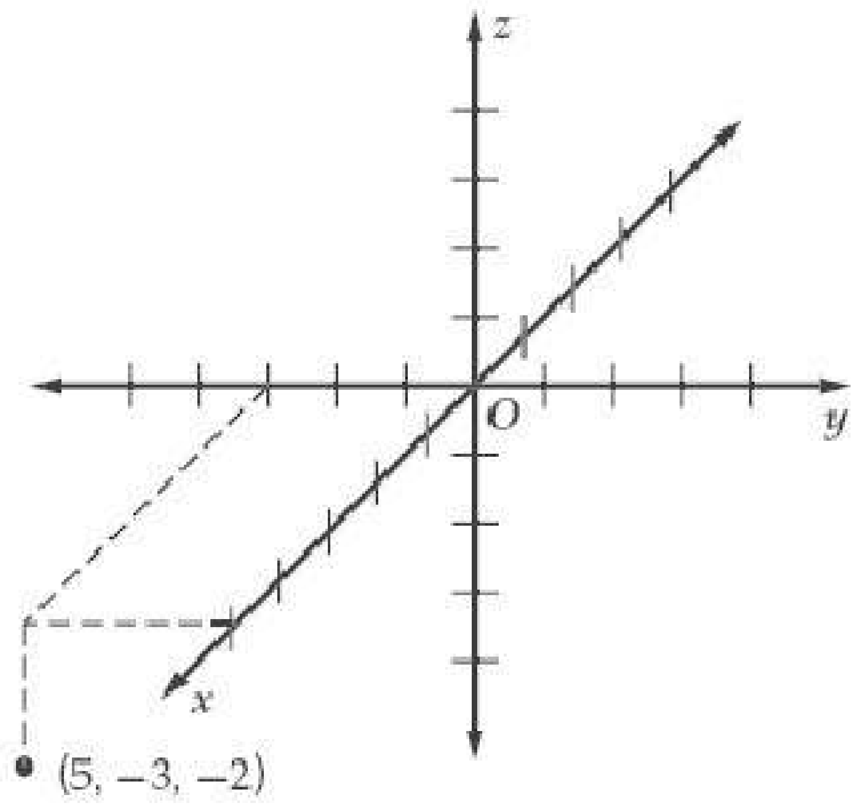
36)



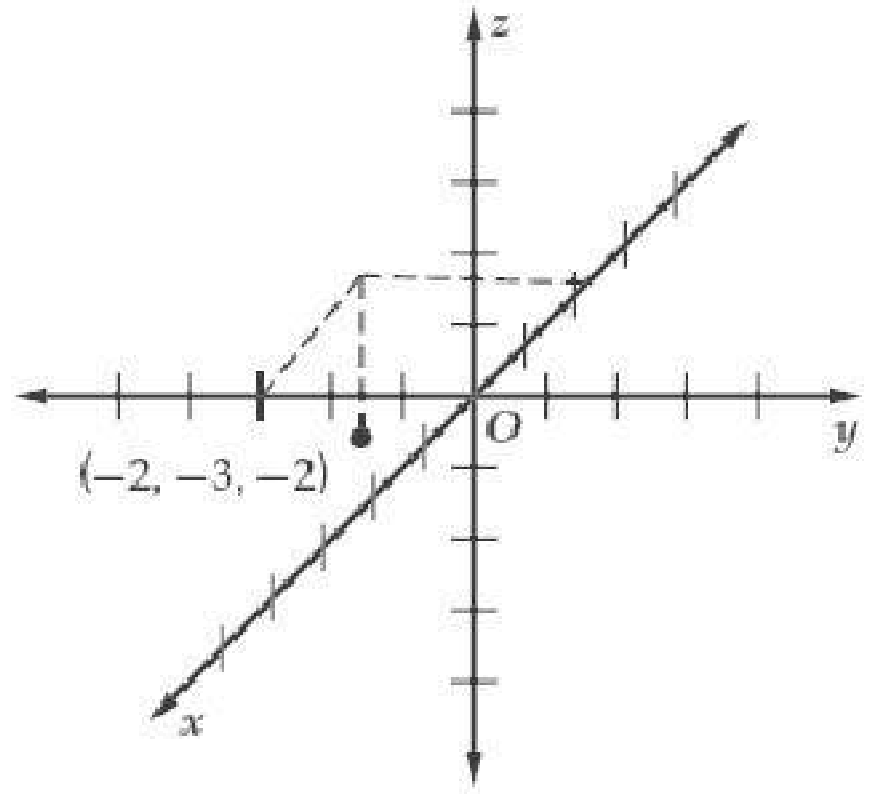
37)



(38



(39



أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا طرفيها في كل مما يأتي، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها:

12.33; (– 1, 5, 6) (40

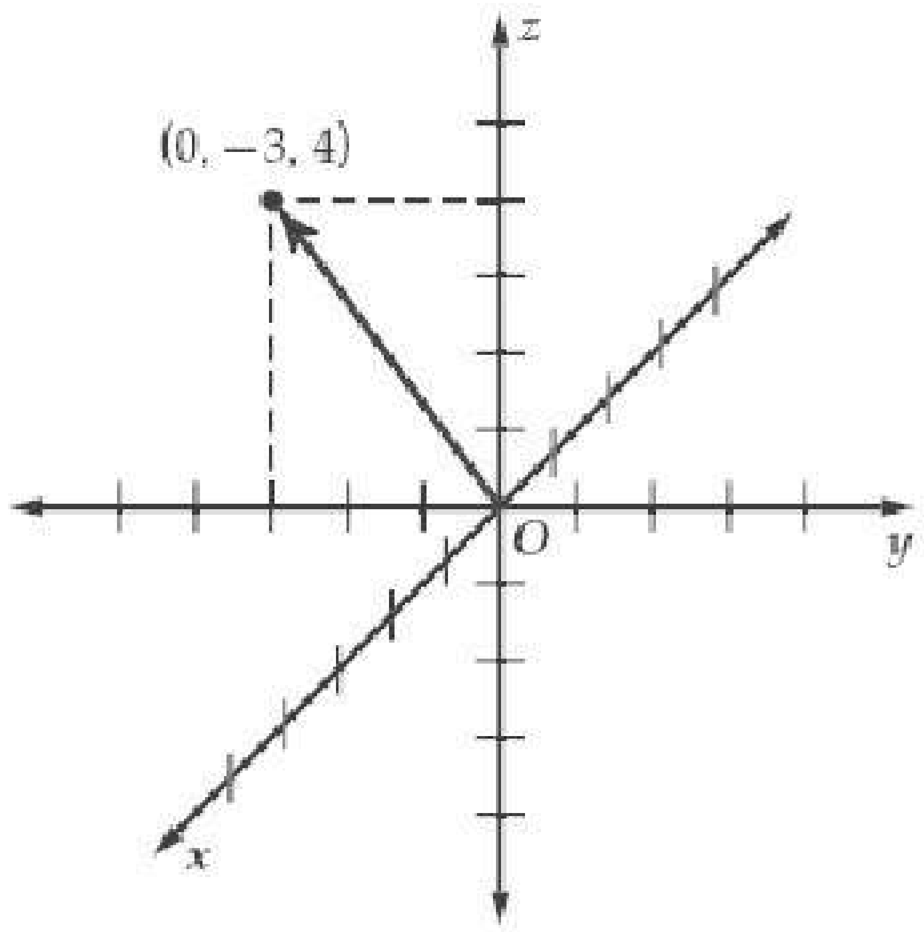
10.77; (– 7, 2, 1) (41

17.44; (– 3, – 4, 2) (42

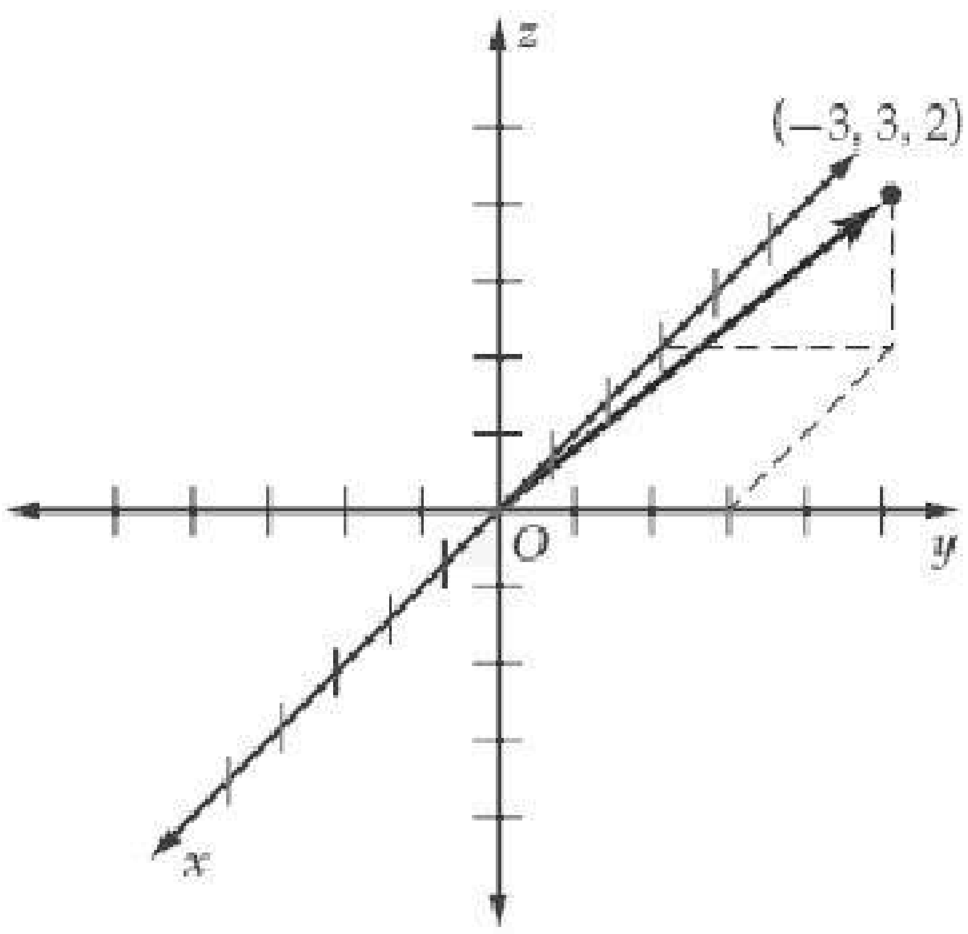
15.52; (2, – 1.5, 4) (43

مثل بيانياً كلاً من المتجهات الآتية في الفضاء:

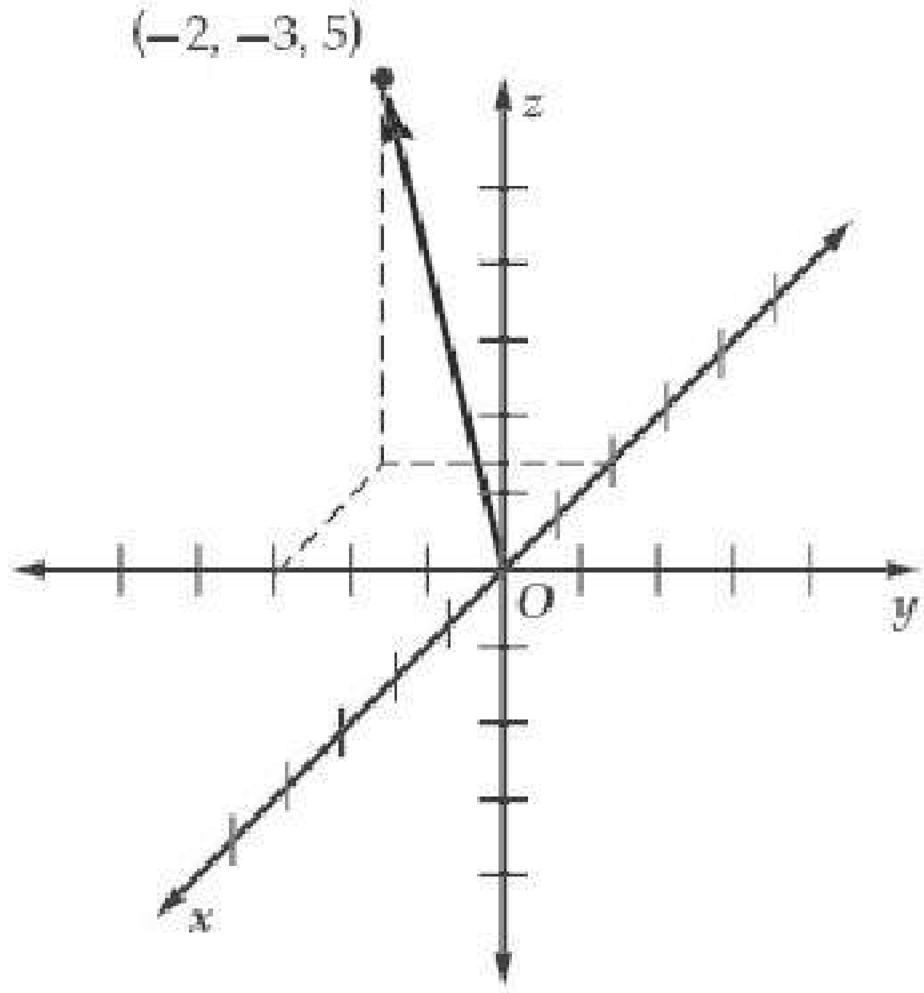
(44



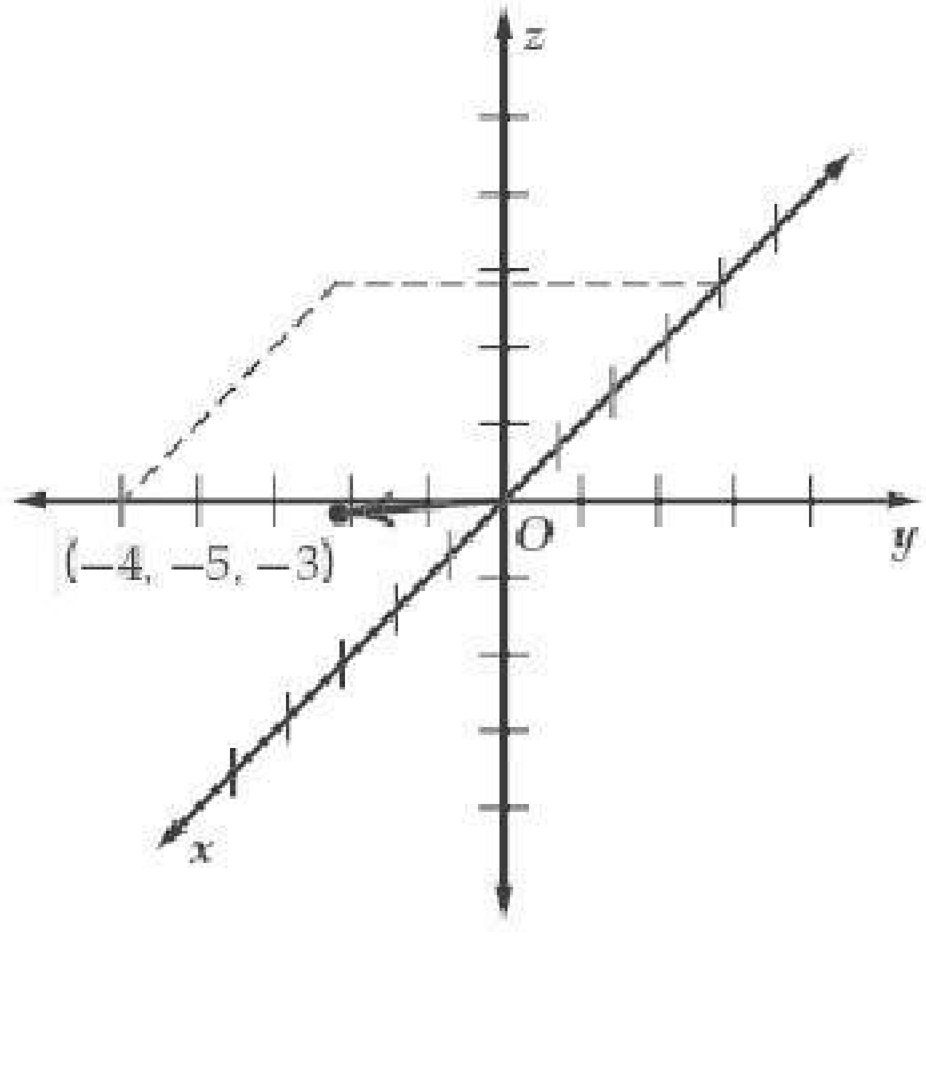
(45



(46



(47



5–1: الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء:

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u,v في كل مما يأتي، ثم حدد مما إذا كانا متعامدين أو لا:

48) 0؛ متعامدان

49) 48 –؛ غير متعامدين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u,v في كل مما يأتي ، ثم بين أن u×v يعامد كلا من u,v:

50) $(17, -1, 10), (17, -1, 10)\cdot(1, -3, -2) = 0$

$, (17, -1, 10)\cdot(2, 4, -3) = 0$

51) $(-9, -6, -21), (-9, -6, -21)\cdot(4, 1, -2) = 0$

$, (-9, -6, -21)\cdot(5, -4, -1) = 0$

تطبيقات ومسائل:

52) كرة قدم: 49.8 ft/s تقريباً، 23.2 ft/s تقريباً

53) طيران: (108.3, – 19.1)

54) صناديق: 509J

55) أقمار اصطناعية:

a) 118598 mi تقريباً

b) (– 1494, 1621.5, 2294.5)

c) إجابة ممكنة: لا يمكن وجود قمر ثالث؛ لأن إحداثياته ستكون داخل الأرض؛ و ذلك لان القيمة المطلقة لجميع احداثيات موقع القمر الثالث أقل من نصف قطر الأرض

56) $\langle 3,0,0\rangle \cdot (\langle 0,4,0\rangle \cdot \langle 0,0,5\rangle) = 60\mathbf{m}^3$

- اختبار الفصل

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، او قاعدة متوازي الأضلاع. قرب المحصلة إلىأقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملاً المسطرة والمنقلة:

1) $0.8\ \text{cm}, 25^\circ$

2) $4.6\ \text{cm}, 8^\circ$ تقريباً

أوجد الصورة الإحداثية وطول AB المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

3) $(-6, 4), \sqrt{52} \approx 7.2$

4) $\left\langle \frac{-3}{2}, \frac{11}{2} \right\rangle ، \sqrt{32.5} \approx 5.7$

5) كرة قدم: $33.7\ \text{m/s}$; 22° تقريباً

أوجد متجه وحدة باتجاه u في كل مما يأتي:

6) $\left\langle \frac{-\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17} \right\rangle$

7) $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}\right)$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u,v في كل مما يأتي ثم بين ما إذا كانا متعامدين أو لا:

8) 16 –؛ غير متعامدين

9) 0؛ متعامدان

10) 14 –؛ غير متعامدين

11) D

إذا كان a=(2,4,–3) , b=(–5 , –7 , 1) , c=(8 , 5 , –9) فأوجد كلا مما يأتي:

12) (– 45, – 42, 26)

13) (– 1, – 21, 1)

14) بالونات الهواء الساخن:

a) 53.9 ft

b) $\left(-\frac{9}{2}, 20, 20\right)$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u,v في كل مما يأتي:

15) 27.9°

16) 110.8°

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u,v في كل مما يأتي ثم بين أن u×v يعامد كلا من u,v :

17) $\langle 65, 16, -59\rangle$,

$\langle 65, 16, -59\rangle \cdot \langle 1, 7, 3\rangle = 65\,(1) + 16\,(7) + (-59)\,(3) = 0$

$\langle 65, 16, -59\rangle \cdot \langle 9, 4, 11\rangle = 65\,(9) + 16\,(4) + (-59)\,(11) = 0$

المتجه $u \times v$ يعامد كلا من المتجهين u , v

18) $-7i - 17j + 8k$,

$\langle -7, -17, 8\rangle \cdot \langle -6, 2, -1\rangle = (-7)\,(-6) + (-17)\,(2) + 8\,(-1) = 0$

$\langle -7, -17, 8\rangle \cdot \langle 5, -3, -2\rangle = (-7)\,(5) + (-17)\,(-3) + 8\,(-2) = 0$

المتجه $u \times v$ يعامد كلا من المتجهين u , v