

الفصل الأول : المتجهات

مقدمة في المتجهات (Introduction of vector)

تنقسم الكميات الفيزيائية إلى نوعين هما و

الكميات القياسية لها فقط مثل

الكميات المتجهة لها و مثل

مثال (١) حدد الكميات القياسية والكميات المتجهة في كل مما يأتي :

١/ تسير سيارة بسرعة 60 mi / h وبزاوية 150° باتجاه شرق جنوب ؟

٢/ هبوط مظلي رأسياً لأسفل بسرعة 12.5 mi/ h ؟

٣/ دفع طفل مزلجة بقوة مقدارها 40 N ؟

٤/ رمى طفل حجر رأسياً لأعلى بسرعة 50 ftL / h ؟

القطعة المستقيمة المتجهة هي قطعة مستقيمة لها و

هي

يرمز لهذا المتجه بـ أو

المتجه القياسي : متجه بدايته

طول المتجه a يرمز له بالرمز

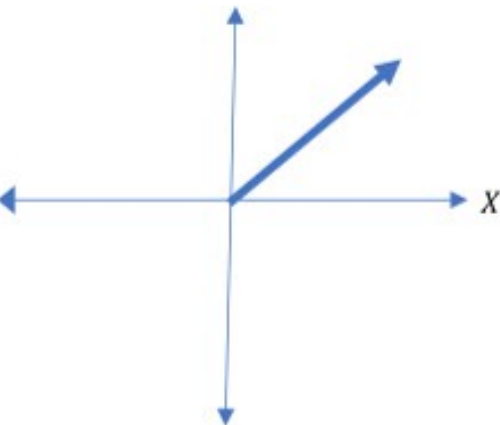
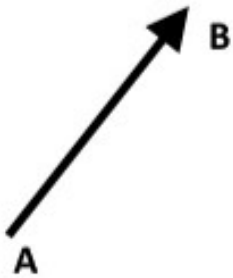
ونهايته

اتجاه المتجه

١/ الزاوية مع الأفقي (الاتجاه الموجب لمحور

٢/ زاوية الاتجاه

٣/ الاتجاه



قد تكون المتجهات :

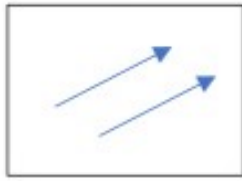
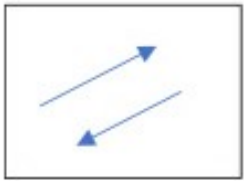
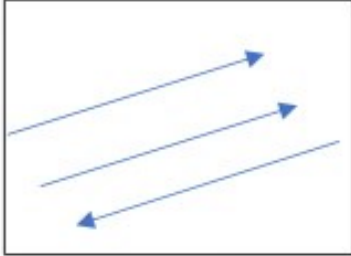
١/ متوازية لا يتقاطعان وهما

٢/ متكافئة لها

و

وعكس

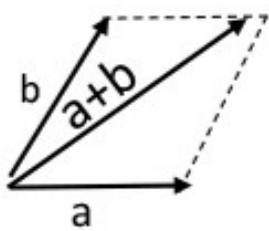
٣/ متعاكسة لها نفس



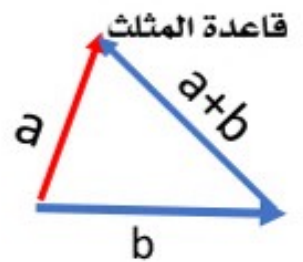
المحصلة

إذا كان للمتجهان نفس الاتجاه

وإذا كانا في اتجاهين مختلفين



قاعدة متوازي الأضلاع



قاعدة المثلث

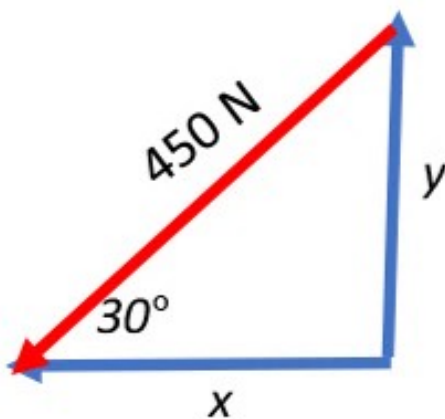
تحليل القوى إلى مركبتين متعامدتين

المركبة الأفقية

$$|x| = 450 \cos 30^\circ$$

المركبة الرأسية

$$|y| = 450 \sin 30^\circ$$



/ المتجهات في المستوى الإحداثي

التعبير عن المتجه \overrightarrow{OP} ف في الوضع القياسي

الصورة الإحداثية لمتجه \overrightarrow{AB}	توافق خطي $\langle x, y \rangle$	باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها \vec{v} مع x الموجبة
حيث $A = (X_1, Y_1)$ و $B = (X_2, Y_2)$ $\overrightarrow{AB} =$ $\langle \quad \quad \quad \rangle$ - نقطة النهاية - نقطة البداية	$=Xi+Yj$	

مثال ١ / أوجد الصورة الإحداثية لـ \overrightarrow{AB} المعطاه نقطتا بدايته ونهايته $A = (-2, -7)$ و

$$B = (6, 1),$$

مثال ٢ / أوجد طول المتجه \overrightarrow{AB} في المثال السابق ؟

مثال ٣ / أوجد متجه الوحدة في اتجاه \overrightarrow{AB} ؟

مثال ٤ / عبر عن المتجه \overrightarrow{AB} في صورة توافق خطي ؟

مثال تطبيقي / إذا كانت $A = (0, 8)$, $B = (-9, -3)$ أوجد :

$ \vec{AB} =$	$\vec{AB} =$
عبر عن \vec{AB} بصورة توافق خطي لمتجهي الوحدة	أوجد متجه وحدته له نفس اتجاه \vec{AB}

العمليات على المتجهات :

إذا كان $w = \langle -4, 1 \rangle$, $z = \langle -3, 0 \rangle$, $y = \langle 2, 5 \rangle$ فأوجد :

$2w + 4y - z$	$y + z$
---------------	---------

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه V طوله $|V| = 8$ وزاوية اتجاهه 45° مع الأفقي ؟

$$V = \langle |v|\cos\theta, |v|\sin\theta \rangle$$

$$V = \langle | \quad | \cos \quad , | \quad | \sin \quad \rangle$$

$$V = \langle \left(\quad \right) \frac{\sqrt{2}}{2} , \left(\quad \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$$

$$V = \langle \quad , \quad \rangle$$

$$|V| = 24 \quad , \quad \theta = 210^\circ \quad \text{تدريب (١)}$$

زاوية اتجاه المتجه $|V| = \langle a, b \rangle$ مع X الموجبة

$$\tan\theta = \frac{|v|\sin\theta}{|v|\cos\theta} \quad \text{أو} \quad \tan\theta = \text{—————}$$

أوجد زاوية اتجاه المتجه $-6i + 2j$ مع X ؟

تدريب (٢) أوجد زاوية اتجاه المتجه $\langle -3, -8 \rangle$ ؟

٢/ الضرب الداخلي القياسي DOT PRODUCT

يُعرف الضرب الداخلي للمتجهين $a = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $b = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالتالي :

$$a \cdot b =$$

يكون المتجهان غير الصفريين a, b متعامدين إذا وفقط إذا كان

مثال ٢/ $U = \langle -2, -3 \rangle, V = \langle 9, -6 \rangle$	مثال ١/ أوجد الضرب الداخلي للمتجهين وتحقق ما إذا كانا متعامدين ؟ $U = \langle 3, -2 \rangle, V = \langle -5, 1 \rangle$
--	---

خصائص الضرب الداخلي :

$U \cdot V =$	الإبدال
$U \cdot (V + W) =$	التوزيع
$0 \cdot U =$	الضرب في المتجه الصفري
$U \cdot U =$	الضرب في نفسه

مثال ١/ استعمل الضرب الداخلي لإيجاد طول كل من المتجهات التالية :

$c = \langle -1, -7 \rangle$	$b = \langle 12, 16 \rangle$ $ b = \sqrt{b \cdot b}$ $= \sqrt{\langle \quad, \quad \rangle \langle \quad, \quad \rangle}$ $= \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$ $= \sqrt{\quad + \quad}$ $= \sqrt{\quad} = 20$
------------------------------	---

الزاوية بين متجهين



إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين a, b فإن : $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$

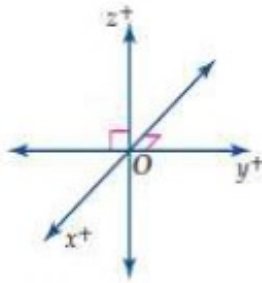
مثال / أوجد قياس الزاوية بين المتجهين u, v حيث $u = \langle -9, 0 \rangle$ و $v = \langle -1, -1 \rangle$ ؟

س : أوجد قياس الزاوية بين المتجهين u, v ؟

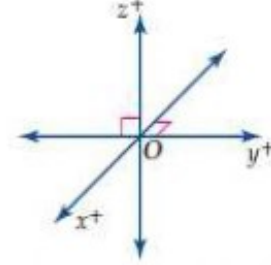
$$u = \langle 9, 5 \rangle \text{ و } v = \langle -6, 7 \rangle$$

$$u = \langle -5, -2 \rangle \text{ و } v = \langle 4, 4 \rangle$$

عين كلاً من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات القطبية



(- 2 . 4 . - 5)



(4 . 6 . 2)

قانون المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

تعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$

$$AB = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2 + (\quad)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف $M = \left(\frac{\quad}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{\quad}{2} \right)$

مثال / أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها

(- 4 . 10 . 14) . (1 . 0 . 9)

الطول	نقطة المنتصف

تدريب / إذا كانت $A = \langle -2 . -5 . -5 \rangle$ و $B = \langle -1 . 4 . -2 \rangle$ أوجد :

الصورة الإحداثية لـ \overrightarrow{AB}	
طول \overrightarrow{AB}	

	متجه الوحدة باتجاه \overrightarrow{AB}
	منتصف \overrightarrow{AB}

مثال / إذا كانت $y = \langle 3, -6, 2 \rangle$ و $w = \langle -1, 4, -4 \rangle$ و $z = \langle -2, 0, 5 \rangle$ فأوجد :

$4w - 8z$	$3y + 3z - 6w$

(٥) الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

<p>مثال (١) أوجد $u \cdot v$ وحدد ما إذا كانا متعامدين أم لا ؟ $u = \langle 3, -5, 4 \rangle$ و $v = \langle 5, 7, 5 \rangle$</p>	<p>مثال (٢) أوجد الزاوية بين المتجهين حيث $u = -4i + 2j + k$. $v = 4i + 3k$</p>

الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان $a = a_1i + a_2j + a_3k$ و $b = b_1i + b_2j + b_3k$ فإن :

$$\begin{aligned} a \times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k \\ &= (\quad)i - (\quad)j + (\quad)k \end{aligned}$$

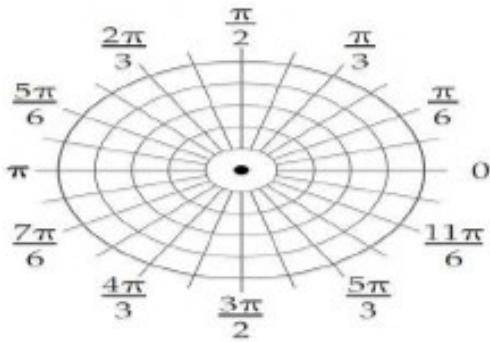
من الأمثلة على الضرب الاتجاهي للمتجهات حساب مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه ضلعان متجاوران و حساب حجم متوازي السطوح الذي فيه أحرف متجاورة

<p>مثال (٢) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $u = 2i + 4j - 3k$, $t = 4i - 2j - 2k$ أحرف متجاورة</p>	<p>مثال أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه $u = 2i + 4j - 3k$. $v = i - 5j + 3k$ ضلعان متجاوران</p>

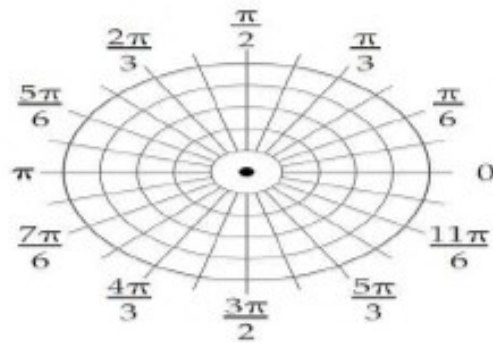
الباب الثاني : الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

مثال / مثل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي

$$A \left(3 , \frac{\pi}{6} \right)$$



$$F \left(-2 , \frac{2\pi}{3} \right)$$



المسافة بين نقطتين بالصورة القطبية

افرض أن $P_1 = (r_1 , \theta_1)$. $P_2 = (r_2 , \theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي ، تعطى المسافة $P_1 P_2$ كالتالي :

$$P_1 P_2 = \sqrt{\quad}$$

مثال / أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط فيما يأتي :

$$P_1 = (2 , 30^\circ) \quad .. \quad P_2 = (5 , 120^\circ)$$

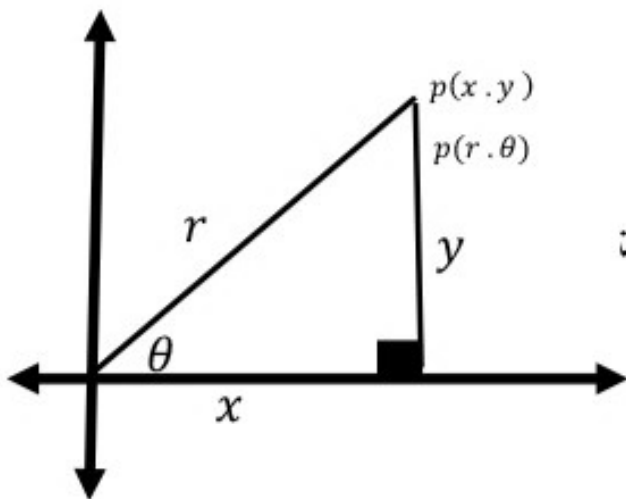
تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

$$x = \quad , \quad y = \quad$$

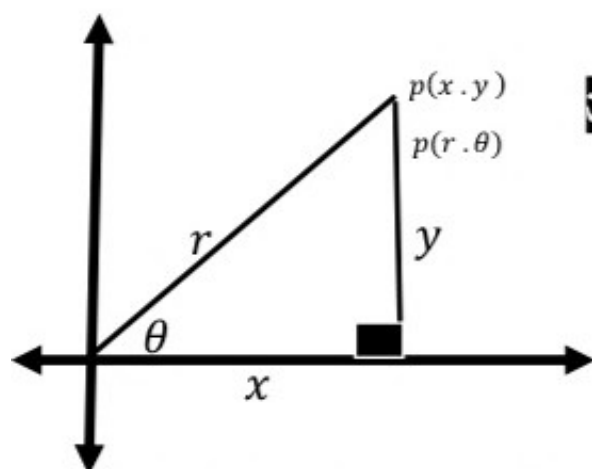
$$(x , y) = (\quad , \quad)$$

مثال (١) حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية

$$p \left(4 , \frac{\pi}{6} \right)$$



$$Q\left(2, \frac{\pi}{2}\right) (٢)$$



تحويل الاحداثيات الديكارتية إلى الاحداثيات القطبية

$$r = \sqrt{\quad}$$

$$\tan \theta = \quad$$

$$\theta = \tan^{-1} \quad . \quad \text{If } x > 0$$

$$\theta = \tan^{-1} \quad + \quad . \quad \text{If } x < 0$$

مثال / أوجد زوجين مختلفين كلا منهما يمثل إحداثيات قطبية لكل نقطة مما يأتي بالاحداثيات الديكارتية

(2 . 2)	$s (1 . - \sqrt{3})$

تحويل المعادلات الديكارتية إلى معادلات قطبية

مثال / حدد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية فيما يأتي ثم أكتب المعادلة على الصورة القطبية

$x^2 + (y - 3)^2 = 9$	$x^2 + y^2 = 9$

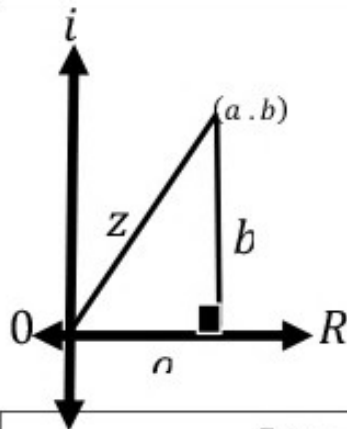
مثال / أكتب كل معادلة قطبية مما يأتي على الصورة الديكارتية وحدد نوع تمثيلها البياني

$\theta = \frac{\pi}{6}$	$r = 7$

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



مثل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب وأوجد قيمته المطلقة

$z = -2 - i$	$z = 4 + 3i$

الصورة القطبية للعدد المركب

الصورة القطبية او المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta, \quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

عندما $a > 0$ $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ أو عندما $a < 0$ $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} + \pi$

وعندما $a = 0$ فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$ و $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$

مثال : عبّر عن كل مما يأتي بالصورة القطبية

$4 + \sqrt{3} i$	$-6 + 8i$

مثال : مثل العدد في المستوى القطبي ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية

$z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها

للعدين المركبين $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ و $z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ فإن :

$$z_1 z_2 =$$

$$\frac{z_1}{z_2}$$

مثال : أوجد ناتج كل مما يأتي ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية

$6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

نظرية دي موافر

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدداً مركباً على الصورة القطبية وكان n عدد صحيح موجب فإن :

$$z^n =$$

مثال / إذا كانت $z = (4 + 4\sqrt{3}i)$ فأوجد z^4 ؟ عبّر عنه بالصورة الديكارتية

الجذور المختلفة

لأي عدد صحيح موجب n فإن للعدد المركب $r (\cos \theta + i \sin \theta)$ و n من الجذور النونية المختلفة ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة

مثال / أوجد الجذور التكعيبية للعدد ١ ؟

الباب الثالث / الاحتمال والإحصاء

من أهم المبادئ الأساسية للباحث في الإحصاء معرفة أساليب جمع البيانات ومن أهم هذه الأساليب

الدراسات المسحية جمع البيانات الأفضل (الاستبيان)

إذا شملت المجتمع الكلي تسمى تعداد عام ، وإذا شملت عدد محدود من المجتمع سميت عينه
تكون الدراسة منحاظه (مجموعة يتم اختيارها بحيث تعطي تفضيلاً لمجموعة معينة على أخرى)
وغير منحاظه (عند سحب كمية كبيرة نسبياً بدون تفضيل بشكل عشوائي)

بالملاحظة تتم دون تدخل من الباحث (رصد ردود فعل على أمر أو موقف)

التجريبية رصد نتائج أو رد فعل لموقف مصطنع (مجموعة تجريبية : تخضع لمعالجة فعلية و
مجموعة ضابطة : تخضع لمعالجة شكلية)

مثال : حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية تتضمن عينة منحاظه أو غير منحاظه وفسر إجابتك

(١) سؤال كل لاعب في فريق كرة السلة عن الرياضة التي يحب مشاهدتها على التلفاز	(٢) سحب 100 اسم عشوائياً من صندوق به أسماء المدرسة جميعهم وسؤالهم عن رأيهم في المقصف	(٣) الذهاب إلى ملعب كرة القدم وسؤال 100 شخص إختيروا عشوائياً عن رياضتهم المفضلة

مثال : أي مما يأتي يحدد المادة الأفضل بالنسبة للطلاب دون تحيز ؟

(١) هل تفضل المادة التي خرجت من حصتها الآن ؟	(٢) أيهما تفضل أكثر العلوم ام الرياضيات ؟	(٣) ما مادتك المفضلة ؟

مثال : حدد ما إذا كان الموقف الآتي يمثل دراسة تجريبية أو بالملاحظة او مسحية وفي حالة
الدراسة التجريبية حدد كلاً من المجموعتين التجريبية والضابطة ثم بين إن وجد تحيز او لا ؟

اختير 80 طالبا جامعياً نصفهم درس الإحصاء في المدرسة الثانوية وقارن نتائج المجموعتين في مساق للإحصاء ثم تدريسه في الجامعة	اختير 200 طالبا عشوائياً من مدرسة ثانوية واستطلعت آراؤهم حول وسيلة المواصلات المدرسية على مقياس متدرج الألوان (أوافق بشدة - اوافق - غير موافق - غير موافق بشدة - اعتذر)

اختير 220 شخص عشوائياً وقسمهم إلى مجموعتين إحداهما تقوم بالتدريبات الرياضية لمدة ساعة واحدة يومياً والأخرى لا تقوم بهذه التدريبات ثم قارن بين الكتل للمجموعتين	اختير 200 طالب نصفهم يمارس كرة القدم وقارن فترة النوم بين المجموعتين

الارتباط : وجود ظاهرتين كل منهما تؤثر في الأخرى (أو وجود أكثر من سبب)

السببية : ظاهرتين يكون وقوع أحدهما سبب لوقوع الأخرى (وجود سبب واحد فقط)

مثال : بين ما إذا كانت العبارة تظهر ارتباطاً ، أو سببية ثم فسر إجابتك ؟

عندما أدرس أحصل على تقدير ممتاز	عندما ترى الشمس يكون النهار قد طلع	إذا رفعت أثقالاً التحق بفريق كرة القدم	إذا كانت السماء صافية فإنها لا تمطر

التحليل الإحصائي

بعد جمع البيانات من الدرس السابق الان نحتاج إلى تفسير لها

البيانات في متغير واحد هي البيانات التي تشتمل على متغير واحد

مقاييس النزعة المركزية	مقاييس التشتت
لأنها تشير إلى منتصف البيانات أو مركزها أهمها	مقدار تقارب أو تباعد البيانات عن المتوسط وأهمها مقاييس الانحراف المعياري والتباين

هامش خطأ المعاينة

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي فإنه يمكن تقريب هامش الخطأ في المعاينة بالقيمة

$$\pm \sqrt{\quad}$$

في دراسة مسحية عشوائية شملت 3247 قال 41% منهم أنهم مرتاحين بالنهضة العلمية (١) ما هامش خطأ المعاينة ؟	(٢) ما لفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة أفراد المجتمع الكلي المرتاحين للنهضة العلمية ؟

قانون الانحراف المعياري

مجتمع كلي	عينه
$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (\quad)^2}{n}}$ حيث n عدد قيم المجتمع	$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (\quad)^2}{n}}$ حيث n عدد قيم العينة

مثال / أحسب الانحراف المعياري للدرجات 1 . 2 . 3 . 4 . 5 ؟

إذا كانت مجتمع كلي	إذا كانت عينة

x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$

$$\mu = \bar{x} = \frac{\quad}{5} =$$

لاحظ أنه (١) إذا لم يوجد μ نعوض بـ \bar{x}

(٢) كذلك كلما زاد زاد تباعد البيانات عن

(٣) معظم البيانات تقع ضمن واحد عن وجميعها يقع تقريباً ضمن
انحرافين معياريين عن المتوسط

تدريب / في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة أي مما يأتي لا يؤثر في الوسيط ؟

- (١) مضاعفة كل عدد
- زيادة كل عدد بمقدار 10
- زيادة القيمة الصغرى فقط
- زيادة القيمة الكبرى فقط

مثال / متوسط درجات c طالباً يساوي 80 ومتوسط درجات d طالباً هو 85 ومتوسط الصفين معاً 82 فإن حاصل قسمة c على d يساوي

يسمى احتمال وقوع الحادثة A بشرط وقوع الحادثة B إحتمالاً مشروطاً

$$p(B/A) = \frac{p(\quad)}{p(\quad)}$$

مثال : يحتوي كيس على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الأحمر والأخضر والأزرق والأصفر ورقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13 إذا سحبت فاطمة بطاقة ، فما احتمال أن تحمل هذه البطاقة العدد 13 ؟ علماً بأن ما سحبتة كان العدد 11 أو 12 أو 13 ؟

الجدول التوافقيّة تسجيل بيانات ضمن خلايا حيث كل خلية من خلايا الجدول تمثل تكراراً أو تكراراً نسبياً

الحالة	عدد الأشخاص		المجموع
	دواء تجريبي (D)	دواء شكلي (p)	
مريض (s)	1600	1200	2800
معافى (H)	800	400	1200
المجموع	2400	1600	4000

أوجد احتمال بقاء الشخص معافى علماً أنه استعمل الدواء الشكلي ؟

الاحتمال :

النجاح :

الفشل

فضاء العينة

واحتمالها يساوي صفر

إما أن تكون الحادثة

أو واحتمالها يساوي 1

$$\geq \text{احتمال أي حادثه} \geq$$

احتمال الفشل

احتمال النجاح

$$P(f) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$P(s) = \underline{\hspace{2cm}}$$

الاحتمال باستعمال التوافيق

التوافيق هي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار r من الأشياء من بين n من الأشياء حيث الترتيب لا يهم

مثال : رشحت مدرسة 3 طلاب من الصف الثاني الثانوي و 11 طالباً من الصف الأول للتنافس على اربعة جوائز واختير 4 من الذين رشحوا بطريقة عشوائية فما احتمال ان يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول

التباديل : عدد الطرق التي يمكن اختيار r من الأشياء من بين n من الأشياء حيث الترتيب مهم

$${}_nP_r$$

مثال : اشترك محمد وعبدالله وعبدالرحمن في سباق 400 متر مع خمسة رياضيين آخرين ما احتمال ان ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في الثلاثة المراكز الأولى ؟

المتغير العشوائي : المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة

المتغير العشوائي المنفصل : متغير عشوائي له عدد محدود من القيم

مثال / عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة نتائج التجربة $x = \{1.2.3.4.5.6\}$ نسمي 1. 2. 3. 4. 5. 6 متغير عشوائي منفصل لأن عدده محدود

التوزيع الاحتمالي المنفصل : هي علاقة كل قيمة من قيم المتغير العشوائي ب احتمال حدوثها

ويمكن التعبير عن هذه العلاقة ب جدول أو معادلة أو تمثيل بياني

لاحظ أن : إذا القيت قطعة نقود مرة واحدة فإن عدد عناصر فضاء العينة =

مرتين = ثلاث مرات =

كذلك عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن عدد عناصر فضاء العينة =

مرتين -

يجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي الشرطين التاليين :

(١)

(٢)

مثال / عند رمي قطعتي نقود متميزتين مرة واحدة (نفس فراغ العينة عند إلقاء قطعة واحدة مرتين) أوجد قيم المتغير العشوائي X الذي يدل على ظهور الشعار ؟

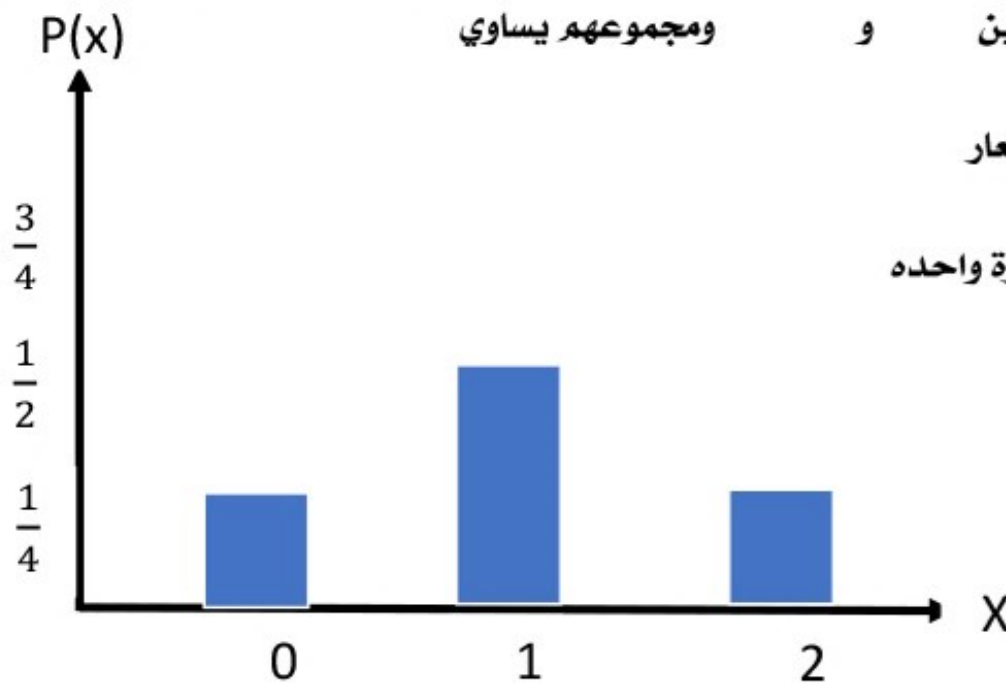
الحل :

يرمز للكتابة بالرمز

وللشعار بالرمز

X			
$P(X)$			

الكتابة	الشعار	X



لاحظ أن أي احتمال بين
إذن تمثل توزيع
احتمال عدم ظهور الشعار

احتمال ظهور الشعار مرة واحدة

احتمال ظهور شعارين

التمثيل بالأعمدة

الاحتمالات

تجريبية

احتمالات يتم تقديرها من عدد من التجارب
مثال / ما احتمال ظهور شعار عند إلقاء قطعة نقد 1000 مرة

نظرية

هي احتمالات مبنية على افتراضات يتوقع الحصول عليها
مثال / إلقاء قطعة نقد يتوقع الحصول على L أو T

القيمة المتوقعة $E(X)$

هي متوسط التوزيع الاحتمالي

$$E(X) = \sum$$

مجموع حاصل ضرب كل قيمة x في احتمالها $P(x)$

مثال : أوجد القيمة المتوقعة عند رمي مكعبين مرة واحدة وتسجيل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين ؟

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	المجموع
P(X)												
X P(X)												

$$E(X) =$$

لاحظ أنه كلما زاد عدد مرات إجراء التجربة اقترب الاحتمال التجريبي من

مثال : يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء و 6 كرات صفراء و 4 كرات خضراء و كرتين زرقاوين
ما احتمال كرة ليست صفراء ؟

التوزيع الطبيعي

خصائص التوزيع الطبيعي			
يشبه الجرس ومتماثل بالنسبة للمتوسط	الوسيط = المتوسط = المنوال وتقع جميعها في المركز	متصل	يقترب المنحنى من محور X ولا يمسّه
			

الباب الأخير : حساب النهايات جبرياً

نهاية الدالة		
عند نقطة	عند $\pm \infty$	المتتابعات
باستعمال خصائص النهايات	كثيرات الحدود	
التعويض المباشر	الدوال النسبية	
بالتحليل	دالة المقلوب	
إنطاق البسط أو المقام		

مثال / استعمل خصائص النهايات لإيجاد

$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+3}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{2x^2-x-15}$	$\lim_{x \rightarrow 2} -x^3 + 4$

مثال / أحسب النهايات بالتعويض المباشر إن وجدت

$\lim_{x \rightarrow -8} \sqrt{x+6}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2+3}$	$\lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$

مثال / أحسب النهايات التالية

$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 11x - 42}$	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x + 2}$

مثال / أحسب النهايات التالية

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$

لأي عدد صحيح موجب n

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n =$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n =$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n =$
n فردية	n زوجية	

لاحظ سلوك طرفي التمثيل البياني لكثيرة حدود هو نفسه سلوك طرفي التمثيل للحد الرئيس (ذو أعلى أس لـ x)

أحسب النهايات التالية

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^6 + 3x^5 - x$	$\lim_{x \rightarrow \infty} -x^3 - 4x^2 + 9$

نتيجة : لأي عدد صحيح موجب n فإن

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x^n} =$$

نهاية الدالة النسبية

درجة البسط < درجة المقام	درجة البسط > درجة المقام	درجة البسط = درجة المقام
النهاية =	النهاية =	النهاية =
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 3x^2 + 1}{2x^2 + 4x}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x - 10}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 3x^2 + 1}{2x^3 + 4x}$

مثال : أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابة ، ثم أوجد نهايتها إن وجدت

$$a_n = \frac{4}{n^2+1}$$

الحل :

_____ . _____ . _____ . _____ . _____
 _____ . _____ . _____ . _____ . _____

بالتقسمة على بسيطاً ومقاماً

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{—}}{\text{—} + \text{—}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \text{—}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \text{—} + \lim_{n \rightarrow \infty} \text{—}}$$

$$= \text{—} =$$

تدريب

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^3 - h^2 + 5h}{h}$$

س : ما قيمته

المماس والسرعة المتجهة

معدل التغير الخطي للدالة عند نقطه هو نفسه ميل المماس m عند نفس النقطه

$$m = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\text{—} + \text{—}) - f(\text{—})}{\text{—}}$$

شرط وجود النهاية

مثال : أوجد ميل مماس كل منحنى عند النقطة المعطاه

$y = x^2 + 4$ عند $(-2, 8)$	$y = x^2$ عند $(3, 9)$

مثال : أوجد ميل المنحنى عند أي نقطه عليه ؟

$y = x^3$	$y = x^2 - 4x + 2$

السرعة المتوسطة المتجهة

$$v_{avg} = \frac{\text{التغير في}}{\text{التغير في}} = \frac{f(\quad) - f(\quad)}{\quad}$$

$f(t)$ موقع الجسم كدالة في الزمن في الفترة الزمنية بين a و b

مثال : تمثل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسياً
ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين $t = 1s$ و $t = 2s$ ؟

السرعة المتجهة اللحظية

إذا كانت $f(t)$ هي المسافة التي يقطعها جسم بدلالة الزمن t فإن السرعة المتجهة اللحظية

$$v(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\quad + \quad) - f(\quad)}{\quad}$$

بشرط وجود النهاية

مثال : تمثل الدالة $s(t) = 90t - 16t^2$ ارتفاع صاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسياً من
مستوى سطح البحر ، حيث الارتفاع بالأقدام . أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$
للصاروخ عند أي زمن ؟

المشتقات

أوجد مشتقة $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$ ثم أحسب قيمة المشتقة عند $x = 1$ ؟

مثال / أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

$$g(x) = \sqrt[5]{x^7}$$

$$f(x) = x^9$$

$$f(x) = 5x^3 + 4$$

$$h(x) = \frac{1}{x^8}$$

$$g(x) = x^5(2x^3 + 4)$$

<p>س : تمثل الدالة</p> $h(t) = 20t^2 - 160t + 330$ <p>ارتفاع سعد بالأقدام في أثناء مشاركته في قفزة البنجي ، حيث t الزمن بالثواني في الفترة $[0.6]$ أوجد أقصى وأدنى إرتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية ؟</p>	<p>س : تمثل الدالة $h(t) = 55t - 16t^2$</p> <p>الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قذفت رأسياً إلى أعلى . أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للكرة عند أي زمن ؟</p>

قاعدة مشتقة الضرب	قاعدة مشتقة القسمة
<p>أوجد مشتقة الدالة</p> $f(x) = (x^3 - 2x + 7)(3x^2 - 5)$	<p>أوجد مشتقة الدالة</p> $h(x) = \frac{7x - 10}{12x + 5}$

تمرين / أوجد مشتقة الدوال التالية

$f(x) = 3x^2 + 2x - 7$	$g(x) = \sqrt{x} + 4$

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي :

$$f(x) = -\frac{8}{x^9}$$

$$f(x) = 3x^2$$

المساحة تحت المنحنى

س : استعمل النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة فيما يأتي والمحور x على الفترة المعطاه

$$y = 4x^3 \text{ على الفترة } [1, 3] \quad \text{أو} \quad \int_1^3 4x^3 dx$$

التكاملات المحددة والتكاملات غير المحددة

س : أحسب كل تكامل مما يأتي :

$\int_2^3 (9x - x^3) dx$	$\int (9x - x^3) dx$
$\int_2^5 2x dx$	$\int 8 dx$
$\int_{-2}^1 (1 - x)(x + 3) dx$	$\int (2x^3 + 6x) dx$
$\int_{-5}^{-1} (-4x^3 - 3x^2) dx$	