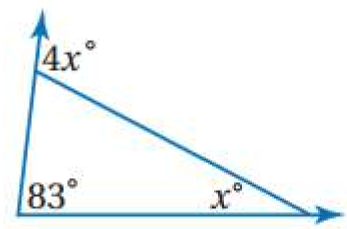
5

الأشكال الرباعية

التهيئة

أوجد قيمة x مقربة إلى أقرب عُشْر :

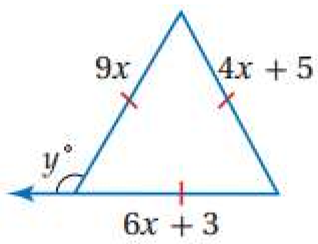
(1



الزاوية الخارجة عن المثلث = مجموع الزاويتين الداخلتين البعيدتين

$$4x = 83 + x$$
$$4x - x = 83$$
$$3x = 83$$
$$x = 27.7$$

(2



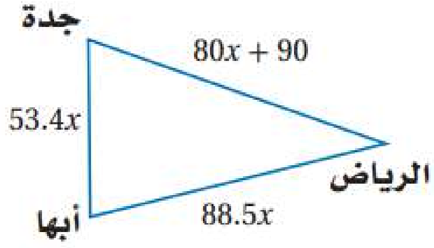
بما أن المثلث جميع أضلاعه متطابقة إذا:

$$9x = 4x + 5$$
$$9x - 4x = 5$$
$$5x = 5$$
$$x = 1$$

بما أن المثلث جميع أضلاعه متطابقة إذا: جميع زواياة متطابقة و= 60°

$$y = 180 - 60$$
$$y = 120^\circ$$

3) **مدن:** تمثل مواقع كل من الرياض وجدة وأبها رؤوس مثلث كما في الشكل أدناه. إذا كان محيط هذا المثلث 2198 km، فأوجد المسافة الجوية بين كل من المدن الثلاث.



محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

$$=\left(53.4x + 80x + 90 + 88.5x\right) = 2198$$

$$\left(221.9x\right) = 90 - 2198$$

$$\left(221.9x\right) = 2108$$

$$9.5 = x$$

المسافة بين الرياض وجدة $= 80x + 90 = 80 \times 9.5 + 90 = 850$

المسافة بين الرياض وأبها $= 88.5x = 88.5 \times 9.5 = 840.8$

المسافة بين جدة وأبها $= 53.4x = 53.4 \times 9.5 = 507.3$

حدِّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يلي:

4) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{2-3}{8-3} = \frac{-1}{5}$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{0+1}{1-6} = \frac{1}{-5}$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متساوينن إذا فهما متوازيين

5) $A(4, 2), B(1, -3), C(-3, 5), D(2, 2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{-3-2}{1-4} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{2-5}{2-(-3)} = \frac{-3}{5}$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ حاصل ضربهم $= -1$ إذا فهما متعامدان

6) $A(-8, -7), B(4, -4), C(-2, -5), D(1, 7)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{-4+7}{4+8} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{7+5}{1+2} = \frac{12}{3} = 4$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ غير متساويين فهما غير متوازيين وليس حاصل ضربهم $= -1$ إذا فهما غير ذلك.

7) **حدائق:** صمَّم مهندس رسمًا لحديقة رباعيّة الشكل، إحداثيات رؤوسها: $A(-2, 1), B(3, -3), C(5, 7), D(-3, 4)$، إذا رسم ممرين يقطعانها $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{AC}$، فهل الممران متعامدان؟ فسّر إجابتك.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{BD}$: $\frac{-3-4}{3+3} = \frac{-7}{6}$

ميل $\overleftrightarrow{AC}$: $\frac{7-1}{5+2} = \frac{6}{7}$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{BD}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ حاصل ضربهم $= -1$ إذا فهما متعامدان

أوجد المسافة بين كل نقطتين، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة الواصلة بينهما في كل مما يلي:

8) $J(-6, 2), K(-1, 3)$

$$JK=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$JK=\sqrt{(-1+6)^2+(3-2)^2}$$

$$JK=\sqrt{(-1+6)^2+(3-2)^2}=\sqrt{26}$$

9) $R(2, 5), S(8, 4)$

$$RS=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$RS=\sqrt{(8-2)^2+(4-5)^2}$$

$$RS=\sqrt{(6)^2+(-1)^2}=\sqrt{37}$$

10) **مسافات:** وقف شخص عند النقطة $T(80, 20)$ من مستوى إحداثي، ورغب في الانتقال إلى كل من $U(20, 60)$ وَ $V(110, 85)$، فما أقصر مسافة يمكن أن يقطعها الشخص؟ فسِّر إجابتك.

$$TU=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$TU=\sqrt{(20-80)^2+(60-20)^2}$$

$$TU=\sqrt{(-60)^2+(40)^2}=20\sqrt{13}=72.11$$

$$TV=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$TV=\sqrt{(110-80)^2+(85-20)^2}$$

$$TV=\sqrt{(30)^2+(65)^2}=5\sqrt{205}=71.6$$

أقصر مسافة يقطعها الشخص هي من النقطة T إلى U

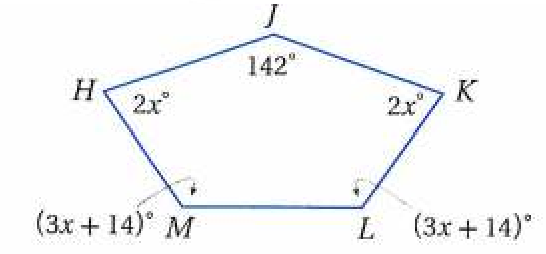
5-1 زوايا المضلع

تحقق

1A) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للثماني المحدّب.

$$(n-2).180=(8-2).180=1080^\circ$$

1B) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للخماسي المجاور.



مجموع قياسات زواياة =

$$(n-2).180=(5-2).180=540^\circ$$

$$2x+142+2x+(3x+14)+(3x+14)=540^\circ$$

$$4x+142+6x+28=540$$

$$10x=540-(142+28)$$

$$10x=370$$

$$x=37$$

$$\angle H=\angle K=2x=2\times 37=74$$

$$\angle L=\angle M=(3x+14)=3\times 37+14=125^\circ$$

2A) **سجاد:** أوجد قياس زاوية داخلية لسجادة على شكل ثماني منتظم.

مجموع قياسات الزوايا الداخلية =

$$(n-2).180 = (8-2).180 = 1080^\circ$$

قياس كب زاوية داخلية = مجموع قياسات الزوايا الداخلية ÷ عدد الزاويا الداخلية

$$\frac{1080}{6} = 135^\circ$$

2B) **نوافير:** تزين النوافير الأماكن العامة، ويقام بعضها على شكل مضلعات منتظمة.

أوجد قياس زاوية داخلية لنافورة على شكل تساعي منتظم.

مجموع قياسات الزوايا الداخلية =

$$(n-2).180 = (9-2).180 = 1260^\circ$$

قياس كب زاوية داخلية = مجموع قياسات الزوايا الداخلية ÷ عدد الزاويا الداخلية

$$\frac{1260}{9} = 140^\circ$$

3) إذا كان قياس زاوية داخليّة لمضلع منتظم يساوي 144°، فأوجد عدد أضلاعه.

$144n = (n - 2) . 180$ **(كتابة معادلة)**

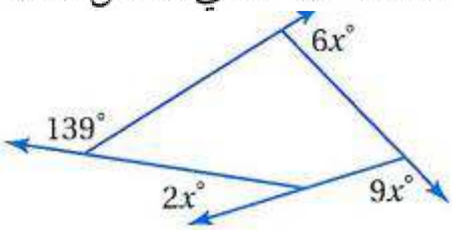
$144n = 180n - 360$ **(خاصية التوزيع)**

$-36n = -360$ **(بطرح 180n من كلا الطرفين)**

$n = 10$ **(بقسمة كلا الطرفين على –36)**

إذن للمضلع 10 أضلاع

4A) أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$$6x + 9x + 2x + 139 = 360^\circ$$

$$17x = 360^\circ - 139$$

$17x = 360^\circ - 139^\circ$

$x = 13^\circ$

4B) أوجد قياس زاوية خارجيّة لمضلع منتظم ذي 12 ضلعًا.

$12n = 360$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 30$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 12 ضلعا يساوي 30°

تأكد :

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعين المحدبين الآتيين:

1) العشاري

$$n = 10$$

$$(n-2).180 = (10-2).180 = 1440^\circ$$

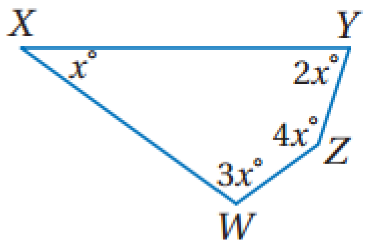
2) الخماسي

$$n = 5$$

$$(n-2).180 = (5-2).180 = 540^\circ$$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين:

3)



مجموع قياسات زوايا الشكل =

$$(n-2).180 = (4-2).180 = 360^\circ$$

$$x + 2x + 3x + 4x = 360^\circ$$

$$10x = 360^\circ$$

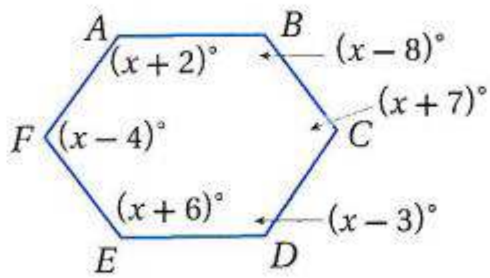
$$\angle X = 36$$

$$\angle Y = 2 \times 36 = 72^\circ$$

$$\angle W = 3 \times 36 = 108^\circ$$

$$\angle Z = 4 \times 36 = 144^\circ$$

(4



مجموع قياسات زوايا الشكل =

$$(n-2).180=(6-2).180=720^\circ$$

$$(x+2)+(x-8)+(x-4)+(x+7)+(x+6)+(x-3)=720^\circ$$

$$6x+0=720$$

$$x=120$$

$$\angle A=120+2=122^\circ$$

$$\angle B=120-8=112^\circ$$

$$\angle C=120+7=127^\circ$$

$$\angle D=120-3=117^\circ$$

$$\angle E=120+6=126^\circ$$

$$\angle F=120-4=116^\circ$$

المثال 2 (5 **عجلة دوارة:** العجلة الدوّارة في الصورة المجاورة على شكل مضلع منتظم عدد أضلاعه 15 ضلعًا. أوجد قياس زاوية داخليّة له.

مجموع زوايا المضلع عند $(n=15)$ =

$$(n-2).180=(15-2).180=2340^\circ$$

قياس أي زاوية داخلية له = $\frac{2340}{15}=156^\circ$

إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

6) 150°

$150n = (n-2) \cdot 180$ (كتابة معادلة)

$150n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-30n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 12$ (بقسمة كلا الطرفين على 30–)

إذن للمضلع 12 ضلع

7) 170°

$170n = (n-2) \cdot 180$ (كتابة معادلة)

$170n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

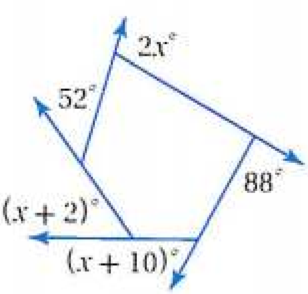
$-10n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 36$ (بقسمة كلا الطرفين على 30–)

إذن للمضلع 36 ضلع

المثال 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين:

8)



(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$$2x + 52 + (x+2) + (x+10) + 88 = 360^\circ$$

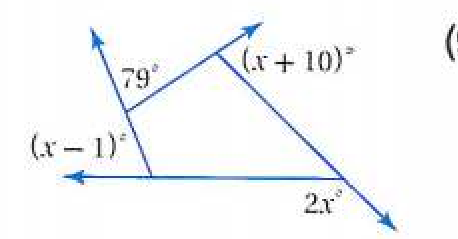
$$4x + 152 = 360^\circ$$

$$4x = 360^\circ - 152$$

$$4x = 208^\circ$$

$$x = 52$$

9)



(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$79 + (x + 10) + (x - 1) + 2x = 360^\circ$

$4x + 88 = 360^\circ$

$4x = 360^\circ - 88$

$4x = 272^\circ$

$x = 68$

أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعين المنتظمين الآتيين:

10) رباعي

$4n = 360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 90^\circ$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 4 ضلعا يساوي 90°

11) ثُماني

$8n = 360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 45^\circ$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 4 ضلعا يساوي 45°

تدرب وحل المسائل:

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعات المحدبة الآتية:

12) ذو 12 ضلعًا

$n = 12$

$$(n-2).180 = (12-2).180^\circ = 1800^\circ$$

13) ذو 20 ضلعًا

$n = 20$

$$(n-2).180 = (20-2).180^\circ = 3240^\circ$$

14) ذو 29 ضلعًا

$n = 29$

$$(n-2).180 = (29-2).180^\circ = 4860^\circ$$

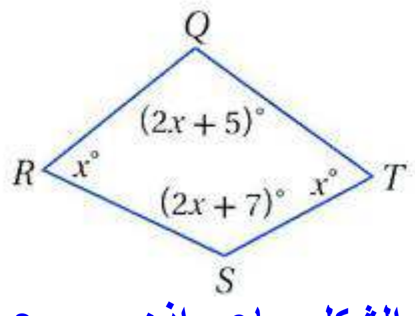
15) ذو 32 ضلعًا

$n = 32$

$$(n-2).180 = (32-2).180^\circ = 4500^\circ$$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعات الآتية:

16)



بما أن الشكل رباعي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n-2).180 = (4-2).180^\circ = 360^\circ$$

$$360^\circ = m\angle Q + m\angle R + m\angle S + m\angle T$$

$$360^\circ = (2x + 5) + x + (2x + 7) + x$$

$$360^\circ = 6x + 12$$

$$360 - 12 = 6x$$

$$348 = 6x$$

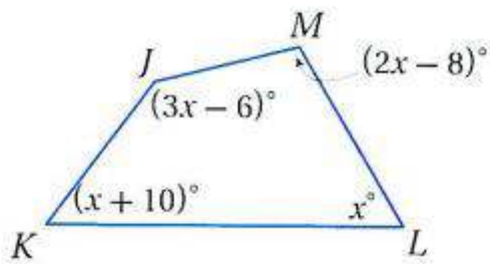
$$x = 58$$

$$m\angle R = m\angle T = 58^\circ$$

$$m\angle Q = (2x + 5) = (2 \times 58 + 5) = 121^\circ$$

$$m\angle S = (2x + 7) = (2 \times 58 + 5) = 123^\circ$$

(17



بما أن الشكل رباعي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n - 2).180 = (4 - 2).180^\circ = 360^\circ$$

$$360^\circ = m\angle J + m\angle M + m\angle L + m\angle K$$

$$360^\circ = (3x - 6) + (2x - 8) + x + (x + 10)$$

$$360^\circ = 7x - 4$$

$$360 + 4 = 7x$$

$$348 = 6x$$

$$x = 52$$

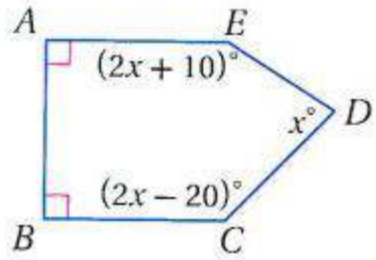
$$m\angle J = (3 \times 52 - 6) = 150^\circ$$

$$m\angle M = (2 \times 52 - 8) = 96^\circ$$

$$m\angle L = x = 52^\circ$$

$$m\angle K = (x + 10) = (52 + 10) = 62^\circ$$

(18



بما أن الشكل خماسي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n - 2).180 = (5 - 2).180^\circ = 540^\circ$$

$$540^\circ = m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E$$

$$540^\circ = 90 + 90 + (2x - 20) + x + (2x + 10)$$

$$540^\circ = 5x + 170$$

$$540 - 170 = 5x$$

$$540 = 5x$$

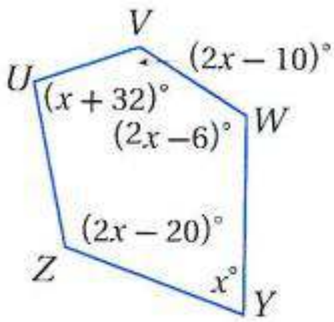
$$x = 74$$

$$m\angle D = 74^\circ$$

$$m\angle C = (2 \times 74 - 20) = 128^\circ$$

$$m\angle E = (2 \times 74 + 10) = 158^\circ$$

(19



بما أن الشكل خماسي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n - 2).180 = (5 - 2).180^\circ = 540^\circ$$

$$540^\circ = m\angle U + m\angle V + m\angle W + m\angle Y + m\angle Z$$

$$540^\circ = (x + 32) + (2x - 10) + (2x - 6) + x + (2x - 20)$$

$$540^\circ = 8x - 4$$

$$x = 68$$

$$m\angle U = (68 + 32) = 100^\circ$$

$$m\angle V = (2 \times 68 - 10) = 126^\circ$$

$$m\angle W = (2 \times 68 - 6) = 130^\circ$$

$$m\angle Y = x = 68^\circ$$

$$m\angle Z = (2 \times 68 - 20) = 116^\circ$$

20) ما مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع في الشكل المجاور؟

$n = 5$

$$(n - 2).180 = (5 - 2).180^\circ = 540^\circ$$

المثال 2 أوجد قياس زاوية داخليّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

21) الاثنا عشري

$n = 12$

$$(n - 2).180 = (12 - 2).180^\circ = 1800^\circ$$

$$\frac{1800}{12} = 150^\circ$$

22) الخماسي

$n = 5$

$$(n - 2).180 = (5 - 2).180^\circ = 540^\circ$$

$$\frac{540}{5} = 108^\circ$$

23) العشاري

$n = 10$

$(n-2).180 = (10-2).180^\circ = 1440^\circ$

$\dfrac{1440}{10} = 144^\circ$

24) التُّساعي

$n = 9$

$(n-2).180 = (9-2).180^\circ = 1260^\circ$

$\dfrac{1260}{9} = 140^\circ$

المثال 3 إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

25) 60°

$60n = (n-2).180$

$60n = n180 - 360$

$60n - n180 = -360$

$-120n = -360$

$n = 3$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي3 ضلعا يساوي 60°

26) 90°

$90n = (n-2).180$

$90n = n180 - 360$

$90n - n180 = -360$

$-90n = -360$

$n = 4$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 4 ضلعا يساوي 60°

120° (27

$$120n = (n-2).180$$
$$120n = n180 - 360$$
$$120n - n180 = -360$$
$$-n60 = -360$$
$$n = 6$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 6 ضلعا يساوي 120°

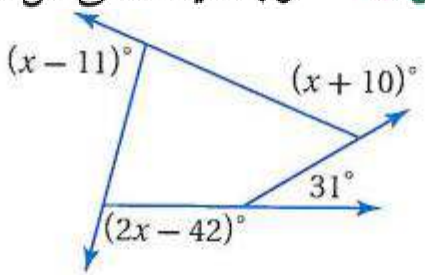
156° (28

$$156n = (n-2).180$$
$$156n = n180 - 360$$
$$156n - n180 = -360$$
$$-24n = -360$$
$$n = 15$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 15 ضلعا يساوي 156°

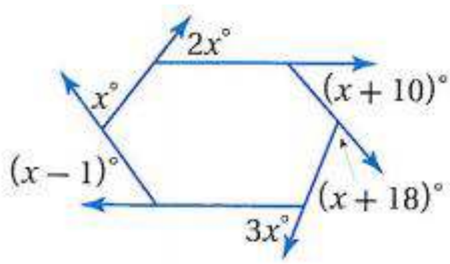
المثال 4 أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

(29



$$(x-11)+(x+10)+(2x-42)+31^{\circ} = 360^{\circ}$$
$$4x - 12 = 360$$
$$4x = 372$$
$$x = \frac{372}{4} = 93$$

(30



$$\left(2x\right)+\left(x+10\right)+\left(x+18\right)+3x+\left(x-1\right)+x=360^{\circ}$$

$$9x+27=360$$

$$9x=333$$

$$x=\frac{333}{9}=37$$

أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

(31 العشاري

$$10n=360$$ نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$n=\frac{360}{10}=36^{\circ}$$

(32 الخماسي

$$5n=360$$ نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$n=\frac{360}{5}=72^{\circ}$$

(33 السداسي

$$6n=360$$ نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

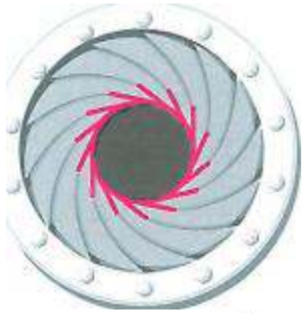
$$n=\frac{360}{6}=60^{\circ}$$

(34 ذو 15 ضلعًا

$$15n=360$$ نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$n=\frac{360}{15}=24^{\circ}$$

35) **تصوير:** تشكّل الفتحة التي ينفذ منها الضوء إلى عدسة آلة التصوير في الشكل المجاور مضلعًا منتظمًا ذا 14 ضلعًا.



a) أوجد قياس زاوية داخلية؟

$$(14-2).180=2160^{\circ}$$ n = 14

قياس الزاوية الداخلية = $\frac{2160}{14}=$ 154.3° تقريبا

b) أوجد قياس زاوية خارجية؟

$14n = 360^{\circ}$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 25.7$ (بقسمة كلا الطرفين على 14)

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع = 25.7° تقريباً

أوجد قياس زاوية خارجية وزاوية داخلية للمضلع المنتظم المعطى عدد أضلاعه في كل إلى أقرب عُشر:

36) 7

$$(7-2).180=900^{\circ}$$ n = 7

قياس الزاوية الداخلية = $\frac{900}{7}=$ 128.6° تقريباً

$7n = 360^{\circ}$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 51.4$ (بقسمة كلا الطرفين على 7)

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع = 51.4° تقريباً

37) 13

$$(13-2).180=1980^{\circ}$$ n = 13

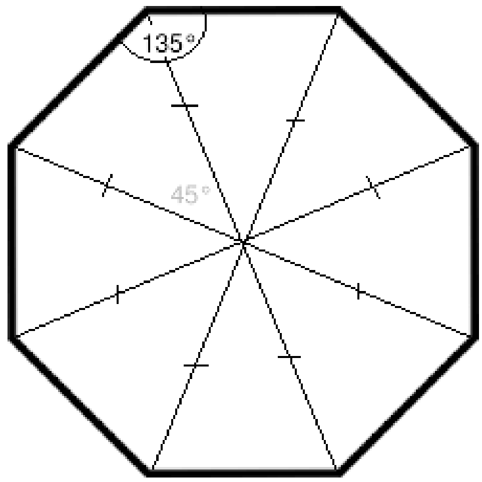
قياس الزاوية الداخلية = $\frac{1980}{13}=$ 152.3° تقريباً

$13n = 360^{\circ}$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 51.4$ (بقسمة كلا الطرفين على 13)

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع = 27.7° تقريباً

38) أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع الثماني يساوي 1080°، دون استعمال صيغة مجموع الزوايا الداخلية للمضلع.



يقسم المضلع الى ثمان مثلثات

مجموع زوايا 8 مثلثات = $8 \times 180^{\circ} = 1440^{\circ}$

مجموع الزوايا حول نقطة المركز = 360°

$\therefore$ مجموع زوايا المضلع الثماني الداخلية = $1440^{\circ} - 360^{\circ} = 1080^{\circ}$

قياس الزاوية الداخلية للمضلع الثماني المنتظم = $1080^{\circ} \div 8 = 135^{\circ}$

39) **برهان:** استعمل الجبر لإثبات نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع.

افرض أن N تساوي مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع عدد أضلاعه n.

N تساوي مجموع قياسات الأزواج الخطية مطروحاً منه مجموع قياسات الزوايا الداخلية.

$$= 180n - 180\,(n - 2)$$

$$= 180n - 180n + 360 = 360$$

لذا، فإن مجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع محدب يساوي 360°.

جبر: أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين :

40) عشاري قياسات زواياه الداخليّة:

$x+5, x+10, x+20, x+30, x+35, x+40, x+60, x+70, x+80, x+90$

$$(n-2).180=(10-2).180^\circ=1440^\circ$$

$$1440^\circ=(x+5)+(x+10)+(x+20)+(x+30)+(x+35)$$

$$+(x+40)+(x+60)+(x+70)+(x+80)+(x+90)$$

$$1440^\circ=10x+440$$

$$1440^\circ-440=10x$$

$$1000=10x$$

$$x=100$$

$$(x+5)=100+5=105^\circ$$

$$(x+10)=100+10=110^\circ$$

$$(x+20)=100+20=120^\circ$$

$$(x+30)=100+30=130^\circ$$

$$(x+35)=100+35=135^\circ$$

$$(x+40)=100+40=145^\circ$$

$$(x+60)=100+60=160^\circ$$

$$(x+70)=100+70=170^\circ$$

$$(x+80)=100+80=180^\circ$$

$$(x+90)=100+90=190^\circ$$

الزوايا هي: $190^\circ, 180^\circ, 170^\circ, 160^\circ, 140^\circ, 135^\circ, 130^\circ, 120^\circ, 110^\circ, 105^\circ$

41) الخماسي $ABCDE$ الذي قياسات زواياه الداخليّة: $(x+9)°, (2x-8)°, (4x-1)°$
$6x, (4x+13)°,$

$$(n-2).180 = (5-2).180° = 540°$$

$$540° = (4x-1) + (2x-8) + (x+9) + (4x+13) + 6x$$

$$540° = 17x + 13$$

$$540° - 13 = 17x$$

$$527 = 17x$$

$$x = 31$$

$$m\angle E = 4x - 1 = 4 \times 31 - 1 = 123°$$

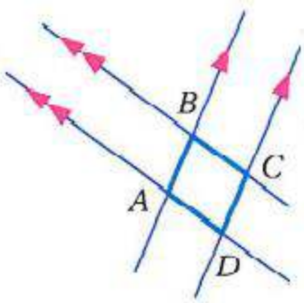
$$m\angle D = 2x - 8 = 2 \times 31 - 8 = 54°$$

$$m\angle C = x + 9 = 31 + 9 = 40°$$

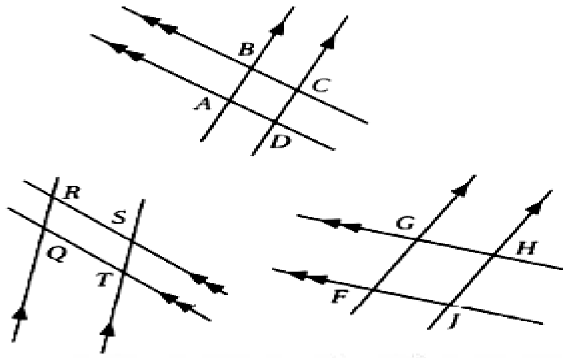
$$m\angle B = 4x + 13 = 4 \times 31 + 13 = 137°$$

$$m\angle A = 6x = 6 \times 31 = 186°$$

42) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في أشكال رباعيّة خاصّة.



a) **هندسيًا:** ارسم زوجين من المستقيمات المتوازية تتقاطع كما في الشكل المجاور، وسمِّ الشكل الرباعي الناتج $ABCD$. ثم كرّر هذه الخطوات لتكوين شكلين آخرين: $QRST$, $FGHJ$.



b) جدوليًا: أكمل الجدول الآتي :

الشكل الرباعي	أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا							
$ABCD$	$m\angle A$	101	$m\angle B$	97	$m\angle C$	101	$m\angle D$	97
	AB	0.6cm	BC	0.6cm	CD	0.6cm	DA	0.6cm
$FGHJ$	$m\angle F$	76	$m\angle G$	104	$m\angle H$	76	$m\angle J$	104
	FG	1cm	GH	0.9cm	HJ	1cm	JF	0.9cm
$QRST$	$m\angle Q$	121	$m\angle R$	95	$m\angle S$	121	$m\angle T$	95
	QR	0.5cm	RS	1.2cm	ST	0.5cm	TQ	1.2cm

c) لفظيًا: خمّن العلاقة بين كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الزاويتان المتقابلتان متطابقتين.

d) لفظيًا: خمّن العلاقة بين كل زاويتين متحالفتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات

في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الزاويتان المتحالفتان متكاملتين.

e) لفظيًا: خمّن العلاقة بين كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

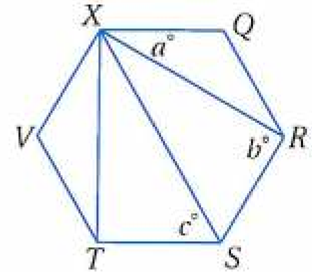
في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الضلعان المتقابلان متطابقين.

مسائل مهارات التفكير العليا:

(43 **اكتشف الخطأ:** قالت مريم: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للعشاري أكبر منه للسباعي؛ لأنّ عدد أضلاع العشاري أكثر من أضلاع السباعي. وقالت لبنى: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجية لكلا المضلعين متساوٍ. فهل أيٌّ منهما إدعاؤها صحيح؟ وضّح تبريرك.

لبنى؛ حسب نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية، سيكون مجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع محدب يساوي 360°.

(44 **تحدٍّ:** أوجد قيم a, b, c في الشكل السداسي المنتظم $QRSTVX$ المجاور. برّر إجابتك.



$60^\circ, 90^\circ, 30^\circ$؛ حسب نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية يكون مجموع قياسات الزوايا الداخلية 720°، وبما أن المضلع QRSTVX منتظم فإن له 6 زوايا متطابقة. وقياس كل زاوية 120°، لذلك

$m\angle XVT = m\angle XQR = 120^\circ$ وكذلك $XQ = QR$

وحسب نظرية المثلث متطابق الضلعين يكون

$m\angle QXR = m\angle QRX$

وبما أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث 180°، فإن

$m\angle QXR + m\angle QRX + m\angle XQR = 180^\circ$

وبالتعويض ينتج أن $a + a + 120^\circ = 180^\circ$ ، أي أن $2a = 60^\circ$ ومنها $a = 30^\circ$

وحسب مسلمة جمع الزوايا $m\angle QRS = m\angle QRX + m\angle XRS$

وبالتعويض، $m\angle XRS + 30^\circ = 120^\circ$

$m\angle XRS + 30^\circ = 120^\circ$ وبالطرح يكون $m\angle XRS = 90^\circ$

إذن $b = 90^\circ$

وحسب (SAS) يكون $\Delta XVT = \Delta XQR$ و $\Delta XTS = \Delta XRS$

وبناءً على مسلمة جمع الزوايا يكون

$$m\angle VXQ = m\angle VXT + m\angle TXS + m\angle SXR + m\angle RXQ$$

وبالتعويض

$$m\angle TXS + m\angle SXR + 30^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

إذن $m\angle TXS + m\angle SXR = 60^\circ$ وبما أن

$m\angle TXS + m\angle SXR$ ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين

متطابقة، فإن $m\angle TXS = m\angle SXR = 30^\circ$

وفي ΔXTS، $m\angle XTS + m\angle TSX + m\angle SXT = 180^\circ$

وبالتعويض $c + 30^\circ + 90^\circ = 180^\circ$، إذن $c = 60^\circ$

45) **تبرير:** إذا مُدَّ ضلعان لسداسي منتظم بحيث يلتقيان في نقطة خارجه، فهل يكون المثلث الناتج متطابق الأضلاع دائمًا، أو أحيانًا، أو لا يمكن أن يكون متطابق الأضلاع أبدًا؟ برّر إجابتك.

دائماً؛ حسب نظرية مجموع الزوايا الخارجية

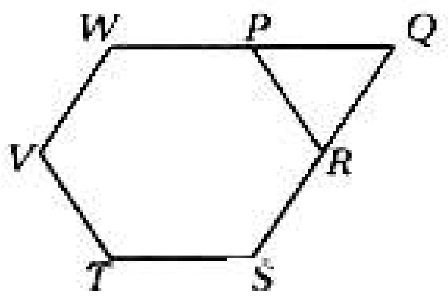
$$m\angle QRP = 60^\circ, m\angle QPR = 60^\circ$$

ولما كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي 180°، فإن

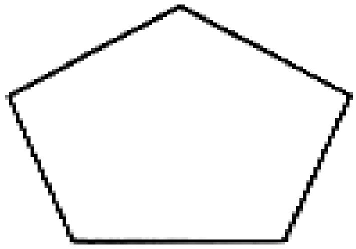
$$180^\circ - m\angle QPR - m\angle QRP = m\angle PQR$$

$$180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

إذن فالمثلث ΔPQR متطابق الأضلاع.



46) مسألة مفتوحة: ارسم مضلعًا، وأوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.
ما عدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخليّة مِثلا المجموع الذي أوجدته؟ برّر إجابتك.



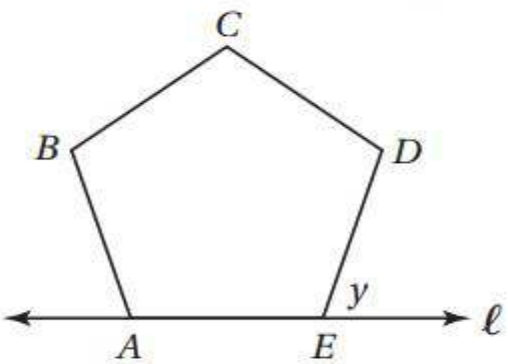
مجموع قياسات الزوايا الداخلية لهذا المضلع يساوي $180^\circ.(5-2) = 540^\circ$
ومِثلا هذا المجموع يساوي (540) .2 أو 1080
وعدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخلية 1080°
هو حل المعادلة $1080^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ$ ومنها $n = 8$.

48) اكتب: وضّح العلاقة بين المثلثات ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع.

اشتقت نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع من النمط الذي يربط عدد أضلاع المضلع بعدد المثلثات. والصيغة هي حاصل ضرب مجموع قياسات زوايا المثلث أي 180° في عدد المثلثات في المضلع.

تدريب على اختبار

48) إجابة قصيرة: الشكل $ABCDE$ خماسي منتظم، والمستقيم ℓ يحوي $\overline{AE}$. ما قياس $\angle y$؟



$$(5-2).180^\circ = 540^\circ$$

$$\angle DEA = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$\angle Y = 180 - 108^\circ = 72^\circ$$

49) إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع مِثْلي مجموع قياسات زواياه الخارجيّة، فما نوع هذا المضلع؟

A مربع

B خماسي

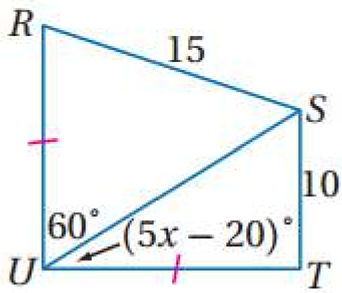
C سداسي

D ثماني

C سداسي

مراجعة تراكمية

50) **جبر:** اكتب متباينة تمثّل مدى القيم الممكنة لِـ x (الدرس 6-4)



$$60 + 5x - 20 = 90$$

$$40 + 5x = 90$$

$$5x = 90 - 40$$

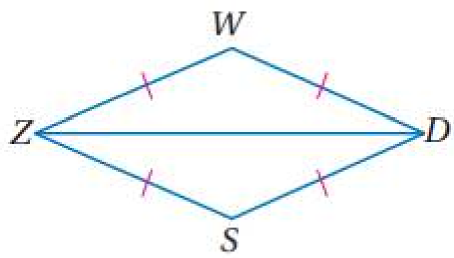
$$5x = 50$$

$$x = 10$$

بيّن في كل مما يأتي أن المثلثين متطابقان، وحدِّد حالة التطابق، ثم اكتب عبارة

تطابق : (الدرسان 3-5 ,3-4)

(51

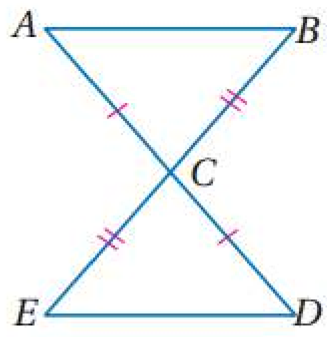


(معطى) $\overline{WD} \cong \overline{DS}$, $\overline{WZ} \cong \overline{ZS}$

حسب خاصية الانعكاس $\overline{ZD} \cong \overline{ZD}$

إذا $\Delta ZWD \cong \Delta ZSD$ حسب SSS

(52

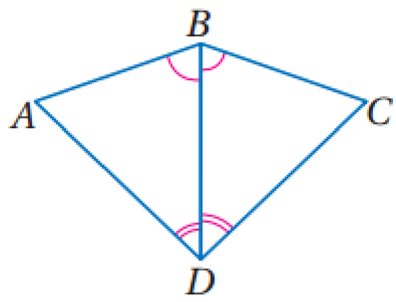


(معطى) $\overline{CB} \cong \overline{CE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CD}$

بالتقابل بالرأس $\angle ACB \cong \angle ECD$

$\Delta ACB \cong \Delta ECD$ حسب SAS

(53



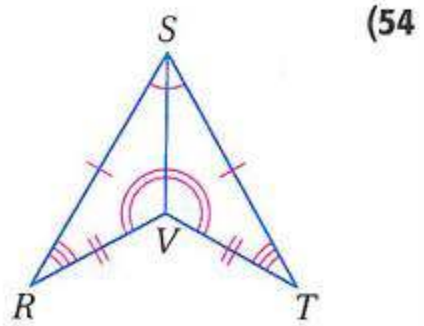
$\Delta CBD \cong \Delta ABD$

$\angle CBD = \angle ABD$

$\angle BDC = \angle BDA$

$BD = BD$ (خاصية الانعكاس)

(54



$SV = SV$ (حسب خاصية الانعكاس)

$ST = SR$ (معطى)

$VR = VT$ (معطى)

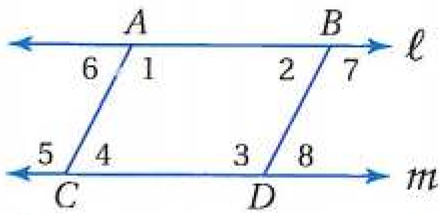
$\angle TSV = \angle RSV$

$\angle SVT = \angle SVR$

$\Delta SVT \cong \Delta SVR$ لأن جميع الأضلاع المتناظرة متطابقة وجميع الزوايا المتناظرة متطابقة

استعد للدرس اللاحق

في الشكل المجاور $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$, $m \parallel \ell$ ، حدد جميع أزواج الزوايا في كل مما يأتي:



54) زاويتان متبادلتان داخليًّا.

الزوايا 1 و5؛ 4 و6؛ 2 و8؛ 3 و7

55) زاويتان متحالفتان.

الزوايا 1 و4؛ 2 و3؛ 1 و2؛ 3 و4؛ 8 و7؛ 6 و5

توسع: معمل الجداول الإلكترونية: زوايا المضلع

5-1

تمارين ومسائل:

1) اكتب صيغة لإيجاد قياس زاوية داخلية للمضلع المنتظم.

$$\frac{C2}{A2}$$

2) اكتب صيغة لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المنتظم.

$$A2*E2$$

3) ما قياس كل زاوية داخليّة إذا كان عدد الأضلاع 1 أو 2؟

$$0^\circ - 180^\circ$$

4) هل من الممكن أن يكون عدد الأضلاع 1 أو 2؟ وضّح إجابتك.

لا؛ لأن المضلع شكل مغلق مكون من قطع مستقيمة تقع في المستوى نفسه.

استعمل جدولًا إلكترونيًا لحل الأسئلة 8–5 :

5) ما عدد المثلثات في مضلع عدد أضلاعه 17 ضلعًا؟

15

6) أوجد قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 16 ضلعًا.

$$16n = 360$$

$$n = \frac{360}{16} = 22.5^\circ$$

7) أوجد قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 115 ضلعًا.

$$20340 = 180.(n-2)$$

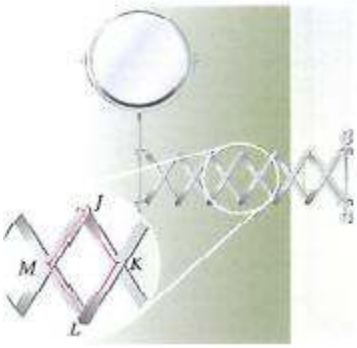
$$176.9^\circ = \frac{20340}{115}$$

8) إذا كان قياس كل من الزوايا الخارجية $0°$، فأوجد قياسات جميع الزوايا الداخليّة.
وهل هذا ممكن؟ وضّح إجابتك.

سيكون قياس كل زاوية داخلية، $180°$ وهذا غير ممكن للمضلع.

5-2 متوازي الأضلاع

تحقق



1) **مرايا:** تُستعمل في مرآة الحائط المبينة جانبًا متوازيات أضلاع يتغير شكلها كُلّما مُدّ الذراع. في $\square JKLM$ ، إذا كان $m\angle J = 47, MJ = 8$ cm، فأوجد كلًّا مما يأتي:

A) LK

LK = MJ **(كل ضلعين في متوازي الأضلاع متطابقان)**

= 8cm

B) $m\angle L$

$\mathbf{m\angle L = m\angle J}$ **(كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان)**

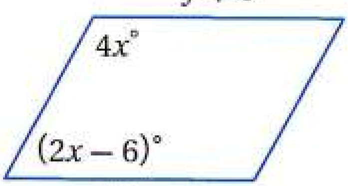
$\mathbf{= 47^{\circ}}$

C) إذا مُدّ الذراع حتى أصبح $m\angle J = 90^{\circ}$، فكم يصبح قياس كل من $\angle K, \angle L, \angle M$؟ برّر إجابتك.

سيكون قياس كل من الزوايا الأخرى 90° تبعاً للنظرية 1.6.

أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

2A)



$\mathbf{y + 8 = 5y}$ **(تعريف تطابق القطع المستقيمة)**

$\mathbf{4y = 8}$

$\mathbf{y = 2}$

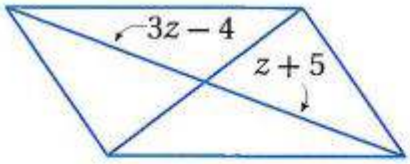
$$4x+(2x-6)=180^\circ$$

$$6x=186^\circ$$

$$x=31$$

$$x=31,\ y=2$$

(2B



(قطرا متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر)

$$3z-4=z+5$$

$$2z=9$$

$$z=4.5$$

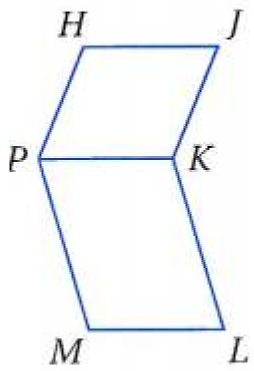
3) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square RSTU$ الذي رؤوسه $R(-8,-2), S(-6,7), T(6,7), U(4,-2)$.

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{SU}$, $\overline{RT}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{RT}$ التي طرفاها $(-8،-2),(6\ 7)$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-8+6}{2},\frac{-2+7}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$$=(-1،2.5)$$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري RSTU هما $(-1،2.5)$



4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\square HJKP$, $PKLM$

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$

المعطيات: متوازيا الأضلاع HJKP, PKLM

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$

البرهان:

العبارات (المبررات):

1) HJKP, PKLM متوازيا أضلاع (معطيات)

2) $\overline{HJ} \cong \overline{PK}$, $\overline{PK} \cong \overline{ML}$ (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) HJ = ML (خاصية التعدي)

تأكد:

1) **ملاحظة:** يستعمل البحّارة مسطرتين متوازيتين يصل بينهما ذراعان متساويا الطول لتحديد اتجاه إبحارهم، فيضعون حافة إحدى المسطرتين بمحاذاة مسار الإبحار ثم يحركون المسطرة الأخرى حتى تصل إلى قرص بوصلة مرسوم على الخريطة. تُشكّل المسطرتير والذراعين الواصلين بينهما $\square MNPQ$.

a) إذا كان $MQ = 2\text{in}$ ، فأوجد NP.

$NP = 2\text{in}$ لأن كل ضلعين متناظرين متطابقين

b) إذا كان $m\angle NMQ = 38^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$.

كل زاويتين متحالفتين مجموعهم $= 180^\circ$

$$38 + m\angle NMQ = 180^\circ$$

$$m\angle NMQ = 180 - 38$$

$$m\angle NMQ = 142^\circ$$

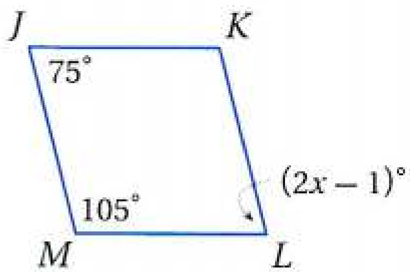
c) إذا كان $m\angle MQP = 128^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$.

من خصائص متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلين متطابقين

$$\angle MNP = 128^\circ$$

المثال 2 **جبر:** أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

2)



من خصائص متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلين متطابقين

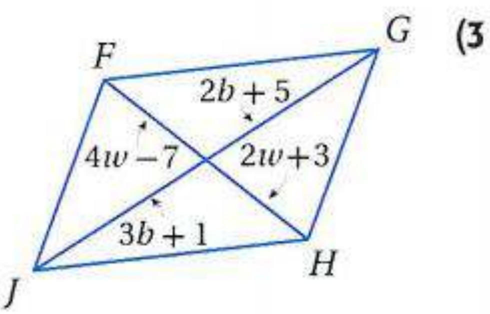
$\angle L = 75^\circ$

$2x - 1 = 75$

$2x = 76$

$x = 38$

(3



حسب نظرية قطرا متوازي الأضلاع

$2w + 3 = 4w - 7$

$2w - 4w = -7 - 3$

$-2w = -10$

$w = 5$

$2b + 5 = 3b + 1$

$2b - 3b = 1 - 5$

$-b = -4$

$b = 4$

المثال 3 (4 **هندسة إحداثيَّة:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي رؤوسه $A(-4, 6), B(5, 6), C(4, -2), D(-5, -2)$.

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{BD}$, $\overline{AC}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ التي طرفاها

$(-4،6), (4 \quad -2)$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-4+4}{2}, \frac{6-2}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$$m\angle WZX + m\angle ZXW = 90^\circ$$
$$x - 11 + x - 9 = 90$$
$$2x - 20 = 90$$
$$2x = 110$$
$$x = 55$$
$$\angle ZXW = x - 11 = 55 - 11$$
$$\angle ZXW = 44$$
$$\angle ZXY = 90 - 44 = 46^\circ$$

(بالتبسيط)

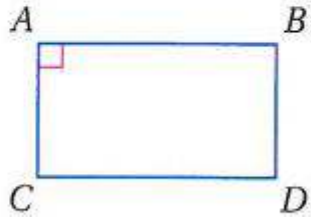
إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\overline{ABCD}$ هما $(0،2)$

المثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين :

5) برهانًا حرًّا.

المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع، $\angle A$ قائمة.

المطلوب: $\angle B, \angle C, \angle D$ قوائم. (النظرية 5.6)



المعطيات: ABCD متوازي أضلاع فيه الزاوية A قائمة.

المطلوب: الزوايا B, C, D قوائم. (النظرية 5.6).

البرهان: حسب تعريف متوازي الأضلاع $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$

ولأن $\angle A$ قائمة فإن $\overline{AD} \perp \overline{AB}$.

وحسب نظرية القاطع العمودي يكون $\overline{AB} \perp \overline{CB}$.

إذن $\angle B$ قائمة لأن المستقيمين المتعامدين يشكلان زاوية قائمة

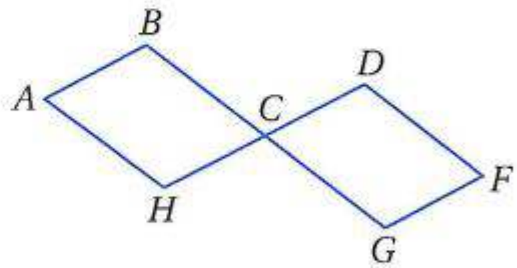
وكذلك $\angle B \cong \angle D$ و $\angle C \cong \angle A$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

إذن الزوايا C, D قائمتان لأن لجميع الزوايا المتطابقة القياس نفسه.

6) برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $DCGF$, $ABCH$ متوازيا أضلاع.

المطلوب: $\angle A \cong \angle F$.



المعطيات: متوازيا الأضلاع DCGF, ABCH.

المطلوب: $\angle A \cong \angle F$

البرهان:

العبارات (المبررات):

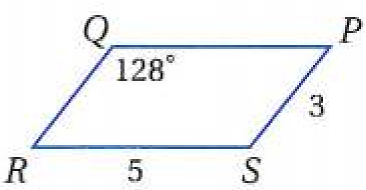
1) ABCH و DCGF متوازيا أضلاع. (معطى)

2) Ê BCH ≅ Ê DCG (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

3) Ê A ≅ Ê BCH و Ê F ≅ Ê DCG (الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

4) Ê A ≅ Ê F (خاصية التعدي)

تدرب وحل المسائل:



استعمل $\square PQRS$ المبين جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :

7) $m\angle R$

كل زاويتين متحالفتين مجموعهم = 180°

$$128 + m\angle QRS = 180^\circ$$

$$m\angle QRS = 180^\circ - 128^\circ$$

$$m\angle QRS = 52^\circ$$

8) QR

كل ضلعين متناظرين متطابقين في متوازي الأضلاع

$$QR = PS = 3cm$$

9) QP

كل ضلعين متناظرين متطابقين في متوازي الأضلاع

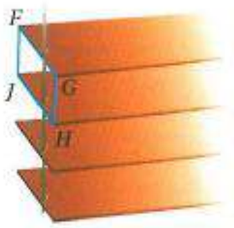
$$QP = RS = 5cm$$

10) $m\angle S$

كل زاويتين متقابلتين متساويتين

$$m\angle Q = m\angle S = 128^\circ$$

11) **ستائر:** في الشكل المقابل صورة لشرائح ستائر النوافذ المتوازية دائمًا؛ لتسمح بدخول أشعة الشمس. في $\square FGHJ$ ، إذا كان $FJ = \frac{3}{4}$ in, $FG = 1$ in, $\angle JHG = 62^\circ$ ، فأوجد كلًا مما يأتي :



a) JH

كل ضلعين في متوازي الأضلاع متقابلين متطابقين

$$FG = JH = 1in$$

GH (b

كل ضلعين في متوازي الأضلاع متقابلين متطابقين

$$FG = GH = \frac{3}{4} in$$

$m\angle JFG$ (c

كل زاويتين في متوازي الأضلاع متقابلين متطابقين

$$m\angle JHG = m\angle JFG = 62^\circ$$

$m\angle FJH$ (d

كل زاويتين متحالفتين مجموعهم = 180°

$$m\angle JFG + m\angle FJH = 180^\circ$$

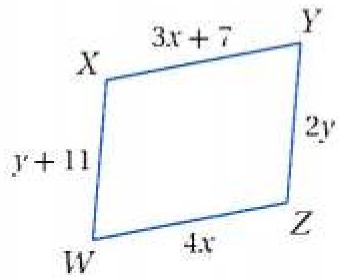
$$62^\circ + m\angle FJH = 180^\circ$$

$$m\angle FJH = 180^\circ - 62^\circ$$

$$m\angle QRS = 118^\circ$$

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

(12



بما أن الشكل متوازي أضلاع إذن كل ضلعين متقابلين متطابقين

$$3x + 7 = 4x$$

$$4x - 3x = 7$$

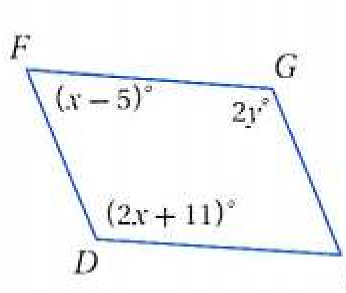
$$x = 7$$

$$2y = y + 11$$

$$2y - y = 11$$

$$y = 11$$

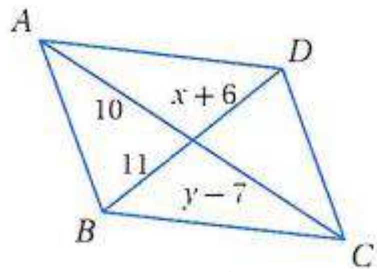
(13



كل زاويتين متحالفتين مجموعهم = 180°

$$x - 5 + 2x + 11 = 180^\circ$$
$$x + 16 = 180$$
$$x = 164$$
$$x - 5 + 2y = 180$$
$$164 - 5 + 2y = 180$$
$$159 + 2y = 180$$
$$2y = 180 - 159 = 21$$
$$y = 10.5$$

(14



قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الأخر

$$x + 6 = 11$$
$$x = 5$$
$$10 = y - 7$$
$$y = 10 + 7$$
$$y = 17$$

هندسة إحداثيّة: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square WXYZ$ المعطاة رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين:

15) $W(-1, 7), X(8, 7), Y(6, -2), Z(-3, -2)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{XZ}$, $\overline{WY}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{WY}$ التي طرفاها

$(-1،7), (6\ \ -2)$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-1+6}{2}, \frac{7-2}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$(2.5،2.5)$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\overline{ABCD}$ هما $(2.5،2.5)$

16) $W(-4, 5), X(5, 7), Y(4, -2), Z(-5, -4)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{XZ}$, $\overline{WY}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{WY}$ التي طرفاها

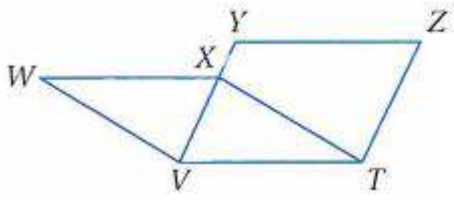
$(-4،5), (4\ \ -2)$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-4+4}{2}, \frac{5-2}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$(0،1.5)$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\overline{ABCD}$ هما $(0،1.5)$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين فيما يأتي:



17) المعطيات: $\square WXTV, \square ZYVT$

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$

المعطيات: متوازيا الأضلاع WXTV, ZYVT.

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$

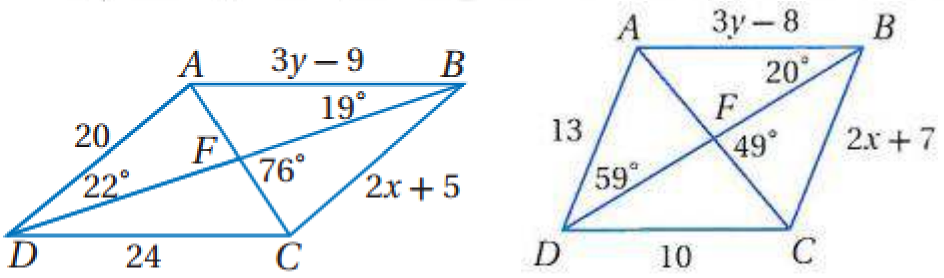
البرهان: العبارات (المبررات):

1) متوازيا الأضلاع WXTV, ZYVT (معطى)

2) $\overline{YZ} \cong \overline{VT}$, $\overline{VT} \cong \overline{WX}$. (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) $\overline{YZ} \cong \overline{WX}$ (خاصية التعدي)

جبر: استعمل $\square ABCD$ المبين جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



18) x

كل ضلعين متقابلين متطابقين

$$2x + 5 = 20$$
$$2x = 20 - 5$$
$$2x = 15$$
$$x = 7.5$$

19) y

$$3y - 9 = 24$$
$$3y = 24 + 9$$
$$3y = 33$$
$$y = 11$$

20) $m\angle AFB$

$$\angle AFB = 180 - 76$$
$$\angle AFB = 104^\circ$$

21) $m\angle DAC$

$$\angle DAC = 180 - (76 + 22)$$
$$\angle DAC = 82^\circ$$

$m\angle ACD$ (22

$$\angle CAB = 180 - (\angle AFB + \angle ABF)$$
$$\angle CAB = 180 - (19 + 76) = 85^\circ$$

بالتبادل داخليا

$$\angle ACD = \angle CAB = 85^\circ$$

$m\angle DAB$ (23

بالتقابل بالرأس

$$\angle AFD = 76$$
$$\angle DAF = 180 - (76 + 22) = 82$$
$$\angle DAB = \angle DAF + \angle CAB$$
$$\angle DAB = 82 + 85 = 167^\circ$$

24) **هندسة إحداثية:** إذا كانت $A(-2, 5), B(2, 2), C(4, -4)$ رؤوسًا في $\square ABCD$، فأوجد إحداثيات الرأس D. وضّح تبريرك.

الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية

وبما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي $\frac{-6}{2}$ فإن ميل $\overline{AD}$ يساوي $\frac{-6}{2}$ أيضاً.

ولتعيين الرأس D، ابدأ من الرأس A وتحرك إلى الأسفل 6 وحدات وإلى اليمين وحدتين.

إذن الرأس $D = (0, -1)$

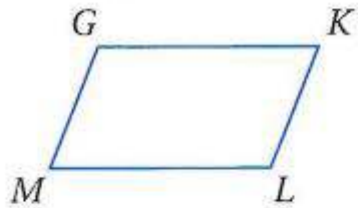
برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل مما يأتي :

25) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $GKLM$ متوازي أضلاع ،

المطلوب: $\angle G$ و $\angle K$ ، $\angle K$ و $\angle L$ ، $\angle L$ و $\angle M$ ، $\angle M$ و $\angle G$ زوايا متكاملة.

(النظرية 5.5)



البرهان:

العبارات (المبررات):

1) متوازي الأضلاع GKLM (معطى)

2) $\overline{GK} \parallel \overline{ML}$, $\overline{GM} \parallel \overline{KL}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية)

3) Ê K و Ê G ، Ê K و Ê L ، Ê L و Ê M ، Ê M و Ê G زوايا متكاملة

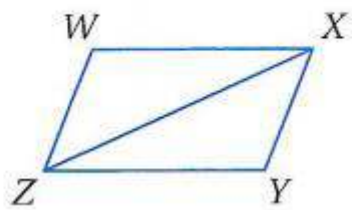
(كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتين)

26) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع ،

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$

(النظرية 5.8)



البرهان:

العبارات (المبررات):

2) متوازي الأضلاع WXYZ (معطى)

WX = ZY , XY =WZ ضلعين متناظرين متطابقين

XZ = ZX خاصية الانعكاس

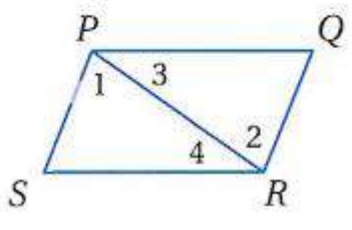
3) $\Delta XYZ \cong \Delta YZX$ (SSS)

27) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $PQRS$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\overline{QR} \cong \overline{SP}$

(النظرية 5.3)



البرهان:

العبارات (المبررات):

1) متوازي الأضلاع PQRS (معطى)

2) ارسم قطعة مستقيمة مساعدة PR (قطر PQRS) وسمِ الزوايا 1، 2، 3، 4 كما هو مبين.

3) $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية)

4) $\angle 1 = \angle 2$ ، و $\angle 3 = \angle 4$ (نظرية الزوايا المتبادلة داخلياً)

5) $PR = RP$ (خاصية الانعكاس)

6) $\Delta QRP \cong \Delta SRP$ (SAS)

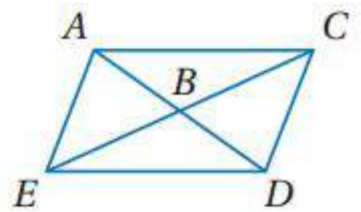
7) $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\overline{QR} \cong \overline{SP}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة)

28) برهانًا حرًّا.

المعطيات: $ACDE$ متوازي أضلاع.

المطلوب: القطران $\overline{AC}$ وَ $\overline{AD}$ ينصف كلٌّ منهما الآخر.

(النظرية 5.7)



البرهان: معطى أن ACDE متوازي أضلاع.

بما أن الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة فإن $\overline{EA} \cong \overline{DC}$.

ومن تعريف متوازي الأضلاع $\overline{EA} \parallel \overline{DC}$

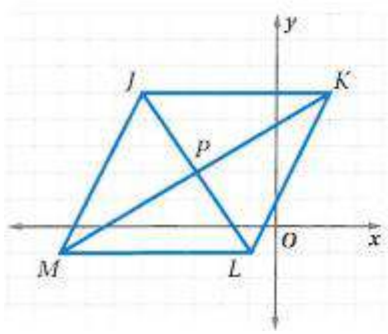
وتكون $\angle AEB \cong \angle DCB$ و $\angle EAB \cong \angle CDB$ لأن الزوايا المتبادلة داخلياً متطابقة.

لأن الزوايا المتبادلة داخلياً متطابقة. إذن $\Delta CBD \cong EBA$ حسب ASA.

و $\overline{BC} \cong \overline{EB}$ و $\overline{BD} \cong \overline{AB}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة ومن تعريف منصف القطعة المستقيمة فإن $\overline{EC}$ تنصف $\overline{AD}$ و $\overline{AD}$ تنصف $\overline{EC}$.

29) **هندسة إحداثية:** استعن بالشكل المجاور في كل مما يأتي:

a) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحديد ما إذا كان قطرا $JKLM$ ينصّف كل منهما الآخر. وضّح إجابتك.



$$(-3,2) \text{ ، } (2,5)$$

$$PK = \sqrt{(-3-2)^2 + (2-5)^2}$$

$$PK = \sqrt{34}$$

$$(-8,-1) \text{ ، } (-3,2)$$

$$MP = \sqrt{(-8+3)^2 + (-1-2)^2}$$

$$MP = \sqrt{34}$$

$$MP = PK = \sqrt{34}$$

$$L,P = (-1,-1) \text{ ، } (-3,2)$$

$$LP = \sqrt{(-1+3)^2 + (-1-2)^2}$$

$$LP = \sqrt{13}$$

$$J,P = (-5,5) \text{ ، } (-3,2)$$

$$JP = \sqrt{(-5+3)^2 + (5-2)^2}$$

$$JP = \sqrt{13}$$

$$JP = LP = \sqrt{13}$$

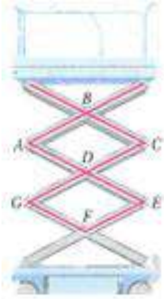
بما أن $JP = LP, MP = KP$ فإن القطرين ينصف كل منهما الآخر.

b) حدّد ما إذا كان قطرا $JKLM$ متطابقين. وضّح إجابتك.

لا؛ $JP + LP \neq MP + KP$

c) استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كانت الأضلاع المتتالية متعامدة أم لا. وضّح إجابتك.

لا؛ ميل JK يساوي 0، وميل JM يساوي 2؛ أحدهما لا يساوي سالب معكوس الآخر.



30) رافعات: في الشكل المجاور: $ABCD$ ، $DEFG$ متوازيا أضلاع متطابقان.

a) حدد الزوايا التي تطابق $\angle A$. وضّح تبريرك.

الزوايا C, E, G؛ إجابة ممكنة: $\angle C \cong \angle A$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.
$\angle E \cong \angle A$ لأن متوازيي الأضلاع متطابقان، $\angle G \cong \angle E$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة وتطابق $\angle A$ حسب خاصية التعدي.

b) حدد القطع المستقيمة التي تطابق $\overline{BC}$. وضّح تبريرك.

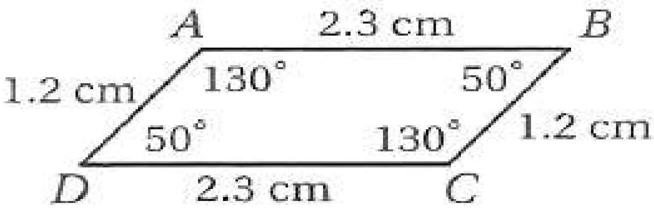
$\overline{GF}$, $\overline{DE}$, $\overline{AD}$
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.
$\overline{DE} \cong \overline{BC}$ لأن متوازيي الأضلاع متطابقان
$\overline{GF} \cong \overline{DE}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة وتطابق $\overline{BC}$ حسب خاصية التعدي.

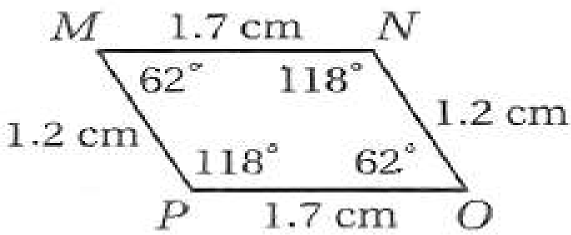
c) حدد الزوايا المكملة للزاوية C. وضّح تبريرك.

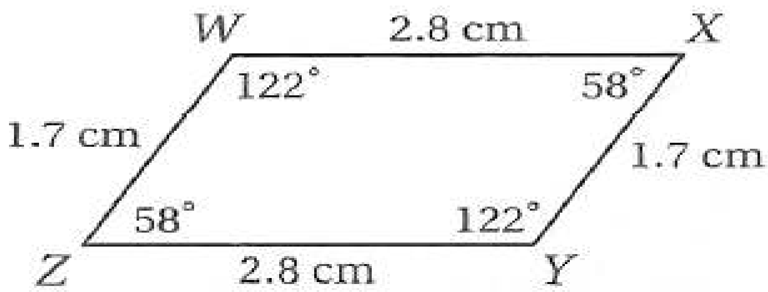
الزوايا $\angle EFG$, $\angle EDG$, $\angle ADC$, $\angle ABC$
$\angle ABC$ و$\angle ADC$ مكملتان $\angle C$ ؛ لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.
$\angle EDG$ مكملة $\angle C$ لأنها تطابق $\angle ADC$ حسب نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس ومكملة $\angle C$ بالتعويض، $\angle EFG$ تطابق $\angle EDG$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، ومكملة $\angle C$ بالتعويض.

31) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة اختبارات لتمييز متوازي الأضلاع.

a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة والمتوازية. صِل الأطراف لتكوِّن أشكالًا رباعية، وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$. ثم قِس أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا لكل منها.







b) **جدوليًا:** أكمل الجدول الآتي:

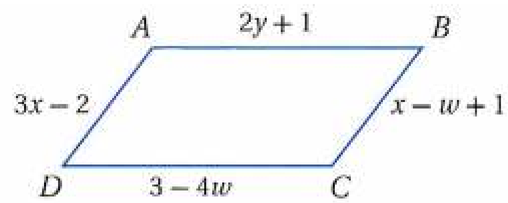
الشكل الرباعي	هل الأضلاع المتقابلة متطابقة؟	هل الزوايا المتقابلة متطابقة؟	هل الشكل متوازي أضلاع؟
ABCD	نعم	نعم	نعم
MNOP	نعم	نعم	نعم
WXYZ	نعم	نعم	نعم

c) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول الأشكال الرباعيّة التي لها ضلعان متطابقان ومتوازيان.

إذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متوازيان ومتطابقان فإن هذا الشكل متوازي أضلاع.

مسائل مهارات التفكير العليا:

32) تحدٍّ: إذا كان محيط $\square ABCD$ في الشكل أدناه يساوي 22 in ، فأوجد AB .



الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقان

$$AB = CD, \text{ and } AD = BC$$
$$2y+1 = 3-4w, \text{ and } 3x-2 = x-w+1$$
$$3x-2 = x-w+1$$
$$2x = 3-w$$
$$x = \frac{3-w}{2}$$

المحيط = مجموع أطوال الأضلاع

$$2y+1+x-w+1+3-4w+3x-2 = 22$$

حيث ان كل ضلعين متقابلين متساويين

$$2y+1 = 3-4w, \text{ and } 3x-2 = x-w+1$$

$2(3-4w+3x-2) = 22$ أي ان

$$3x-4w+10$$

بالتعويض عن قيمة x

$$3\left(\frac{3-w}{2}\right)-4w = 10$$
$$9-3w-8w = 20$$
$$-11w = 11$$
$$w = -1$$

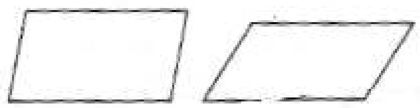
بالتعويض بقيمة w في اطوال الاضلاع

$$DC = 3-4(-1) = 7$$
$$AB = DC = 7in$$

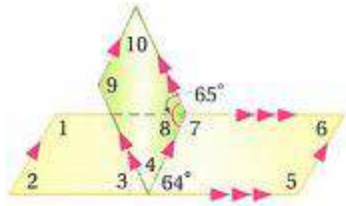
33) **اكتب:** هل توجد نظرية SSSS في تطابق متوازيات الأضلاع. برّر إجابتك.

لا توجد لأن كل ضلعين متقابلين متطابقين وليس جميع الأضلاع متطابقة

34) **إجابة مفتوحة:** أعط مثالًا مضادًا يبيّن أن متوازيات الأضلاع ذات الأضلاع المتناظرة المتطابقة ليست متطابقة دائمًا.



35) **تبرير:** أوجد $m\angle 1$ ، $m\angle 10$ في الشكل المجاور. وضّح تبريرك.



بما أن الشكل متوازي أضلاع إذن:

$\angle 10$ مكملة للزاوية التي قياسها 65° لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.

$\angle 10 + 65^\circ = 180^\circ$

$\angle 10 = 180^\circ - 65^\circ$

$\angle 10 = 115^\circ$

$\angle 2 = 64^\circ$ **متساويتان بالتناظر**

$\angle 2$ مكملة للزاوية $\angle 1$ لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.

$\angle 1 + 64^\circ = 180^\circ$

$\angle 1 = 180^\circ - 64^\circ$

$\angle 1 = 116^\circ$

36) **اكتب:** لخّص خصائص أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه وأقطاره.

في متوازي الأضلاع تكون الأضلاع المتقابلة متطابقة، والزوايا المتقابلة متطابقة، وتكون كل زاويتين متحالفتين متكاملتين.

وإذا كانت إحدى الزوايا قائمة تكون جميع زواياه قوائم. وقطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

تدريب على الاختبار المعياري:

37) قياسا زاويتين متحالفتين في متوازي أضلاع هما: $3x + 42$, $9x - 18$. ما قياس الزاويتين؟

A $13, 167$ B $58.5, 31.5$

C $39, 141$ D $81, 99$

الاختيار D

$3x + 42 + 9x - 18 = 180$

$12x + 24 = 180$

$12x = 180 - 24$

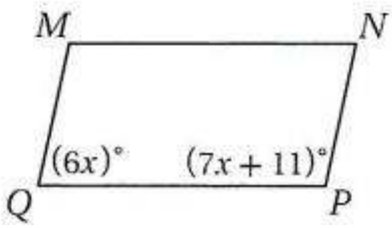
$12x = 156$

$x = 13$

$\angle 3x + 42 = 3 \times 13 + 42 = 81^\circ$

$\angle 9x - 18 = 9 \times 13 - 18 = 99^\circ$

38) **إجابة شبكية:** إذا كان $MNPQ$ متوازي أضلاع، فما قيمة x؟



$6x + 7x + 11 = 180$

$13x = 180 - 11$

$13x = 169$

$x = 13$

مراجعة تراكمية

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي :

(الدرس 1-1)

39) 108°

$108n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$108n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-72n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 5$ (بقسمة كلا الطرفين على −72)

إذن للمضلع 5 أضلاع

40) 140°

$140n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$140n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-40n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 9$ (بقسمة كلا الطرفين على −40)

إذن للمضلع 9 أضلاع

41) 147.3°

$147.3n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$147.3n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-32.7n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 11$ (بقسمة كلا الطرفين على −32.7)

إذن للمضلع 11 ضلع

42) 160°

$160n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$160n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-20n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 18$ (بقسمة كلا الطرفين على −20)

إذن للمضلع 18 ضلع

43) 135°

$135n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$135n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-45n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 8$ (بقسمة كلا الطرفين على -45)

إذن للمضلع 8 أضلاع

44) 176.4°

$176.4n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$176.4n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-3.6n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 100$ (بقسمة كلا الطرفين على -3.6)

إذن للمضلع 100 ضلع

حدد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين، أو غير ذلك في كل مما يأتي: (الدرس 5-2)

45) $y = -x + 6$

$x + y = 20$

$y = -x + 6$

$y = 20 - x$

معامل x في كل معادلة متساويين إذن المستقيمان متوازيين

46) $y - 7x = 6$

$7y + x = 8$

$y = 6 + 7x$

$$y = \frac{8}{7} - \frac{x}{7}$$

حاصل ضرب معامل x في كل معادلة $= -1$ إذن المستقيمان متعامدين

47) $3x + 4y = 12$

$6x + 2y = 6$

$$4y = 12 - 3x \rightarrow y = 3 - \frac{3}{4}x$$

$$2y = 6 - 6x \rightarrow y = 3 - 3x$$

معامل x في كل من المعادلتين غير متساويين إذا هما غير ذلك

48) $2x + 5y = -1$

$10y = -4x - 20$

$$5y = -1 - 2x$$

$$\frac{10y}{2} = \frac{-4x}{2} - \frac{20}{2} \rightarrow 5y = -2x - 10$$

معامل x في كل معادلة متساويين إذن المستقيمان متوازيين

49) **زراعة:** عند زراعة الأشجار، تسند الشجرة بدعامة (على شكل عصا) ترتكز على الأرض وتربط في جذع الشجرة لتثبيتها. استعمل متباينة SAS لتفسير سبب فعالية هذه الطريقة في تثبيت الأشجار المزروعة رأسيًّا. (الدرس 6-4)

حسب نظرية المتباينة SAS، إذا بدأت الشجرة تميل، فإن إحدى زوايا المثلث المتكون من الشجرة وسطح الأرض والدعامة سوف تتغير، والضلع المقابل لتلك الزاوية سوف يتغير.
ولأن الدعامة ترتكز على الأرض ومثبتة في الشجرة فإنه لن يتغير طول أي ضلع من أضلاع المثلث. لذلك لا يمكن أن تتغير أي زاوية. وهذا يؤكد أن الشجرة ستبقى مستقيمة.

استعد للدرس اللاحق

رؤوس شكل رباعي هي $W(3, -1), X(4, 2), Y(-2, 3), Z(-3, 0)$. حدّد ما إذا كانت كل قطعة مستقيمة مما يأتي تمثل ضلعًا أو قطرًا في الشكل الرباعي، وأوجد ميل كل منها.

50) $\overline{YZ}$

ضلع؛ الميل = $\frac{3-0}{-2+3} = 3$

51) $\overline{YW}$

قطر؛ الميل = $\frac{3+1}{-2-3} = \frac{4}{-5}$

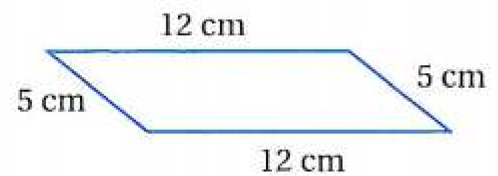
52) $\overline{ZW}$

ضلع؛ الميل: $\frac{0+1}{-3-3} = \frac{-1}{6}$

5-3 تمييز متوازي الأضلاع

تحقق

1A)

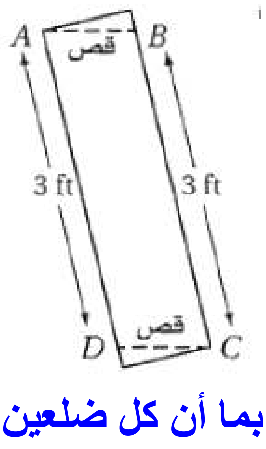


نعم؛ لأن كل ضلعين متقابلين فيه متطابقان.

1B)

لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.

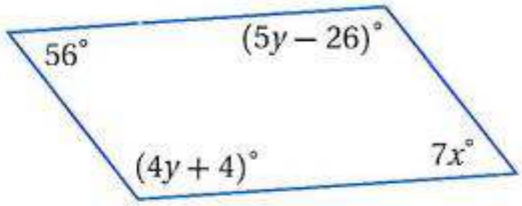
2) **لوحات:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، وضّح لماذا يكون خطي القص أعلى وأسفل كل شريط متوازيين.



بما أن كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي ABCD متطابقان فإن ABCD متوازي أضلاع إذن $AB \parallel DC$

أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(3A



كل زاويتين متقابلتين متطابقتين

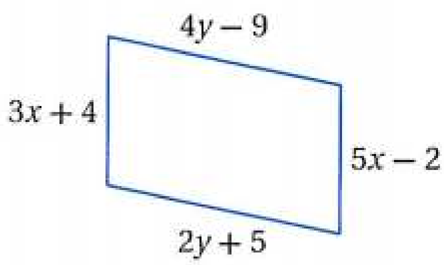
$7x = 56$

$x = 8$

$5y - 26 = 4y + 4$

$y = 4 + 26 = 30$

(3B



كل ضلعين متقابلين متطابقين

$4y - 9 = 2y + 5$

$4y - 2y = 5 + 9$

$2y = 14$

$y = 7$

$3x + 4 = 5x - 2$

$3x - 5x = -2 - 4$

$-2x = -6$

$x = 3$

حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا في كل مما يأتي. برّر إجابتك
باستعمال الطريقة المحددة في السؤال :

4A) $A(3,3), B(8,2), C(6,-1), D(1,0)$ ، صيغة المسافة

$$A,B=(3,3),(8,2)$$

$$AB=\sqrt{(3-2)^2+(3-8)^2}$$

$$AB=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$$

$$C,D=(6,-1),(1,0)$$

$$CD=\sqrt{(-1-0)^2+(6-1)^2}$$

$$CD=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$$

$$B,C=(8,2),(6,-1)$$

$$BC=\sqrt{(2+1)^2+(8-6)^2}$$

$$BC=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

$$A,D=(3,3),(1,0)$$

$$AD=\sqrt{(3-0)^2+(3-1)^2}$$

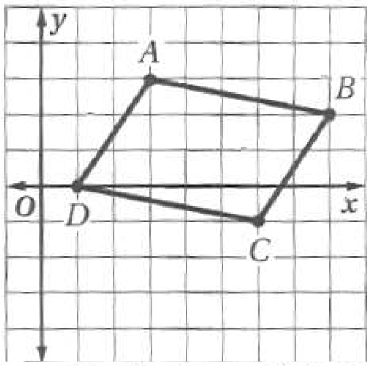
$$AD=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

إذا كانت الأضلاع المتقابلة لشكل رباعي متطابقة فإنه متوازي أضلاع.

$AB=\sqrt{26}$ ؛ $DC=\sqrt{26}$ ؛ $BC=\sqrt{13}$ ؛ $AD=\sqrt{13}$.

حيث أن المسافة بين أي نقطتين = $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

بما أن $AB = DC$ و$AD = BC$ فإن $AB = DC$ و$AD = BC$ لذلك فالشكل الرباعي ABCD متوازي أضلاع حسب النظرية 5.9.



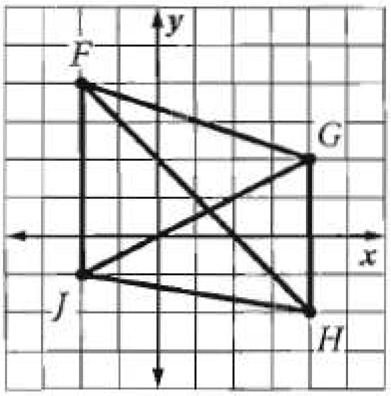
4B) $F(-2, 4), G(4, 2), H(4, -2), J(-2, -1)$ ، صيغة نقطة المنتصف

إذا كان قطرا شكل رباعي ينصف كل منهما الآخر، فإنه متوازي أضلاع، وينصف قطرا شكل رباعي كل منهما الآخر إذا كانت نقطتا منتصفيهما متطابقتين.

نقطة منتصف القطر $\overline{FH}$ هي $(1, 1)$. ونقطة منتصف القطر $\overline{GJ}$ هي $(1, 0.5)$.

حيث أن نقطة المنتصف $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

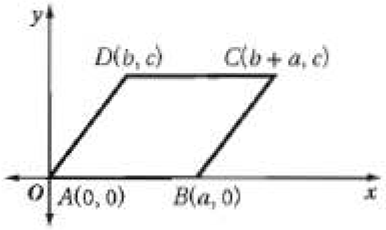
وبما أن نقطتي منتصفي القطرين $\overline{FH}$ و $\overline{GJ}$ ليس لهما الإحداثيات نفسها، فإن الشكل الرباعي FGHJ ليس متوازي أضلاع.



5) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإنّ أضلاعه المتقابلة متطابقة.

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع.

المطلوب: AB = CD, AD = BC



برهان إحداثي:

$$AB = \sqrt{((a-0)^2 + (0-0)^2)} = a$$

$$DC = \sqrt{((b+a-b)^2 + (c-c)^2)} = a$$

$$AD = \sqrt{((c-0)^2 + (b-0)^2)} = \sqrt{(c^2 + b^2)}$$

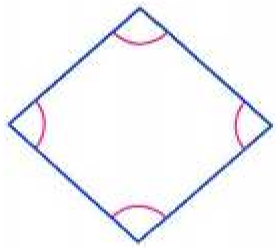
$$BC = \sqrt{((a-(b+a))^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(c^2 + b^2)}$$

بما أن AB = DC وAD = BC، فإن AB = DC وAD = BC.

تأكد:

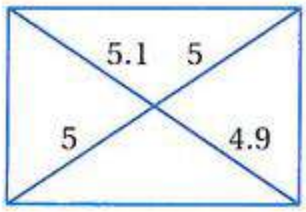
المثال 1 حدّد ما إذا كان شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

(1



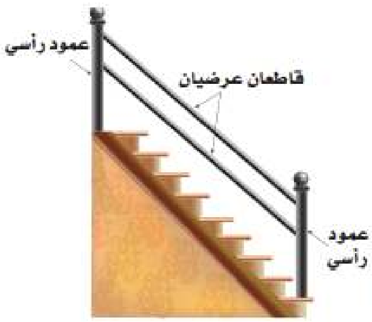
نعم؛ لأن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

(2



لا؛ لأنه لا يحقق أي شرط من شروط متوازي الأضلاع.

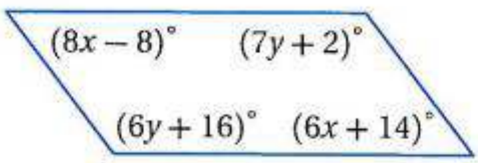
(3 **نجارة:** صنع نجار دربزينًا لدَرَج يتكوّن من عمودين رأسيين؛ الأول مثبت فوق الدرجة الأولى، والثاني مثبت فوق الدرجة الأخيرة، ويصل بينهما قاطعان خشبيان كما في الشكل المجاور. كيف يمكن للنجار التحقق من أن القاطعين الخشبيين العرضيين متوازيان، وذلك بأقل عدد من مرات القياس، إذا علمت بأن الدرجتين الأولى والأخيرة مستويتان مع الأرض.



إذا كان القاطعان الخشبيان متطابقان فإن الشكل متوازي أضلاع وبالتالي يكون القاطعان الخشبيين متوازيان.

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

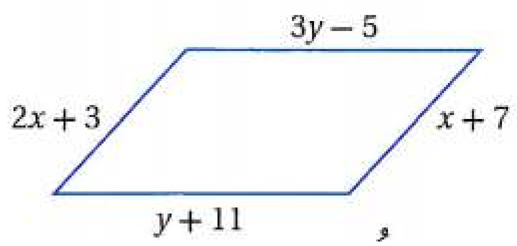
(4



$$8x - 8 = 6x + 14$$
$$8x - 6x = 14 + 8$$
$$2x = 22$$

$$x = 11$$
$$7y + 2 = 6y + 16$$
$$7y - 6y = 16 - 2$$
$$y = 14$$

(5



$$x + 7 = 2x + 3$$
$$2x - x = 7 - 3$$
$$x = 4$$

$$3y - 5 = y + 11$$
$$3y - y = 11 + 5$$
$$2y = 16$$
$$y = 8$$

هندسة إحداثيّة : مثل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال صيغة الميل.

(6 $A(-2, 4), B(5, 4), C(8, -1), D(-1, -1)$

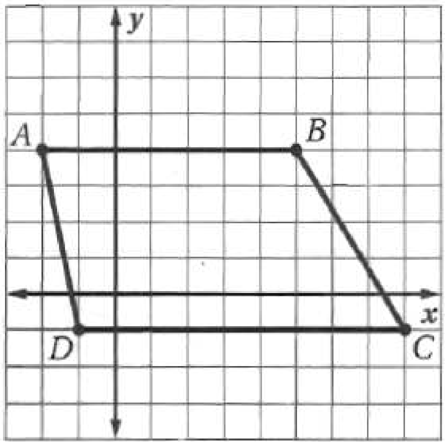
ميل $\overline{AB}$: $\dfrac{-2-5}{4-4} = \dfrac{-7}{0}$

ميل $\overline{BC}$: $\dfrac{5-8}{4+1} = \dfrac{3}{5}$

ميل $\overline{CD}$: $\frac{8+1}{0}=\frac{9}{5}$

ميل $\overline{AD}$: $\frac{-2+1}{4+1}=\frac{-1}{5}$

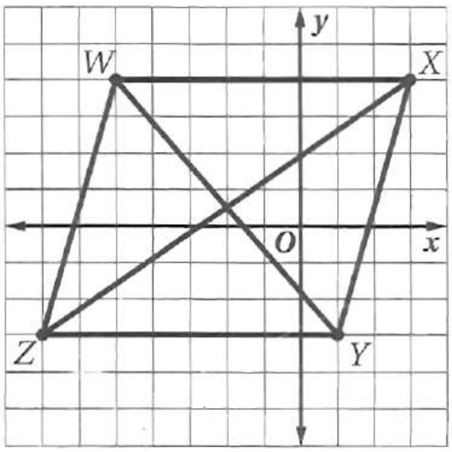
بما أن ميل $\overline{BC} \neq$ ميل $\overline{AD}$ ، فإن ABCD ليس متوازي أضلاع.



7) $W(-5, 4), X(3, 4), Y(1, -3), Z(-7, -3)$ ، صيغة نقطة المنتصف.

نعم؛ نقطة منتصف كل من $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$ هي $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

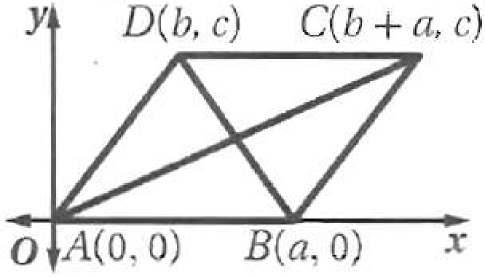
وبما أن القطرين ينصف كل منهما الآخر، فإن الشكل WXYZ متوازي أضلاع.



8) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإنّ قطريه ينصّف كل منهما الآخر.

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ ينصف كل منهما الآخر.



البرهان:

نقطة منتصف $\overline{AC}$

$$\left(\frac{0+(a+b)}{2}, \frac{0+c}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

ونقطة منتصف $\overline{DB}$

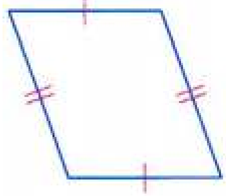
$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{0+c}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

إذن، $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ ينصف كل منهما الآخر.

تدرب وحل المسائل:

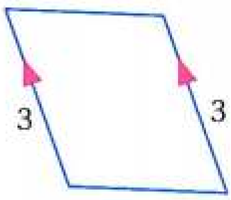
حدّد ما إذا كان كل شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

9)



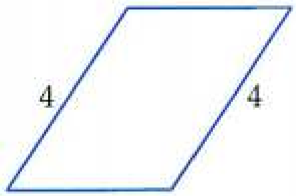
نعم؛ لأن كل ضلعين متقابلين متطابقان.

10)



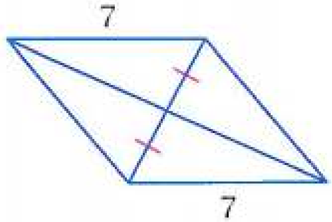
نعم؛ لأن فيه ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.

11)



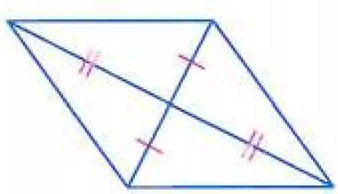
لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.

12)



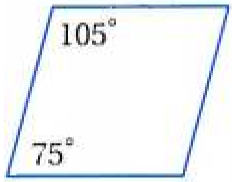
)لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.

13)

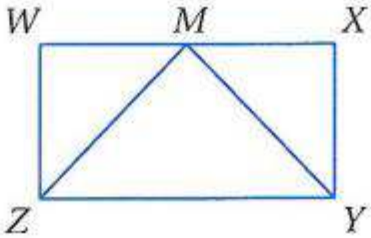


نعم؛ لأن قطرية ينصف كل منهما الآخر.

14)



لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.



15) **برهان:** إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، حيث $\angle X \cong \angle W$، M نقطة منتصف $\overline{WX}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\triangle ZMY$ متطابق الضلعين.

المعطيات: WXYZ متوازي أضلاع فيه $\angle W \cong \angle X$ وM نقطة منتصف $\overline{WX}$.

المطلوب: ΔZMY متطابق الضلعين.

البرهان: بما أن WXYZ متوازي أضلاع، فإن $\overline{XY} \cong \overline{WZ}$.

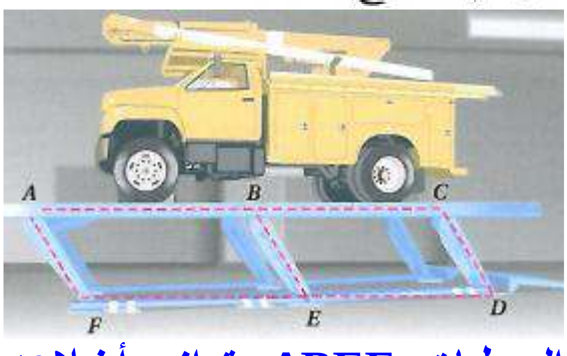
وبما أن M نقطة منتصف $\overline{WX}$، فإن WM = MX.

ومعطى أن $\angle X \cong \angle W$، لذلك وحسب SAS فإن $\Delta ZWM \cong \Delta YXM$

ولأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة، فإن $\overline{YM} \cong \overline{ZM}$.

إذن ZMY مثلث متطابق الضلعين بحسب تعريف المثلث متطابق الضلعين.

16) **رافعات:** تستعمل رافعات متوازيات الأضلاع لرفع المركبات الثقيلة عند صيانتها. ففي الشكل أدناه: $ABEF, BCDE$ متوازيا أضلاع. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $ACDF$ متوازي أضلاع أيضًا.



المعطيات: ABEF متوازي أضلاع؛ BCDE متوازي أضلاع.

المطلوب: ACDF متوازي أضلاع.

البرهان: العبارات (المبررات):

1) ABEF متوازي أضلاع؛ BCDE متوازي أضلاع (معطيات)

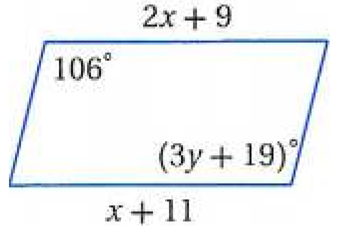
2) $AF = BE$, $BE = CD$, $\overline{AF}$ □ $\overline{BE}$, $\overline{BE}$ □ $\overline{CD}$ (تعريف متوازي الأضلاع)

3) $AF = CD$, $\overline{AF}$ □ $\overline{CD}$ (خاصية التعدي)

4) ACDF متوازي أضلاع. (إذا كان ضلعان في شكل رباعي متطابقين ومتوازيين فإنه متوازي أضلاع)

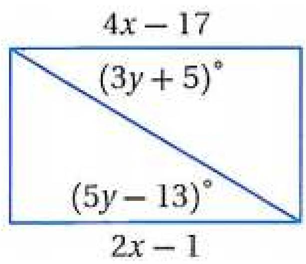
جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

17)



$$2x + 9 = x + 11$$
$$2x - x = 11 - 9$$
$$x = 2$$
$$106 = 3y + 19$$
$$3y = 106 - 19$$
$$3y = 87$$
$$y = 29$$

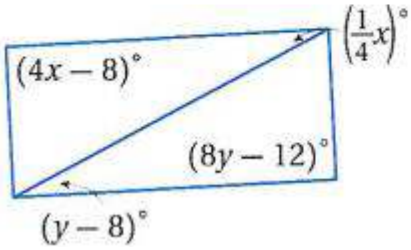
18)



$$4x - 17 = 2x - 1$$
$$4x - 2x = 17 - 1$$
$$2x = 16$$
$$x = 8$$
$$3y + 5 = 5y - 13$$
$$3y - 5y = -13 - 5$$

$-2y = -18$

$y = 9$



(19

$4x - 8 = 8y - 12 \quad \div 4$

$x - 2 = 2y - 3$

$x = 2y - 3 + 2$

$x = 2y - 1$

$\frac{1}{4}x = y - 8$

$\frac{1}{4}(2y - 1) = y - 8$

$\frac{1}{2}y - \frac{1}{4} = y - 8 \quad \times 4$

$2y - 1 = 4y - 32$

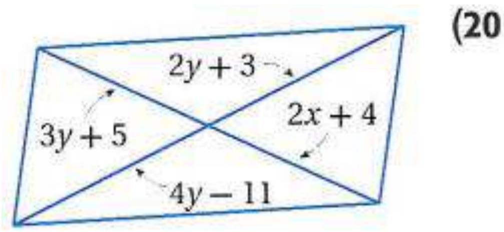
$2y - 4y = -32 + 1$

$-2y = -31$

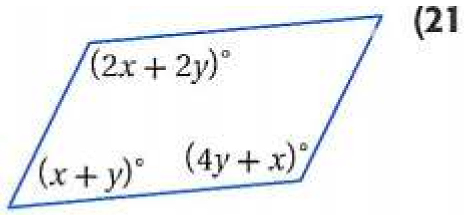
$y = 15.5$

$\because x = 2y - 1$

$\therefore x = 2 \times 15.5 - 1 = 30$

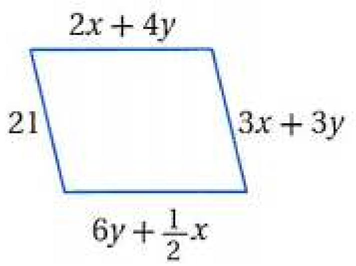


$$2y + 3 = 4y - 11$$
$$2y - 4y = -11 - 3$$
$$-2y = -14$$
$$y = 7$$
$$2x + 4 = 3y + 5$$
$$2x + 4 = 21 + 5$$
$$2x = 26 - 4$$
$$2x = 22$$
$$x = 11$$



$$2x + 2y = 4y + x$$
$$x = 4y - 2y$$
$$x = 2y$$
$$(x + y) + (4y + x) = 180$$
$$(2y + y) + (4y + 2y) = 180$$
$$9y = 180$$
$$y = 20$$
$$x = 40$$

(22



$$3x + 3y = 21$$
$$x + y = 7$$
$$x = 7 - y$$
$$2x + 4y = 6y + \frac{1}{2}x$$
$$2(7 - y) + 4y = 6y + \frac{1}{2}(7 - y)$$
$$14 - 2y + 4y = 6y + \frac{7}{2} - \frac{1}{2}y$$
$$14 + 2y = 5.5y + \frac{7}{2}$$
$$2y - 5.5y = \frac{7}{2} - 14$$
$$-3.5y = -10.5$$
$$y = 3$$
$$x = 7 - y = 7 - 3 = 4$$

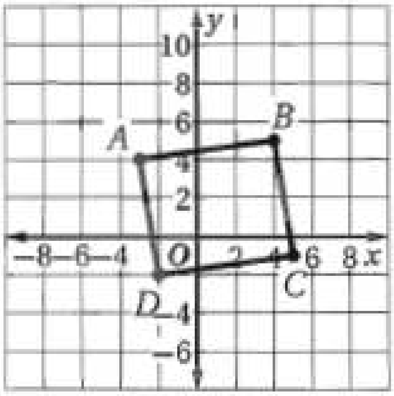
هندسة إحداثيّة : مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أُعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.

(23 $A(-3, 4)$، $B(4, 5)$، $C(5, -1)$، $D(-2, -2)$ ، صيغة الميل.

نعم؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي ميل $\overline{CD}$ ويساوي $\frac{1}{7}$ لذلك $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

حيث أن الميل = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

وبما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي ميل $\overline{AD}$ ويساوي -6
فإن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان فإن ABCD متوازي أضلاع.



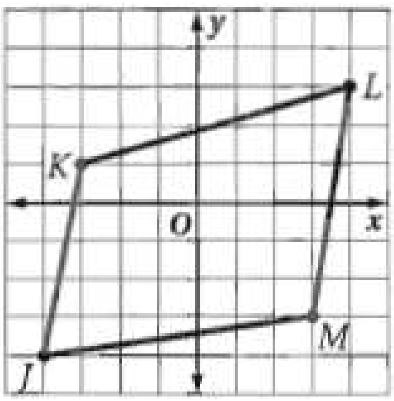
24) $J(-4, -4)$، $K(-3, 1)$، $L(4, 3)$، $M(3, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين.
والمسافة بين K وL تساوي $\sqrt{53}$. والمسافة بين L وM تساوي $\sqrt{37}$.

والمسافة بين M وJ تساوي $\sqrt{50}$. والمسافة بين J وK تساوي $\sqrt{26}$.

حيث أن المسافة بين أي نقطتين = $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

وبما أن كل ضلعين متقابلين ليسا متطابقين، فإن JKLM ليس متوازي أضلاع.



(25 $V(3, 5)$، $W(1, -2)$، $X(-6, 2)$، $Y(-4, 7)$ ، صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

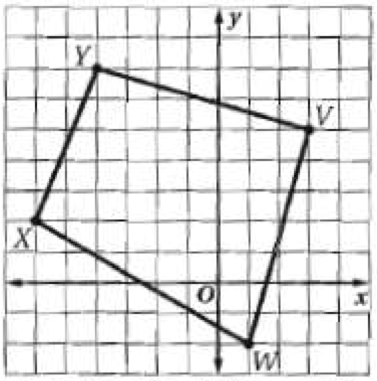
ميل $\overline{YX}$: $\frac{-4+6}{7-2} = \frac{2}{5}$

ميل $\overline{XW}$: $\frac{-6-1}{2+2} = \frac{-7}{4}$

ميل $\overline{WV}$: $\frac{1-3}{-2-5} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

ميل $\overline{YV}$: $\frac{-4-3}{7-5} = \frac{-7}{2}$

ميل $\overline{YV}$ يساوي $\frac{-7}{2}$ ، وميل $\overline{XW}$ يساوي $\frac{-7}{4}$ ، وميل $\overline{YX}$ يساوي $\frac{2}{5}$ ، وميل $\overline{VW}$ يساوي $\frac{2}{7}$. وبما أن ميل $\overline{YV}$ لا يساوي ميل $\overline{XW}$ ، وميل $\overline{YX}$ لا يساوي ميل $\overline{VW}$ فإن VWXY ليس متوازي أضلاع.



(26 $Q(2, -4)$، $R(4, 3)$، $S(-3, 6)$، $T(-5, -1)$ ، صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

ميل $\overline{TS}$: $\frac{-5+3}{-1-6} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

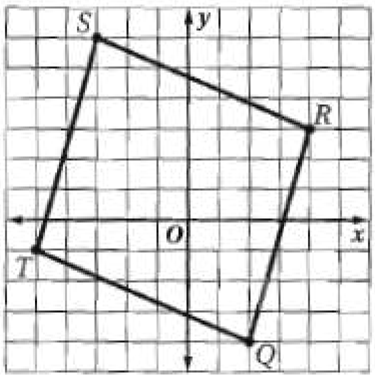
ميل $\overline{RQ}$: $\frac{4-2}{3+4} = \frac{2}{7}$

يجب أن يكون فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين. وبما أن ميل

$\overline{RQ}$ يساوي ميل $\overline{TS}$ ويساوي $\frac{2}{7}$ ، فإن $\overline{ST} \parallel \overline{TS}$ $\overline{QR}$ ولأن $QR = ST$

$= \sqrt{53}$

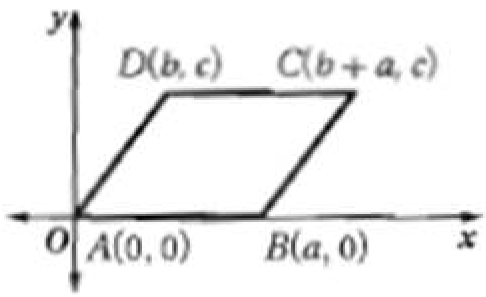
فإن $\overline{TS} \cong \overline{QR}$ إذن، QRST متوازي أضلاع.



27) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، فإنه متوازي أضلاع.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب: متوازي أضلاعABCD .



البرهان:

ميل $\overline{AD}$: $m = \frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{AB}$: $m = \frac{0-0}{a-0} = 0$

ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{DC}$: $m = \dfrac{c-c}{b+a-b} = 0$

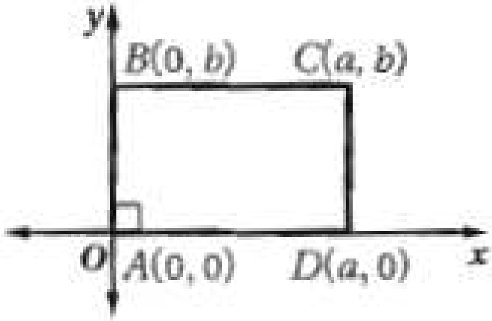
لذلك $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

إذن وحسب تعريف متوازي الأضلاع يكون ABCD متوازي أضلاع.

28) اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة: إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإنّ جميع زواياه قوائم.

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع، الزاوية A زاوية قائمة.

المطلوب: الزوايا B, C, D قوائم.



البرهان:

ميل $\overline{BC}$: $m = \dfrac{b-b}{a-0} = 0$، ميل $\overline{CD}$: غير معرف

ميل $\overline{AD}$: $m = \dfrac{0-0}{a-0} = 0$، ميل $\overline{AB}$: غير معرف

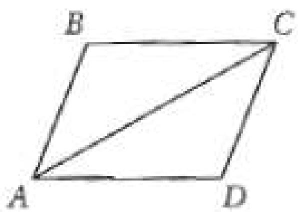
لذلك $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{CD} \perp \overline{AD}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$.

إذن، الزوايا D, C, B قوائم.

29) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 1.10.

المعطيات: $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$

المطلوب: ABCD متوازي أضلاع.



البرهان: ارسم $\overline{AC}$ لتشكل مثلثين.

وبما أن مجموع قياسات زوايا أي مثلث يساوي 180° فإن مجموع قياسات زوايا المثلثين يساوي 360°.

إذن $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^\circ$

وبما أن $\angle C \cong \angle A$ و $\angle D \cong \angle B$ فإن $m\angle A = m\angle C$ و $m\angle B = m\angle D$.

وبالتعويض $m\angle A + m\angle A + m\angle B + m\angle B = 360^\circ$

إذن $2(m\angle A) + 2(m\angle B) = 360^\circ$

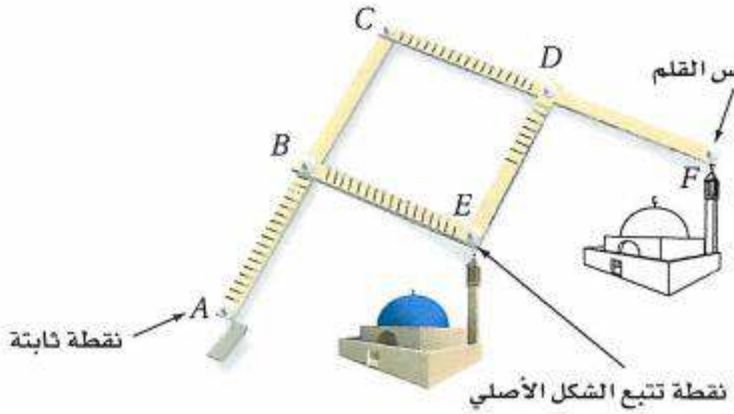
وبقسمة كلا الطرفين على 2 ينتج $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$ لذا فإن الزاويتين المتحالفتين متكاملتان و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

وبالمثل $2(m\angle A) + 2(m\angle D) = 360^\circ$ أو $m\angle A + m\angle D = 180^\circ$

إذن هاتان الزاويتان المتحالفتان متكاملتان و $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

إذن الأضلاع المتقابلة متوازية، لذلك فالشكل ABCD متوازي أضلاع.

30) **المنساخ:** استعن بمعلومات الربط مع الحياة إلى اليمين والشكل أدناه.



a) إذا كان $\overline{DF} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CF}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$.

المعطيات: $\overline{AC} \cong \overline{CF}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{DF} \cong \overline{DE}$

المطلوب: $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$.

البرهان: نعلم أن $\overline{AC} \cong \overline{CF}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{DF} \cong \overline{DE}$

إذن $AC = CF$ حسب تعريف التطابق

$AC = AB + BC$ و $CF = CD + DF$ (حسب مسلمة جمع القطع المستقيمة)

وبالتعويض، يكون $AB + BC = CD + DF$، وباستعمال التعويض مرة أخرى يكون $AB + BC = AB + DF$ وحسب خاصية الطرح $BC = DF$

إذن $\overline{BC} \cong \overline{DF}$ حسب تعريف التطابق، و $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ (حسب خاصية التعدي)

وإذا كان كل ضلعين متقابلين لشكل رباعي متطابقين فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع. إذن BCDE متوازي أضلاع ومن تعريف متوازي الأضلاع يكون $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$.

b) مقياس الرسم للشكل المنسوخ هو نسبة CF إلى BE، فإذا كان $AB = 12\,\text{in}, DF = 8\text{in}$، وطول الشكل الأصلي 5.5 in، فما طول الصورة؟

$\overline{AB} = \overline{CD}, \quad \overline{AB} = 12$

$\overline{CD} = 12$

$\overline{CF} = \overline{CD} + \overline{DF}$

$\overline{CF} = 12 + \overline{DF}$

$\overline{CF} = 12 + 8 = 20$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BE}} = \frac{20}{12}$$

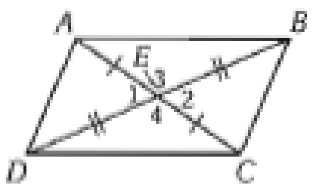
$$\frac{20}{12} = \frac{?}{5.5}$$

$$\frac{20 \times 5.5}{12} \approx 9.2\text{in}$$

31) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 5.11

المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{EB}, \ \overline{AE} \cong \overline{EC}$

المطلوب: ABCD متوازي أضلاع.



العبارات (المبررات):

1) $\overline{AE} \cong \overline{EC}, \ \overline{DE} \cong \overline{EB}$ (معطيات)

2) $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

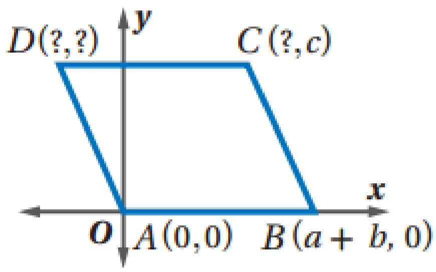
3) $\Delta ADE \cong \Delta CBE, \Delta ABE \cong \Delta CDE$ (SAS)

4) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) ABCD متوازي أضلاع (إذا كان كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي متطابقين فإنه متوازي أضلاع)

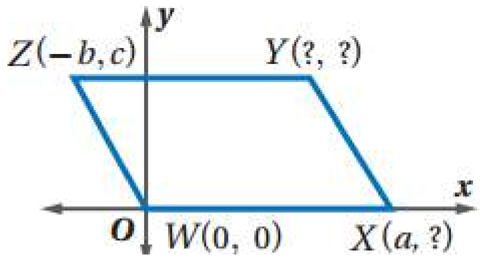
أوجد الإحداثيات المجهولة لرؤوس كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

32)



C (a , c) , D (- b , c)

33)



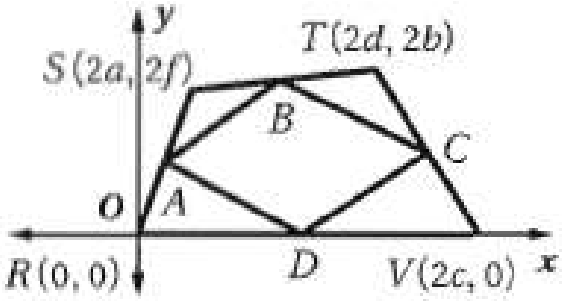
Y (a – b , c) , X (a , 0)

34) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع أي شكل رباعي تشكّل متوازي أضلاع.

المعطيات: RSTV شكل رباعي

والنقاط A, B, C, D منتصفات الأضلاع $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TV}$, $\overline{VR}$ على الترتيب.

المطلوب: ABCD متوازي أضلاع.



البرهان:

ارسم الشكل الرباعي RSTV في المستوى الإحداثي، وسمِ الإحداثيات كما هو مبين في الشكل (استعمال إحداثيات من مضاعفات العدد 2 سيجعل الحسابات أسهل) ومن صيغة نقطة المنتصف تكون إحداثيات النقاط A, B, C, D هي:

$$A\left(\frac{2a}{2},\frac{2f}{2}\right) = (a\ ,\ f)$$

$$B\left(\frac{2d+2a}{2},\frac{2f+2b}{2}\right) = (d+a,\ f+b)$$

$$C\left(\frac{2d+2c}{2},\frac{2b}{2}\right) = (d+c\ ,\ b)$$

$$D\left(\frac{2c}{2},\frac{0}{2}\right) = (c\ ,\ 0)$$

أوجد ميل كل من $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$.

ولأن ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ متساويان، فإن القطعتين المستقيمتين متوازيتان.

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد $\overline{DC}$,$\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = \sqrt{((d+a-a)^2+(f+b-f)^2)}$$

$$= \sqrt{(d^2+b^2)}$$

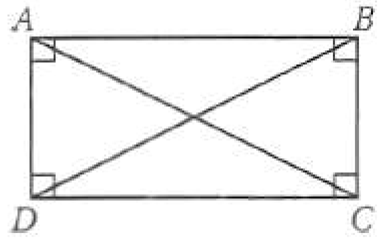
$$\overline{AB} = \sqrt{((d+c-c)^2+(b-0)^2)}$$

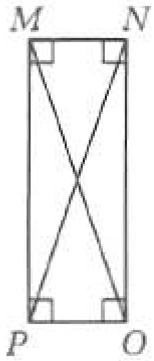
$$= \sqrt{(d^2+b^2)}$$

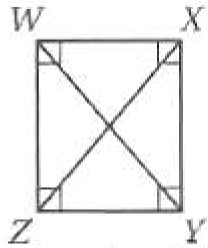
إذن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. لذلك ABCD متوازي أضلاع لأنه إذا كان ضلعان متقابلان في شكل رباعي متوازيين ومتطابقين فإنه متوازي أضلاع.

35) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي إحدى خصائص المستطيل.

a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة مستطيلات بأبعاد مختلفة وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منها.







b) قِس طولي قطري كل مستطيل، ثم أكمل الجدول المجاور.

الطول	القطر	المستطيل
3.3 cm	AC	ABCD
3.3 cm	BD	
2.8 cm	MO	MNOP
2.8 cm	NP	
2.0 cm	WY	WXYZ
2.0 cm	XZ	

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قطري المستطيل.

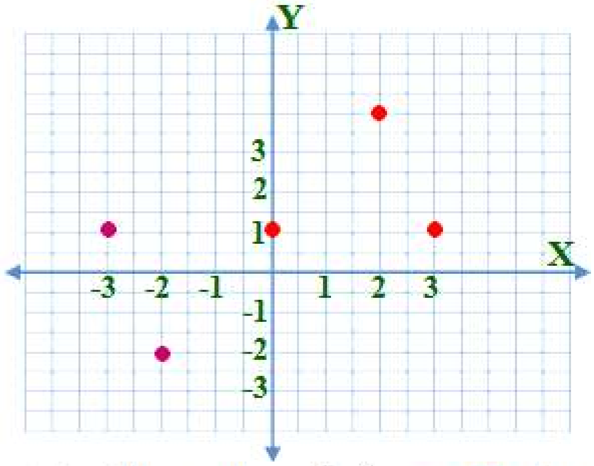
قطرا المستطيل متطابقان.

مسائل مهارات التفكير العليا:

36) **تحدٍّ:** يتقاطع قطرا متوازي أضلاع عند النقطة (0، 1). ويقع أحد رؤوسه عند النقطة (2، 4)، بينما يقع رأس آخر عند النقطة (3، 1). أوجد موقعي الرأسين الآخرين.

قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الأخر

$$(-2,-2),(-3,1)$$



37) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه والاختلاف بين النظريتين 5.9 و 5.3 .

النظريتان إحداهما عكس الأخرى

فرضية النظرية 1.3 "الشكل متوازي الأضلاع"

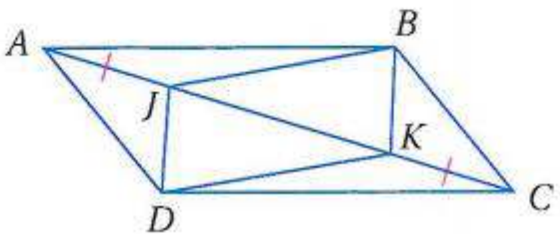
وفرضية النظرية 1.9 "الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متطابقة".

نتيجة النظرية 1.3 الأضلاع المتقابلة متطابقة ونتيجة النظرية 1.9 الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

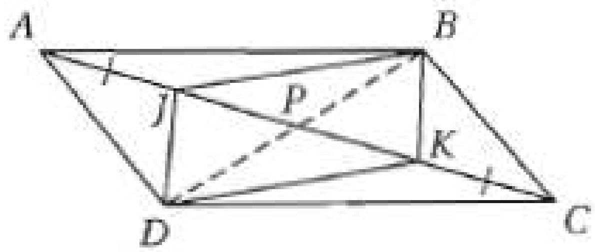
38) **تبرير:** إذا كانت الزوايا المتناظرة في متوازيي أضلاع متطابقة، فهل يكون متوازيا الأضلاع متطابقين أحيانًا، أم دائمًا، أم لا يكونان متطابقين أبدًا؟

أحياناً؛ يمكن أن يكون متوازيا الأضلاع متطابقين، إلا أنه يمكنك أيضاً جعل متوازي الأضلاع أكبر أو أصغر بتغيير أطوال الأضلاع ودون تغيير قياسات الزوايا.

39) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، $ABCD$ متوازي أضلاع، $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$.
بيِّن أن الشكل الرباعي $JBKD$ متوازي أضلاع.



المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع و $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$.
المطلوب: $JBKD$ متوازي أضلاع.



البرهان: ارسم $\overline{DB}$.
بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع، فإن القطرين $\overline{DB}$ و $\overline{AC}$ ينصف كل منهما الآخر حسب النظرية 1.7. سمِ نقطة تقاطعهما P.
ومن تعريف نقطة المنتصف يكون $\overline{AP} \cong \overline{PC}$ ، إذن $AP = PC$.
وحسب مسلمة جمع القطع المستقيمة فإن
$AP = AJ + JP$, $PC = PK + KC$ وبالتعويض
$AJ + JP = PK + KC$ وبما أن $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$ ، فإن $AJ = KC$ حسب تعريف التطابق.
$KC + JP = PK + KC$
وبالتعويض $KC + JP = PK + KC$ ومن خاصية الطرح يكون $JP = PK$.
إذن ومن تعريف التطابق تكون
$\overline{JP} \cong \overline{PK}$ إذن P نقطة منتصف $\overline{JK}$.
وبما أن $\overline{JK}$ و $\overline{DB}$ تنصف كل منهما الأخرى.
وهما قطران للشكل الرباعي $JBKD$، فحسب النظرية 1.11 يكون الشكل الرباعي $JBKD$ متوازي أضلاع.

40) اكتب: استعمل العبارات الشرطية الثنائية "إذا وفقط إذا" في دمج كل من النظريات: 5.9 وَ 5.10 وَ 5.11 وَ 5.12 وعكسها.

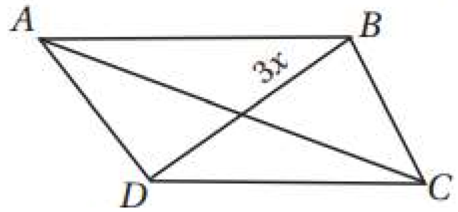
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا أمكنك بيان أن:
كل ضلعين متقابلين متطابقان أو متوازيان، أو كل زاويتين متقابلتين متطابقتان،
أو القطران ينصف كل منهما الآخر، أو ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان.

تدريب على الاختبار المعياري

41) إذا كان الضلعان AB, DC في الشكل الرباعي $ABCD$ متوازيين، فأيّ المعطيات الآتية كافية لإثبات أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع؟

$$\mathbf{B :}\ \overline{AB} \cong \overline{DC}$$

42) إجابة قصيرة: في الشكل الرباعي $ABCD$ أدناه، إذا كان $AC = 40,\ BD = \frac{3}{5}AC$، $\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$، فما قيمة x التي تجعل $ABCD$ متوازي أضلاع؟



$$DB = \frac{3}{5}AC$$

$$DB = \frac{3}{5} \times 40$$

$$DB = 24$$

$$3x = \frac{24}{2} = 12$$

$$x = 12 \div 3 = 4$$

مراجعة تراكمية

هندسة إحداثية : أوجد إحداثي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ في كل من السؤالين الآتيين (الدرس 2-1)

43) $A(-3, 5), B(6, 5), C(5, -4), D(-4, -4)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{BD}$, $\overline{AC}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ التي طرفاها

$(-3،5), (5\ \ -4)$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-3+5}{2}, \frac{5-4}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$= (1،0.5)$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري RSTU هما $(1،0.5)$

44) $A(2, 5), B(10, 7), C(7, -2), D(-1, -4)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{BD}$, $\overline{AC}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ التي طرفاها

$(2،5), (7\ \ -2)$

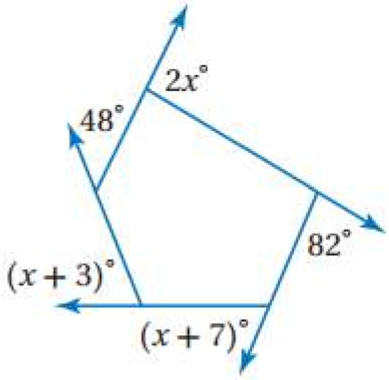
$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{2+7}{2}, \frac{5-2}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$= (4.5،1.5)$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري RSTU هما $(4.5،1.5)$

أوجد قيمة x في كل من الأسئلة الآتية : (الدرس 1-1)

(45



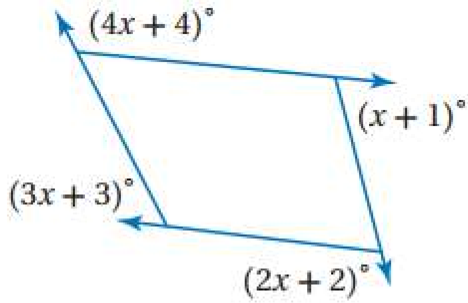
$$2x + (x + 3) + (x + 7) + 82 + 48 = 360^{\circ}$$

$$4x + 140 = 360$$

$$4x = 220$$

$$x = 55$$

(46

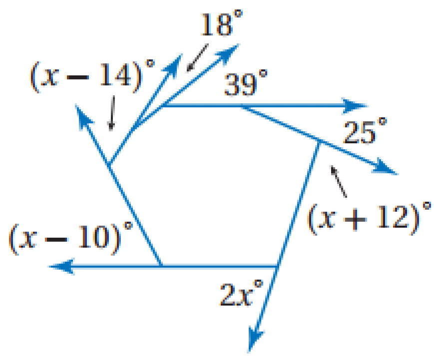


$$(4x + 4) + (x + 1) + (2x + 2) + (3x + 3) = 360^{\circ}$$

$$10x = 360 - 10$$

$$x = 35$$

(47



$$(x-14)+18+39+25+(x+12)+2x+(x-10)=360^\circ$$
$$5x+70=360$$
$$5x=360-70=290$$
$$x=58$$

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

(48 140°

$$140n=(n-2).180$$
$$140n=180n-360$$
$$140n-180n=-360$$
$$-40n=-360$$
$$n=259$$

(49 160°

$$160n=(n-2).180$$
$$160n=180n-360$$
$$160n-180n=-360$$
$$-20n=-360$$
$$n=18$$

(50 168°

$$168n=(n-2).180$$
$$168n=180n-360$$
$$-180n+168n=-360$$
$$-12n=-360$$
$$n=30$$

(51 162°

$$162n = (n-2).180$$
$$162n = 180n - 360$$
$$-180n + 162n = -360$$
$$-18n = -360$$
$$n = 20$$

استعد للدرس اللاحق

استعمل الميل لتحديد ما إذا كان XY, YZ متعامدتين أم لا في كل مما يأتي:

(52 $X(-2, 2), Y(0, 1), Z(4, 1)$

ميل $\overline{XY} = \frac{-2-0}{2-1} = \frac{-2}{1} = -2$

ميل $\overline{YZ} = \frac{4-0}{1-1} = \frac{4}{0}$

غير متعامدتين لأن حاصل ضرب ميل كل منهم لا يساوي -1

(53 $X(4, 1), Y(5, 3), Z(6, 2)$

ميل $\overline{XY} = \frac{4-5}{1-3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

ميل $\overline{YZ} = \frac{5-6}{3-2} = \frac{-1}{1} = -1$

غير متعامدتين لأن حاصل ضرب ميل كل منهم لا يساوي -1

اختبار منتصف الفصل

-

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعات المحدبة الآتية : (الدرس 1-1)

1) الخماسي

$$n = 5$$

$$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$$

2) السباعي

$$n = 7$$

$$(n-2).180 = (7-2).180^\circ = 900^\circ$$

3) ذو 18 ضلعًا

$$n = 18$$

$$(n-2).180 = (18-2).180^\circ = 2880^\circ$$

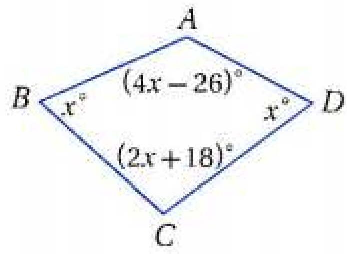
4) ذو 23 ضلعًا

$$n = 23$$

$$(n-2).180 = (23-2).180^\circ = 3780^\circ$$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية في كل من المضلعين الآتيين: (الدرس 1-1)

5)



$(4x-26+x+x+2x+18)=360^\circ$

$8x-8=360$

$x=46$

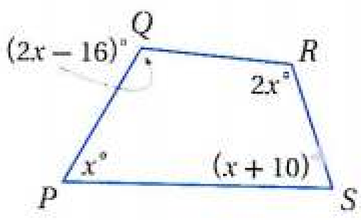
$m\angle A=4\times 46-26=158^\circ$

$m\angle C=2\times 46+18=110^\circ$

$m\angle B=46^\circ$

$m\angle D=46^\circ$

6)



$(2x-16+2x+x+x+10)=360^\circ$

$6x-6=360$

$x=61$

$m\angle Q=2x-16=2\times 61-16=106^\circ$

$m\angle R=2\times 61=122^\circ$

$m\angle P=61^\circ$

$m\angle S=x+10=61+10=71^\circ$

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه الداخلية في كل مما يأتي :

(الدرس 1-1)

7) 720°

$$720=(n-2).180$$
$$720=180n-360$$
$$720+360=180n$$
$$n=6$$

8) 1260°

$$1260=(n-2).180$$
$$1260=180n-360$$
$$1260+360=180n$$
$$n=9$$

9) 1800°

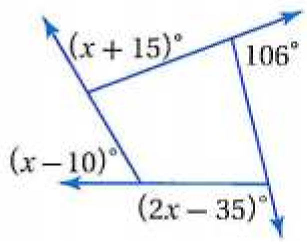
$$1800=(n-2).180$$
$$1800=180n-360$$
$$1800+360=180n$$
$$n=12$$

10) 4500°

$$4500=(n-2).180$$
$$4500=180n-360$$
$$4500+360=180n$$
$$n=27$$

أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين : (الدرس 1-1)

(11

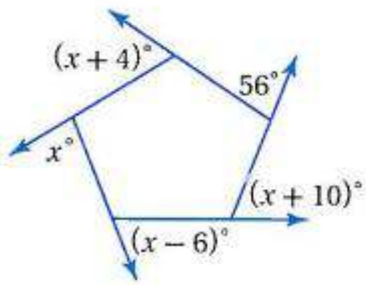


$$(x+15)+106+(x-10)+(2x-35)=360$$

$$4x+76=360$$

$$x=71$$

(12

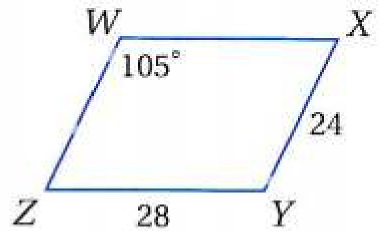


$$(x+4)+56+(x+10)+(x-6)+x=360$$

$$4x+64=360$$

$$x=74$$

استعمل $\square WXYZ$ لإيجاد كل مما يأتي : (الدرس 1-2)



(13 $m\angle WZY$

$$105^\circ+\angle WZY=180^\circ$$

$$\angle WZY=180^\circ-105^\circ$$

$$\angle WZY=75^\circ$$

14) WZ

$WZ = XY = 24$

15) $m\angle XYZ$

$\angle XYZ = \angle ZWX = 105^\circ$

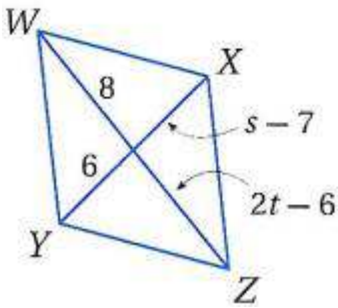
16) **إنارة:** استعمل مقبض الإنارة العلوي الذي يشكل متوازي أضلاع في إيجاد $m\angle p$ في $\square PQRS$. (الدرس 2-5)

$\angle P$ و $\angle S$ زاويتان متكاملتان

$\angle P = 180 - 64 = 116^\circ$

جبر: أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين : (الدرس 2-1)

17)



$s - 7 = 6$

$s = 6 + 7$

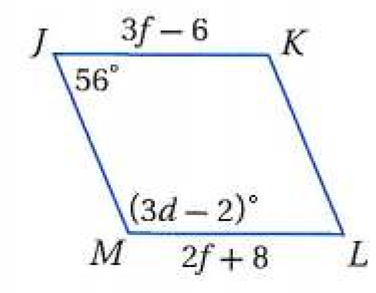
$s = 13$

$2t - 6 = 8$

$2t = 6 + 8$

$t = 7$

(18

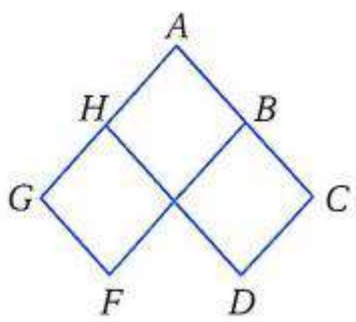


$$3f - 6 = 2f + 8$$
$$3f - 2f = 8 + 6$$
$$f = 14$$
$$56 + (3d - 2) = 180$$
$$54 + 3d = 180$$
$$3d = 180 - 54$$
$$3d = 126$$
$$d = 42$$

19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 2-1)

المعطيات: $\square HACD$ ، $\square GFBA$

المطلوب: $\angle F \cong \angle D$



البرهان: العبارات (المبررات):

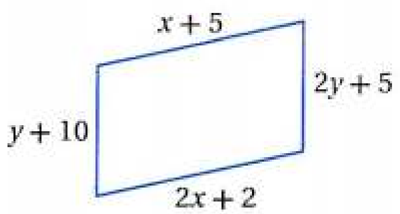
1) متوازيا الأضلاع GFBA, HACD. (معطيات)

2) $\angle F \cong \angle A$, $\angle A \cong \angle D$ (الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) $\angle F \cong \angle D$ (خاصية التعدي)

أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع : (الدرس 3-1)

(20



$x + 5 = 2x + 2$

$2x - x = 5 - 2$

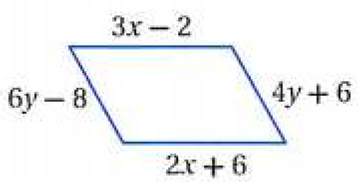
$x = 3$

$y + 10 = 2y + 5$

$y = 10 - 5$

$y = 5$

(21



$3x - 2 = 2x + 6$

$3x - 2x = 6 + 2$

$x = 8$

$4y + 6 = 6y - 8$

$6y - 4y = 6 + 8$

$2y = 14$

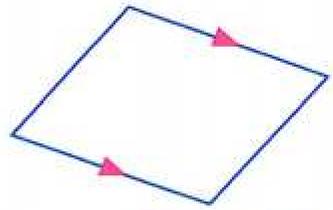
$y = 7$

(22 **طاولات:** لماذا يبقى سطح طاولة كي الثياب في الصورة أدناه موازيًا لأرضية الغرفة دائمًا؟

عُمل الساقان بحيث ينصف كل منهما الآخر،
إذن فالشكل الرباعي المتكون من أطراف الساقين يكون دائماً متوازي الأضلاع.
لذلك فسطح الطاولة العلوي يبقى موازياً لسطح الأرض.

23) **اختيار من متعدِّد :** أيّ الأشكال الرباعية الآتية ليس متوازي أضلاع؟ (الدرس 3-1)

D



هندسة إحداثيّة : حدد ما إذا كان الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي متوازي أضلاع؟ برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. (الدرس 3-1)

24) $A(-6, -5), B(-1, -4), C(0, -1), D(-5, -2)$، صيغة المسافة بين نقطتين.

نعم؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين.

المسافة بين A و B تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين B وC تساوي $\sqrt{10}$.

والمسافة بين C وD تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين D و A تساوي $\sqrt{10}$.

وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان، فإن ABCD متوازي أضلاع.

حيث أن المسافة بين نقطتين تحسب من خلال $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

25) $Q(-5, 2), R(-3, -6), S(2, 2), T(-1, 6)$، صيغة الميل.

ميل $\overline{QR}$: $\frac{-5+3}{2+6}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$

ميل $\overline{RS}$: $\frac{-3-2}{-6-2}=\frac{-5}{-8}=\frac{5}{8}$

ميل $\overline{ST}$: $\frac{2+1}{2-6}=\frac{3}{-4}$

ميل $\overline{QT}$: $\frac{-2+1}{4+1}=\frac{-1}{5}$

بما أن ميل $\overline{QR}$ لا يساوي ميل $\overline{ST}$ ، فإن QRST ليس متوازي أضلاع.

5-4 المستطيل

تحقق

1A) إذا كان $TS = 120$ ، فأوجد PR.

$TS = 120$ معطى

$QS = 120 \times 2 = 240$ قطرا المستطيل ينصف كل منهما الأخر

$QS = PR = 240$ من خصائص المستطيل القطران متطابقان

1B) إذا كان $m\angle PRS = 64^\circ$، فأوجد $m\angle SQR$.

الزوايا الأربع قوائم للمستطيل

إذن $\angle SRQ = 90^\circ$

$\angle QRT = \angle SQR = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$

2) استعن بالشكل في المثال 2. إذا كان $MK = 5y + 1$, $JP = 3y - 5$، فأوجد قيمة y.

قطرا المستطيل متطابقان وينصف كل منهما الأخر

$$MK = LJ$$

$$MK = (JP + PL)$$

$$\because JP = PL$$

$$\therefore MK = 2(JP)$$

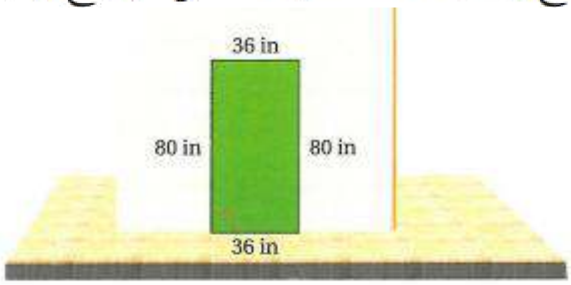
$$5y + 1 = 2(3y - 5)$$

$$5y + 1 = 6y - 10$$

$$6y - 5y = 1 + 10$$

$$y = 11$$

3) **تصميم:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. قاس أحمد أبعاد المنطقة التي قام بطلائها كما في الشكل أدناه. وباستعمال زاوية النجارين تحقق من آن الزاوية عند الركن الأيسر السفلي قائمة. فهل يمكنه استنتاج أن المنطقة مستطيلة الشكل؟ وضِّح إجابتك.



نعم؛ بما أن الأضلاع المتقابلة متطابقة، فإن المنطقة التي قام بطلائها تشكل متوازي أضلاع. وإذا كانت إحدى زوايا متوازي أضلاع قائمة فإن جميع الزوايا قائمة.
وبما أن الزاوية السفلى إلى اليسار قائمة فإن جميع الزوايا قائمة، لذلك وحسب التعريف، يكون المدخل مستطيلاً.

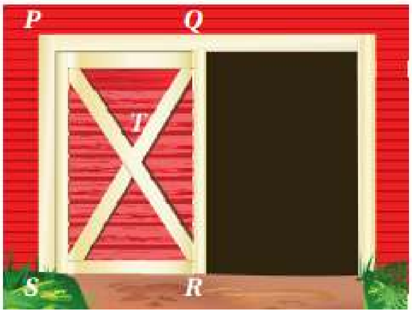
4) إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي $K(-8, -6), L(5, -3), M(2, 5)$، $J(-10, 2)$. فهل $JKLM$ مستطيل؟ استعمل صيغة الميل.

ميل $\overline{JK}$: $\frac{-10+8}{2+6} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$

ميل $\overline{ML}$: $\frac{5-2}{-3-5} = \frac{3}{-8}$

بما أن ميل $\overline{JK}$ لا يساوي ميل $\overline{ML}$، أي أنهما غير متوازيان إذن JKLM ليس مستطيل.

تأكد:



زراعة: الشكل المجاور يبيّن بوّابة مخزن حبوب مستطيلة الشكل، فيها الدعامتان المتقاطعتان تقويان دفة البوّابة، وتحفظانها من الالتواء مع مرور الزمن.

إذا كان $PS = 7$ ft, $ST = 3\frac{13}{16}$ ft, $m\angle PTQ = 67^\circ$،

1) QR

(الضلعان المتقابلان في المستطيل متطابقان)

$$PS = QR = 7ft$$

2) SQ

$$SQ = (ST + TQ)$$
$$ST = TQ$$
$$SQ = 2ST$$
$$SQ = 2 \times 3\frac{13}{16}$$
$$SQ = 2 \times \frac{61}{16}$$
$$SQ = 7\frac{5}{8}ft$$

$m\angle TQR$ (3

$\because \angle PTQ = 67$

$\because TQ = PT$

$\therefore \angle TPQ = \angle TQP = \dfrac{180 - 67}{2} = 56.5^\circ$

$\therefore \angle TQR = 90^\circ - 56.5^\circ$

$\therefore \angle TQR = 33.5^\circ$

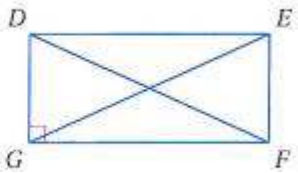
$m\angle TSR$ (4

$\therefore \angle STR = \angle PTQ = 67^\circ$

$\therefore \angle TSR = \dfrac{180^\circ - 67^\circ}{2}$

$\therefore \angle TSR = 56.5^\circ$

جبر : استعن بالمستطيل $DEFG$ المبين جانبًا.



5) إذا كان $EG = x + 5$, $FD = 3x - 7$، فأوجد EG .

قطرا المستطيل متطابقان

$EG = FD$

$x + 5 = 3x - 7$

$3x - x = 5 + 7$

$2x = 12$

$x = 6$

$EG = x + 5 = 6 + 5 = 11$

6) إذا كان $m\angle DFG = (x+12)^\circ$, $m\angle EFD = (2x-3)^\circ$، فأوجد $m\angle EFD$.

$$\angle DFG + \angle DFE = 90^\circ$$

$$(x+12)+(2x-3)=90^\circ$$

$$3x+9=90$$

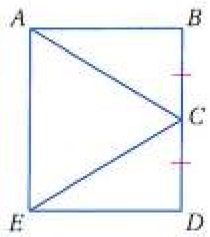
$$3x=81$$

$$x=27$$

$$m\angle EFD = 2x-3 = 2\times 27-3$$

$$m\angle EFD = 51^\circ$$

7) برهان: إذا كان $ABDE$ مستطيلاً، و $\overline{BC}\cong\overline{DC}$، فأثبت أنّ $\overline{AC}\cong\overline{EC}$.



المعطيات: $ABDE$ مستطيل، $\overline{BC}\cong\overline{DC}$.

المطلوب: $\overline{AC}\cong\overline{EC}$

البرهان: العبارات (المبررات):

1) $ABDE$ مستطيل، $\overline{BC}\cong\overline{DC}$. (معطيات)

2) $ABDE$ متوازي أضلاع. (تعريف المستطيل)

3) $\overline{AB}\cong\overline{DE}$ (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

4) $\angle B$ و $\angle D$ قائمتان. (تعريف المستطيل)

5) $\angle B\cong\angle D$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)

6) $\Delta ABC\cong\Delta EDC$ (SAS)

7) $\overline{AC}\cong\overline{EC}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

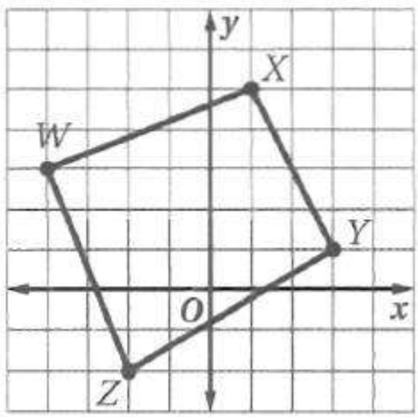
هندسة إحداثيّة: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

8) $W(-4, 3), X(1, 5), Y(3, 1), Z(-2, -2)$ ، صيغة الميل.

ميل $\overline{WX}$: $\dfrac{-4-1}{3-5}=\dfrac{-5}{-2}=\dfrac{5}{2}$

ميل $\overline{YZ}$: $\dfrac{3+2}{1+2}=\dfrac{5}{3}$

بما أن ميل $\overline{WX}$ لا يساوي ميل $\overline{YZ}$، أي أنهما غير متوازيان إذن WXYZ ليس متوازي أضلاع لذلك WXYZ ليس مستطيل.



9) $A(4, 3), B(4, -2), C(-4, -2), D(-4, 3)$ ، صيغة المسافة.

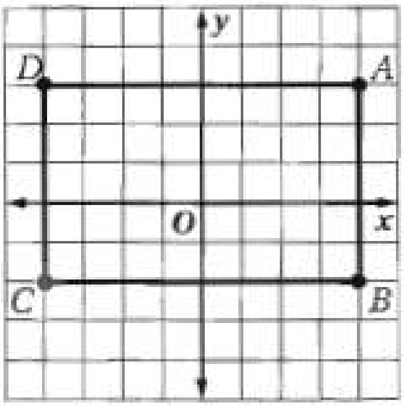
$$AB=\sqrt{(4-4)^2(3+2)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$BC=\sqrt{(4+4)^2(-2+2)^2}=\sqrt{64}=8$$

$$CD=\sqrt{(-4+4)^2(-2-3)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$AD=\sqrt{(4+4)^2(3-3)^2}=\sqrt{64}=8$$

بما أن $AB = 5 = CD, BC = 8 = AD$، فإن ABCD متوازي أضلاع. وبما أن $AC = \sqrt{89} = BD$، فإن القطرين متطابقان. لذلك فالشكل ABCD مستطيل.



تدرب وحل المسائل:

سياج: سياج مستطيل الشكل تُستعمل فيه دعائم متقاطعة لتقوية السياج.
إذا كان $AB = 6\,\text{ft}, AC = 2\,\text{ft}, m\angle CAE = 65^\circ$،

$\mathbf{BD = AC = 2ft}$

11) CB

$$(CB)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$
$$(CB)^2 = (6)^2 + (2)^2$$
$$(CB)^2 = 36 + 4$$
$$CB \approx 6.3ft$$

12) $m\angle DEB$

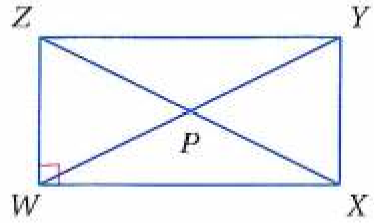
قطرا المستطيل متطابقان وينصف كل منهما الأخر

$$AE = CE$$
$$m\angle CAE = m\angle ACE = 65^\circ$$
$$m\angle AEC = 180^\circ - (65^\circ + 65^\circ)$$
$$m\angle AEC = 50^\circ$$
$$m\angle AEC = m\angle DEB = 50^\circ$$

13) $m\angle ECD$

$$m\angle ACE = 65^\circ$$
$$m\angle ECD = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$

جبر: استعن بالمستطيل $WXYZ$ المبين جانبًا.



14) إذا كان $WX = x + 4$, $ZY = 2x + 3$، فأوجد WX.

$$ZY = WX$$
$$2x + 3 = x + 4$$
$$2x - x = 4 - 3$$
$$x = 1$$
$$WX = x + 4$$
$$WX = 5$$

15) إذا كان $WP = 2x + 11$, $PY = 3x - 5$، فأوجد ZP.

$$PY = WP$$
$$3x - 5 = 2x + 11$$
$$x = 11 + 5$$
$$x = 16$$
$$WY = WP + PY$$
$$WY = 3x - 5 + 2x + 11$$
$$WY = 5x + 6$$
$$WY = 5 \times 16 + 6 = 86$$
$$ZX = WY = 86$$
$$ZX = ZP + PX$$
$$ZP = PX$$
$$ZX = 2ZP$$
$$86 = 2ZP$$
$$ZP = 43$$

(16 إذا كان $m\angle WYX = (2x+5)^\circ$, $m\angle ZYW = (2x-7)^\circ$، فأوجد $m\angle ZYW$.

$$m\angle ZYW + m\angle WYX = 90^\circ$$
$$2x + 5 + 2x - 7 = 90$$
$$4x - 2 = 90$$
$$4x = 92$$
$$x = 23$$
$$m\angle ZYW = 2x - 7 = 2\times 23 - 7$$
$$m\angle ZYW = 39^\circ$$

(17 إذا كان $PY = 2x+5$, $ZP = 4x-9$، فأوجد ZX.

$$ZP = PY$$
$$4x - 9 = 2x + 5$$
$$4x - 2x = 5 + 9$$
$$2x = 14$$
$$x = 7$$
$$ZP = PX$$
$$ZX = ZP + PX$$
$$ZX = 2ZP$$
$$ZX = 2(4x - 9)$$
$$ZX = 2(28 - 9)$$
$$ZX = 38$$

(18 إذا كان $m\angle XZW = 5x-12$, $m\angle XZY = 3x+6$، فأوجد $m\angle YXZ$.

$$m\angle XZY + m\angle XZW = 90$$
$$5x - 12 = 3x + 6$$
$$2x = 18$$
$$x = 9$$

$m\angle XZY = 3x + 6$

$m\angle XZY = 3 \times 9 + 6 = 33^\circ$

$m\angle ZXW = 33$

$m\angle ZXY = 90 - 33 = 57^\circ$

19) إذا كان $m\angle WZX = x - 9$, $m\angle ZXW = x - 11$، فأوجد $m\angle ZXY$.

$m\angle WZX + m\angle ZXW = 90^\circ$

$x - 9 + x - 11 = 90$

$2x - 20 = 90$

$2x = 110$

$x = 55$

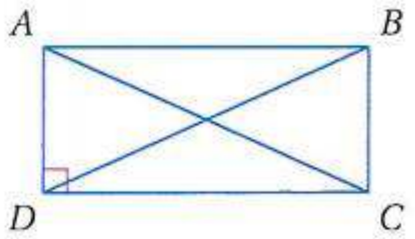
$m\angle ZXW = x - 11 = 55 - 11 = 44$

$m\angle ZXY = 90 - 44^\circ = 46^\circ$

المثال 3 برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي:

20) المعطيات: $ABCD$ مستطيل.

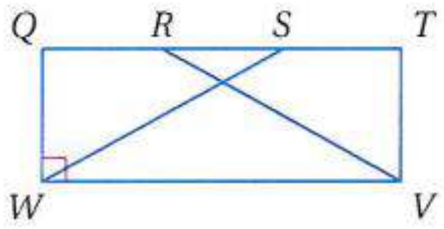
المطلوب: $\triangle ADC \cong \triangle BCD$



البرهان: العبارات (المبررات):

1) ABCD مستطيل.	(معطى)
2) ABCD متوازي أضلاع.	(تعريف المستطيل)
3) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	(الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة)
4) $\overline{DC} \cong \overline{CD}$	(خاصية الانعكاس)
5) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	(قطرا المستطيل متطابقان)
6) $\Delta ADC \cong \Delta BCD$	(SSS)

21) المعطيات: $QTVW$ مستطيل.
$\overline{QR} \cong \overline{ST}$
المطلوب: $\triangle SWQ \cong \triangle RVT$



البرهان: العبارات (المبررات):

1) $QTVW$ مستطيل؛ $\overline{QR} \cong \overline{ST}$. (معطيات)
2) $QTVW$ متوازي أضلاع. (تعريف المستطيل)
3) $\overline{WQ} \cong \overline{VT}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة)
4) $\angle Q$ و $\angle T$ قائمتان. (تعريف المستطيل)
5) $\angle Q \cong \angle T$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)
6) $QR = ST$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)
7) $\overline{RS} \cong \overline{RS}$ (خاصية الانعكاس)
8) $RS = RS$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)
9) $QR + RS = RS + ST$ (خاصية الإضافة)
10) $QS = QR + RS$, $RT = RS + ST$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)
11) $QS = RT$ (بالتعويض)
12) $\overline{QS} \cong \overline{RT}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)
13) $\Delta SWQ \cong \Delta RVT$ (SAS)

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

22) $W(-2, 4), X(5, 5), Y(6, -2), Z(-1, -3)$ ، صيغة الميل.

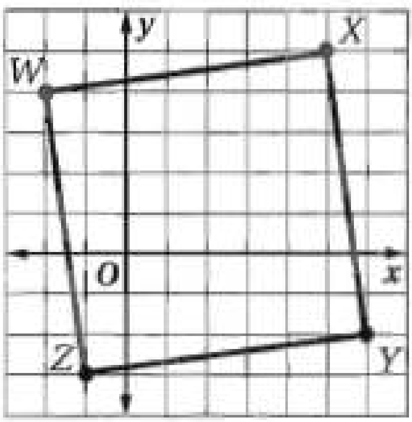
ميل $\overline{WX} = \dfrac{-2-5}{4-5} = 7$

ميل $\overline{YZ} = \dfrac{6+1}{-2+3} = 7$

ميل $\overline{XY} = \frac{5-6}{5+2} = \frac{-1}{7}$

ميل $\overline{ZW} = \frac{-2+1}{4+3} = \frac{-1}{7}$

نعم؛ بما أن ميل $\overline{WX}$ يساوي ميل $\overline{YZ}$ ويساوي 7، وميل $\overline{XY}$ يساوي ميل $\overline{ZW}$ ويساوي $\frac{-1}{7}$. فإن WXYZ متوازي أضلاع. وبما أن حاصل ضرب ميلي كل ضلعين متجاورين يساوي 1-، فإن الأضلاع المتجاورة متعامدة وتشكل زاويا قائمة. لذلك فالشكل WXYZ مستطيل.



23) $J(3, 3), K(-5, 2), L(-4, -4), M(4, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

$$MJ = \sqrt{(4-3)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{37}$$

$$KL = \sqrt{(-5+4)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{37}$$

$$LM = \sqrt{(-4-4)^2 + (-4+3)^2} = \sqrt{65}$$

$$JK = \sqrt{(3+5)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{65}$$

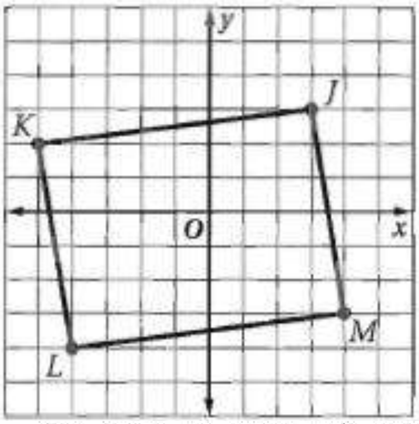
بما أن $KL = MJ$, $JK = LM$ فإن JKLM متوازي أضلاع.

$$JL = \sqrt{(3+4)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{98}$$

$$KM = \sqrt{(-5-4)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{106}$$

وبما أن $JL = \sqrt{98}$, $KM = \sqrt{106}$.

فإن $KL \neq KM$، إذن فالقطران غير متطابقين. لذلك فالشكل JKLM ليس مستطيلاً.



24) $Q(-2, 2), R(0, -2), S(6, 1), T(4, 5)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

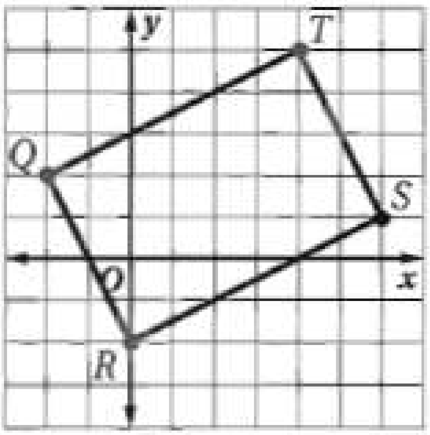
$$TQ = \sqrt{(-2-4)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{45}$$

$$RS = \sqrt{(0-6)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{45}$$

$$QR = \sqrt{(-2-0)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20}$$

$$ST = \sqrt{(6-4)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{20}$$

بما أن $TQ = RS$ ، $QR = ST$ فإن QRST متوازي أضلاع.
وبما أن $RT = \sqrt{65} = QS$، فإن القطرين متطابقان. إذن فالشكل QRST مستطيل.



25) $G(1, 8), H(-7, 7), J(-6, 1), K(2, 2)$ ، صيغة الميل.

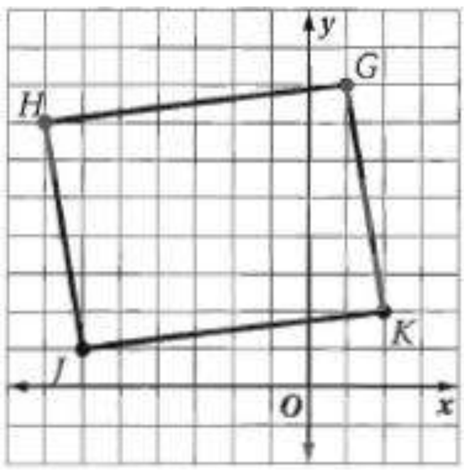
ميل $\overline{KG} = \frac{1-2}{8-2} = \frac{-1}{6}$

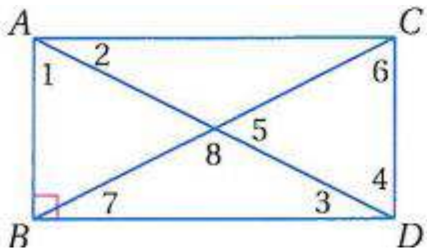
ميل $\overline{HJ} = \frac{-7+6}{7-1} = \frac{-1}{6}$

ميل $\overline{JK} = \frac{-6-2}{1-2} = \frac{-8}{-1} = 8$

ميل $\overline{GH} = \frac{1+7}{8-7} = \frac{8}{1} = 8$

نعم؛ بما أن ميل $\overline{KG}$ يساوي ميل $\overline{HJ}$ ويساوي $\frac{-1}{6}$ ، وميل $\overline{JK}$ يساوي ميل $\overline{GH}$ ويساوي 8. فإن GHJK متوازي أضلاع. وبما أن حاصل ضرب ميلي كل ضلعين متجاورين لا يساوي -1 ، فإن الأضلاع المتجاورة ليست متعامدة ولا تشكل زاويا قائمة. لذلك فالشكل WXYZ ليس مستطيل.





في المستطيل $ABCD$، إذا كان $m\angle 2 = 40$،
فأوجد كلًّا مما يأتي :

$m\angle 1$ (26

$$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\angle 1 + 40^\circ = 90^\circ$$

$$\angle 1 = 90^\circ - 40^\circ$$

$$\angle 1 = 50^\circ$$

$m\angle 7$ (27

$\angle 7 = \angle ACB = 40^\circ$ بالتبادل داخليا

$m\angle 3$ (28

$\angle 3 = \angle 2 = 40^\circ$ بالتبادل داخليا

$m\angle 5$ (29

$$\angle 4 = 90^\circ - \angle 3$$

$$\angle 4 = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$\angle 6 = \angle 4 = 50^\circ$$

$$\angle 5 = 180 - (50 + 50) = 80^\circ$$

$m\angle 6$ (30

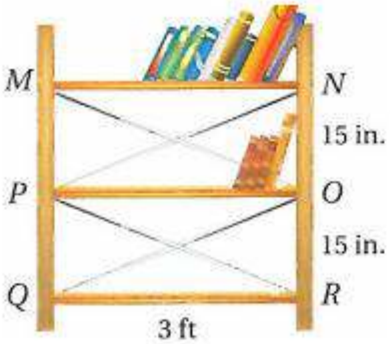
$\angle 6 = \angle 4 = 50^\circ$ مثلث متطابق الضلعين

$m\angle 8$ (31

$\angle 8$ مكملة $\angle 5$

$$\angle 8 = 180 - 80 = 100^\circ$$

32) **مكتبات:** أضاف زيد رفا جديدا لمكتبته ودعائم معدنية متقاطعة كما في الشكل المجاور . كم يجب أن يكون طول كل من الدعائم المعدنية بحيث تكون الرفوف عمودية على الجانبين؟ وضّح إجابتك.
(إرشاد: $12\text{ in} = 1\text{ ft}$)



حتى تكون الزوايا قوائم يجب أن تكون أطوال الدعائم الحديدية متساوية. وبما أن طول الرف معلوم والمسافة بين الرفوف معلومة، فيمكن استعمال نظرية فيثاغورث لإيجاد طول الدعامة الحديدية، وقد وجد أن طول الدعامة 3 أقدام و3 بوصات.

$$(NP)^2 = 15^2 + (3\times 12)^2$$

$$(NP)^2 = 15^2 + (3\times 12)^2$$

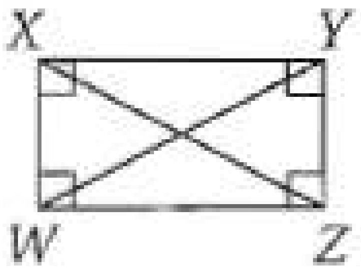
$$(NP)^2 = 225 + 1296 = 1521$$

$$NP = 39\text{in} = \frac{39}{12} \approx 3\text{ft}$$

33) النظريّة 1.13

المعطيات: $WXYZ$ **مستطيل قطراه** $\overline{WY}$ **و** $\overline{XZ}$.

المطلوب: $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$



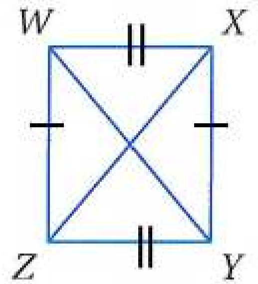
البرهان:

1) $WXYZ$ مستطيل قطراه WY وXZ.	(معطيات)
2) $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$	(الأضلاع المتقابلة للمستطيل متطابقة)
3) $\overline{WZ} \cong \overline{WZ}$	(خاصية الانعكاس)
4) $\angle YZW$, $\angle XWZ$ قائمتان.	(تعريف المستطيل)
5) $\angle YZW \cong \angle XWZ$	(جميع الزوايا القائمة متطابقة)

6) $\Delta XWZ \cong \Delta YZW$ (SAS)

7) $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

34) النظريّة 1.14



المعطيات: WXYZ متوازي أضلاع و $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$

المطلوب: WXYZ مستطيل.

البرهان:

1) WXYZ متوازي أضلاع و $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ (معطيات)

2) $\overline{WX} \cong \overline{YZ}, \ \overline{XY} \cong \overline{WZ}$ (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان)

3) $\Delta WZX \cong \Delta XYW$ (SSS)

4) $\Delta WZX \cong \Delta XYW$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة)

5) $\angle WZX = \angle XYW$ (تعريف الزوايا المتطابقة)

6) $\angle ZWX$ و $\angle YXW$ متكاملتان. (الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة)

7) $m\overline{AD}\,ZWX +$

$m\sqrt{(0+1)^2+(6+4)^2} = \sqrt{1+100} = \sqrt{101}\ YXW = 180^\circ$

(تعريف الزاويتين المتكاملتين)

8) $\angle WZY, \angle XYZ$ قائمتان. (إذا كانت زاويتان متطابقتين ومتكاملتين فإن كلاً منهما قائمة)

9) $\angle WZY, \angle XYZ$ قائمتان. (إذا كانت إحدى زوايا متوازي أضلاع قائمة فإن زواياه الأربع قائمة)

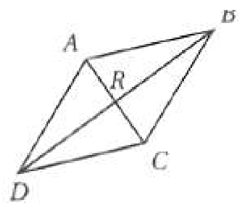
10) WXYZ مستطيل. (تعريف المستطيل)

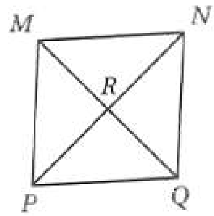
35) **رياضة:** قام سلمان بعمل التخطيط الخارجي لملعب كرة قدم. وضّح كيف يمكنه التحقق من أن الملعب مستطيل الشكل باستعمال شريط القياس فقط.

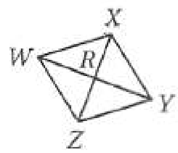
يجب أن يقيس قطري الملعب والأضلاع. فإذا كان القطران متطابقين وكل ضلعين متقابلين متطابقين فإن الملعب مستطيل الشكل

36) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة خصائص متوازيات أضلاع خاصّة.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة متوازيات أضلاع كل منها أضلاعه الأربعة متطابقة وسمِّها $ABCD$، $MNOP$، $WXYZ$. ثم ارسم قطري كل منها وسمِّ نقطة تقاطعهما R.







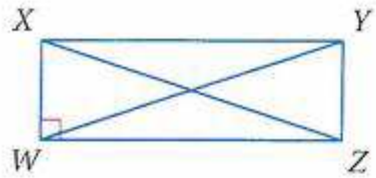
b) **جدوليًّا:** استعمل المنقلة لقياس الزوايا وأكمل الجدول الآتي.

متوازي الأضلاع	ABCD		MNOP		WXYZ	
الزاوية	$\angle ARB$	$\angle BRC$	$\angle MRN$	$\angle NRO$	$\angle WRX$	$\angle XRY$
قياس الزاوية	90°	90°	90°	90°	90°	90°

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قطري متوازي الأضلاع المتطابق الأضلاع.

إذا كانت الأضلاع الأربعة في متوازي الأضلاع متطابقة فإن قطريه متعامدان.

جبر: استعن بالمستطيل $WXYZ$ المبين جانبًا.



37) إذا كان $XZ = b$ ، $WZ = 4$ ، $XW = 3$، فأوجد YW.

$$WY = XZ$$

$$(XZ)^2 = (WX)^2 + (WZ)^2$$

$$(XZ)^2 = (3)^2 + (4)^2$$

$$XZ = WY = 5$$

38) إذا كان $XY = 8$ ، $ZY = 6$ ، $XZ = 2c$ ، فأوجد WY.

$$WY = XZ$$

$$(XZ)^2 = (XY)^2 + (YZ)^2$$

$$(XZ)^2 = (8)^2 + (6)^2$$

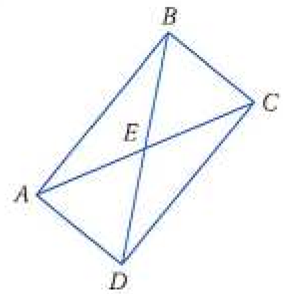
$$(XZ)^2 = 100$$

$$XZ = 10$$

$$XZ = WY = 10$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

39) **تحدٍّ:** في المستطيل $ABCD$، إذا كان $m\angle EAB = (4x+6)^\circ$، $m\angle EBC = 60^\circ$، $m\angle DEC = (10-11y)^\circ$، فاوجد قيمة كل من y ، x.



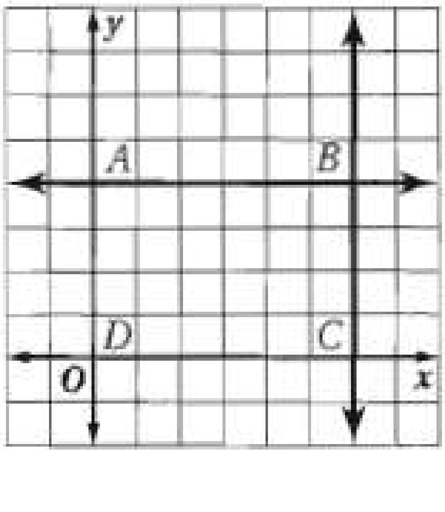
$$\angle ABE + \angle EBC = 90$$
$$\angle ABE + 60 = 90$$
$$\angle ABE = 30$$
$$4x + 6 = 30$$
$$4x = 30 - 6$$
$$4x = 24$$
$$x = 6$$
$$\angle AEB = 180 - 2(30)$$
$$\angle AEB = \angle EDC = 120$$
$$10 - 11y = 120$$
$$-11y = 120 - 10$$
$$y = \frac{-110}{11} = -10$$

40) **اكتشف الخطأ:** قالت بسمة: إنّ أيّ مثلثين حادّي الزوايا ومتطابقين يمكن ترتيبهما ليشكّلا مستطيلًا. وقالت شيماء: إنّ المثلثين القائمي الزاوية المتطابقين هما فقط اللذان يمكن ترتيبهما ليشكلا مستطيلا. هل اي منهما على صواب؟ وضّح تبريرك.

شيماء؛ عندما يرتب مثلثان متطابقان ليشكلا شكلاً رباعياً فإن زاويتين من زوايا الشكل الرباعي ناتجان من رأس منفرد لمثلث.
ولكي يكون الشكل الرباعي مستطيلاً يجب أن تكون إحدى الزوايا في المثلثين المتطابقين قائمة.

41) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلات أربعة مستقيمات بحيث تكون نقاط تقاطعها رؤوس مستطيل. تحقق من إجابتك باستعمال الهندسة الإحداثيّة.

$x = 0, x = 6, y = 0, y = 4$
طول $\overline{AB}$ يساوي $6 - 0$ أو 6 وحدات.
وطول $\overline{DC}$ يساوي $0 - 6$ أو 6 وحدات، ميل $\overline{AB}$ يساوي صفراً، وميل $\overline{DC}$ يساوي صفراً.
وبما أن ضلعين للشكل الرباعي متوازيان ومتطابقان، فإنه وبحسب النظرية 1.12، يكون متوازي أضلاع.
لأن $\overline{AB}$ أفقي و $\overline{BC}$ رأسي فإن المستقيمين متعامدان وقياس الزاوية التي يشكلانها 90°.
وحسب النظرية 1.6، إذا كان لمتوازي أضلاع زاوية قائمة فإن زواياه الأربع قوائم.
لذلك وحسب التعريف يكون متوازي الأضلاع مستطيلاً.

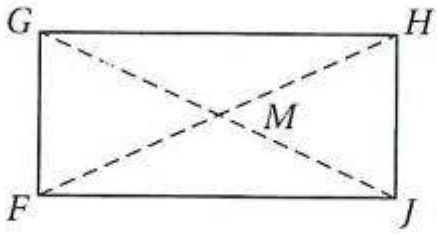


42) **اكتب:** وضّح لِمَ تُعدّ جميع المستطيلات متوازيات أضلاع، بينما لا تُعد جميع متوازيات الأضلاع مستطيلات.

كل المستطيلات تكون متوازيات أضلاع لأنه بناءً على تعريف المستطيل يكون كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين. ومتوازي الأضلاع الذي تكون زواياه قوائم يكون مستطيلاً. لذا تكون بعض متوازيات الأضلاع مستطيلات، وأما بعضها الآخر الذي زواياه ليست قوائم فلا تكون مستطيلات.

تدريب على الاختبار المعياري

43) في الشكل الرباعي $FGHJ$ ، إذا كان $FJ = -3x + 5y$، $FM = 3x + y, GH = 11, GM = 13$، فما قيمة كل من x, y اللتين تجعلان $FGHJ$ مستطيلاً؟



A $x = 3, y = 4$

B $x = 4, y = 3$

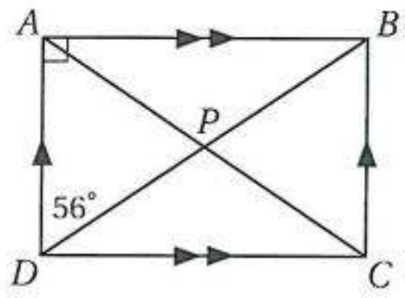
C $x = 7, y = 8$

D $x = 8, y = 7$

$\mathbf{x = 3, y = 4:\ A}$

$$FJ = GH$$
$$-3x + 5y = 11 \rightarrow 1$$
$$GM = 13$$
$$3x + y = 13 \rightarrow 2$$
$$6y = 24$$
$$y = 4$$
$$3x + y = 13$$
$$3x + 4 = 13$$
$$3x = 13 - 4$$
$$3x = 9$$
$$x = 3$$

44) **إجابة قصيرة:** ما قياس $\angle APB$؟



$\angle DBC = 56^\circ$ بالتبادل داخليا

$\angle ABD = 90^\circ - 56^\circ = 34$ زوايا المستطيل قائمة

$PB = AP$ (قطرا المستطيل متطابقان وينصف كل منهما الأخر)

$\therefore \angle BAP = 34$

$\angle APB = 180^\circ - (34 + 34)$

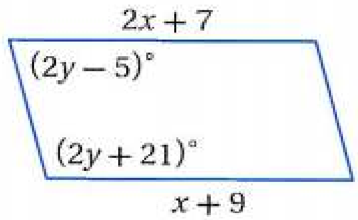
$\angle APB = 180^\circ - 68^\circ$

$\angle APB = 112^\circ$

مراجعة تراكمية

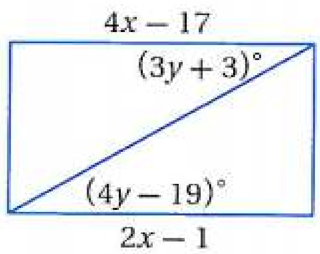
جبر: أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع :

(45



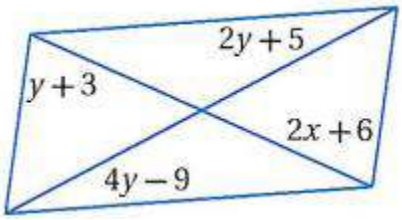
$$2x+7=x+9$$
$$2x-x=9-7$$
$$x=2$$
$$2y-5+2y+21=180$$
$$4y+16=180$$
$$4y=180-16$$
$$y=41$$

(46



$$4x-17=2x-1$$
$$4x-2x=-1+17$$
$$2x=16$$
$$x=8$$
$$3y+3=4y-19$$
$$3y-4y=-19-3$$
$$y=22$$

(47



$$2y + 5 = 4y - 9$$
$$2y - 4y = -9 - 5$$
$$-2y = -14$$
$$y = 7$$
$$y + 3 = 2x + 6$$
$$7 + 3 = 2x + 6$$
$$10 = 2x + 6$$
$$2x = 10 - 6$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $D(-1, -1)$,$A(1, 3), B(6, 2), C(4, -2)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{BD}$, $\overline{AC}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ التي طرفاها $(1,3), (4,-2)$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \frac{1+4}{2}, \frac{3-2}{2}$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$$(2.5, \ 0.5)$$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $ABCD$ هما $(2.5, 0.5)$

استعد للدرس اللاحق

(49 $(4, 2), (2, -5)$

$$\sqrt{(4-2)^2+(2+5)^2}=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$$

(50 $(0, 6), (-1, -4)$

$$\sqrt{(0+1)^2+(6+4)^2}=\sqrt{1+100}=\sqrt{101}$$

(51 $(-4, 3), (3, -4)$

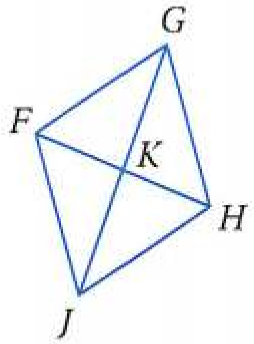
$$\sqrt{(-4-3)^2+(3+4)^2}=\sqrt{49+49}=\sqrt{98}$$

5-5 المعين والمربع

تحقق

استعن بالمعيّن $FGHJ$ أعلاه.

1A) إذا كان $FK = 5, FG = 13$، فأوجد KJ.



من خصائص المعين قطراة متعامدان وينصف كلا منهما الأخر

إذن ΔFGK قائم الزاوية

وباستخدام نظرية فيثاغورث:

$$(FG)^2 = (GK)^2 + (FK)^2$$

$$(13)^2 = (GK)^2 + (5)^2$$

$$(GK)^2 = (13)^2 - (5)^2 = 144$$

$$GK = 12$$

$$JK = GK = 12$$

1B) جبر: إذا كان $m\angle KFG = (9y-5)^\circ$, $m\angle JFK = (6y+7)^\circ$، فأوجد قيمة y.

من خصائص المعين أن الاقطار تنصف الزوايا

$$\angle KFG = \angle JFK$$

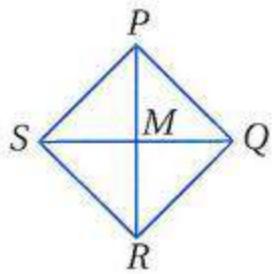
$$9y - 5 = 6y + 7$$

$$9y - 6y = 7 + 5$$

$$3y = 12$$

$$y = 4$$

2) اكتب برهانًا حرًّا.



المعطيات: $\overline{SQ}$ عمود منصّف لـ $\overline{PR}$.

$\overline{PR}$ عمود منصّف لـ $\overline{SQ}$.

$\triangle RMS$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $PQRS$ مربّع.

المعطيات: $\overline{SQ}$ عمود منصف لـ $\overline{PR}$، $\overline{PR}$ عمود منصف لـ $\overline{SQ}$.

ΔRMS متطابق الضلعين.

المطلوب: PQRS مربع.

برهان حر:

بما أن $\overline{SQ}$ عمود منصف لـ $\overline{PR}$ فإن $\overline{PR} \perp \overline{SQ}$ و $\overline{MR} \cong \overline{MP}$ حسب التعريف.

وبما أن $\overline{PR}$ عمود منصف لـ $\overline{SQ}$، فإن $\overline{QM} \cong \overline{MS}$

وبما أن ΔRMS متطابق الضلعين فإن $\overline{MR} \cong \overline{MS}$ حسب التعريف.

وبالتعويض تكون $\overline{MP} \cong \overline{MS}$ ، إذن وبحسب تعريف التطابق وخاصية التعدي يكون MR = QM = MP = MS، ومن مسلمة جمع القطع المستقيمة ينتج أن: $SQ = MQ + MS$ و$PR = MR + MP$

وبالتعويض يكون SQ = MS + MS و PR = MS + MS،

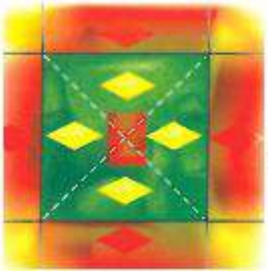
إذن $SQ = PR$

لذلك وحسب تعريف التطابق يكون $\overline{PR} = \overline{SQ}$

ولأن قطري PQRS ينصف كل منهما الآخر، فإن PQRS مستطيل.

ولأن القطرين متعامدان فإن PQRS معين. ولأن PQRS مستطيل ومعين فإنه مربع.

3) **خياطة:** خاطت كوثر غطاء طاولة باستعمال قطع ملونة من القماش كما في الرسم المجاور.



A) رسمت كوثر قطري كل من القطع الصفراء فوجدت أنهما متعامدان، هل يمكنها استنتاج أن كل قطعة صفراء معيّن؟ وضح إجابتك.

لا؛ لا يمكن التوصل لهذا الاستنتاج إلا إذا علمت أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

B) إذا كانت الزوايا الأربع للقطعة الخضراء متساوية القياس، والضلعان الأيسر والسفلي متساويي الطول، فهل يمكنها استنتاج ان القطعة الخضراء مربّع؟ وضح إجابتك.

نعم؛ إذا كانت الزوايا الأربع متطابقة فسيكون قياس كل واحدة منها $360 \div 4$ أو 90 وعليه تكون الزوايا المتقابلة متطابقة وتكون القطعة متوازي أضلاع. وإذا كانت كل زاوية 90° فإن للشكل الرباعي أربع زوايا قوائم، وعليه تكون القطعة مستطيلاً، وإذا كان الضلعان المتتاليان متطابقين فستكون أيضاً مربعاً.

4) حدد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(5, 0), K(8, -11), L(-3, -14), M(-6, -3)$، معيّنًا أو مستطيلًا أو مربّعًا؟ اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضح إجابتك.

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$KM = \sqrt{(8+6)^2 + (-11+3)^2} = 2\sqrt{65}$$

$$JL = \sqrt{(5+3)^2 + (0+14)^2} = 2\sqrt{65}$$

بما أن القطران JL, KM متساويان إذن هما متطابقان إذن الشكل مستطيل

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{KM} = \frac{8+6}{-11+3} = \frac{14}{-8} = \frac{-7}{4}$

ميل: $\overline{JL} = \frac{3+5}{0+14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

بما أن حاصل ضرب الميلين $= -1$ فإن القطرين متعامدان لذا فأن JKLM معين.

تحقق:

$$JK=\sqrt{(5-8)^2+(0+11)^2}=\sqrt{130}$$

$$KL=\sqrt{(8+3)^2+(-11+14)^2}=\sqrt{130}$$

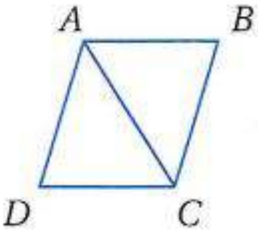
لذا فأن JKLM معين.

ميل: $\overline{JK}=\frac{8-5}{11+0}=\frac{-3}{11}$

ميل: $\overline{KL}=\frac{3+8}{-11+14}=\frac{11}{3}$

بما أن حاصل ضرب الميلين = -1 فإن الضلعين المتتاليين $\overline{JK}$ و $\overline{KL}$ متعامدان لذا فأن JKLM مربع.

تأكد:



جبر: استعن بالمعين $ABCD$ المبين جانبًا.

1) إذا كان $m\angle BCD = 114^\circ$، فأوجد $m\angle BAC$.

الزاويا المتناظرة متطابقة $\angle BCD = \angle BAD = 114^\circ$

AC ينصف $\angle BAD$

$$\angle BAC = \frac{114}{2} = 57^\circ$$

2) إذا كان $AB = 2x + 3$, $BC = x + 7$، فأوجد CD.

بما أن الشكل معين إذن جميع أضلاعه متطابقة

$$BC = AB = CD = AD$$

$$x + 7 = 2x + 3$$

$$2x - x = 7 - 3$$

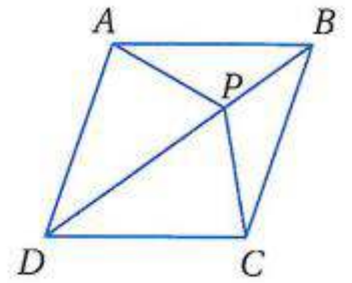
$$x = 4$$

$$AD = x + 7$$

$$AD = 4 + 7$$

$$AD = 11$$

3) **برهان:** اكتب برهانا ذا عمودين لإثبات أنّه إذا كان $ABCD$ معيّنًا وكان $\overline{DB}$ قطرًا فيه، فإنّ $\overline{AP} \cong \overline{CP}$.



المعطيات: $ABCD$ معين فيه $\overline{BD}$ قطر.

المطلوب: $\overline{AP} \cong \overline{CP}$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $ABCD$ معين فيه $\overline{BD}$ قطر (معطى)

2) $\angle ABP \cong \angle CBP$ (قطرا المعين ينصفان زواياه)

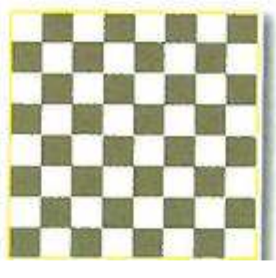
3) $\overline{PB} \cong \overline{PB}$ (خاصية الانعكاس)

4) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ (تعريف المعين)

5) $\Delta APB \cong \Delta CPB$ (SAS)

6) $\overline{AP} \cong \overline{CP}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

4) **بلاط:** تتكون الأرضية أدناه من 64 بلاطة متطابقة. استعمل هذ المعطيات لإثبات أن الأرضية نفسها مربّعة.



بما أن جميع بلاط الأرضية متطابق إذن الشكل متوازي أضلاع وبما أن الأضلاع المتتالية متطابقة إذن الشكل معين وبحسب الظرية 5.20 فإن الشكل مربع

هندسة إحداثية: حدد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أومربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضح إجابتك.

5) $Q(1, 2), R(-2, -1), S(1, -4), T(4, -1)$

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$QS = \sqrt{(1-1)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$RT = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{36} = 6$$

بما أن القطران RT, QS متساويان إذن هما متطابقان إذن الشكل مستطيل

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{QS} = \frac{8+6}{-11+3} = \frac{1-1}{4+2} = \frac{0}{6}$

ميل: $\overline{RT} = \frac{-2-4}{-1+1} = \frac{-6}{0}$

بما أن حاصل ضرب الميلين $= -1$ فإن القطرين متعامدان لذا فأن $QRST$ معين.

إذن الشكل مستطيل ومعين ومربع؛ لأن الضلعين المتتاليين متطابقان ومتعامدان.

6) $Q(-2, -1), R(-1, 2), S(4, 1), T(3, -2)$

6) لا شيء؛ لأن قطريه غير متعامدين وعير متطابقين.

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$QS = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{40}$$

$$RT = \sqrt{(-1-3)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{32}$$

بما أن القطران RT, QS ليس متساويان إذن هما غير متطابقان إذن الشكل ليس مستطيل وبما أنه ليس مستطيل إذن الشكل ليس مربع

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

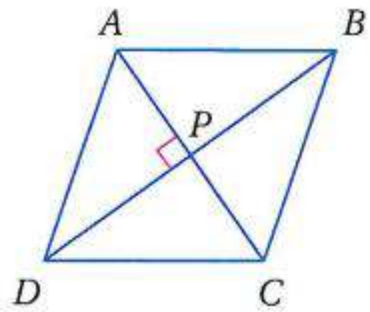
ميل: $\overline{QS} = \frac{8+6}{-11+3} = \frac{-2-4}{-1-1} = \frac{-6}{-2} = 3$

ميل $\overline{RT} = \frac{-1-3}{2+2} = \frac{-4}{4} = -1$:

بما أن حاصل ضرب الميلين $\neq -1$ فإن القطرين غير متعامدان لذا فأن QRST ليس معين.

إذن الشكل ليس مستطيل ولا معين ولا مربع

تدرب وحل المسائل:



جبر: استعن بالمعين $ABCD$ المبين جانبًا.

7) إذا كان $AB = 14$، فأوجد BC.

خصائص المعين الأضلاع المتتالية متطابقة

$$BC = AB = 14$$

8) إذا كان $m\angle BCD = 118^\circ$، فأوجد $m\angle BAC$.

الزاويتان المتقابلتان متطابقتان و قطرا المعين ينصف الزاوية

$$\angle BCD = \angle BAD = 118$$

$$\angle BCD = \frac{118}{2} = 59^\circ$$

9) إذا كان $AP = 3x - 1$ و $PC = x + 9$، فأوجد AC.

$$AP = PC$$

$$3x - 1 = x + 9$$

$$2x = 9 + 1$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

$$AC = AP + PC$$

$$AC = 3x - 1 + x + 9$$

$$AC = 15 - 1 + 5 + 9$$

$$AC = 28$$

10) إذا كان $m\angle ABC = (2x-7)^\circ$ و $m\angle BCD = (2x+3)^\circ$، فأوجد $m\angle DAB$.

$m\angle ABC + m\angle BCD = 180^\circ$ الزاويتان المتحالفتان متكاملتان

$2x - 7 + 2x + 3 = 180^\circ$

$4x - 4 = 180^\circ$

$4x = 184$

$x = 46$

$m\angle BCD = 2x + 3$

$m\angle BCD = 95$

$m\angle DAB = m\angle BCD = 95^\circ$ الزوايا المتناظرة متطابقة

11) إذا كان $m\angle DPC = (3x-15)^\circ$، فأوجد قيمة x.

$m\angle DPC = 3x - 15 = 90$

$3x = 15 + 90$

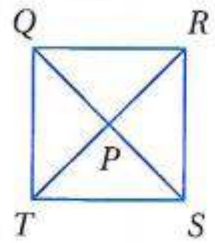
$3x = 105$

$x = 35$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي:

12) المعطيات: $QRST$ متوازي أضلاع.
$\overline{TR} \cong \overline{QS}, m\angle QPR = 90^\circ$

المطلوب: $QRST$ مربع.



المعطيات: QRST متوازي أضلاع، $\overline{TR} \cong \overline{QS}$؛ $m\angle QPR = 90^\circ$

المطلوب: QRST مربع.

العبارات (المبررات):

1) QRST متوازي أضلاع؛ $m\angle QPR = 90^\circ$، $\overline{TR} \cong \overline{QS}$. (معطيات)

2) QRST مستطيل. (إذا كان قطرا متوازي أضلاع متطابقين فإنه مستطيل)

3) $\angle QPR$ قائمة. (تعريف الزاوية القائمة)

4) $\overline{QS} \perp \overline{TR}$ (تعريف التعامد)

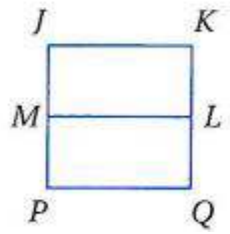
5) QRST معين. (إذا كان قطرا متوازي أضلاع متعامدين فإنه معين)

6) QRST مربع. (النظرية 1.2؛ إذا كان الشكل الرباعي مستطيلاً ومعيناً فإنه مربع)

13) المعطيات: $JKQP$ مربّع.

$\overline{ML}$ تنصّف كلّا من $\overline{JP}$ و $\overline{KQ}$.

المطلوب: $JKLM$ متوازي أضلاع.



البرهان: العبارات (المبررات):

1) JKQP مربع. $\overline{ML}$ تنصف كلاً من $\overline{JP}$ و $\overline{KQ}$. (معطيات)

2) JKQP متوازي أضلاع. (جميع المربعات متوازيات أضلاع)

3) $\overline{JK} \parallel \overline{ML}$ (تعريف متوازي الأضلاع)

4) $\overline{JP} \cong \overline{KQ}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة)

5) $JP = KQ$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

6) $JM = MP, KL = LQ$ (تعريف المنصف)

7) $JP = JM + MP, KQ = KL + LQ$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

8) $JP = 2JM, KQ = 2KL$ (بالتعويض)

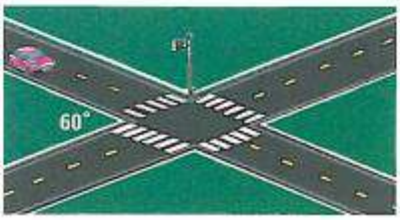
9) $2JM = 2KL$ (بالتعويض)

10) $JM = KL$ (خاصية القسمة)

11) $\overline{KL} \cong \overline{JM}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

12) JKLM متوازي أضلاع. (إذا وجد ضلعان متقابلان في شكل رباعي متطابقين ومتوازيين فإنه متوازي أضلاع)

14) **طرق:** يتقاطع طريقان كما في الشكل. إذا كانت ممرّات المشاة لها الطول نفسه، فصنّف الشكل الرباعيّ المكوّن من هذه الممرات. ووضّح تبريرك.



معين؛ قياس الزاوية المتكونة بين الشارعين 60°، والزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان، لذلك فقياس إحدى زوايا الشكل الرباعي 29° وبما أن لممري المشاة الطول نفسه فإن أضلاع الشكل الرباعي متطابقة، لذلك فإنها تشكل معيناً.

15) **زراعة:** حدّد مزارع حقلًا بأوتاد وحبال كما في الشكل المجاور . إذا كانت أضلاع الشكل الرباعي المتشكل متساوية الطول، وقطراه متعامدين، فهل هذه المعلومات كافية كي تتحقق من أنّ الحقل مربع؟ وضح تبريرك.

لا؛ إجابة ممكنة: بما أن الأضلاع الأربعة للشكل الرباعي متطابقة وقطريه متعامدان، فإن الشكل مربع أو معين. وللتحقق من أن الحقل مربع يحتاج المزارع إلى إثبات أن القطرين متطابقان.

هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان $\square JKLM$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضح إجابتك.

16) $J(-4, -1), K(1, -1), L(4, 3), M(-1, 3)$

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$JL = \sqrt{(-4-4)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{80}$$

$$KM = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20}$$

بما أن القطران JL , KM ليس متساويان إذن هما غير متطابقان إذن الشكل ليس مستطيل وليس مربع

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{JL} = \frac{-4-4}{-1-3} = \frac{-8}{-4} = 2$

ميل: $\overline{KM} = \frac{1+1}{-1-3} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

بما أن حاصل ضرب الميلين = -1 فإن القطرين متعامدان لذا فأن JKLM معين.

إذن الشكل معين ، لأن قطريه متعامدان و غير متطابقين.

17) $J(-3,-2), K(2,-2), L(5,2), M(0,2)$

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$JL = \sqrt{(-3-5)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{80}$$

$$KM = \sqrt{(2-0)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{20}$$

بما أن القطران JL, KM ليس متساويان إذن هما غير متطابقان إذن الشكل JKLM ليس مستطيل وليس مربع

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{JL} = \frac{-3-5}{-2-2} = \frac{-8}{-4} = 2$

ميل: $\overline{KM} = \frac{2-0}{-2-2} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$

بما أن حاصل ضرب الميلين = -1 فإن القطرين متعامدان لذا فأن JKLM معين.

إذن الشكل معين ، لأن قطريه متعامدان و غير متطابقين.

18) $J(-2,-1), K(-4,3), L(1,5), M(3,1)$

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$JL = \sqrt{(-2-1)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{45}$$

$$KM = \sqrt{(-4-3)^2+(3-1)^2} = \sqrt{53}$$

بما أن القطران JL, KM ليس متساويان إذن هما غير متطابقان إذن الشكل JKLM ليس مستطيل وليس مربع

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{JL} = \frac{-2-1}{-1-5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ميل: $\overline{KM} = \frac{-4-3}{3-1} = \frac{-7}{2}$

بما أن حاصل ضرب الميلين $\neq -1$ فإن القطرين غير متعامدان لذا فأن JKLM ليس معين.

إذن الشكل لاشئ ، لأن قطريه غير متعامدان و غير متطابقين.

19) $J(-1, 1), K(4, 1), L(4, 6), M(-1, 6)$

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$\overline{JL} = \sqrt{(-1-4)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{50}$$

$$\overline{KM} = \sqrt{(4+1)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{50}$$

بما أن القطران $\overline{JL}$, $\overline{KM}$ متساويان إذن هما متطابقان إذن الشكل مستطيل

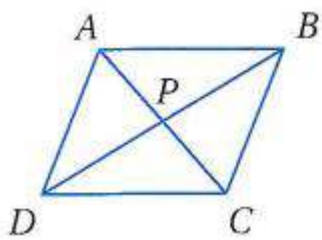
ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{JL} = \frac{-1-4}{1-6} = \frac{-5}{-5} = 1$

ميل: $\overline{KM} = \frac{4+1}{1-6} = \frac{-5}{-5} = \frac{5}{-5} = -1$

بما أن حاصل ضرب الميلين $= -1$ فإن القطرين متعامدان لذا فأن JKLM معين.

إذن الشكل مستطيل ومعين ومربع؛ لأن جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قوائم.



في المعينِ $ABCD$ ، إذا كان $m\angle ABD = 24^\circ$

$PB = 12, AB = 15,$ ، فأوجد كلًا مما يأتي :

20) AP

بما أن الشكل معين إذن القطران متعامدان إذن ΔAPB قائم الزاوية وباستخدام فيثاغورث ينتج أن:

$$(AB)^2 = (AP)^2 + (PB)^2$$

$$(15)^2 = (AP)^2 + (12)^2$$

$$225 = (AP)^2 + 144$$

$$(AP)^2 = 81$$

$$AP = 9$$

21) CP

$$AP = CP = 9$$

22) $m\angle BDA$

من خصائص المعين أن الأضلاع المتجاورة متطابقة وبالتالي يكون ΔADB متطابق الضلعين وبالتالي يكون زوايا القاعدة متساوية

$$\because AB = AD$$

$$\angle ABD = \angle BDA = 24^\circ$$

23) $m\angle ACB$

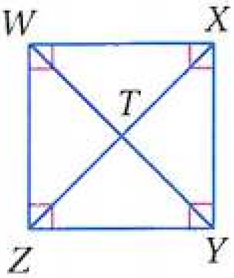
$$\angle DCB = 180 - (\angle DBC + \angle BDC)$$

$$\angle DCB = 180 - (24 + 24)$$

$$\angle DCB = 132$$

$$\angle ACB = \frac{132}{2} = 66^\circ$$

في المربع $WXYZ$، إذا كان $WT = 3$، فأوجد كلًّا مما يأتي :



24) ZX

من خصائص المربع القطران متطابقان وينصف كل منهما الأخر

$$WT = TY = 3$$
$$WY = 2 \times 3 = 6$$
$$WY = ZX = 6$$

25) XY

$$(XY)^2 = (XT)^2 + (TY)^2$$
$$(XY)^2 = (3)^2 + (3)^2$$
$$(XY)^2 = 18$$
$$XY = 3\sqrt{2}$$

26) $m\angle WTZ$

من خصائص المربع أن قطراه متعامدان

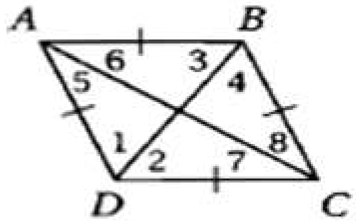
$$\angle WTZ = 90^\circ$$

27) $m\angle WYX$

$$\angle WYX = \frac{90}{2} = 45^\circ$$

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكل مما يأتي :

28) النظريّة 5.16



المعطيات: $ABCD$ معين

المطلوب: إثبات أن كل قطر ينصف زاويتين متقابلتين

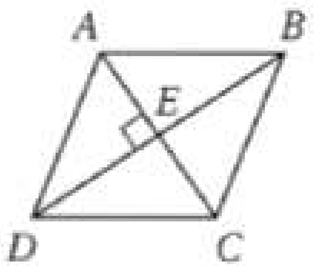
البرهان:

نعلم أن $ABCD$ معين. وحسب تعريف المعين يكون $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإن $\angle ADC \cong \angle ABC$ و $\angle BCD \cong \angle BAD$. ولأن جميع أضلاع المعين متطابقة فإن $\overline{DA} = \overline{CD} \cong \overline{BC} \cong \overline{AB}$ وحسب SAS يكون $\Delta ADC \cong \Delta ABC$ إذن $\angle 6 \cong \angle 5$ و $\angle 8 \cong \angle 7$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. وكذلك $\Delta BCD \cong \Delta BAD$ حسب SAS. ولذا $\angle 4 \cong \angle 3$ و $\angle 2 \cong \angle 1$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. ومن تعريف منصف الزاوية، فإن كل قطر ينصف زاويتين متقابلتين.

29) النظريّة 5.17

المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع؛ $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

المطلوب: $ABCD$ معين.



البرهان: نعلم أن $ABCD$ متوازي أضلاع، وبما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر، فإن $\overline{EC} \cong \overline{AE}$. وكذلك $\overline{BE} \cong \overline{BE}$ لأن تطابق القطع المستقيمة يحقق خاصية الانعكاس.

ونعلم أيضاً أن $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. إذن $\angle AEB$ و $\angle BEC$ قائمتان حسب تعريف المستقيمين المتعامدين.

إذن $\angle BEC \cong \angle AEB$ لأن جميع الزوايا القائمة متطابقة

لذلك $\Delta AEB \cong \Delta BEC$ بحسب SAS.

إذن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة.

وبما أن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

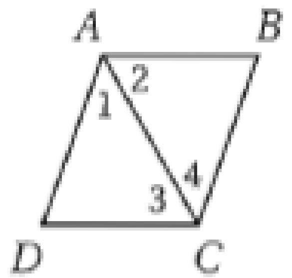
فإن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ إذن $\overline{AD} \cong \overline{CB} \cong \overline{CD} \cong \overline{AB}$ تطابق القطع المستقيمة يحقق خاصية التعدي.

وبما أن جميع أضلاع الشكل ABCD متطابقة، فإنه معين حسب التعريف.

30) النظرية 5.18

30) المعطيات: ABCD متوازي أضلاع، القطر $\overline{AC}$ ينصف كلاً من $\angle DAB, \angle BCD$.

المطلوب: ABCD معين.



البرهان: نعلم أن ABCD متوازي أضلاع

وبما أن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية، فإن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

وحسب التعريف $\angle 2$ و $\angle 3$ متبادلتان داخلياً بالنسبة للضلعين المتوازيين $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$.

وبما أن الزاويتين المتبادلتين داخلياً متطابقتان، فإن $\angle 3 \cong \angle 2$

ولأن تطابق الزوايا يحقق خاصية التماثل، فإن $\angle 2 \cong \angle 3$ ونعلم أن $\overline{AC}$ تنصف كل من $\angle DAB$ و $\angle BCD$، إذن $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 3$ حسب التعريف.

ومن خاصية التعدي $\angle 3 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 2$

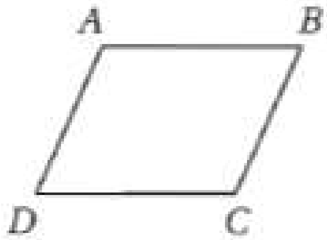
ولأن الأضلاع المقابلة للزوايا المتطابقة في مثلث تكون متطابقة، فإن $\overline{DC} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{AB}$

إذن ولأن ضلعين متجاورين في متوازي الأضلاع متطابقان فإن ABCD معين.

31) النظريّة 5.19

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع، $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

المطلوب: ABCD معين.

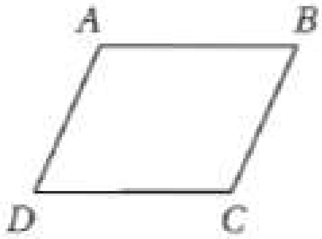


البرهان: بما أن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإن $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. ونعلم أيضاً أن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
وحسب خاصية التعدي تكون $\overline{CD} \cong \overline{BC}$. إذن $\overline{AD} \cong \overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BC}$
لذلك ABCD معين حسب التعريف.

32) النظريّة 5.20

المعطيات: ABCD مستطيل ومعين.

المطلوب: ABCD مربع.



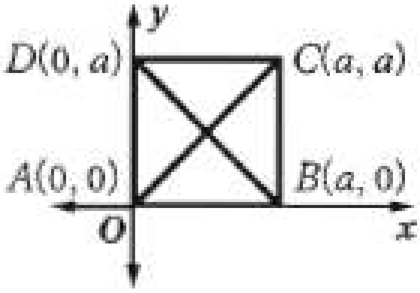
البرهان: نعلم أن ABCD مستطيل ومعين.
إذن ABCD متوازي أضلاع أيضاً لأن جميع المستطيلات والمعينات متوازي أضلاع. وحسب تعريف المستطيل فإن $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ جميعها قوائم.
وحسب تعريف المعين، جميع الأضلاع متطابقة، لذلك ABCD مربع لأنه متوازي أضلاع أضلاعه الأربعة متطابقة وزواياه الأربع قوائم.

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة في كل من السؤالين الآتيين :

33) قطرا المربّع متعامدان.

المعطيات: ABCD مربع.

المطلوب: $\overline{AC} \perp \overline{DB}$



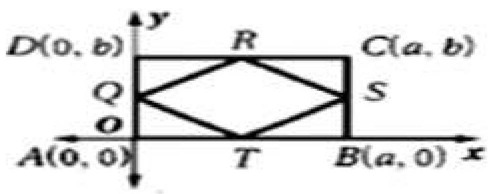
البرهان:

ميل $\overline{DB}$: $m = \dfrac{0-a}{a-0} = -1$

ميل $\overline{AC}$: $m = \dfrac{0-a}{0-a} = 1$

بما أن ميل $\overline{AC}$ يساوي سالب مقلوب ميل $\overline{DB}$، فإنهما متعامدان.

34) تشكّل القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع مستطيل معيّنًا.



المعطيات: ABCD مستطيل T, S, R, Q منتصفات أضلاع المستطيل.

المطلوب: QRST معين

البرهان: إحداثيات نقطة المنتصف Q هي:

$$\left(\frac{0+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(0, \frac{b}{2}\right)$$

إحداثيات نقطة المنتصف R هي:

$$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{2b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, b\right)$$

إحداثيات نقطة المنتصف T هي:

$$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

$$QR=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(b-\frac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$RS=\sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-b\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$ST=\sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

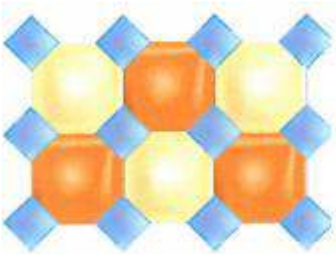
$$QT=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(0-\frac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

بما أن $QR=RS=ST=QT$ فإن $\overline{ST}\cong\overline{QT}\cong\overline{RS}\cong\overline{RQ}$

إذن $QRST$ معين

35) **تصميم:** يتكون نمط الفسيفساء المبين جانبًا من قطع ثمانيّة منتظمة وأخرى رباعيّة. صنِّف الأشكال الرباعيّة في النمط، ووضح تبريرك.

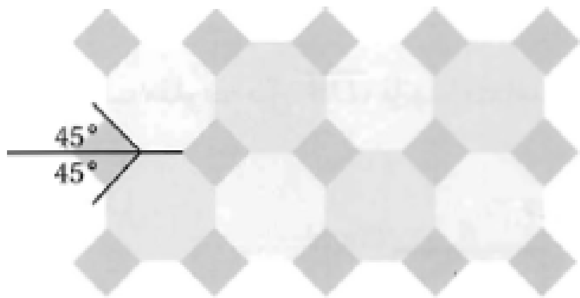


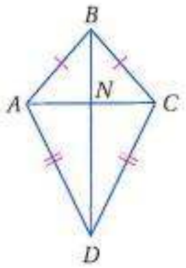
35) مربعات: إجابة ممكنة: بما أن الثمانيات منتظمة فإن الأضلاع متطابقة وتشترك الأشكال الرباعية مع الثمانيات في أضلاع، لذا فإن الأشكال الرباعية معينات أو مربعات.

وزوايا رؤوس الأشكال الرباعية تتكون من الزوايا الخارجية لأضلاع الثمانيات المجاورة للرؤوس.

ومجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع يساوي 360° دائماً، ولأن الثماني المنتظم له 8 زوايا خارجية متطابقة

فإن قياس كل منها يساوي 45° وكما هو مبين في الشكل فإن قياس كل زاوية للأشكال الرباعية في النمط يساوي $45^\circ + 45^\circ$ أو 90° لذلك فالشكل الرباعي يكون مربعاً

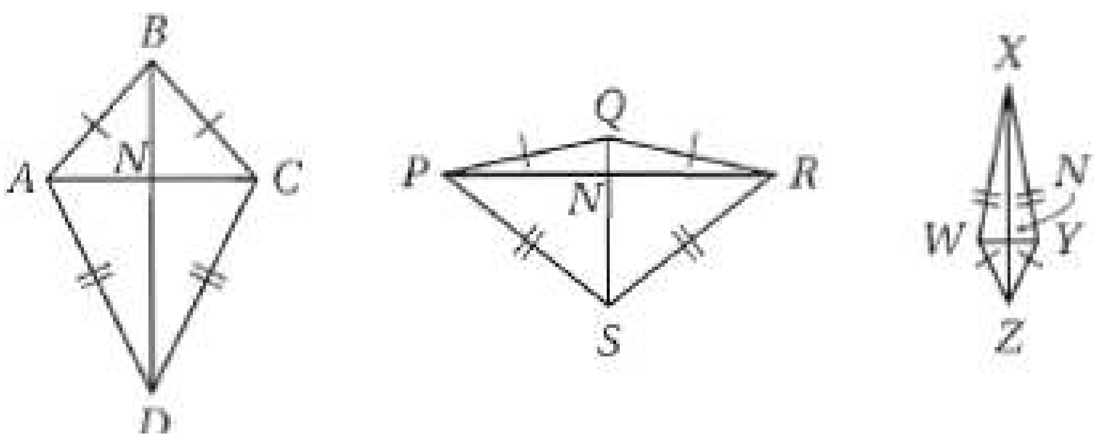




36) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة خصائص شكل الطائرة الورقيّة، وهو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة والمتطابقة.

a) **هندسيًّا:** ارسم قطعةً مستقيمةً، ثم افتح الفرجار وثبته عند أحد طرفيها وارسم قوسًا فوقها، ومن دون تغيير فتحة الفرجار، ثبّت رأس الفرجار عند الطرف الآخر للقطعة المستقيمة، وارسم قوسًا يقطع القوس السابق. غيِّر فتحة الفرجار وارسم قوسين أسفل القطعة المستقيمة كما فعلت سابقًا.

استعمل المسطرة وصل بين طرفَي القطعة والأقواس، وسينتج لك شكل طائرة ورقية سمّها $ABCD$. ثم كرِّر ذلك مرتين، وسمِّ شكلي الطائرتين الورقيتين $PQRS$, $WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منهما، ولتكن نقطة تقاطع قطري كل منها N.



b) **جدوليًّا:** استعمل مسطرة لقياس المسافة من N إلى كل رأس.
وسجِّل النتائج في جدول على النحو الآتي.

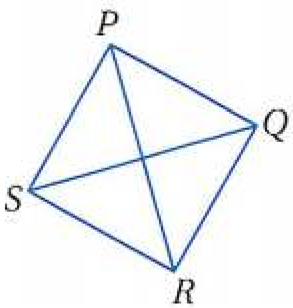
الشكل	المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأقصر		المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأطول	
$ABCD$	0.8 cm	0.8 cm	0.9 cm	1.5 cm
$PQRS$	1.2 cm	1.2 cm	0.3 cm	0.9 cm
$WXYZ$	0.2 cm	0.2 cm	1.1 cm	0.4 cm

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قطري شكل الطائرة الورقيّة.

القطر الأول في شكل الطائرة الورقية ينصف القطر الآخر.

مسائل مهارات التفكير العليا:

37) **اكتشف الخطأ:** في الشكل الرباعي $SRQP$ المبين جانبًا، $\overline{PR} \cong \overline{QS}$.
قال محمد: إن الشكل مربّع. بينما قال إبراهيم: إنه معيّن.
هل أي منهما على صواب؟ وضّح تبريرك.



كلاهما خطأ؛ بما أنهما لا يعلمان أن أضلاع لشكل الرباعي متطابقة، فلا يمكن استنتاج أن الشكل مربع أو معين.

38) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خطأ؟ ثم اكتب عكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي، وحدد قيمة الصواب لكل منها. وضّح تبريرك.

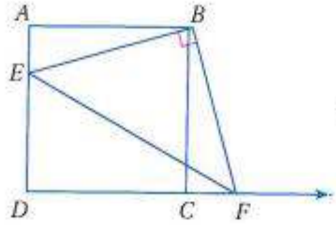
إذا كان الشكل الرباعي مربّعًا فإنّه مستطيل.

صحيحة؛ بما أن المستطيل شكل رباعي زواياه الأربع قائمة، والمربع مستطيل ومعين؛ فإن المربع يكون مستطيلاً دائماً.

العكس: إذا كان شكل رباعي مستطيلاً فإنه مربع. خطأ، المستطيل شكل رباعي زواياه الأربع قوائم. وأضلاعه المتقابلة متطابقة، وليست جميع أضلاعه متطابقة بالضرورة. إذن فهو ليس مربعاً بالضرورة.

المعكوس: إذا كان الشكل الرباعي ليس مربعاً فإنه ليس مستطيلاً. خطأ، الشكل الرباعي الذي زواياه الأربع قائمة وأضلاعه المتقابلة ليس مربعاً ولكنه مستطيل.

المعاكس الإيجابي: إذا كان شكل رباعي ليس مستطيلاً، فإنه ليس مربعاً، صحيحة؛ إذا كان شكل رباعي ليس مستطيلاً فإنه ليس مربعاً حسب التعريف.



39) **تحدّ:** مساحة المربّع $ABCD$ تساوي 36 وحدة مربّعة. ومساحة $\triangle EBF$ تساوي 20 وحدة مربّعة. إذا كانت $\overline{EB} \perp \overline{BF}$، وطول $\overline{AE}$ يساوي وحدتين، فأوجد طول $\overline{CF}$.

مساحة المربع = 36 ← طول ضلع المربع = 6 وحدات
باستخدام فيثاغورث

ΔABE

$$EB = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

مساحة المثلث = 20

$$\frac{1}{2} \times BF \times 2\sqrt{10} = 20$$

$$BF = \frac{20}{\sqrt{10}}$$

$$BF = 2\sqrt{10}$$

باستخدام فيثاغورث

ΔBCF

$$CF^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 - 6^2 = 4$$

$$CF = \sqrt{4} = 2$$

40) **مسألة مفتوحة:** أوجد إحداثيات رؤوس مربّع قطراه محتويان في المستقيمين $y = x$, $y = -x + 6$. وضّح تبريرك.

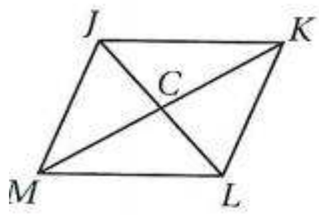
(0, 0), (6, 0), (0, 6), (6, 6)؛ القطران متعامدان، لذا فإن أي أربع نقاط تبعد البعد نفسه عن نقطة تقاطع القطرين تشكل رؤوس مربع.

41) **اكتب:** قارن بين جميع خصائص الأشكال الرباعيّة الآتية : متوازي الأضلاع، المستطيل ، المعيّن، المربّع.

متوازي الأضلاع: الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية ومتطابقة. والزوايا المتقابلة متطابقة. وقطراه ينصف كل منهما الآخر وكل قطر يقسم متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين.
المستطيل: للمستطيل جميع خصائص متوازي الأضلاع. وزواياه الأربع قائمة، وقطراه متطابقان.

المعين: للمعين جميع خصائص متوازي الأضلاع، وجميع أضلاعه متطابقة، وقطراه متعامدان وينصفان زوايا المعين.
المربع: للمربع جميع خصائص متوازي الأضلاع وخصائص المستطيل وخصائص المعين.

تدريب على الاختبار المعياري



42) في المعين $JKLM$ ، إذا كان $CK = 8$ ، $JK = 10$ ، فأوجد JC.

A 4 **C** 8

B 6 **D** 10

B : 6

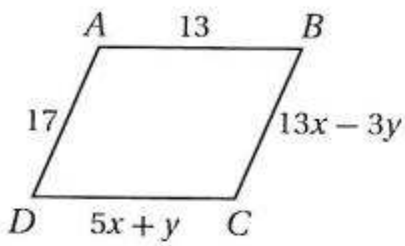
$$(JK)^2 = (CK)^2 + (JC)^2$$

$$(10)^2 = (8)^2 + (JC)^2$$

$$(JC)^2 = 100 - 64 = 36$$

$$JC = 6$$

43) **جبر:** ما قيمة كل من x , y بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع؟



F $x = 3, y = 2$

G $x = \frac{3}{2}, y = -1$

H $x = 2, y = 3$

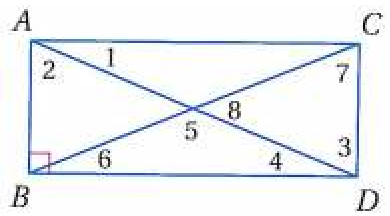
J $x = 3, y = -1$

$$H: x = 2, y = 3$$
$$13 = 5x + y \rightarrow y = 13 - 5x$$
$$17 = 13x - 3y$$
$$17 = 13x - 3(13 - 5x)$$
$$17 = 13x - 39 + 15x$$
$$17 + 39 = 28x$$
$$28x = 56$$
$$x = 2$$
$$y = 13 - 5x$$
$$y = 13 - 10 = 3$$

مراجعة تراكمية

في المستطيل $ABDC$ ، إذا كان $m\angle 1 = 38°$. فأوجد كلًّا من القياسات الآتية :

$m\angle 2$ (44



$$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$38^\circ + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\angle 2 = 90 - 38 = 52^\circ$$

$m\angle 5$ (45

$$\angle 5 = 180 - (\angle 4 + \angle 6)$$

$$\angle 6 = \angle 4 = \angle 1 = 38^\circ$$

$$\angle 5 = 180 - (38 + 38)$$

$$\angle 5 = 104^\circ$$

$m\angle 6$ (46

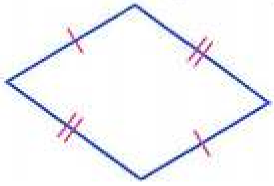
$$\angle 6 = \angle ACB = 38^\circ$$

حدد ما إذا كان الشكل الرباعي في كل مما يأتي متوازي أضلاع أم لا؟ برّر إجابتك.

(47

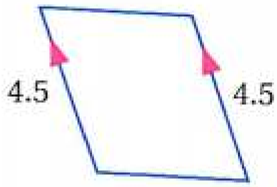
لا؛ الشكل لا يحقق أيا من شروط متوازي الأضلاع.

(48



نعم؛ كل ضلعين متقابلين متطابقان.

(49



نعم؛ يوجد ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان.

50) **قياسات:** قال مروان: إنّ الحديقة الخلفيّة لمنزله على شكل مثلث أطوال أضلاعه 22 ft, 23 ft, 45 ft. فهل ترى أنّ هذه القياسات صحيحة؟ وضّح تبريرك.

لا؛ تنص نظرية متباينة المثلث على أن مجموع طولي أي ضلعين لمثلث يجب أن يكون أكبر من طول الضلع الثالث. وبما أن 45 = 23 + 22، فإن أطوال أضلاع حديقة منزل مروان لا يمكن أن تكون 22 ft، 23 ft، و45 ft.

استعد للدرس اللاحق

حل كل معادلة مما يأتي :

51) $\frac{1}{2}(5x + 7x - 1) = 11.5$

$$\frac{1}{2}(5x + 7x - 1) = 11.5 \qquad \times 2$$

$$5x + 7x - 1 = 23$$

$$12x = 23 + 1$$

$$12x = 24$$

$$x = 2$$

$$\frac{1}{2}(10x+6x+2)=7 \quad (52$$

$$\frac{1}{2}(10x+6x+2)=7 \qquad \times 2$$

$$10x+6x+2=14$$

$$16x=12$$

$$x=\frac{12}{16}$$

$$x=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}(12x+6-8x+7)=9 \quad (53$$

$$\frac{1}{2}(12x+6-8x+7)=9 \qquad \times 2$$

$$12x+13-8x=18$$

$$4x+13=18$$

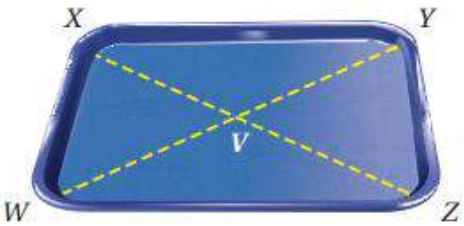
$$4x=5$$

$$x=\frac{5}{4}$$

5-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

تحقق

1) **مطاعم:** لاستغلال مساحة الطاولات المربعة، تستعمل في مطعم أطباقٌ على شكل شبه منحرف كما في الشكل المجاور. إذا كان $WXYZ$ شبه منحرف متطابق الساقين، وكان $m\angle YZW = 85°$, $WV = 15\text{ cm}$، $VY = 10\text{ cm}$، فأوجد كلًّا مما يأتي:



A) $m\angle XWZ$

بما أن $WXYZ$ شبه منحرف متطابق الساقين إذن زوايا القاعدة متساوية:

$$\angle XWZ + \angle YZW = 85^\circ$$

B) $m\angle WXY$

بما أن $WXYZ$ شبه منحرف متطابق الساقين إذن $\overline{XY} \cong \overline{WZ}$

وباستخدام نظرية الزاويتين المتحالفتين ينتج أن:

$$\angle WXY + \angle XWZ = 180^\circ$$

$$\angle WXY + 85 = 180^\circ$$

$$\angle WXY = 95^\circ$$

C) XZ

بما أن $WXYZ$ شبه منحرف متطابق الساقين إذن قطراه متطابقان:

$$\overline{XZ} = \overline{WY}$$

$$\overline{WY} = \overline{WV} + \overline{VY} = 10 + 15 = 25$$

$$\overline{XZ} = 25\text{cm}$$

D) XV

$\overline{XV} = 10cm$

2) رؤوس الشكل الرباعي $QRST$ هي $Q(-8, -4), R(0, 8), S(6, 8), T(-6, -10)$.

بيّن أن $QRST$ شبه منحرف، وحدد ما إذا كان متطابق الساقين؟

الخطوة1:

ميل $\overline{QR} = \frac{0+8}{8+4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

ميل $\overline{ST} = \frac{6+6}{8+10} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

بما أن ميل كل من $\overline{QR}, \overline{ST}$ متساويان إذن $\overline{QR}$ □ $\overline{ST}$

ميل $\overline{RS} = \frac{0-6}{8-8} = \frac{-6}{0}$

ميل $\overline{QT} = \frac{-8+6}{-4+10} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$

بما أن ميل كل من $\overline{RS}, \overline{QT}$ ليس متساويان إذن $\overline{RS} \nparallel \overline{QT}$ وبما أن $QRST$ فيه ضلعان فقط متوازيان فهو شبه منحرف

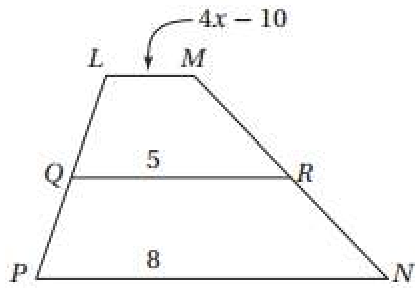
الخطوة2:

$\overline{RS} = \sqrt{(0-6)^2 + (8-8)^2} = \sqrt{36} = 6$

$\overline{QT} = \sqrt{(-8+6)^2 + (-4+10)^2} = \sqrt{40}$

بما أن $\overline{RS} \neq \overline{QT}$ فإن شبه المنحرف $QRST$ ليس متطابق الساقين

3) في الشكل أدناه، $\overline{QR}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $LMNP$. ما قيمة x؟



$$QR = \frac{1}{2}(LM + PN)$$

$$5 = \frac{1}{2}(4x - 10 + 8)$$

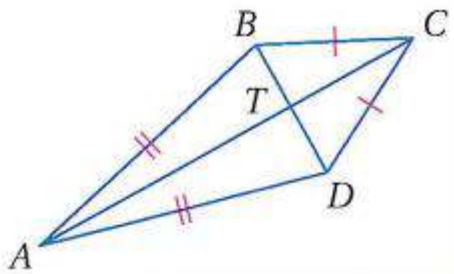
$$5 = 2x - 5 + 4$$

$$5 + 5 - 4 = 2x$$

$$6 = 2x$$

$$x = 3$$

4A) إذا كان $m\angle BCD = 50°$, $m\angle BAD = 38°$ ، فأوجد $m\angle ADC$.



بما أن $BC = CD$ إذن ΔBCD متطابق الضلعين وزاويا القاعدة متساوية

وبما أن $\angle BCD = 50^\circ$

إذن: $\angle CDB = \dfrac{180 - 50^\circ}{2} = 65^\circ$

بما أن $AB = AD$ إذن ΔABD متطابق الضلعين وزاويا القاعدة متساوية

وبما أن $\angle BAD = 38^\circ$

إذن: $\angle BDA = \dfrac{180^\circ - 38^\circ}{2} = 71^\circ$

$$\angle ADC = \angle CDB + \angle BDA$$

$$\angle ADC = 65^\circ + 71^\circ = 136^\circ$$

4B) إذا كان $TC = 8$, $BT = 5$ ، فأوجد CD.

$$(BC)^2 = (BT)^2 + (TC)^2$$

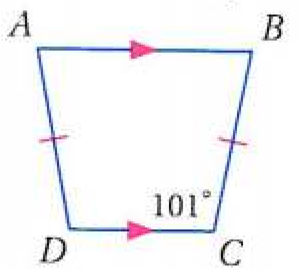
$$(BC)^2 = (5)^2 + (8)^2 = 89$$

$$BC = CD \approx 9.4$$

تأكد:

أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

$m\angle D$ (1

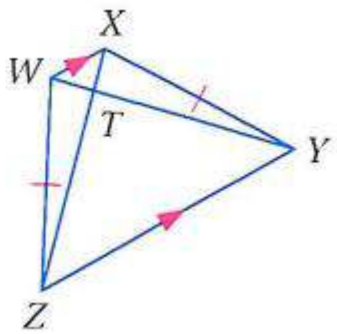


بما أن $AB \parallel DC$ و $AD = BC$ إذن الشكل شبه منحرف متطابق الضلعين وبالتالي يكون زوايا القاعدة متساوية

إذن $\angle D = \angle C = 101^\circ$

WT (2، إذا كان:

$ZX = 20,\ TY = 15$



بما أن $WX \parallel ZY$ و $WZ = XY$ إذن الشكل شبه منحرف متطابق الضلعين وبالتالي يكون قطراه متطابقان

إذن $XZ = WY$

$20 = WY$

$20 = (WT + TY)$

$20 = WT + 15$

$WT = 20 - 15 = 5$

هندسة إحداثيّة: رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $C(3, 3), D(5, -1)$ ، $A(-4, -1), B(-2, 3),$.

3) بيّن أنّ $ABCD$ شبه منحرف.

ميل $\overline{AB} = \frac{-4+2}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

ميل $\overline{CD} = \frac{3-5}{3+1} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

بما أن ميل كل من $\overline{AB}, \overline{CD}$ ليس متساويان إذن $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$

ميل $\overline{BC} = \frac{3-3}{-2-3} = \frac{0}{-5}$

ميل $\overline{AD} = \frac{-1+1}{-4-5} = \frac{0}{-9}$

بما أن ميل كل من $\overline{AD}, \overline{BC}$ متساويان إذن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ إذن ABCD شبه منحرف

4) حدّد ما إذا كان $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين ؟ وضح إجابتك.

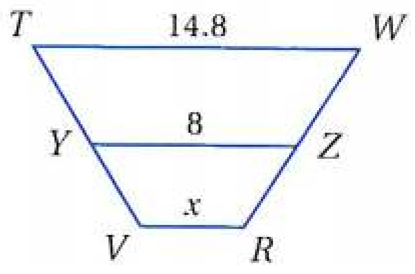
الخطوة2:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-4+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(3-5)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{20}$$

بما أن $\overline{AB} = \overline{CD}$ فإن شبه المنحرف ABCD متطابق الساقين

5) **إجابة قصيرة:** في الشكل المجاور: $\overline{YZ}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $TWRV$. أوجد قيمة x.



$$YZ = \frac{1}{2}(TW + ZR)$$

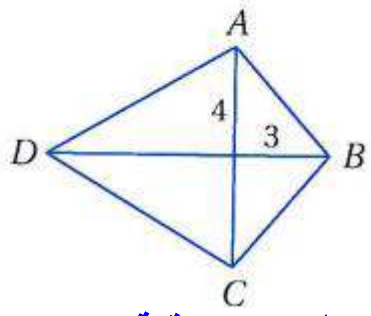
$$8 = \frac{1}{2}(14.8 + x)$$

$$16 = 14.8 + x$$

$$x = 16 - 14.8 = 1.2$$

إذا كان $ABCD$ على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

6) AB

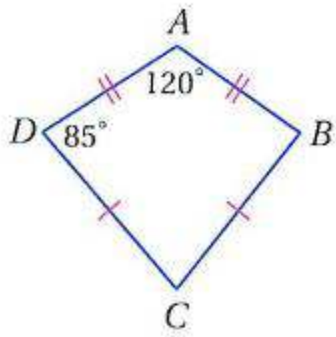


قطرا الطائرة الورقية متعامدان

$$(AB)^2 = (3)^2 + (4)^2 = 25$$

$$AB = 5$$

$m\angle C$ (7



بما أن الشكل رباعي إذن مجموع زواياه الداخلية = 360°

وبما أن الشكل طائرة ورقية إذن $\angle B = \angle D$

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

$$120 + \angle B + \angle C + 85 = 360$$

$$\angle B = \angle D$$

$$120 + 85 + \angle C + 85 = 360$$

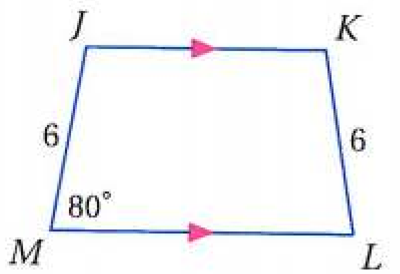
$$\angle C = 360 - 290$$

$$\angle C = 70^\circ$$

تدرب وحل المسائل:

أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

8) $m\angle K$



بما أن $JK \parallel ML$ و $KL = JM$ إذن الشكل شبه منحرف متطابق الضلعين

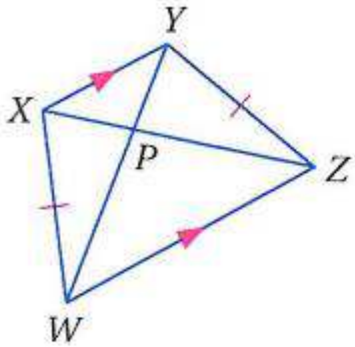
وبالتالي يكون زوايا القاعدة متساوية

$\angle J = 180 - 80 = 100$ نظرية الزوايا المتحالفة

$m\angle J = m\angle K = 100^\circ$

9) PW، إذا كان:

$XZ = 18, PY = 3$



بما أن $WZ \parallel XY$ و $XW = YZ$ إذن الشكل شبه منحرف متطابق الضلعين ويكون قطراه متطابقان

$XZ = WY$

$18 = YP + PW$

$18 = 3 + PW$

$PW = 18 - 3 = 15$

هندسة إحداثية: بيّن أن الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، وحدد ما إذا كان متطابق الساقين؟

10) $A(-2, 5), B(-3, 1), C(6, 1), D(3, 5)$

الخطوة1:

ميل $\overline{AB} = \dfrac{-2+3}{5-1} = \dfrac{1}{4}$

ميل $\overline{CD} = \dfrac{6-3}{1-5} = \dfrac{3}{-4}$

بما أن ميل كل من $\overline{AB}, \overline{CD}$ ليس متساويان إذن $\overline{CD} \nparallel \overline{AB}$

ميل $\overline{BC} = \dfrac{1-1}{-3-6} = \dfrac{0}{-9} = 0$

ميل $\overline{AD} = \dfrac{5-5}{3+2} = \dfrac{0}{5} = 0$

بما أن ميل كل من $\overline{BC}, \overline{AD}$ متساويان إذن $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ وبما أن ABCD فيه ضلعان فقط متوازيان فهو شبه منحرف

الخطوة2:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2+3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(6-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

ABCD هو شبه منحرف، ولكن ليس متطابق الساقين؛ لأن $AB = \sqrt{17}, CD = 5$.

$J(-4,-6), K(6,2), L(1,3), M(-4,-1)$ (11

الخطوة1:

ميل $\overline{JK} = \dfrac{-4-6}{-6-2} = \dfrac{-10}{-8} = \dfrac{5}{4}$

ميل $\overline{ML} = \dfrac{1+4}{3+1} = \dfrac{5}{4}$

بما أن ميل كل من $\overline{JK}, \overline{ML}$ متساويان إذن $\overline{JK} \parallel \overline{ML}$

ميل $\overline{KL} = \dfrac{6-1}{2-3} = \dfrac{5}{-1} = -5$

ميل $\overline{JM} = \dfrac{-4+4}{-6+1} = \dfrac{0}{-5}$

بما أن ميل كل من $\overline{KL}, \overline{JM}$ ليس متساويان إذن $\overline{KL} \nparallel \overline{JM}$ وبما أن JKLM فيه ضلعان فقط متوازيان وهما $\overline{JK}, \overline{ML}$ فهو شبه منحرف

الخطوة2:

$$\overline{KL} = \sqrt{(6-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{26}$$

$$\overline{JM} = \sqrt{(-4+4)^2 + (-6+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

JKLM هو شبه منحرف، ولكن ليس متطابق الساقين؛

لأن $JM = 5$, $KL = \sqrt{26}$.

$Q(2, 5), R(-2, 1), S(-1, -6), T(9, 4)$ (12

الخطوة1:

ميل $\overline{QR} = \frac{2+2}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$

ميل $\overline{ST} = \frac{-1-9}{-6-4} = \frac{10}{10} = 1$

بما أن ميل كل من $\overline{QR}$, $\overline{ST}$ متساويان إذن $\overline{QR} \parallel \overline{ST}$

ميل $\overline{RS} = \frac{-2+1}{1+6} = \frac{-1}{7}$

ميل $\overline{QT} = \frac{2-9}{5-4} = \frac{-7}{1} = -7$

بما أن ميل كل من $\overline{RS}$, $\overline{QT}$ ليس متساويان إذن $\overline{RS} \nparallel \overline{QT}$ وبما أن QRST فيه ضلعان فقط متوازيان فهو شبه منحرف

الخطوة2:

$$\overline{RS} = \sqrt{(-2+1)^2 + (1+6)^2} = \sqrt{50}$$

$$\overline{QT} = \sqrt{(2-9)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{50}$$

بما أن $\overline{RS} = \overline{QT}$ فإن شبه المنحرف QRST متطابق الساقين

QRST هو شبه منحرف متطابق الساقين

$W(-5,-1), X(-2,2), Y(3,1), Z(5,-3)$ (13

الخطوة1:

ميل $\overline{WX} = \frac{-5+2}{-1-2} = \frac{-3}{-3} = 1$

ميل $\overline{YZ} = \frac{3-5}{1+3} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

بما أن ميل كل من $\overline{YZ}$, $\overline{WX}$ ليس متساويان إذن $\overline{YZ} \nparallel \overline{WX}$

ميل $\overline{XY} = \frac{-2-3}{2-1} = \frac{-5}{1} = -5$

ميل $\overline{WZ} = \frac{-5-5}{-1+3} = \frac{-10}{2} = -5$

بما أن ميل كل من $\overline{XY}$, $\overline{WZ}$ متساويان إذن $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$ وبما أن
XWYZ فيه ضلعان فقط متوازيان فهو شبه منحرف

الخطوة2:

$$\overline{WX} = \sqrt{(-5+2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{18}$$

$$\overline{YZ} = \sqrt{(3-5)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{20}$$

بما أن $\overline{YZ} = \overline{WX}$ فإن شبه المنحرف WXYZ متطابق الساقين
شبه منحرف لأن $WX = \sqrt{18}$, $YZ = \sqrt{20}$.

في الشكل المجاور، S,V نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRTU$.

14) إذا كان $UT = 22$, $QR = 12$ ، فأوجد VS.

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ مجموع طولي القاعدة

$$VS = \frac{1}{2}(12+22)$$

$$VS = \frac{1}{2}(12+22) = 17$$

15) إذا كان $UT = 12$, $VS = 9$ ، فأوجد QR.

$$VS = \frac{1}{2}(QR + UT)$$

$$9 = \frac{1}{2}(QR + 12)$$

$$18 = QR + 12$$

$$QR = 18 - 12$$

$$QR = 6$$

16) إذا كان $VS = 11$, $RQ = 5$ ، فأوجد UT.

$$VS = \frac{1}{2}(QR + UT)$$

$$11 = \frac{1}{2}(5 + UT)$$

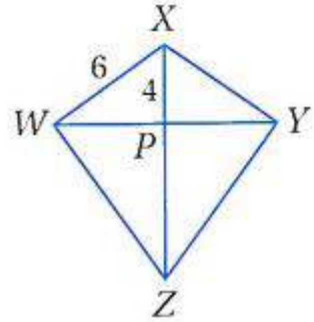
$$22 = 5 + UT$$

$$UT = 22 - 5$$

$$UT = 17$$

إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل مما يأتي :

17) WP



قطرا شكل الطائرة متعامدان وباستخدام فيثاغورث ينتج أن:

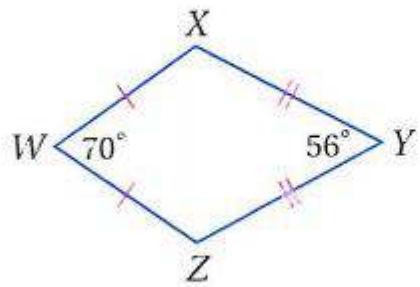
$$(WX)^2 = (XP)^2 + (WP)^2$$

$$(6)^2 = (4)^2 + (WP)^2$$

$$(WP)^2 = 36 - 16$$

$$(WP)^2 = \sqrt{20}$$

18) $m\angle X$



بما أن الشكل رباعي إذن مجموع زواياه الداخلية = 360°

وبما أن الشكل طائرة ورقية إذن $\angle X = \angle Z$

$$\angle X + \angle Y + \angle Z + \angle W = 360^\circ$$

$$\angle X = \angle Z$$

$$2\angle X + 56 + 70 = 360^\circ$$

$$\angle X = 117^\circ$$

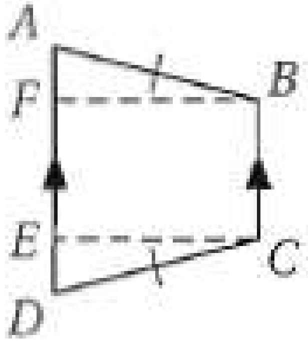
برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريات الآتية :

19) النظريّة 1.21

المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.

$\overline{BC} \cong \overline{AD}, \overline{AB} \cong \overline{CD}$

المطلوب: $\angle A \cong \angle D, \angle ABC \cong \angle DCB$



البرهان:

ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{BF}$ و $\overline{CE}$ بحيث يكون $\overline{BF} \perp \overline{AD}$ و $\overline{CE} \perp \overline{AD}$

وبما أن $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ، والمسافة بين المستقيمين المتوازيين ثابتة $\overline{BF} \cong \overline{CE}$

وبما أن المستقيمين المتعامدين يشكلان زوايا قائمة،

فإن $\angle BFA$, $\angle CED$ قائمتان،

إذن $\Delta BFA \cong \Delta CED$ بحسب حالة التطابق (HL)

وبما أن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة فإن $\angle D \cong \angle A$.

وبما أن $\angle CBF \cong \angle BCE$ قائمتان وجميع الزوايا القائمة متطابقة

فإن $\angle BCE \cong \angle CBF$ و $\angle DCE \cong \angle ABF$.

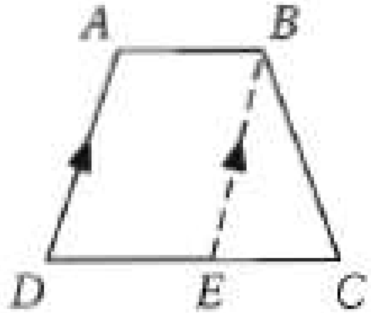
لأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.

إذا $\angle DCB \cong \angle ABC$ وفق مسلمة جمع الزوايا.

20) النظرية 1.22

المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف فيه $\angle D \cong \angle C$.

المطلوب: إثبات أن $ABCD$ متطابق الساقين.



البرهان:

ارسم القطعة المستقيمة المساعدة EB بحيث تكون $\overline{EB} \parallel \overline{AD}$

وبذلك تكون $\angle D \cong \angle BEC$ حسب مسلمة الزوايا المتناظرة.

ونعلم أن $\angle D \cong \angle C$ ، إذن وحسب خاصية التعدي تكون $\angle BEC \cong \angle C$

إذن فالمثلث ΔEBC متطابق الضلعين، حيث $\overline{EB} \cong \overline{BC}$

ومن تعريف شبه المنحرف $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

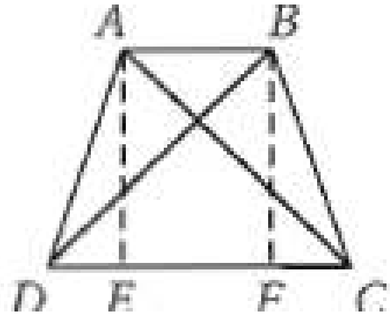
وبما أن كل ضلعين متقابلين للشكل $ABED$ متوازيان فإنه متوازي أضلاع.

$\overline{AD} \cong \overline{EB}$ ، وحسب خاصية التعدي، يكون $\overline{BC} \cong \overline{AD}$. لذلك فشبه المنحرف $ABCD$ متطابق الساقين.

21) النظرية 1.23

المعطيات: ABCD شبه منحرف؛ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

المطلوب: إثبات أن شبه المنحرف ABCD متطابق الساقين.



البرهان:

نعلم أن ABCD شبه منحرف فيه $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

ارسم القطعتين المساعدتين $\overline{BF}$ و$\overline{AE}$ بحيث تكون $\overline{AE} \perp \overline{DC}$ و $\overline{BF} \perp \overline{DC}$

وبما أن المستقيمين المتعامدين يشكلان زوايا قائمة،

فإن $\angle AEF$ و $\angle BFE$ قائمتان، لذلك ΔAEC و ΔBFD قائما الزاوية حسب التعريف.

وبما أن $\overline{AE} \cong \overline{BF}$ لأن المستقيمين اللذين يقعان في نفس المستوى والعموديين على مستقيم واحد يكونان متوازيين، فإن $\overline{AE} \cong \overline{BF}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

ومن ذلك يكون $\Delta AEC \cong \Delta BFD$ حسب حالة التطابق(HL)

و $\angle ACD \cong \angle BDC$ لأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.

كذلك $\overline{DC} \cong \overline{DC}$ حسب خاصية الانعكاس للتطابق

إذن $\Delta ACD \cong \Delta BDC$ حسب حالة التطابق (SAS)

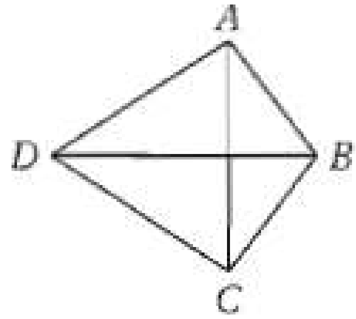
وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة فإن $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

لذلك شبه المنحرف ABCD متطابق الساقين.

22) النظرية 1.25

المعطيات: ABCD شكل طائرة ورقيه فيه $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{DC}$

المطلوب: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$



البرهان: تعلم أن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{AD}$

إذن B و D كلاهما على بعدين متساويين من A و C.

وإذا كانت نقطة على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة، فإنها تقع على العمود المنصف لتلك القطعة.

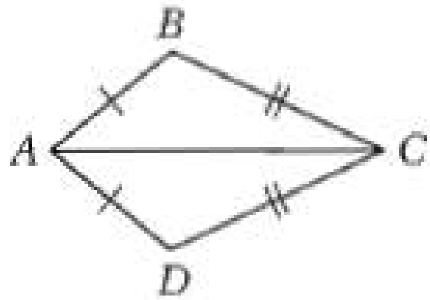
إذن فالمستقيم الذي يحوي النقطتين B وD عمود منصف لـ $\overline{AC}$ ، لأنه لا يوجد إلا مستقيم واحد فقط يمر في نقطتين مختلفتين

لذلك $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

23) النظرية 1.26

المعطيات: ABCD شكل طائرة ورقية

المطلوب: $\angle B \cong \angle D$



البرهان:

نعلم أن $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ و $\overline{CD} \cong \overline{BC}$ حسب تعريف شكل الطائرة الورقية.

$\overline{AC} \cong \overline{AC}$ خاصية الانعكاس

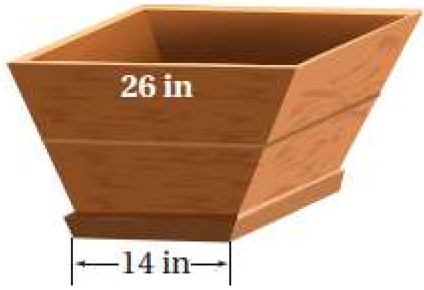
لذلك $\Delta ADC \cong \Delta ABC$ حسب (SSS)

إذن $\angle D \cong \angle B$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة.

وإذا كان $\angle BCD \cong \angle BAD$ ، فإن ABCD متوازي أضلاع حسب التعريف وهو ما لا يمكن أن يكون صحيحاً، لأننا نعلم أن ABCD شكل طائرة ورقية.

لذلك $\angle BCD \cong \angle BAD$

24) **نباتات:** اشترى مشاري أصيصًا زراعيًا ليضعه في غرفته، ويريد أن يكون وجهه على شكل شبه منحرف أبعاده كما في الصورة المجاورة. فإذا أراد أن يصنع رفًا في الوسط لتستند إليه النباتات، فكم عرض هذا الرف؟



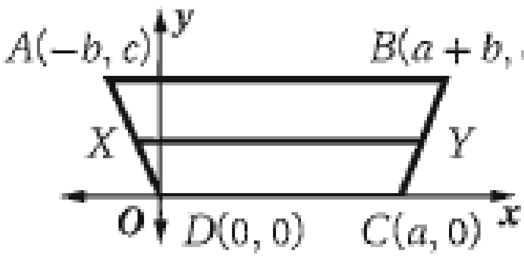
بما أن الشكل شبه منحرف والقطعة المتوسطة لهذا الرف = $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين

$$\frac{1}{2}(26+14)=\frac{1}{2}(40)=20$$

25) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًا للنظرية 1.24.

المعطيات: ABCD شبه منحرف فيه $\overline{XY}$ قطعة متوسطة.

المطلوب: $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$, $\overline{XY} \parallel \overline{DC}$



البرهان:

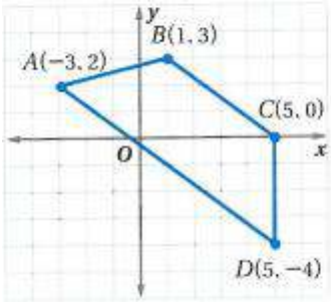
X نقطة منتصف $\overline{AD}$ ، وإحداثياتها $\left(\frac{-b}{2},\frac{c}{2}\right)$

Y نقطة منتصف $\overline{BC}$ ، وإحداثياتها $\left(\frac{2a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$

وبما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي صفر، وميل $\overline{XY}$ يساوي صفر، وميل $\overline{DC}$ يساوي صفر فإن، $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$, $\overline{XY} \parallel \overline{DC}$

26) **هندسة إحداثية :** استعن بالشكل الرباعي *ABCD* المجاور.

a) بين أن *ABCD* شبه منحرف. وحدد ما إذا كان متطابق الساقين.
وضّح إجابتك.



الخطوة1:

ميل $\overline{BC} = \frac{1-5}{3-0} = \frac{-4}{3}$

ميل $\overline{AD} = \frac{-3-5}{2+4} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$

ميل $\overline{CD} = \frac{5-5}{0+4} = \frac{0}{4} = 0$

ميل $\overline{AB} = \frac{-3-1}{2-3} = \frac{-4}{-1} = 4$

بما أن ميل كل من $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ متساويان إذن $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
وميل كلا من $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ غير متساويان إذن $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$
إذن الشكل ABCD شبه منحرف

الخطوة2:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{17}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(5-5)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{25} = \sqrt{16} = 4$$

إذن ABCD شبه منحرف ولكنه غير متطابق الساقين لأن $AB = \sqrt{17}$ و $CD = 4$.

b) هل القطعة المتوسطة محتواة في المستقيم الذي معادلته $y = -x + 1$؟ برّر إجابتك.

لا، لأن هذا المستقيم لا يوازي قاعدتي شبه المنحرف، حيث إن ميل كل من القاعدتين $\frac{-3}{4}$ ، على حين أن ميل المستقيم $y = -x + 1$ يساوي -1.

c) أوجد طول القطعة المتوسطة.

$$\overline{BC} = \sqrt{(5-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(-3-5)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{100} = 10$$

طول القطعة المتوسطة =

$$\frac{1}{2}(BC + AD)$$

$$\frac{1}{2}(5+10) = 7.5$$

جبر: في الشكل المجاور، $ABCD$ شبه منحرف.

27) إذا كان $BD = 2x + 8$, $AC = 3x - 7$ ، فأوجد قيمة x بحيث يكون $ABCD$ متطابق الساقين.

قطرا شبه المنحرف متطابقة

$$BD = AC$$

$$2x + 8 = 3x - 7$$

$$3x - 2x = 8 + 7$$

$$x = 15$$

28) إذا كان $m\angle DAB = (2x + 33)^\circ$, $m\angle ABC = (4x + 11)^\circ$ فأوجد قيمة x بحيث يكون $ABCD$ متطابق الساقين.

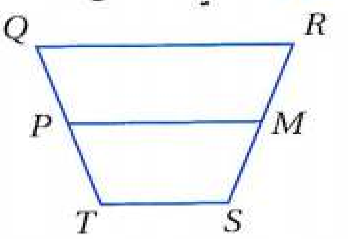
$$4x + 11 = 2x + 33$$

$$4x - 2x = 33 - 11$$

$$2x = 22$$

$$x = 11$$

جبر: في الشكل المجاور، M , P نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRST$.



29) إذا كان $QR = 16, PM = 12, TS = 4x$ ، فأوجد قيمة x.

$$PM = \frac{1}{2}(QR + TS)$$

$$12 = \frac{1}{2}(16 + 4x)$$

$$24 = 16 + 4x$$

$$4x = 24 - 16$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

30) إذا كان $TS = 2x, PM = 20, QR = 6x$ ، فأوجد قيمة x.

$$PM = \frac{1}{2}(QR + TS)$$

$$20 = \frac{1}{2}(6x + 2x)$$

$$40 = 6x + 2x$$

$$40 = 8x$$

$$x = 5$$

31) إذا كان $PM = 2x, QR = 3x, TS = 10$ ، فأوجد PM.

$$PM = \frac{1}{2}(QR + TS)$$

$$2x = \frac{1}{2}(3x + 10)$$

$$4x = 3x + 10$$

$$x = 10 \quad \therefore \; PM = 2 \times 10 = 20$$

32) إذا كان $PM = 13$ ، $TS = 2x + 2, QR = 5x + 3$ ، فأوجد TS.

$$PM = \frac{1}{2}(QR + TS)$$

$$13 = \frac{1}{2}(5x + 3 + 2x + 2)$$

$$26 = 7x + 5$$

$$7x = 26 - 5$$

$$7x = 21$$

$$x = 3$$

$$TS = 2x + 2$$

$$TS = 6 + 2 = 8$$

تسوّق: الوجه الجانبي لحقيبة التسوّق المبيّنة جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $EC = 9$ in, $DB = 19$ in ، $m\angle ABE = 40^\circ$, $m\angle EBC = 35^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

33) AE

$$DB = AC$$

$$19 = AE + EC$$

$$19 = AE + 9$$

$$AE = 19 - 9$$

$$AE = 10in$$

34) AC

$$AC = EC + AE$$

$$AC = 9 + 10$$

$$AC = 19in$$

35) $m\angle BCD$

نظرية الزاويتان المتحالفتان

$$m\angle ABC = m\angle ABE + m\angle EBC = 40 + 35 = 75^\circ$$

$$m\angle ABC + m\angle BCD = 180^\circ$$

$$m\angle ABC + m\angle BCD = 180^\circ$$

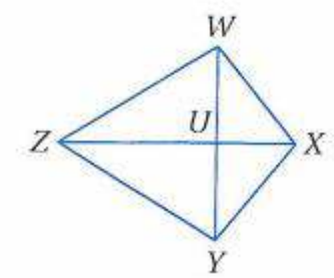
$$75 + m\angle BCD = 180^\circ$$

$$m\angle BCD = 105^\circ$$

36) $m\angle EDC$

بما أن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ إذن $m\angle ABE = m\angle EDC = 40^\circ$

حسب نطرية التبادل داخليا



جبر: في الشكل المجاور، $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة.

37) إذا كان $m\angle WZY = (4x)^\circ$، $m\angle WXY = 120^\circ$، $m\angle ZWX = (10x)^\circ$، فأوجد $m\angle ZYX$.

$m\angle ZWX \cong \angle ZYX$ (يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، نظرية 1.26)

لذا $m\angle ZYX = m\angle ZWX = 10x$

وعليه فإن

$$m\angle ZWX + m\angle WXY + m\angle ZYX + m\angle WZY = 360$$

(مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي)، وبالتعويض ينتج:

$$10x + 120 + 10x + 4x = 360$$

$$24x + 120 = 360$$

$$x = 10$$

لذا: $m\angle ZYX = 10x = 10(10) = 100^\circ$

38) إذا كان $m\angle WZY = 35°$ ، $m\angle WXY = (13x + 24)°$ ، $m\angle ZWX = (13x + 14)°$ ،
فأوجد $m\angle ZYX$.

$m\angle ZWX \cong \angle ZYX$ (يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، نظرية 1.26)

لذا $m\angle ZYX = m\angle ZWX = 13x + 14$

وعليه فإن

$$m\angle ZWX + m\angle WXY + m\angle ZYX + m\angle WZY = 360$$

(مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي)، وبالتعويض ينتج:

$$(13x + 14) + (13x + 24) + (13x + 14) + 35 = 360$$

$$39x + 87 = 360$$

$$39x = 360 - 87$$

$$x = 7$$

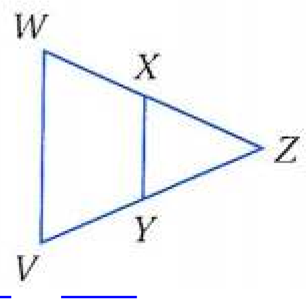
$$\angle ZYX = 13x + 14$$

$$\angle ZYX = 105^{\circ}$$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

39) المعطيات: $\angle W \cong \angle ZXY$, $\overline{WZ} \cong \overline{ZV}$ ، $\overline{XY}$ تنصِّف كلًّا من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$.

المطلوب: $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين.



المعطيات: $\overline{ZV} \cong \overline{WZ}$ ، $\overline{XY}$ تنصف كل من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$ ،

$\angle W \cong \angle ZXY$

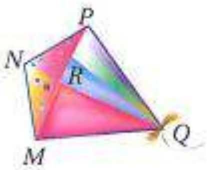
المطلوب: WXYV شبه منحرف متطابق الساقين.

العبارات (المبررات):

1) $\overline{ZV} \cong \overline{WZ}$ ، $\overline{XY}$ تنصف كلاً من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$. (معطيات)

2) $\frac{1}{2}ZV = \frac{1}{2}WZ$ (خاصية الضرب)

3) $WX = VY$ (تعريف نقطة المنتصف)
4) $\overline{WX} \cong \overline{VY}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)
5) $\angle W \cong \angle ZXY$ (معطى)
6) $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$ (إذا كانت الزوايا المتناظرة فإن المستقيمين متوازيان)
7) WXYV شبه منحرف متطابق الساقين. (تعريف شبه المنحرف متطابق الساقين)

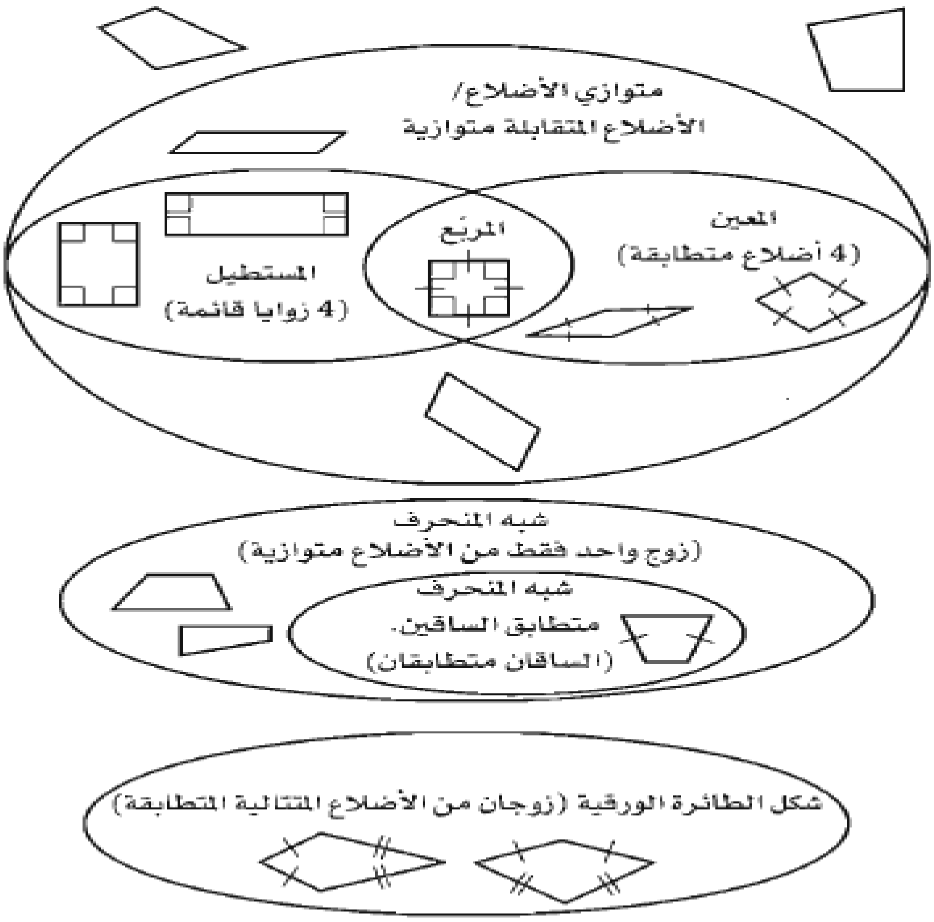


40) **طائرة ورقيّة:** استعن بالطائرة الورقيّة في الشكل المجاور. اكتب باستعمال خصائص الطائرة الورقية برهانًا ذا عمودين لبيان أنّ $\triangle MNR$ يطابق $\triangle PNR$.

المعطيات: MNPQ شكل طائرة ورقية
المطلوب: $\triangle MNR \cong \triangle PNR$
البرهان:
العبارات (المبررات)
1) MNPQ شكل طائرة ورقية (معطى)
2) $\overline{NM} \cong \overline{NP}$, $\overline{QM} \cong \overline{PQ}$ (تعريف شكل الطائرة الورقية)
3) $\overline{QN} \cong \overline{QN}$ (خاصية الانعكاس)
4) $\triangle NMQ \cong \triangle NPQ$ (SSS)
5) $\angle MNR \cong \angle PNR$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)
6) $\overline{NR} \cong \overline{NR}$ (خاصية الانعكاس)
7) $\triangle MNR \cong \triangle PNR$ (SAS)

41) **أشكال فن:** ارسم شكل فن يوضح جميع الأشكال الرباعيّة متضمنًا شبه المنحرف متطابق الساقين، وشكل الطائرة الورقيّة وعموم الأشكال الرباعيّة التي لا أسماء خاصة لها.

41)



هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان الشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، أم متوازي أضلاع، أم مربع، أم معين، أم هو شكل رباعي فحسب؟ اختر أكثر المسمّيات تحديدًا، ووضح إجابتك.

42) $A(-1, 4), B(2, 6), C(3, 3), D(0, 1)$

ميل $\overline{AB} = \dfrac{4-6}{-1-2} = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$

ميل $\overline{CD} = \dfrac{3-1}{3-0} = \dfrac{2}{3}$

ميل $\overline{BC} = \dfrac{2-3}{6-3} = \dfrac{-1}{3}$

ميل $\overline{AD} = \dfrac{-1-0}{4-1} = \dfrac{-1}{3}$

بما أن ميل كل ضلعين متقابلين متساوي إذن الشكل متوازي أضلاع، لأن أضلاعه المتقابلة متطابقة ولا يوجد زوايا قوائم، وأضلاعه المتتالية غير متطابقة.

43) $W(-3, 4), X(3, 4), Y(5, 3), Z(-5, 1)$

ميل $\overline{WX} = \dfrac{4-4}{-3-3} = \dfrac{0}{-6}$

ميل $\overline{YZ} = \dfrac{3-1}{5+5} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

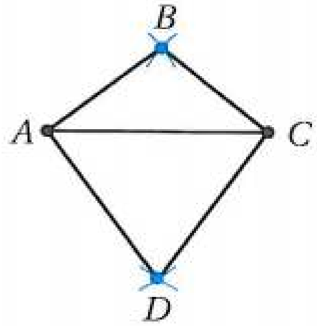
ميل $\overline{XY} = \dfrac{4-3}{3-5} = \dfrac{1}{-2}$

ميل $\overline{WZ} = \dfrac{4-1}{-3+5} = \dfrac{3}{2}$

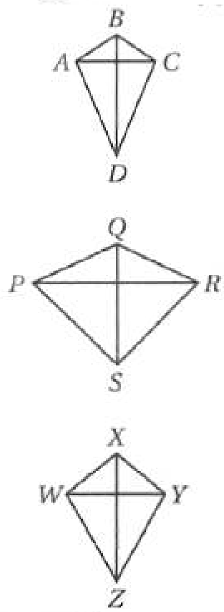
ميل $\overline{WX} \neq \overline{YZ} \neq \overline{XY} \neq \overline{WZ}$

إذن شكل رباعي فقط ليس فيه أضلاع متوازية.

44) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة التناسب في شكل الطائرة الورقيّة.



a) **هندسيًّا:** ارسم قطعة مستقيمة. وأنشئ عمودًا منصفًا لها لا تنصفه القطعة المستقيمة ولا تساويه طولًا. ثم صِلْ أطراف القطعتين المستقيمتين لتكوِّن الشكل الرباعي $ABCD$. كرّر هذه العملية مرتين، وسمِّ الشكلين الرباعيين الجديدين $PQRS$, $WXYZ$.



b) **جدوليًّا:** انقل الجدول الآتي وأكمله.

الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الشكل
1.6 cm	DA	1.6 cm	CD	0.8 cm	BC	0.8 cm	AB	ABCD
1.8 cm	SP	1.8 cm	RS	1.4 cm	QR	1.4 cm	PQ	PQRS
1.5 cm	ZW	1.5 cm	YZ	0.4 cm	XY	0.4 cm	WX	WXYZ

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول الشكل الرباعي الذي قطراه متعامدان وغير متطابقين، وأحدهما فقط ينصِّف الآخر.

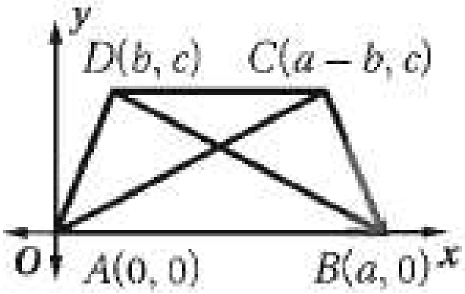
إذا كان قطرا شكل رباعي متعامدين وليسا متطابقين وأحدهما فقط ينصف الآخر، فإن الشكل الرباعي هو شكل طائرة ورقية.

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل من العبارتين الآتيتين:

45) قطرا شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقان.

المعطيات: ABCD شبه منحرف متطابق الساقين فيه $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\overline{BD} \cong \overline{AC}$



البرهان:

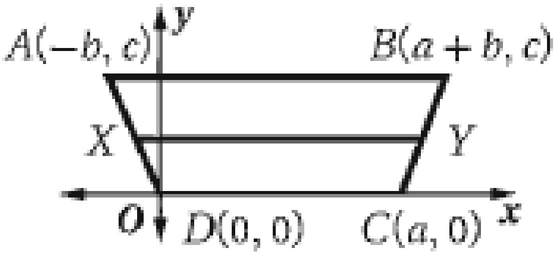
$$DB = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$
$$= \sqrt{(a-b)^2 + (c)^2}$$
$$AC = \sqrt{((a-b)-0)^2 + (c-0)^2}$$
$$= \sqrt{(a-b)^2 + (c)^2}$$

إذن $BD = AC$ ومن ذلك $\overline{BD} \cong \overline{AC}$

46) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف المتطابق الساقين توازي كلًّا من القاعدتين.

المعطيات: ABCD شبه منحرف فيه $\overline{XY}$ قطعة متوسطة.

المطلوب: $\overline{XY} \parallel \overline{AB} , \overline{XY} \parallel \overline{DC}$



البرهان:

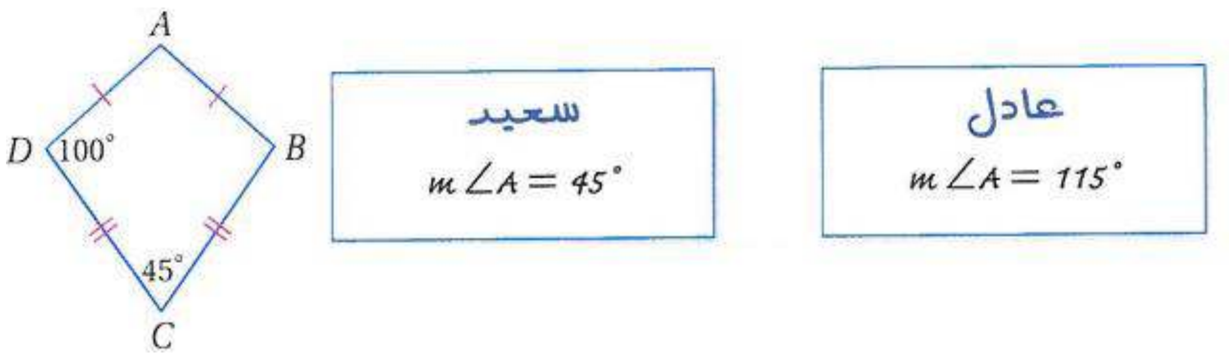
X نقطة منتصف $\overline{AD}$ ، وإحداثياتها $\left(\frac{-b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

Y نقطة منتصف $\overline{BC}$ ، وإحداثياتها $\left(\frac{2a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

وبما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي صفر، وميل $\overline{XY}$ يساوي صفر، وميل $\overline{DC}$ يساوي صفر فإن، $\overline{XY} \parallel \overline{AB} , \overline{XY} \parallel \overline{DC}$

مسائل مهارات التفكير العليا:

47) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من عادل وسعيد $m\angle A$ في شكل الطائرة الورقيّة $ABCD$ المجاور . هل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضح إجابتك.



عادل؛ $m\angle D = m\angle B$

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^\circ$$

$$m\angle A + 100 + 45 + 100 = 360^\circ$$

$$m\angle A = 115^\circ$$

48) **تحدٍّ:** إذا كان الضلعان المتوازيان في شبه منحرف محتويين في المستقيمين $y = x - 8$، $y = x + 4$، فما معادلة المستقيم الذي يحتوي القطعة المتوسطة لشبه المنحرف؟

الفطعة المتوسطة = $\frac{1}{2}$ مجموع طول القاعدتين

$$\frac{1}{2}\left[(y = x - 8) + (y = x + 4)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[(2y = 2x - 4)\right]$$

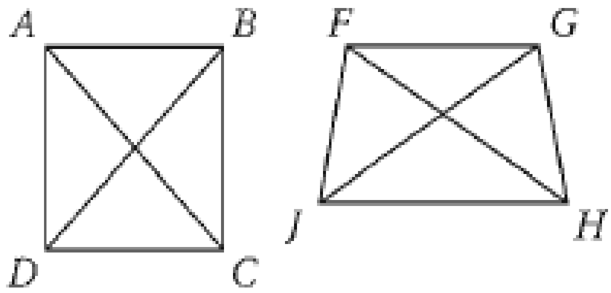
$$\frac{1}{2}\left[2(y = x - 2)\right]$$

$$y = x - 2$$

49) **تبرير:** هل العبارة " المربع هو أيضا طائرة ورقيّة " صحيحة أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة أبدًا ؟ وضّح إجابتك.

غير صحيحة أبداً، أضلاع المربع الأربعة متطابقة بينما لا يوجد ضلعان متقابلان في شكل الطائرة الورقية متطابقان.

50) **مسألة مفتوحة:** ارسم شبه المنحرف $ABCD$ وشبه المنحرف $FGHJ$ غير المتطابقين وفيهما $\overline{FH} \cong \overline{AC}$ و $\overline{GJ} \cong \overline{BD}$.



51) **اكتب:** قارن بين خصائص كلٍّ من: شبه المنحرف وشبه المنحرف المتطابق الساقين وشكل الطائرة الورقيّة.

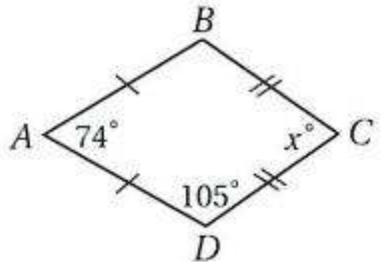
شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يسميان قاعدتي شبه المنحرف ويسمى الضلعان غير المتوازيين ساقي شبه المنحرف.

شبه المنحرف المتطابق الساقين: هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان ومتطابقان وزوايا القاعدة متطابقة.

شكل الطائرة الورقية: هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورةالمتطابقة وعلى عكس متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين ليسا متطابقين ولا متوازيين.

تدريب على الاختبار المعياري

52) **إجابة شبكيّة:** إذا كان $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة، فما قياس $\angle C$؟



من خصائص الطائرة الورقية $\angle B = \angle D$

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^\circ$$

$$74 + 105 + x + 105 = 360^\circ$$

$$x = 360 - 284$$

$$x = 76^\circ$$

53) ما الشكل الذي يمكن أن يكون مثالًا مضادًّا للتخمين الآتي؟

إذا كان قطرا شكل رباعي متطابقين فإنه مستطيل .

F المربّع

G المعين

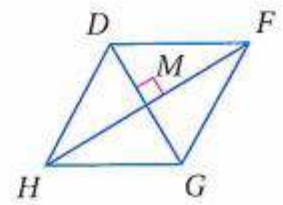
H متوازي الأضلاع

J شبه المنحرف المتطابق الساقين

J شبه المنحرف المتطابق الساقين

مراجعة تراكمية

جبر: استعن بالمعين $DFGH$ فيما يأتي: (الدرس 5-1)



(54 إذا كان $m\angle FGH = 118°$ ، فأوجد $m\angle MHG$.

من خصائص المعين أنه يوجد ضلعين متتاليين متطابقين

إذن $\overline{FG} = \overline{HG}$

إذن $\angle HFG = \angle FHG$

وبما أن $\angle FGH = 118°$ إذن الزاويتين الأخرتين في ΔHFG

$180 - (118) = 62°$ وبما أن $\angle HFG = \angle FHG$

إذن $\angle MHG = \dfrac{62}{2} = 31°$

(55 إذا كان $MG = x + 6$, $DM = 4x - 3$ ، فأوجد DG.

قطرا المعين ينصف كل منهما الأخر

$MG = MD$

$x + 6 = 4x - 3$

$4x - x = 6 + 3$

$3x = 9$

$x = 3$

$DG = MG + MD$

$DG = x + 6 + 4x - 3$

$DG = 5x + 3$

$DG = 18$

56) إذا كان $HD = 15$, $HM = 12$ ، فأوجد MG.

من خصائص المعين أن كل ضلعين متتالين متطابقين

$$HD = HG = 15$$

$$HM = 12$$

حسب نظرية فيثاغورث:

$$(HG)^2 = (MH)^2 + (MG)^2$$

$$(15)^2 = (12)^2 + (MG)^2$$

$$(HG)^2 = (15)^2 - (12)^2$$

$$(HG)^2 = 81$$

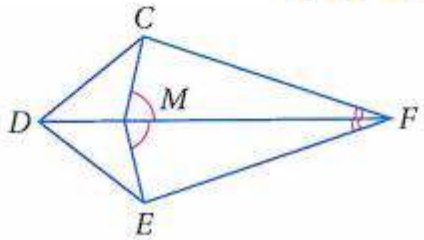
$$HG = 9$$

57) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (مهارة سابقة)

المعطيات: $\angle CMF \cong \angle EMF$ ،

$\angle CFM \cong \angle EFM$

المطلوب: $\triangle DMC \cong \triangle DME$



المعطيات: $\angle CMF \cong \angle EMF, \angle CFM \cong \angle EFM$

المطلوب: $\Delta DMC \cong \Delta DME$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\angle CMF \cong \angle EMF, \angle CFM \cong \angle EFM$ (معطيات)

2) $\overline{MF} \cong \overline{MF}$, $\overline{DM} \cong \overline{DM}$ (خاصية الانعكاس)

3) $\Delta CMF \cong \Delta EMF$ (ASA)

4) $\overline{CM} \cong \overline{EM}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) $\angle DMC, \angle CMF$ متكاملتان $\angle DME, \angle EMF$ متكاملتان. (نظرية الزوايا المتكاملة)

6) $\angle DMC \cong \angle DME$ (مكملات الزوايا المتطابقة تكون متطابقة)

7) $\Delta DMC \cong \Delta DME$ (SAS)

أوجد ميل القطعة المستقيمة المعطاة إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

$(x, 4y), (-x, 4y)$ (58

الميل: $0 = \frac{0}{2x} = \frac{4y - 4y}{x + x} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$

$(-x, 5x), (0, 6x)$ (59

الميل: $1 = \frac{-x}{-x} = \frac{5x - 6x}{-x - 0} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$

$(y, x), (y, y)$ (60

الميل: $\frac{x - y}{0} = \frac{x - y}{y - y} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$

الميل غير معرف

دليل الدراسة والمراجعة

-

اختبار المفردات:

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحةً أو خاطئةً، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) زاويتا قاعدة شبه المنحرف متطابقتان.

خطأ، شبه المنحرف متطابق الساقين

2) إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا، فإنّ قطريه متطابقان.

صحيحة

3) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف تصل بين رأسين غير متتالين فيه.

خطأ، القطر

4) قاعدة شبه المنحرف هي إحدى ضلعيه المتوازيين.

صحيحة

5) قطرا المعين متعامدان.

صحيحة

6) قطر شبه المنحرف قطعة مستقيمة تصل بين نقطتي منتصفي ساقيه.

خطأ، القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

7) المستطيل يكون دائمًا متوازي أضلاع.

صحيحة

8) الشكل الرباعي الذي فيه زوجٌ واحدٌ من الأضلاع المتوازية هو متوازي أضلاع.

خطأ، شبه المنحرف

9) المعين الذي إحدى زواياه قائمة مستطيل.

صحيحة

10) ساق شبه المنحرف هو أحد ضلعيه غير المتوازيين.

صحيحة

1-1 زوايا المضلع (ص. 17-10)

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعين المحدبين الآتيين :

11) العشاري.

$$\begin{aligned} m &= (n-2).180 \\ &= (10-2).180 \\ &= (8).180 = 1440^\circ \end{aligned}$$

12) ذو 15 ضلعًا.

$$\begin{aligned} m &= (n-2).180 \\ &= (15-2).180 \\ &= (13).180 = 2340^\circ \end{aligned}$$

13) **زخرفة :** يمثل نموذج الزخرفة المجاور شكلًا سداسيًا منتظمًا. أوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.

$$\begin{aligned} m &= (n-2).180 \\ &= (6-2).180 \\ &= (4).180 = 720^\circ \end{aligned}$$

اوجد عدد اضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي:

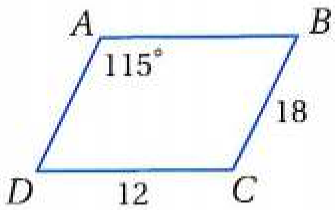
135° (14

$$135n = (n-2).180$$
$$135n = 180n - 360$$
$$135n - 180n = -360$$
$$-45n = -360$$
$$n = 8$$

168° (15

$$168n = (n-2).180$$
$$168n = 180n - 360$$
$$168n - 180n = -360$$
$$-12n = -360$$
$$n = 30$$

1-2 متوازي الأضلاع (ص. 26-19)



استعمل $\square ABCD$ المبين جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :

16) $m\angle ADC$

نظرية الزاويتان المتحالفتان

$$\angle BAD + \angle ADC = 180$$
$$115 + \angle ADC = 180$$
$$\angle ADC = 180 - 115 = 65^\circ$$

17) AD

كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقين

$$AD = BC = 18$$

18) AB

كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقين

$$AB = DC = 12$$

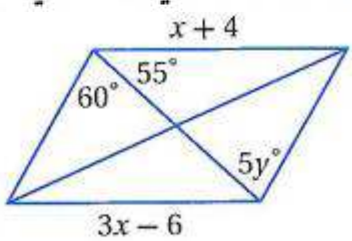
19) $m\angle BCD$

كل زاويتين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقين

$$\angle BAD = \angle BCD = 115^\circ$$

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

20)

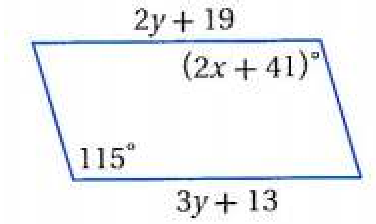


$$x + 4 = 3x - 6$$
$$3x - x = 4 + 6$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

$60 = 5y$

$y = 12$

(21



$2y + 19 = 3y + 13$

$3y - 2y = 19 - 13$

$y = 6$

$2x + 41 = 115$

$2x = 115 - 41$

$2x = 74$

$x = 37$

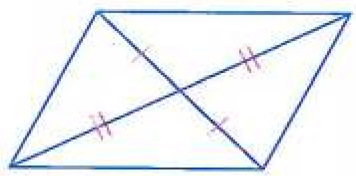
(22 **تصميم:** ما المعطيات الضرورية لتحديد ما إذا كانت الأجزاء المكونة للنمط أدناه متوازيات أضلاع؟

إذا كانت الأضلاع المتقابلة متساوية في الطول أو إذا كان زوج من الأضلاع المتقابلة متطابقاً ومتوازياً، فإن الشكل متوازي أضلاع. ويمكن أن يكون الشكل متوازي أضلاع أيضاً إذا كانت الزوايا المتقابلة متطابقة أو إذا كان القطران ينصف كل منهما الآخر.

1-3 تمييز متوازي الأضلاع

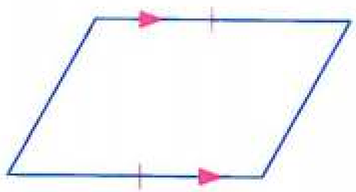
حدد ما إذا كان الشكل الرباعي في كل مما يأتي متوازي أضلاع أم لا؟ برّر إجابتك.

(23



نعم، النظرية 1.11

(24

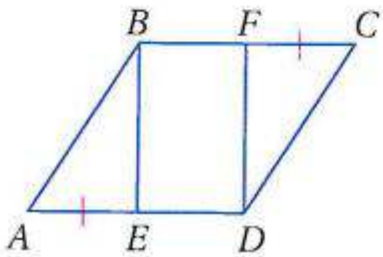


نعم، النظرية 1.12

25) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\square ABCD$ ، $\overline{AE} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $EBFD$ متوازي أضلاع.



المعطيات: $\overline{AE} \cong \overline{CF}$, $\square ABCD$

المطلوب: الشكل الرباعي **EBFD** متوازي أضلاع.

البرهان:

1) $\square ABCD$ ، $\overline{AE} \cong \overline{CF}$ (معطيات)

2) $\overline{AE} \cong \overline{CF}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

3) $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

4) $BC = AD$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

5) $\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED}$, $\overline{BC} = \overline{BF} + \overline{CF}$ (مسلمة جمع القطع
المستقيمة) $BF + AE = AE + ED$

6) $BF + CF = AE + ED$ (بالتعويض)

7) $BF + AE = AE + ED$ (بالتعويض)

8) $BF = ED$ (خاصية الطرح)

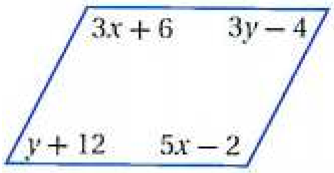
9) $\overline{BF} \cong \overline{ED}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

10) $\overline{BF} \parallel \overline{ED}$ (تعريف متوازي الأضلاع)

11) الشكل الرباعي EBFD متوازي أضلاع (إذا كان زوج من الأضلاع المتقابلة متوازياً ومتطابقاً فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع)

جبر: أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

26)



$3x + 6 = 5x - 2$

$5x - 3x = 6 + 2$

$2x = 8$

$x = 4$

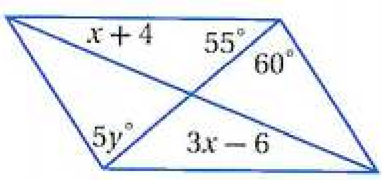
$3y - 4 = y + 12$

$3y - y = 12 + 4$

$2y = 16$

$y = 8$

(27



$$x + 4 = 3x - 6$$

$$3x - x = 4 + 6$$

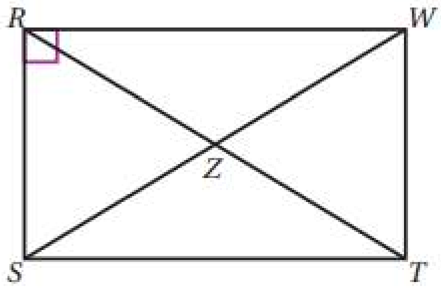
$$2x = 10$$

$$x = 5$$

$$5y = 60$$

$$y = 12$$

28) **جبر:** الشكل الرباعي $RSTW$ مستطيل، إذا كان $RZ=(2x+5)in$، $SW=(5x-20)in$ ، فأوجد x؟



من خصائص المستطيل إن قطراه متطابقان

$$RT = WS$$

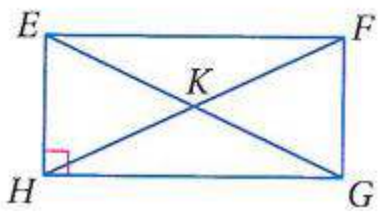
$$2(2x+5)=5x-20$$

$$4x+10=5x-20$$

$$5x-4x=10+20$$

$$x=30$$

جبر: استعن بالمستطيل $EFGH$ أدناه.



من خصائص إن جميع زواياه قوائم

29) إذا كان $m\angle FEG = 57°$، فأوجد $m\angle GEH$.

$$\angle GEH = 90-57=33^{\circ}$$

30) إذا كان $m\angle HGE = 13°$، فأوجد $m\angle FGE$.

$$\angle FGE = 90-13=77^{\circ}$$

31) إذا كان $FK = 32$ ft، فأوجد EG.

قطرا المستطيل متطابق

$$FH = FK + KH$$
$$FH = 32 + 32 = 64$$
$$FH = EG = 64ft$$

32) أوجد $m\angle HEF + m\angle EFG$.

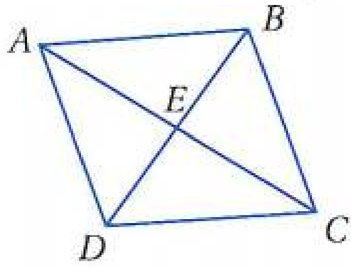
زوايا المستطيل قوائم

$$\angle HEF + \angle EFG = 90 + 90 = 180^\circ$$

1-5 المعين والمربع (ص. 49-42)

جبر: في المعين $ABCD$ ، إذا كان $EB = 9, AB = 12$ ، $m\angle ABD = 55^\circ$، فأوجد كلًا مما يأتي :

33) AE



$$(AB)^2 = (EB)^2 + (AE)^2$$
$$(12)^2 = (9)^2 + (AE)^2$$
$$(AE)^2 = (12)^2 - (9)^2$$
$$AE \approx 7.9$$

34) $m\angle BDA$

بما أن $AB = AD$ من خصائص المعين أن جميع أضلاعه متطابقة إذا:

$$\angle BDA = \angle ABD = 55^\circ$$

35) CE

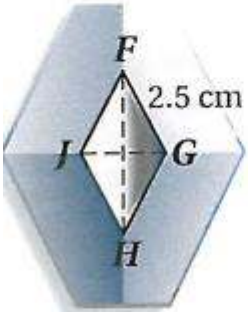
$$(BC)^2 = (EB)^2 + (EC)^2$$
$$(12)^2 = (9)^2 + (EC)^2$$
$$(EC)^2 = (12)^2 - (9)^2$$
$$AE \approx 7.9$$

36) $m\angle ACB$

بما أن $m\angle ABD = 55$ وبما أن قطرا المعين ينصف الزوايا
إذا $m\angle DBC = 55$ وحسب نظرية الزاويتان المتحالفتان:

$$m\angle BCD = 180 - (55 + 55)$$
$$m\angle BCD = 70$$
$$m\angle ACB = \frac{70}{2} = 35^\circ$$

37) **شعار:** تتخذ شركة سيارات الشكل المجاور علامة تجارية لها. إذا كان شكل العلامة التجارية معينًا، فما طول FJ؟



من خصائص المعين أن جميع أضلاعه متطابقة

$$FG = FJ = 2.5cm$$

هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضح إجابتك.

38) $Q(12, 0), R(6, -6), S(0, 0), T(6, 6)$

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$QS = \sqrt{(12-0)^2 + (0-0)^2} = 12$$

$$RT = \sqrt{(6-6)^2 + (-6-6)^2} = 12$$

بما أن القطران RT, QS متساويان إذن هما متطابقان إذن الشكل مستطيل

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{QS} = \dfrac{0-0}{12-0} = \dfrac{0}{12}$

ميل: $\overline{RT} = \dfrac{-6-6}{6-6} = \dfrac{-12}{0}$

بما أن حاصل ضرب الميلين $= -1$ فإن القطرين متعامدان لذا فأن $QRST$ معين.

إذن الشكل مستطيل ومعين ومربع؛ لأن الضلعين المتتاليين متطابقان ومتعامدان.

39) $Q(-2, 4), R(5, 6), S(12, 4), T(5, 2)$

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$QS = \sqrt{(-2-12)^2+(4-4)^2} = 14$$

$$RT = \sqrt{(5-5)^2+(6-2)^2} = 4$$

بما أن القطران RT,QS غير متساويان إذن الشكل ليس مستطيل

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{QS} = \frac{-2-12}{4-4} = \frac{-14}{0}$

ميل: $\overline{RT} = \frac{5-5}{6-2} = \frac{0}{4}$

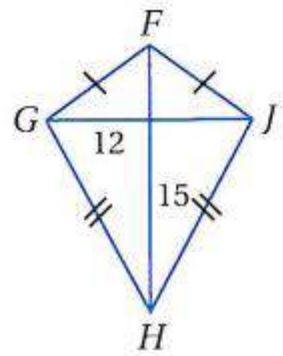
بما أن حاصل ضرب الميلين $\neq -1$ فإن القطرين ليس متعامدان لذا فأن QRST ليس معين.

إذن الشكل رباعي فقط وليس معين ولا مربع ولا مستطيل

1-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة

أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

GH (40

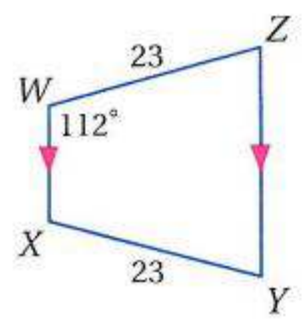


$$(GH)^2 = (15)^2 + (12)^2$$

$$(GH)^2 = 225 + 144$$

$$GH = 3\sqrt{41}$$

$m\angle Z$ (41



بما أن $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ و $WZ = XY$

إذا $\angle W = \angle X = 112$ وكذلك $\angle Z = \angle Y$

مجموع الزوايا الداخلية = 360°

$$\angle W + \angle Z + \angle Y + \angle X = 360$$

$$112 + \angle Z + \angle Z + 112 = 360$$

$$2\angle Z = 360 - (224)$$

$$2\angle Z = 136$$

$$\angle Z = 68^\circ$$

42) **تصميم:** استعن بقطعة البلاط المربعة الشكل المبينة جانبًا في السؤالين الآتيين:

a) صف طريقة لتحديد ما إذا كانت أشكال شبه المنحرف الظاهرة في البلاطة متطابقة الساقين؟

ساقا كل شبه منحرف أجزاء من قطري المربع.
وقطرا المربع ينصفان الزوايا المتقابلة، لذلك فقياس كل زاوية قاعدة لشبه المنحرف يساوي 45°.
زوج واحد من الأضلاع متواز وزاويتا كل قاعدة متطابقتان.
إذا شبه المنحرف متطابق الضلعين

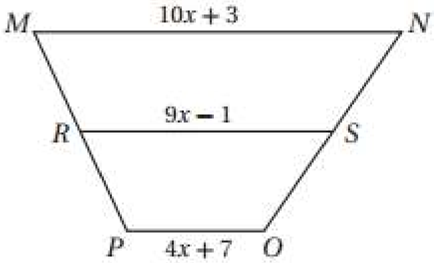
b) إذا كان محيط البلاطة 48 in، ومحيط المربّع الأحمر 16 in، فما محيط أحد أشكال شبه المنحرف ؟

طول القاعدة الكبرى = 12 in.
طول القاعدة الصغرى = 4 in.
قطر المربع الكبير = $12\sqrt{2} = \sqrt{144+144}$
قطر المربع الصغير = $4\sqrt{2} = \sqrt{16+16}$
طول أحد ساقي شبه المنحرف = $4\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = \frac{12\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{2}$
محيط شبه المنحرف = $12+4+4\sqrt{2}+4\sqrt{2} \approx 27.3\text{in.}$

الإعداد للاختبارات المعيارية

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدد المطلوب . ثم استعمل المعطيات لحلها، وبيّن خطوات حلك:

1) $\overline{RS}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $MNOP$. ما طول $\overline{RS}$ ؟



$$RS = \frac{1}{2}(MN + PO)$$

$$(9x - 1) = \frac{1}{2}(10x + 3 + 4x + 7)$$

$$(9x - 1) = \frac{1}{2}(14x + 10)$$

$$9x - 1 = 7x + 5$$

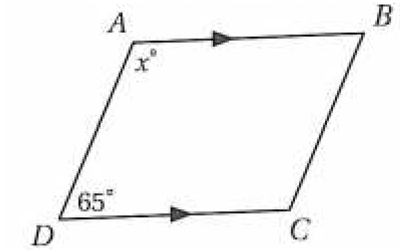
$$9x - 7x = 5 + 1$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$RS = 9x - 1 = 27 - 1 = 26$$

2) إذا كان $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ ، فأوجد قيمة الزاوية x .



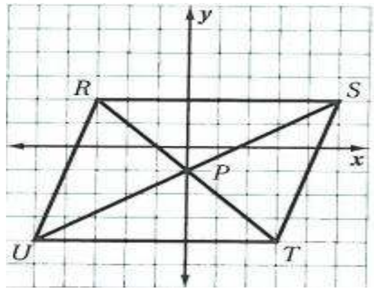
115 : J

$$x + 65 = 180$$

$$x = 180 - 65$$

$$x = 115$$

3) استعن بالتمثيل البياني أدناه في كل من السؤالين الآتيين:



a) هل ينصّف قطرا الشكل الرباعي $RSTU$ كل منهما الآخر؟ استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتتحقق من إجابتك.

$$S\left(5,2\right),P\left(0,-1\right),R\left(-3,2\right),U\left(-5,-4\right),T\left(-3,-4\right)$$

$$RP = \sqrt{\left(0+3\right)^2+\left(-1-2\right)^2} = \sqrt{18}$$

$$PT = \sqrt{\left(0+3\right)^2+\left(-1+4\right)^2} = \sqrt{18}$$

$$PS = \sqrt{\left(5-0\right)^2+\left(2+1\right)^2} = \sqrt{34}$$

$$UP = \sqrt{\left(0+5\right)^2+\left(-1+4\right)^2} = \sqrt{34}$$

بما أن $RP = 3\sqrt{2}$, $PT = 3\sqrt{2}$, $PS = \sqrt{34}$, $UP = \sqrt{34}$ ، فإن القطران ينصف كل منهما الآخر.

b) ما نوع الشكل الرباعي $RSTU$؟ وضّح إجابتك باستعمال خصائص هذا النوع من الأشكال الرباعيّة أو تعريفه.

متوازي أضلاع، إذا كان قطرا شكل رباعي ينصف كل منهما الآخر فإن الشكل متوازي أضلاع.

4) ما مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للثُّماني المنتظم؟

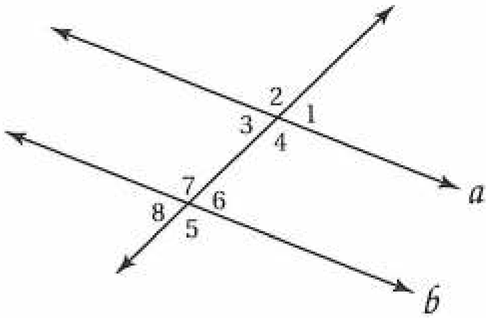
360

* اختبار معياري

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على نموذج الإجابة.

1) إذا كان $b \parallel a$ ، فأيّ العبارات الآتية ليست صحيحة؟

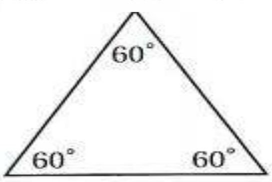


A $\angle 1 \cong \angle 3$ **C** $\angle 2 \cong \angle 5$

B $\angle 4 \cong \angle 7$ **D** $\angle 8 \cong \angle 2$

D : $\angle 8 \cong \angle 2$

2) صنّف المثلث أدناه تبعًا لقياسات زواياه. اختر المصطلح الأنسب.

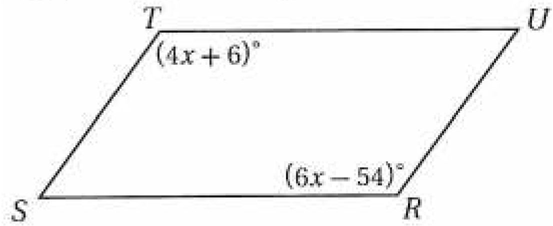


F حادّ الزوايا **H** منفرج الزاوية

G متطابق الزوايا **J** قائم الزاوية

G : متطابق الزوايا

3) أوجد قيمة x في متوازي الأضلاع $RSTU$.



A 12   C 25

B 18   D 30

30 : D

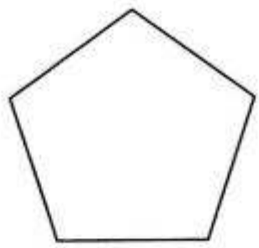
$$4x + 6 = 6x - 54$$

$$6x - 4x = 6 + 54$$

$$2x = 60$$

$$x = 30$$

4) ما قياس الزوايا الداخليّة في الخُماسي المنتظم؟



F 96° H 120°

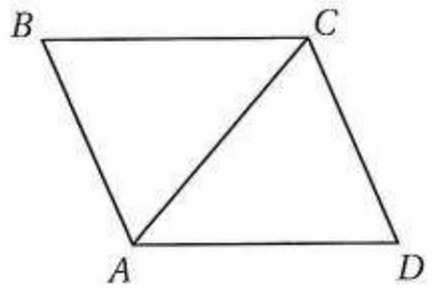
G 108° J 135°

108° : G

$$= (n-2).180 = (5-2).180 = 540^\circ$$

$$= \frac{540}{5} = 108$$

5) الشكل الرباعي $ABCD$ معينًا فيه $m\angle BCD = 120^\circ$، أوجد $m\angle DAC$.



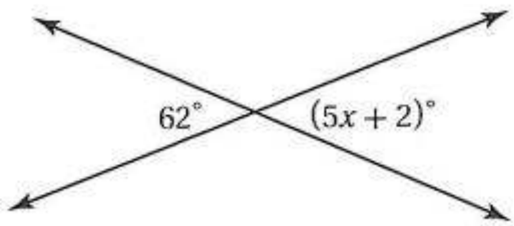
A 30° C 90°

B 60° D 120°

B : 60°

$$m\angle BCD = m\angle BAD = \frac{120}{2} = 60^\circ$$

6) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



F 10 H 14

G 12 J 15

G : 12

$5x + 2 = 62$

$5x = 62 - 2$

$5x = 60$

$x = 12$

7) $\overline{AE}$, $\overline{DT}$ قطران للمستطيل $DATE$ يتقاطعان في S.
إذا كان $AE = 40, ST = x + 5$ ، فما قيمة x؟

A 35   C 15

B 25   D 10

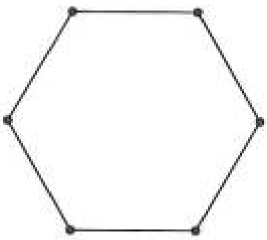
قطرا المستطيل متطابقان

$$2ST = AE$$
$$2(x+5) = 40$$
$$2x + 10 = 40$$
$$2x = 40 - 10$$
$$2x = 30$$
$$x = 15$$

أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك على نموذج الإجابة.

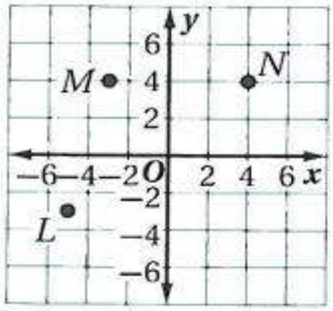
8) تشكل أعمدة خيمة رؤوس سداسي منتظم، ما قياس الزاوية المتكوّنة عند أيّ من أركان الخيمة؟



$G : 120^\circ$

$$(n-2).180 = (6-2).180 = 720^\circ$$
$$= \frac{720}{6} = 120^\circ$$

9) ما إحداثيات الرأس الرابع لشبه المنحرف المتطابق الساقين $LMNJ$؟ بيّن خطوات الحل.



$(6,-3)$

10) ماذا نسمي متوازي الأضلاع إذا كان قطراه متعامدين؟ وضّح إجابتك.

يكون مربعاً أو معيناً.

11) حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسر تبريرك.

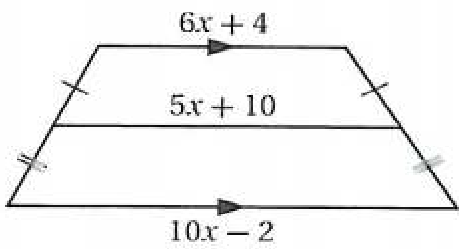
المعطيات: إذا كان العدد يقبل القسمة على 9، فإنّه يقبل القسمة على 3.

العدد 144 يقبل القسمة على 9.

النتيجة: العدد 144 يقبل القسمة على 3.

النتيجة صحيحة؛ قانون الفصل المنطقي.

12) **إجابة شبكيّة:** أوجد قيمة x في الشكل أدناه. وقرّب الإجابة إلى أقرب عُشر إن كان ذلك ضروريًا.



$$5x+10=\frac{1}{2}(10x-2+6x+4)$$

$$5x+10=\frac{1}{2}(16x+2)$$

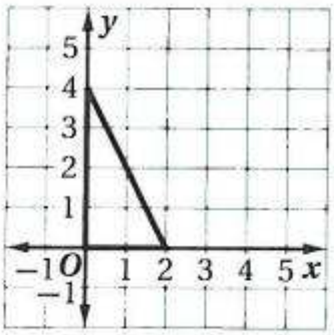
$$10x+20=16x+2$$

$$16x-10x=20-2$$

$$6x=18$$

$$x=3$$

13) ما إحداثيات مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث أدناه؟



رؤوس المثلث هي: $(0,0)(2,0)(0,4)$

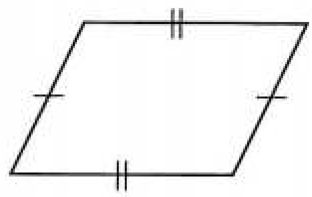
معادلة أحد الأعمدة المنصفة هي $1=\frac{2-0}{2}=y$ ومعادلة عمود منصف آخر هي $2=\frac{4-0}{2}=x$. ويتقاطع هذان العمودان عند النقطة $(5,3)$ لذلك فمركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث يقع عند النقطة $(1,2)$

أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك على نموذج الإجابة مبينًا خطوات الحل.

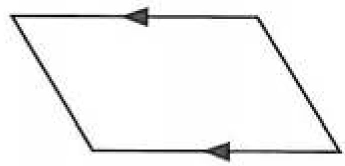
14) هل يمكنك إثبات أنّ كل شكل مما يأتي متوازي أضلاع؟ إذا لم تستطع ذلك، فاذكر المعطيات الإضافية التي ستحتاج إليها لإثبات أنه متوازي أضلاع. ووضّح تبريرك.

(a



نعم؛ الأضلاع المتقابلة متطابقة، لذا فالشكل متوازي أضلاع

(b

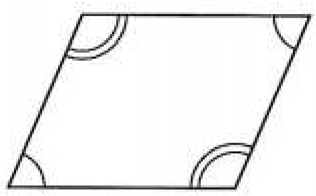


لا؛ ضلعان متقابلان فقط متوازيان. عليك أن تبين أن:

1) الضلعين المتوازيين متطابقان أيضاً

أو 2) الضلعين المتقابلين الآخرين متوازيان

(c



نعم؛ الزوايا المتقابلة متطابقة، لذا فالشكل متوازي أضلاع.

6

التشابه

التهيئة

حل كلًّا من المعادلات الآتية:

1) $\frac{3x}{8} = \frac{6}{x}$

$$\frac{3x}{8} = \frac{6}{x}$$
$$3x^2 = 48$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$
$$x = 4 \ , \ -4$$

2) $\frac{7}{3} = \frac{x-4}{6}$

$$\frac{7}{3} = \frac{x-4}{6}$$
$$3(x-4) = 7 \times 6$$
$$3x - 12 = 42$$
$$3x = 54$$
$$x = 18$$

3) $\frac{x+9}{2} = \frac{3x-1}{8}$

$$\frac{x+9}{2} = \frac{3x-1}{8}$$
$$2(3x-1) = 8(x+9)$$
$$6x - 2 = 8x + 72$$
$$-74 = 2x$$
$$x = -37$$

4) $\frac{3}{2x} = \frac{3x}{8}$

$$\frac{3}{2x} = \frac{3x}{8}$$

$$6x^2 = 24$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$x = 2 \ , \ -2$$

5) **تعليم:** نسبة عدد الطلاب إلى عدد المعلمين في مدرسة هي 17 إلى 1. إذا كان عدد طلاب المدرسة 1088 طالبًا، فما عدد المعلمين؟

عدد المعلمين x

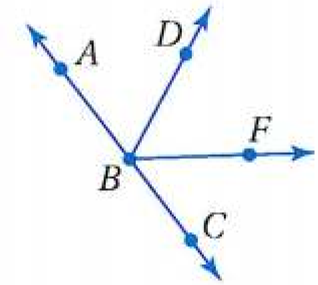
$$\frac{1088}{x} = \frac{17}{1}$$

$$17x = 1088$$

$$x = 64$$

عدد المعلمين = 64

جبر: في الشكل أدناه، $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ نصفا مستقيمين متعاكسان، و $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle ABF$.



6) إذا كان $m\angle ABD = (x+14)°$, $m\angle ABF = (3x-8)°$، فأوجد $m\angle ABD$.

$$m\angle ABF = 2m\angle ABD$$

$$3x - 8 = 2(x+14)$$

$$3x - 8 = 2x + 28$$

$$x = 36$$

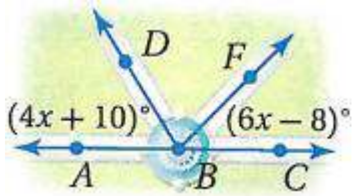
$$m\angle ABD = 36 + 14$$

$$m\angle ABD = 50°$$

7) إذا كان $m\angle ABF=(10x-1)^\circ$, $m\angle FBC=(2x+25)^\circ$ ، فأوجد $m\angle DBF$.

$$m\angle FBC + m\angle ABF = 180^\circ$$
$$(2x+25)+(10x-1)=180$$
$$12x + 24 = 180$$
$$12x = 156$$
$$x = 13$$
$$m\angle ABF = 10\times 13 - 1 = 129^\circ$$
$$m\angle DBF = \frac{1}{2} m\angle ABF$$
$$m\angle DBF = \frac{129}{2} = 64.5^\circ$$

8) **حدائق:** يخطط مهندس لإضافة ممرات تصل إلى نافورة كما هو مبيّن أدناه.
إذا كان $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ نصفي مستقيمين متعاكسين و $\overrightarrow{BD}$ ينصّف $\angle ABF$ ، فأوجد $m\angle FBC$.

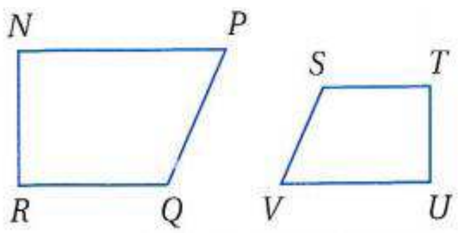


$$2m\angle DBA + m\angle FBC = 180^\circ$$
$$2(4x+10)+(6x-8)=180$$
$$8x + 20 + 6x - 8 = 180$$
$$14x + 12 = 180$$
$$14x = 168$$
$$x = 12$$
$$m\angle FBC = 6\times 12 - 8$$
$$m\angle FBC = 64^\circ$$

6-1 المضلعات المتشابهة

تحقق

1) إذا كان $UVST \sim NPQR$. فاكتب جميع أزواج الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة.

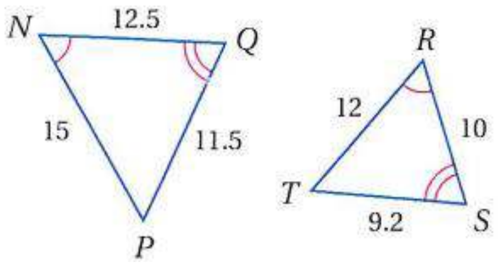


الزوايا المتطابقة:

$$\angle N \cong \angle U\ ,\angle P \cong \angle V\ ,\angle Q \cong \angle S\ ,\angle R \cong \angle T$$

التناسب: $\dfrac{NP}{UV} = \dfrac{PQ}{VS} = \dfrac{QR}{ST} = \dfrac{RN}{TU}$

2) حدّد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. ووضّح إجابتك.



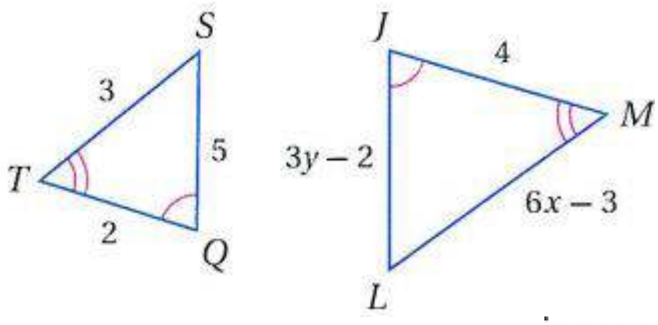
نعم؛ لأن: $\Delta NQP \sim \Delta RST$

$$\angle N \cong \angle R ,\angle Q \cong \angle S$$

$\angle P \cong \angle T$ **بحسب نظرية الزاوية الثالثة؛**

$\dfrac{PN}{TR} = \dfrac{QP}{ST} = \dfrac{NQ}{RS}$ **ومعامل التشابه** $\dfrac{5}{4}$

إذا كان $\triangle QST \sim \triangle JLM$، فأوجد قيمة المتغير في كل مما يأتي:



x (3A

í JLM □ í QST

$$\frac{JL}{QS}=\frac{LM}{ST}=\frac{JM}{QT}$$

$$\frac{3y-2}{5}=\frac{6x-3}{3}=\frac{4}{2}$$

$$2(6x-3)=12$$

$$12x-6=12$$

$$12x=18$$

$$x=1.5$$

y (3B

$$\frac{JL}{QS}=\frac{JM}{QT}$$

$$\frac{3y-2}{5}=\frac{4}{2}$$

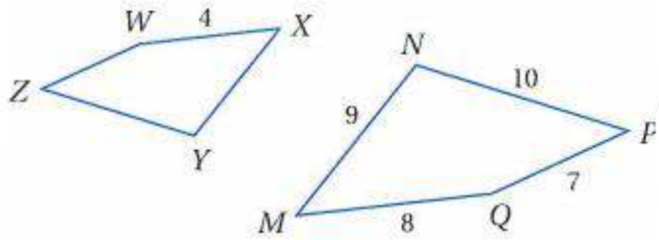
$$2(3y-2)=4\times5$$

$$6y-4=20$$

$$6y=20+4$$

$$6y=24$$

$$y=4$$



4) إذا كان $MNPQ \sim XYZW$ ، فأوجد معا
تشابه $MNPQ$ إلى $XYZW$ ، ومحيط كل
مضلع.

$$\frac{QM}{WX} = \frac{8}{4} = 2$$

معامل التشابه = 2

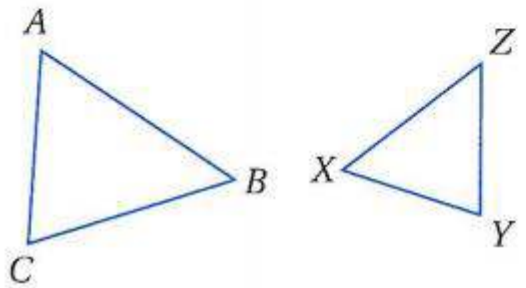
محيط MNPQ = 9 + 8 + 7 + 10 = 34

محيط XYZW يساوي = $\frac{34}{2}$ = 17

تأكد:

اكتب جميع الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط بين الأضلاع المتناظرة في كل مما يأتي:

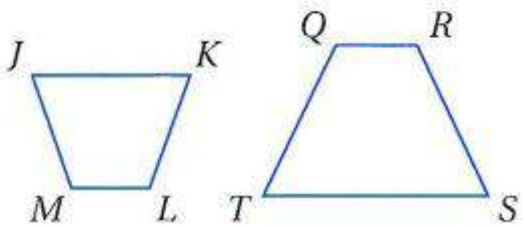
(1 $\triangle ABC \sim \triangle ZYX$



$\angle A \cong \angle Z$, $\angle B \cong \angle Y$, $\angle C \cong \angle X$

$$\frac{AC}{ZX} = \frac{BC}{YX} = \frac{AB}{ZY}$$

(2 $JKLM \sim TSRQ$

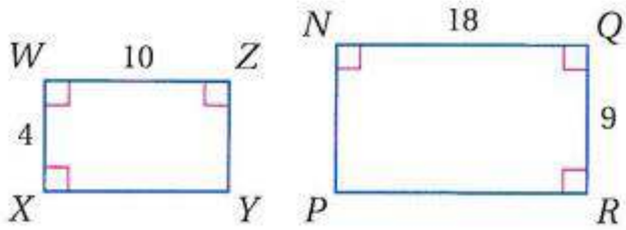


$\angle K \cong \angle S$, $\angle L \cong \angle R$, $\angle M \cong \angle Q$, $\angle J \cong \angle T$

$$\frac{JM}{TQ} = \frac{ML}{QR} = \frac{KL}{SR} = \frac{JK}{TS}$$

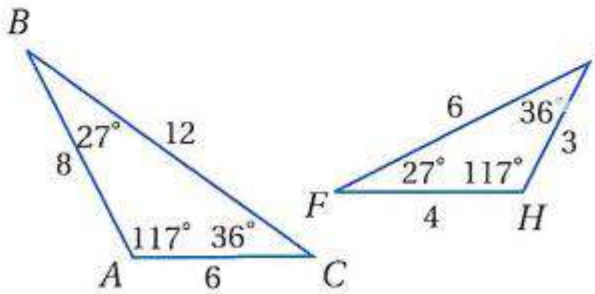
حدّد ما إذا كان المضلعان في كل من السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، وإلّا فوضح السبب.

(3



لا لأن $\frac{NQ}{WZ} \neq \frac{QR}{WX}$

(4



نعم، $\Delta ABC \sim \Delta HFJ$

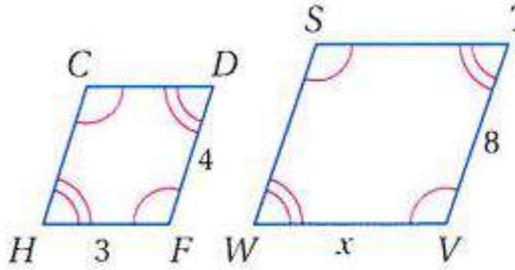
$\angle A \cong \angle H\ ,\ \angle B \cong \angle F\ ,\ \angle C \cong \angle J$

لأن $\frac{CA}{JH} = \frac{BC}{FJ} = \frac{AB}{HF} = \frac{8}{4} = 2$

ومعامل التشابه: 2

في كل مما يأتي، إذا كان المضلعان متشابهين، فأوجد قيمة x .

(5



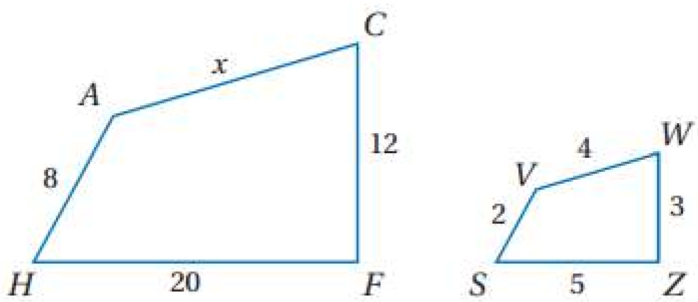
$$\frac{DF}{TV} = \frac{HF}{WV}$$ من خصائص التشابه

$$\frac{4}{8} = \frac{3}{x}$$

$$4x = 24$$

$$x = 6$$

(6



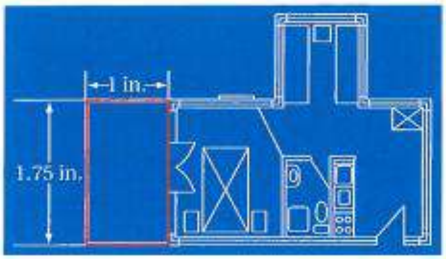
$$\frac{CF}{VW} = \frac{AH}{SZ}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{20}{5}$$

$$5x = 80$$

$$x = 16$$

7) **تصميم:** في مخطط الشقّة المجاور، عرض الشّرفة 1 in وطولها 1.75 in. إذا كان طول الشّرفة الحقيقي 15 ft، فما محيطها؟



$$\frac{x}{1} = \frac{15}{1.75}$$

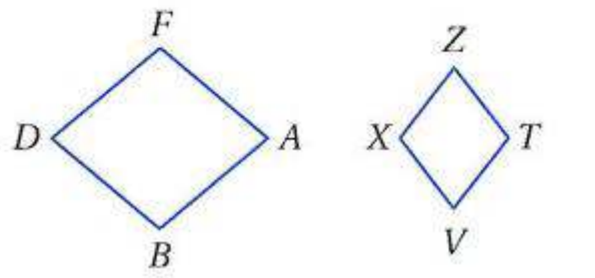
$$x = 15 \div 1.75 = 8.57$$

محيطها $= 2(8.57 + 15) = 47\text{ft}$ تقريبا

تدرب وحل المسائل:

اكتب جميع الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط الأضلاع المتناظرة للمضلعين في كل مما يأتي:

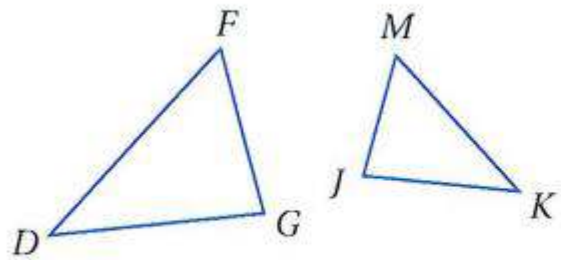
8) $ABDF \sim VXZT$



$$\frac{AB}{VX}=\frac{BD}{XZ}=\frac{DF}{ZT}=\frac{FA}{TV}$$

$\angle A \cong \angle V$, $\angle B \cong \angle X$, $\angle D \cong \angle Z$, $\angle F \cong \angle T$

9) $\triangle DFG \sim \triangle KMJ$

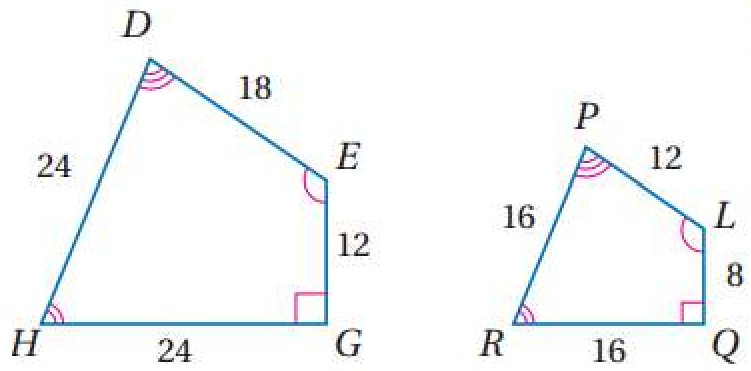


$$\frac{DF}{KM}=\frac{FG}{MJ}=\frac{GD}{JK}$$

$\angle D \cong \angle K$, $\angle F \cong \angle M$, $\angle G \cong \angle J$

حدّد ما إذا كان المضلعان في كل مما يأتي متشابهين أم لا، وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه، وإلّا فوضح السبب.

(10



نعم، HDEG □ PLQR لأن HDEG ≅ PLQR

$$\frac{LQ}{EG}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{PL}{DE}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{RQ}{HG}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$$

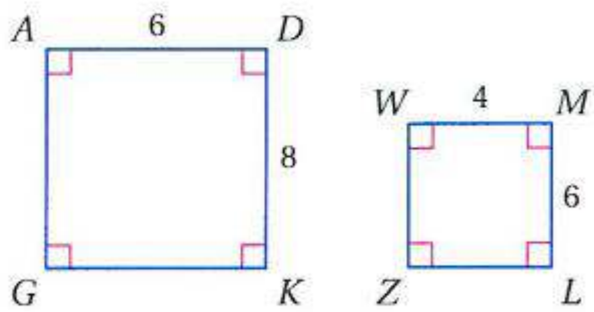
$$\frac{PR}{DH}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$$

وبما أن الزوايا متطابقة أيضا إذا:

HDEG ≅ PLQR

ومعامل التشابه: $\frac{2}{3}$

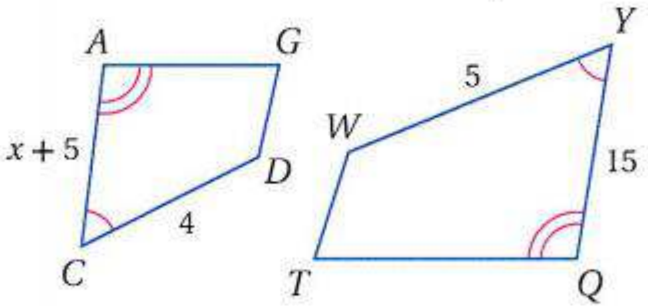
(11



لا؛ لأن $\frac{DK}{ML} \neq \frac{AD}{WM}$

في كل مما يأتي، إذا كان المضلعان متشابهين، فأوجد قيمة x .

(12



0

$$\frac{AC}{QY} = \frac{CD}{YW}$$

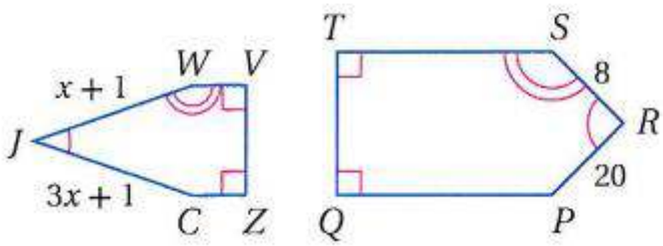
$$\frac{x + 5}{15} = \frac{4}{5}$$

$$5x + 25 = 60$$

$$5x = 35$$

$$x = 7$$

(13



$$\frac{JW}{RS} = \frac{JC}{RP}$$

$$\frac{x + 1}{8} = \frac{3x + 1}{20}$$

$$20x + 20 = 24x + 8$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

14) طول المستطيل $ABCD$ يساوي $20\,m$ ، وعرضه $8\,m$. وطول المستطيل $QRST$ المشابه له يساوي $40\,m$. أوجد معامل تشابه المستطيل $ABCD$ إلى المستطيل $QRST$ ، ومحيط كل منهما.

$\frac{AB}{QR} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ معامل التشابه = $1:2$

محيط $ABCD = 2(8+20)$

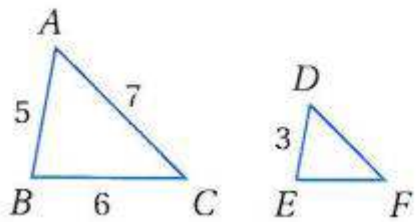
محيط $ABCD$ يساوي $56m$

محيط $QRST = 2 \times 56 = 112$

محيط $QRST$ يساوي $112m$

أوجد محيط المثلث المحدد في كلٍّ مما يأتي:

15) $\triangle DEF$ ، إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



$\frac{AB}{DE} = \frac{5}{3}$

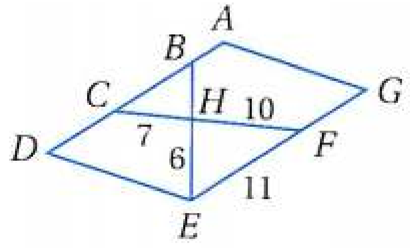
محيط ABC أ $= 5 + 6 + 7 = 18$

$\frac{18}{x} = \frac{5}{3}$

$x = \frac{3 \times 18}{5} = 10.8$

المحيط = 10.8

16) $\triangle CBH$ ، إذا كان $\triangle FEH \sim \triangle CBH$ ، $ADEG$ متوازي أضلاع.



$$\frac{CH}{FH} = \frac{7}{10}$$

محيط FEH أ $= 11 + 6 + 10 = 27$

$$\frac{x}{27} = \frac{7}{10}$$

$$x = \frac{7 \times 27}{10} = 18.9$$

المحيط $= 18.9$

17) إذا كان معامل التشابه بين مستطيلين متشابهين 1:2 ، ومحيط المستطيل الكبير 80 m ، فأوجد محيط المستطيل الصغير.

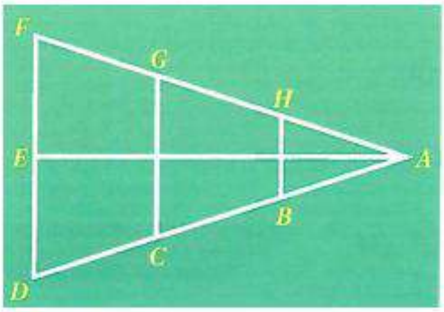
$$\frac{80}{?} = \frac{2}{1}$$

محيط المستطيل الصغير $= \frac{80}{2} = 40m$

18) إذا كان معامل التشابه بين مربّعين متشابهين 3:2، ومحيط المربع الصغير 50 ft فأوجد محيط المربع الكبير.

$$\frac{50}{?} = \frac{2}{3}$$

محيط المربع الكبير $= \frac{3 \times 50}{2} = 75m$



مثلثات متشابهة : في الشكل المجاور، ثلاثة مثلثات متشابهة فيها: $\angle AHB \cong \angle AGC \cong \angle AFD$.
أوجد الأضلاع التي تناظر الضلع المُعطى أو الزوايا التي تطابق الزاوية المُعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية.

19) $\overline{AB}$

$\overline{AD}$, $\overline{AC}$

20) $\overline{FD}$

$\overline{HB}$,$\overline{GC}$

21) $\angle ACG$

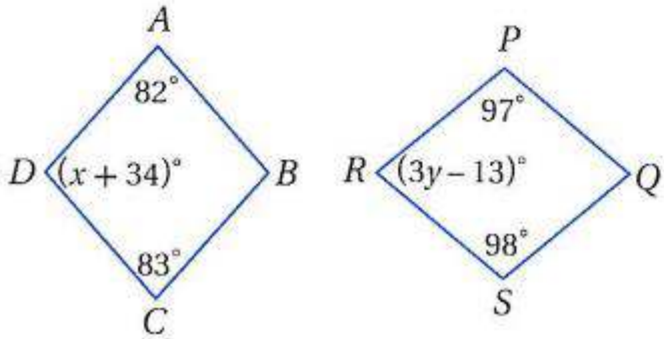
$\angle ABH$, $\angle ADF$

22) $\angle A$

$\angle A$ موجودة في المثلثات الثلاثة.

أوجد قيمة كل متغيّر فيما يأتي:

23) $ABCD \sim QSRP$



بما أن ABCD ~ QSRP

$\angle D \cong \angle P$

$x + 34 = 97$

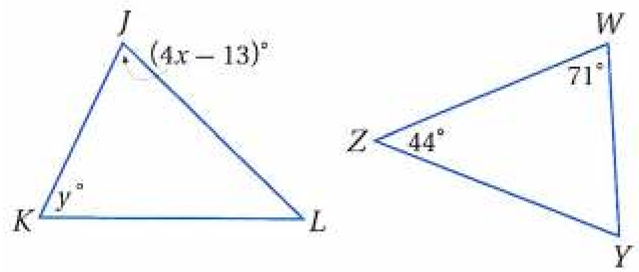
$x = 63$

بما أن ABCD ~ QSRP

$\angle R \cong \angle C$

$$3y - 13 = 83$$
$$3y = 96$$
$$y = 32$$

$\triangle JKL \sim \triangle WYZ$ (24



بما أن $\Delta JKL \sim \Delta WYZ$

$$\angle K \cong \angle Y$$
$$\angle Y = 180 - (44 + 71) = 65^{\circ}$$
$$y = 65$$
$$\angle J \cong \angle W$$
$$4x - 13 = 71$$
$$4x = 84$$
$$x = 21$$

25) **عرض الشرائح:** إذا كانت أبعاد صورة على شريحة 13 in في $9\frac{1}{4}$ in ، ومعامل تشابه صور الشريحة إلى الصور المعروضة بواسطة جهاز العرض 1:4 ؛ فما أبعاد الصورة المعروضة؟

$$9.25 \times 4 = 37\text{in}$$
$$13 \times 4 = 52\text{in}$$

هندسة إحداثية : حدد ما إذا كان المستطيلان $ABCD, WXYZ$ المعطاة إحداثيات رؤوسهما في السؤالين الآتيين متشابهين أم لا ؟ وضّح إجابتك.

(26 $A(-1, 5), B(7, 5), C(7, -1), D(-1, -1); W(-2, 10), X(14, 10), Y(14, -2), Z(-2, -2)$

$$CD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7+1)^2 + (-1+1)^2} = 8$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1-7)^2 + (5-5)^2} = 8$$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7-7)^2 + (5+1)^2} = 6$$

$$AD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1+1)^2 + (5+1)^2} = 6$$

$$YZ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(14+2)^2 + (-2+2)^2} = 16$$

$$WX = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2-14)^2 + (10-10)^2} = 16$$

$$XY = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(14-14)^2 + (10+2)^2} = 12$$

$$WZ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2+2)^2 + (10+2)^2} = 12$$

متشابهين لأن $\frac{AD}{WZ} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{YZ} = \frac{AB}{WX} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

27) $A(5, 5), B(0, 0), C(5, -5), D(10, 0); W(1, 6), X(-3, 2), Y(2, -3), Z(6, 1)$

$$CD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-10)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{50}$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{50}$$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0-5)^2 + (0+5)^2} = \sqrt{50}$$

$$AD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-10)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{50}$$

$$YZ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-6)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{32}$$

$$WX = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1+3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{32}$$

غير متشابهين لأن $\frac{AB}{WX} \neq \frac{BC}{XY}$

حدّد ما إذا كان المضلعان في كل مما يأتي متشابهين دائمًا أو أحيانًا أو غير متشابهين أبدًا ؟ وضح إجابتك.

28) مثلثان منفرجا الزاوية

أحيانا؛ إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة والأضلاع المتناظرة متناسبة، فإن المثلثين منفرجي الزاوية متشابهان.

29) شبه منحرف ومتوازي أضلاع

لا يمكن أن يتشابها: كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متوازيان. في حين أن لشبه المنحرف ضلعان فقط متوازيان لذلك فالشكلان لا يمكن أن يكونا متشابيهن أبدا، لأنهما لا يمكن أن يكونا من نوع واحد من الأشكال.

30) مثلثان قائما الزاوية

أحيانا: إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة والأضلاع المتناظرة متناسبة، فإن المثلثين قائمي الزاوية يكونان متشابهين.

31) مثلثان متطابقا الضلعين

أحيانا: إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة والأضلاع المتناظرة متناسبة فإن المثلثين متطابقي الضلعين يكونان متشابهين.

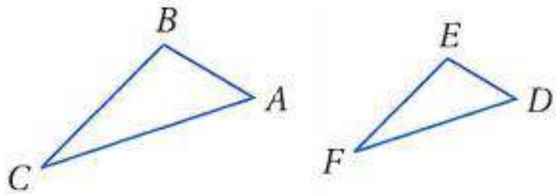
32) مثلث مختلف الأضلاع، ومثلث متطابق الضلعين

لا يمكن أن يتشابها: بما أن المثلث المتطابق الضلعين له ضلعان متطابقان والمثلث مختلف الأضلاع له ثلاثة أضلاع غير متطابقة، فإن النسب بين الأضلاع المتناظرة لا يمكن أن تكون متساوية. لذا فالمثلث المتطابق الضلعين والمثلث المختلف الأضلاع لا يمكن أن يتشابها.

33) مثلثان متطابقا الأضلاع

دائما: المثلث متطابق الأضلاع قياس كل زاوية فيه 60، لذلك فزوايا أي مثلث متطابق الأضلاع مطابقة لزوايا أي مثلث آخر متطابق الأضلاع وبما أن أضلاع المثلث متطابق الأضلاع تكون متطابقة دائما، فإن النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة تكون متساوية دائما. لذا فإن، أي مثلثين متطابقي الأضلاع يكونان دائما متشابهين.

34) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 2.1 (في حالة المثلثات)



المعطيات: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ، $\frac{AB}{DE} = \frac{m}{n}$

المطلوب: إثبات أن $\frac{m}{n} = \frac{\triangle ABC \text{ محيط}}{\triangle DEF \text{ محيط}}$

المعطيات: $\Delta ABC \sim \Delta DEF \;,\; \frac{AB}{DE} = \frac{m}{n}$

المطلوب: $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{m}{n}$

البرهان: بما أن $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

فإن $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

إذن $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{m}{n}$ **وبالضرب التبادلي يكون**

$$AB = DE\left(\frac{m}{n}\right) @ BC = EF\left(\frac{m}{n}\right) @ AC = DF\left(\frac{m}{n}\right)$$

وبالتعويض يكون المحيط ΔABC

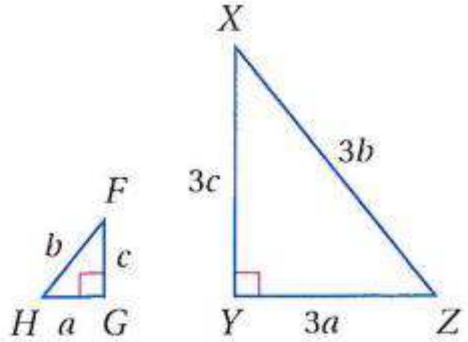
$$= DF\left(\frac{m}{n}\right) + EF\left(\frac{m}{n}\right) + DE\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)(DE + EF + DF) = \Delta ABC$$ محيط

إذن فالنسبة بين المحيطين = $\frac{\left(\frac{m}{n}\right)(DE + EF + DF)}{(DE + EF + DF)} = \left(\frac{m}{n}\right)$

35) **تغيير الأبعاد:** في الشكل المجاور، $\triangle FGH \sim \triangle XYZ$

a) بيِّن أن النسبة بين محيطي المثلثين هي النسبة نفسها بين أضلاعهما المتناظرة.



بما أن $\Delta FGH \sim \Delta XYZ$

$$\frac{FG}{XY} = \frac{GH}{YZ} = \frac{FH}{XZ}$$

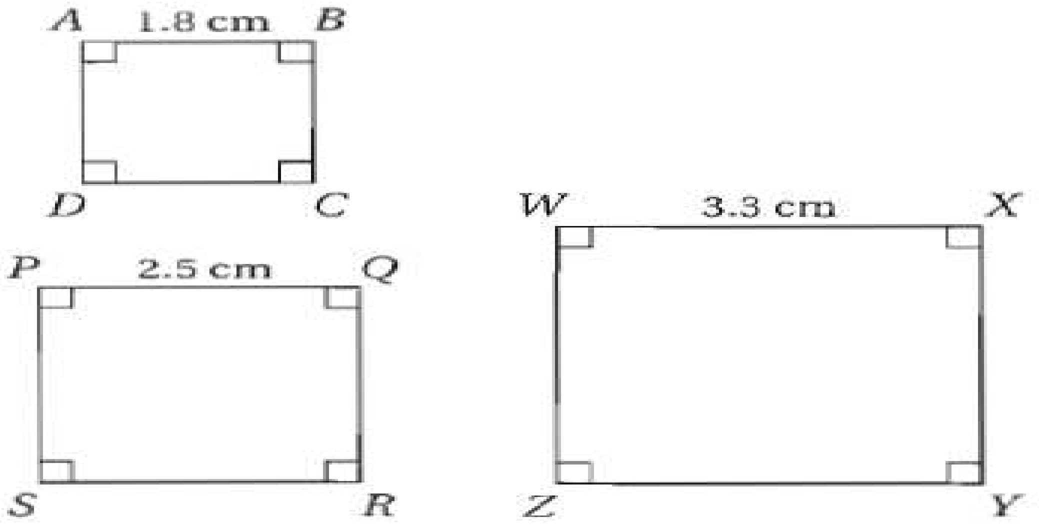
$$\frac{a}{3a} = \frac{b}{3b} = \frac{c}{3c} = \frac{a+b+c}{3(a+b+c)} = \frac{1}{3}$$

b) إذا أضيف لطول كل ضلع 6 وحدات. فهل المثلثان الجديدان متشابهان؟

لا لم تعد الأضلاع متناسبة.

(36 **تمثيلات متعدّدة:** سوف تكتشف في هذه المسألة تشابه المربّعات.

a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة مربّعات مختلفة الأبعاد، وسمها $ABCD, PQRS, WXYZ$.
وقس طول ضلع كل مربّع وسّجل الأطوال على المربعات.



b) **جدوليًا:** احسب النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة لكل زوج مربعات فيما يأتي
ودوّنها في جدول: $ABCD, PQRS; PQRS, WXYZ; WXYZ, ABCD$.
هل كل مربعين من المربعات متشابهان؟

$WXYZ, ABCD$		$PQRS, WXYZ$		$ABCD, PQRS$	
1.8	$WX:AB$	0.76	$PQ:WX$	0.72	$AB:PQ$
1.8	$XY:BC$	0.76	$QR:XY$	0.72	$BC:QR$
1.8	$YZ:CD$	0.76	$RS:YZ$	0.72	$CD:RS$
1.8	$ZW:DA$	0.76	$SP:ZW$	0.72	$AD:PS$

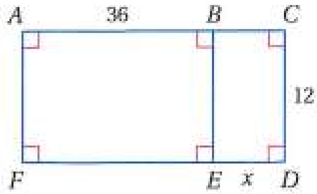
ABCD يشابه PQRS، PQRS يشابه WXYZ، WXYZ يشابه ABCD.

c) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول تشابه جميع المربّعات.

C) جميع المربعات متشابهة.

مسائل مهارات التفكير العليا:

37) **تحدٍّ:** ما قيمة (قيم) x التي تجعل $BEFA \sim EDCB$ ؟



بما أن $BEFA \sim EDCB$

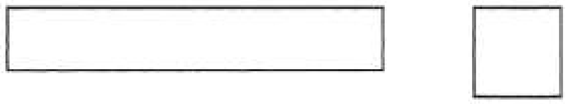
$$\frac{ED}{BE} = \frac{EB}{BA}$$

$$\frac{x}{12} = \frac{12}{36}$$

$$x = \frac{12 \times 12}{36} = 4$$

قيمة $x = 4$

38) **إجابة مفتوحة:** أوجد مثالًا مضادًا للعبارة الآتية: "جميع المستطيلات متشابهة"



39) **برهان:** إذا كان المستطيل $BCEG$ فيه: $BC : CE = 2:3$ ، وكان المستطيل $LJAW$ فيه: $LJ : JA = 2:3$ فأثبت أن: $BCEG \sim LJAW$

بما أن $BC : CE = 2 : 3$ إذا $GE : BG = 2 : 3$ لأن كل ضلعين متقابلين في المستطيل متطابقين

بما أن $LJ : JA = 2 : 3$ إذا $WA : LW = 2 : 3$ لأن كل ضلعين متقابلين في المستطيل متطابقين

$BC = LJ = 2$

$GE = WA = 2$

$LW = BG = 3$

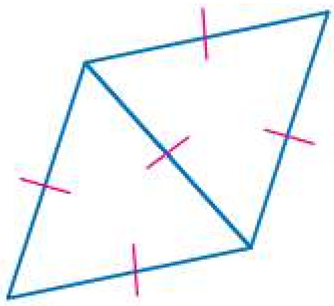
$CE = JA = 3$

إذا كل ضلعين متناظرين متطابقين

ومن خصائص المستطيل أن جميع زواياه قوائم إذا كل الزوايا المتناظرة متطابقة

إذا BCEG □ LJAW

40) **تبرير:** يمكن دمج مثلثين متساوِيَي الأضلاع متطابقين؛ لتكوينِ شكل رباعي كما في الشكل المجاور. إذا كوّنت شكلًا رباعيًّا آخر من مثلثين متساوِيَي الأضلاع متطابقين آخرين، فأيُّ العبارات التالية صحيحة حول الشكل المجاور، والشكل الذي كوّنته: يجب أن يكونا متشابهين، المجاور قد يكونا متشابهين، أو غير متشابهين. فسّر إجابتك.

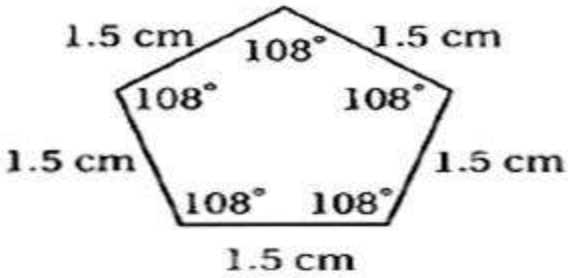


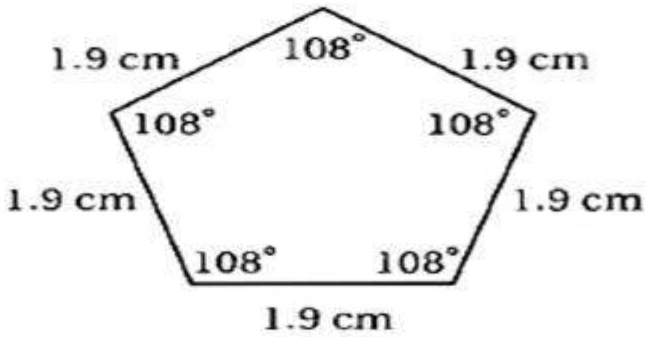
يجب أن يكونا متشابهين لأن جميع الأضلاع المتناظرة متطابقة

41) **تبرير:** ارسم مضلعين خماسيين منتظمين أطوال أضلاعهما مختلفة. هل المضلعان متشابهان؟

وهل كل مضلعين منتظمين ومتساويي عدد الأضلاع متشابهان؟ وضح إجابتك.

نعم؛ المضلعان الخماسيان المنتظمان متشابهان لأن زواياهما المتناظرة متطابقة وأضلاعهما المتناظرة متناسبة. وبما أن جميع زوايا المضلع المنتظم متطابقة وجميع أضلاعه متطابقة أيضا. فإن زوايا المضلعين المنتظمين تكون متطابقة بغض النظر عن أبعاد أي شكل. وبما أن جميع أضلاع المضلع المنتظم متطابقة، فإن النسب بين الأضلاع المتناظرة في المضلعين المنتظمين اللذين لهما العدد نفسه من الأضلاع ستكون متساوية. لذا فإن جميع المضلعات المنتظمة والتي لها العدد نفسه من الأضلاع تكون متشابهة.





(42 **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المضلعات المتطابقة والمضلعات المتشابهة.

يكون المضلعان متطابقين إذا كان لهما الأبعاد نفسها والشكل نفسه. وفي المضلعين المتطابقين تكون الزوايا المتناظرة متطابقة والأضلاع المتناظرة متطابقة وعندما يكون المضلعان متشابهين فإن زواياهما المتناظرة متطابقة وأضلاعهما المتناظرة متناسبة. والمضلعات المتطابقة تكون متشابهة أيضا لأن الزوايا المتناظرة تكون متناسبة. ولا يكون المضلعان المتشابهان متطابقين إلا إذا كانت النسبة بين أطوال أضلاعهما المتناظرة تساوي 1.

تدريب على الاختبار المعياري

(43 إذا كان: $PQRS \cong JKLM$ ومعامل تشابه $PQRS$ إلى $JKLM$ يساوي 4:3 وكان $QR = 8\,\text{cm}$ فما طول KL؟

A $24\,\text{cm}$　　**C** $8\,\text{cm}$

B $10\frac{2}{3}\,\text{cm}$　　**D** $6\,\text{cm}$

$$\frac{3}{4}=\frac{QR}{KL}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{8}{KL}$$

$$KL=\frac{8\times 4}{3}=10\frac{2}{3}$$

44) مستطيلان متشابهان. إذا كان معامل التشابه بينهما 3:5، ومحيط المستطيل الكبير 65 m ، فما محيط المستطيل الصغير؟

39 : B

$$\frac{x}{65}=\frac{3}{5}$$

$$x=\frac{3\times 65}{5}=39$$

مراجعة تراكمية

حل كل تناسب مما يأتي: (مهارة سابقة)

44) $\frac{c-2}{c+3}=\frac{5}{4}$

$$\frac{c-2}{c+3}=\frac{5}{4}$$

$$5c+15=4c-8$$

$$5c-4c=-8-15$$

$$c=-23$$

45) $\frac{2}{4y+5}=\frac{-4}{y}$

$$\frac{2}{4y+5}=\frac{-4}{y}$$

$$-16y - 20 = 2y$$
$$-16y - 2y = 20$$
$$18y = -20$$
$$y = \frac{20}{18} = -\frac{10}{9}$$

46) $\frac{2x+3}{x-1} = \frac{-4}{5}$

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{-4}{5}$$
$$10x + 15 = -4x + 4$$
$$14x = -11$$
$$x = -\frac{11}{14}$$

47) **هندسة إحداثية** أوجد إحداثيات نقطة تقاطع قطري $\square JKLM$ الذي رؤوسه $J(2, 5), K(6, 6), L(4, 0), M(0, -1)$. (الدرس 1-2)

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{KM}$, $\overline{JL}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{JL}$ التي طرفاها $(2,5),(4,0)$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \frac{2+4}{2}, \frac{5+0}{2}$$ **(صيغة نقطة المنتصف)**

$$(3,2.5)$$ **(بالتبسيط)**

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري JKLM هما $(3,2.5)$

اكتب الفرض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي: (مهارة سابقة)

48) إذا كان $3x > 12$ ، فإن $x > 4$.

$$x \leq 4$$

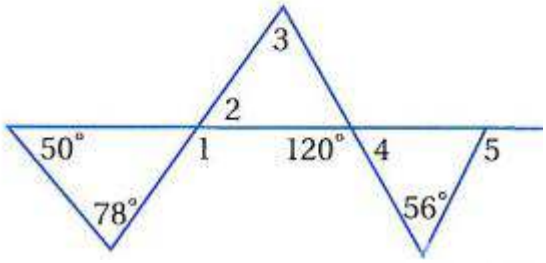
$\overline{PQ} \cong \overline{ST}$ (49

$\overline{PQ} \ncong \overline{ST}$

50) منصّف زاوية الرأس لمثلث متطابق الضلعين هو أيضًا ارتفاع للمثلث.

منصف زاوية الرأس لمثلث متطابق الضلعين ليس ارتفاعا للمثلث.

في الشكل المجاور، أوجد قياس كل من الزوايا الآتية. (مهارة سابقة)



$m\angle 1$ (51

نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

$\angle 1 = 78 + 50$

$\angle 1 = 128^{\circ}$

$m\angle 2$ (52

$\angle 2 = 180 - (78 + 50)$

$\angle 2 = 52^{\circ}$ بالتقابل بالرأس

$m\angle 3$ (53

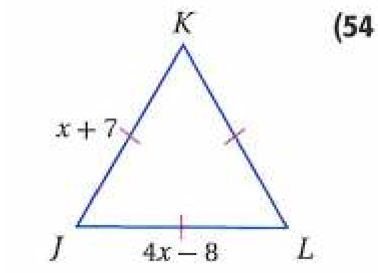
$\angle 3 = 180 - (52 + 60)$

$\angle 3 = 68^{\circ}$

استعد للدرس اللاحق

جبر أوجد قيمة x وطول كل ضلع في كلٍّ من المثلثين الآتيين:

(54



$JL = JK$

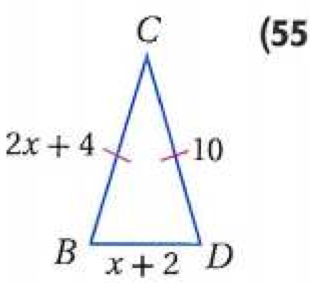
$4x - 8 = x + 7$

$3x = 15$

$x = 5$

$JK = JL = LK = 12$

(55



$CB = CD$

$2x + 4 = 10$

$2x = 6$

$x = 3$

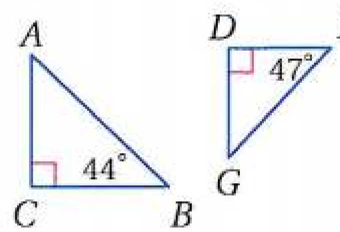
$CB = CD = 10$

$BD = 3 + 2 = 5$

6-2 المثلثات المتشابهة

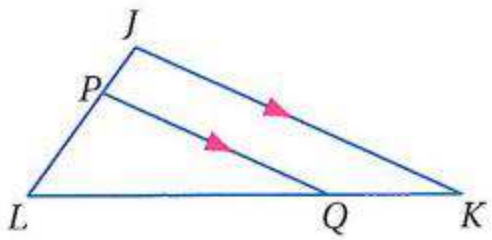
تحقق

(1A



لا، لا يوجد زاويتان في أحد المثلثين مطابقتان لزاويتين في المثلث الآخر.

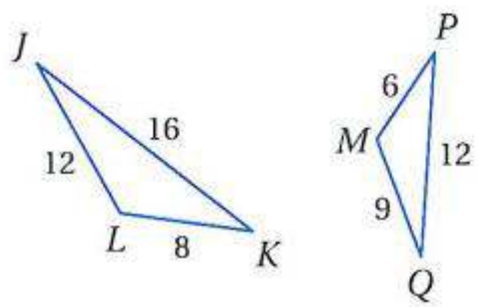
(1B



نعم؛ $\angle LPQ \cong \angle LJK$ ، $\angle L \cong \angle L$ إذن

$\Delta QLP \sim \Delta KLJ$

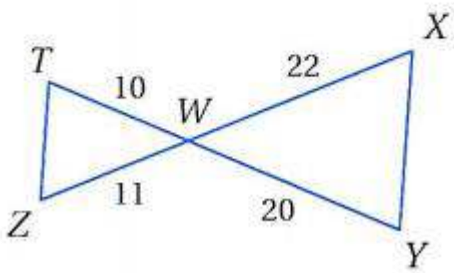
(2A



نعم؛ $\Delta QMP \sim \Delta JLK$ وفق نظرية التشابه SSS حيث أن

$$\frac{JL}{QM} = \frac{LK}{MP} = \frac{JK}{QB} = \frac{4}{3}$$

(2B



نعم؛ $\Delta TWZ \sim \Delta YWX$ وفق نظرية التشابه SAS حيث أن

$$\frac{TW}{YW} = \frac{WZ}{WX} = \frac{1}{2} \;,\; \angle W \cong \angle W$$

3) في المثال السابق، ماقيمة y ؟

A 5.2 **B** 8.4 **C** 9.2 **D** 20.7

$$\frac{MN}{MO} = \frac{NQ}{OP}$$

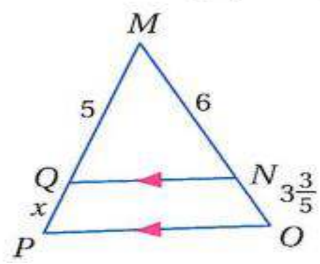
$$\frac{9}{12} = \frac{6.9}{y}$$

$$9y = 6.9 \times 12$$

$$y = 9.2$$

أوجد كل طول فيما يأتي.

(4A QP, MP



بما أن $QN \parallel PO$ إذن $\angle MQN \cong \angle QPO \;,\; \angle MNQ \cong \angle NOP$

إذن $\Delta QMN \sim \Delta PMO$ حسب مسلمة AA

$$\frac{MQ}{MP} = \frac{MN}{MO}$$

$$\frac{5}{5+x} = \frac{6}{6+3.6}$$

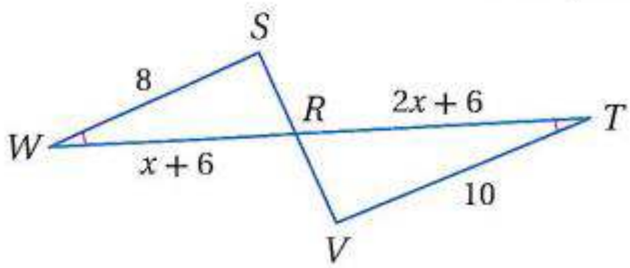
$$30 + 6x = 30 + 18$$

$$6x = 18$$

$$x = 3$$

$$QP = 3 \quad , MP = 8$$

4B) WR, RT



بما أن $\angle SRW \cong \angle VRT$, $\angle SWR \cong \angle RTV$

إذن RVT أ □ RSW أ حسب مسلمة AA

$$\frac{RW}{RT} = \frac{SW}{VT}$$

$$\frac{x+6}{2x+6} = \frac{8}{10}$$

$$16x + 48 = 10x + 60$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

$$WR = 8 \quad , RT = 10$$

5) **بنايات:** يقف منصور بجوار بناية، وعندما كان طول ظلّه 9 ft، كان طول ظل البناية 322.5 ft .
إذا كان طول منصور 6 ft، فكم قدمًا ارتفاع البناية؟

$$\frac{9}{322.5} = \frac{6}{x}$$

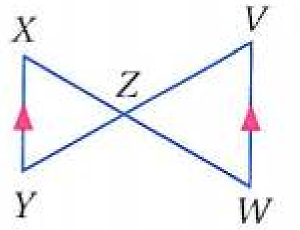
$$x = \frac{6 \times 322.5}{9} = 215$$

ارتفاع البناية = 215 ft

تأكد:

حدّد في كل مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك فاكتب عبارة التشابه، ووضّح إجابتك.

(1

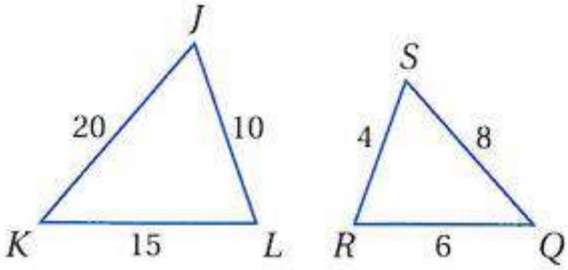


$\angle X \cong \angle W$

$\angle Y \cong \angle V$

نعم؛ $\Delta VWZ \sim \Delta YXZ$ وفق مسلمة التشابه AA.

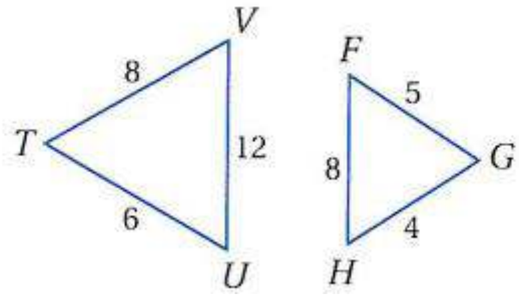
(2



$$\frac{JL}{SR} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \;@\; \frac{LK}{RQ} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \;@\; \frac{JK}{SQ} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

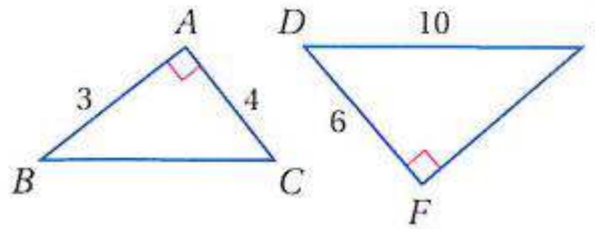
نعم؛ $\Delta SRQ \sim \Delta JLK$ وفق نظرية التشابه SSS.

(3



لا؛ الأضلاع المتناظرة ليست متناسبة.

(4



$$\angle A \cong \angle F$$

$$FE = \sqrt{(DE)^2 - (DF)^2}$$

$$FE = \sqrt{100 - 36} = 8$$

$$\frac{BA}{DF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{AC}{FE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{AC}{FE} = \frac{BA}{DF} = \frac{1}{2}$$

نعم؛ $\Delta DFE \sim \Delta BAC$ وفق نظرية التشابه SAS.

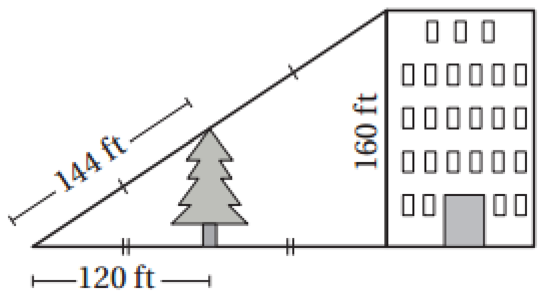
(5 **اختيار من متعدّد:** استعمل الشكل أدناه في إيجاد ارتفاع الشجرة؟

A 264 ft

B 60 ft

C 72 ft

D 80 ft



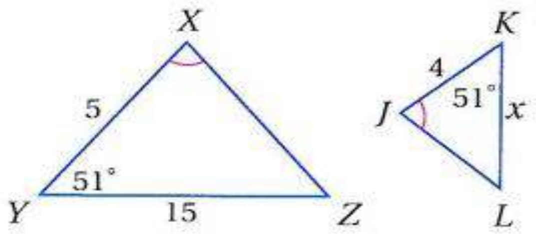
$$\frac{120}{120+120}=\frac{?}{160}$$

$$\frac{120}{240}=\frac{?}{160}$$

$$? = \frac{160\times120}{240}=80\text{ft}$$

جبر: أوجد الطول المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

6) KL



$$\angle X \cong \angle J$$

$$\angle Y \cong \angle K$$

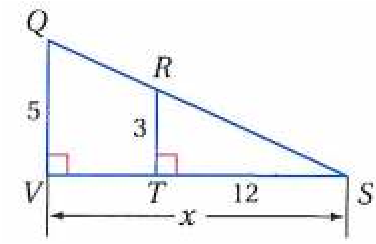
$\Delta XYZ \sim \Delta JKL$ وفق مسلمة التشابه AA

$$\frac{XY}{JK}=\frac{YZ}{KL}$$

$$\frac{5}{4}=\frac{15}{KL}$$

$$KL=\frac{4\times15}{5}=12$$

7) VS



$$\angle QSV \cong \angle RST$$

$$\angle QVS \cong \angle RTS$$

$\Delta QVS \sim \Delta RTS$ وفق مسلمة التشابه AA

$$\frac{VS}{TS}=\frac{QV}{RT}$$

$$\frac{VS}{12}=\frac{5}{3}$$

$$VS=\frac{12\times 5}{3}=20$$

8) **اتّصالات:** طول ظلّ برج اتصالات في لحظة معينة 100 ft . وبجواره لوحة تحذيرية مثبتة على عمود طول ظله في اللحظة ذاتها 3 ft و 4 in . إذا كان ارتفاع عمود 4 ft و 6 in ، فما ارتفاع البرج؟

$$ft=12in$$

$$\frac{100}{(3\times 12+4)}=\frac{x}{(4\times 12+6)}$$

$$\frac{100}{40}=\frac{x}{54}$$

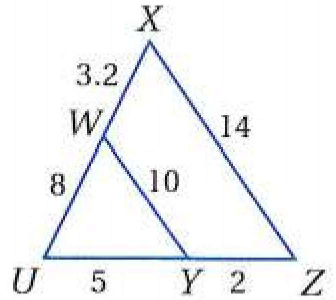
$$x=\frac{100\times 54}{40}=135$$

ارتفاع البرج = 135ft

تدرب وحل المسائل:

حدّد في كل مما يأتي ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا؟ وإذا كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه، وإلّا فحدّد المعلومات الإضافية الكافية لإثبات أنهما متشابهان؟ ووضّح إجابتك.

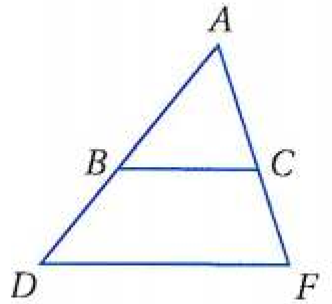
(9



$$\frac{XU}{WU}=\frac{11.2}{8}=1.4 \;@\; \frac{UZ}{UY}=\frac{7}{5}=1.4 \;@\; \frac{XZ}{WY}=\frac{14}{10}=1.4$$

نعم؛ $\Delta WUY \sim \Delta XUZ$ وفق نظرية التشابه SSS.

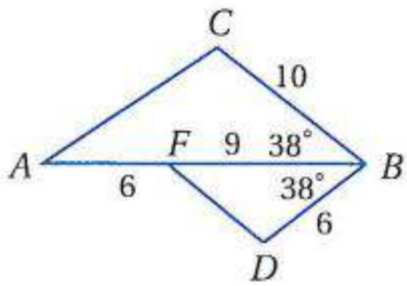
(10



لا؛ يجب أن تكون DF ، BC متوازيان حتى يكون:

BAC أ ∼ أ DAF حسب مسلمة التشابه AA.

(11



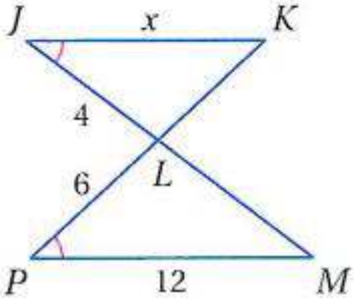
$$\angle CBA \cong \angle DBF$$

$$\frac{CB}{DB}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3} \;@\; \frac{BA}{BF}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$$

نعم؛ DBF أ ∼ أ CBA أوفق نظرية التشابه SAS.

جبر: عيِّن المثلثين المتشابهين. ثمّ أوجد الطول المطلوب في كل مما يأتي:

(12 JK



$\angle PLM \cong \angle JLK \,,\, \angle J \cong \angle P$

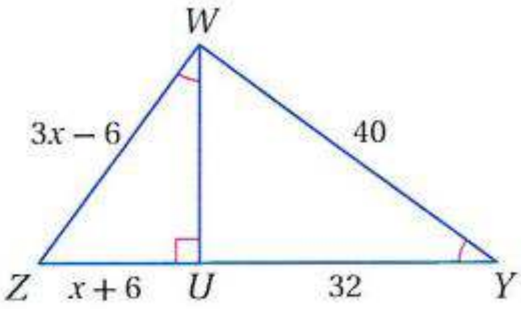
$\Delta JLK \sim \Delta PLM$ حسب مسلمة التشابه AA

$$\frac{JK}{PM} = \frac{JL}{PL}$$

$$\frac{JK}{12} = \frac{4}{6}$$

$$JK = \frac{4 \times 12}{6} = 8$$

(13 WZ, UZ



$\angle WUZ \cong \angle YUW$

$\angle ZWU \cong \angle WYU$

أ WUZ $\sim$ أ YUW حسب مسلمة التشابه AA

$$WU = \sqrt{(WY)^2 - (YU)^2}$$

$$WU = \sqrt{(40)^2 - (32)^2}$$

$$WU = 24$$

$$\frac{WZ}{YW} = \frac{WU}{YU}$$

$$\frac{3x-6}{40}=\frac{24}{32}$$

$$96x-192=960$$

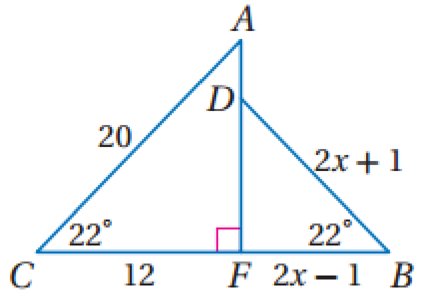
$$96x=1152$$

$$x=12$$

$$WZ=3\times 12-6=30$$

$$UZ=12+6=18$$

DB, CB (14



$$\angle DFB \cong \angle AFC$$

$$\angle DBF \cong \angle ACF$$

$\Delta AFC \sim \Delta DFB$ حسب مسلمة AA

$$\frac{DB}{AC}=\frac{FB}{FC}$$

$$\frac{2x+1}{20}=\frac{2x-1}{12}$$

$$40x-20=24x+12$$

$$16x=32$$

$$x=2$$

$$DB=2\times 2+1=5$$

$$CB=12+2\times 2-1=15$$

15) **رياضة :** يقف أيمن بجوار مرمى كرة السلّة. إذا كان طول أيمن 5 ft و 11 in وطول ظلّه 2 ft وكان طول ظل مرمى كرة السلّة 4 ft و 4 in فما ارتفاع المرمى تقريبًا؟

طول أيمن $= 5 \times 12 + 11 = 71$ in

طول ظله $= 2 \times 12 = 24$ in

طول ظل المرمى $= 4 \times 12 + 4 = 52$ in

ارتفاع المرمى x

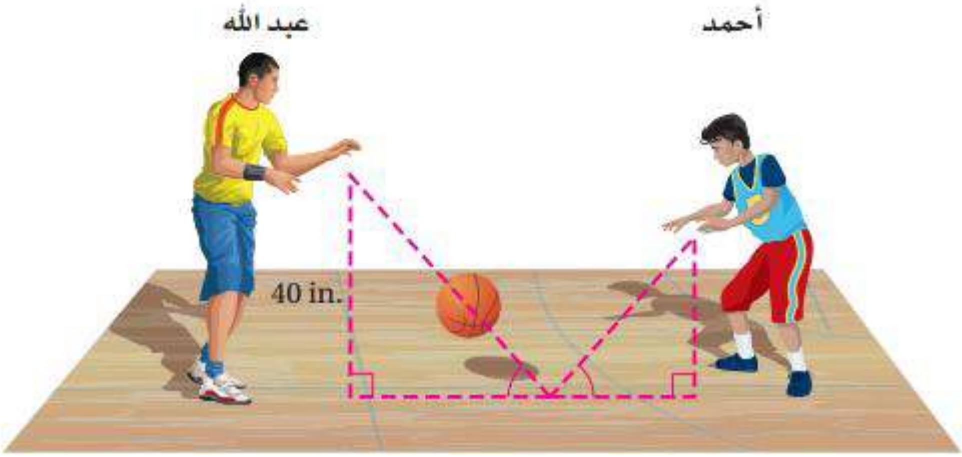
$$\frac{24}{52} = \frac{71}{x}$$

$$x = \frac{71 \times 52}{24} = 153.833 \text{ in}$$

$$x = \frac{153.833}{12} = 12.8 \text{ ft}$$

ارتفاع المرمى = 12.8 ft

16) **رياضة** رمى عبد الله الكرة لترتد نحو أحمد، فارتطمت بسطح الأرض على بُعد $\frac{2}{3}$ المسافة بينهما، وكانت الزاويتان الناتجتان عن مسار الكرة وسطح الأرض متطابقتين. إذا رمى عبدالله الكرة من ارتفاع 40 in عن سطح الأرض، فعلى أيّ ارتفاع سيلتقطها أحمد؟



$$\frac{2}{3} = \frac{x}{40}$$

$$x = \frac{40 \times 2}{3} = 26.66$$

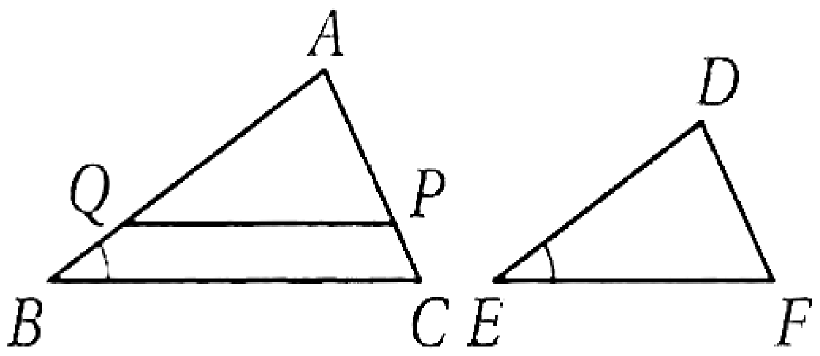
على ارتفاع 26.66in

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي:

17) النظريّة 2.3

المعطيات: $\angle B \cong \angle E$ ، $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$

المطلوب: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



البرهان: العبارات المبررات

١) $\angle B \cong \angle E$ ، $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ معطيات

٢) $\overline{QP} \cong \overline{EF}$, $\overline{QP} \parallel \overline{BC}$ بالرسم.

٣) $\angle AQP \cong \angle B$, $\angle APQ \cong \angle C$ مسلمة الزوايا المتناظرة.

٤) $\angle AQP \cong \angle E$ خاصية التعدي.

٥) $\Delta ABC \sim \Delta AQP$ مسلمة التشابه AA.

٦) $\dfrac{AB}{AQ} = \dfrac{BC}{QP}$ تعريف المثلثات المتشابهة.

٧) $AB \cdot QP = AQ \cdot BC$ الضرب التبادلي.

$AB \cdot EF = DE \cdot BC$

٨) $QP = EF$ تعريف تطابق القطع المستقيمة.

٩) $AB \cdot EF = AQ \cdot BC$ بالتعويض.

$AQ \cdot BC = DE \cdot BC$ بالتعويض.

١٠) $AQ = DE$ خاصية القسمة.

١١) $\overline{AQ} \cong \overline{DE}$ تعريف تطابق القطع المستقيمة.

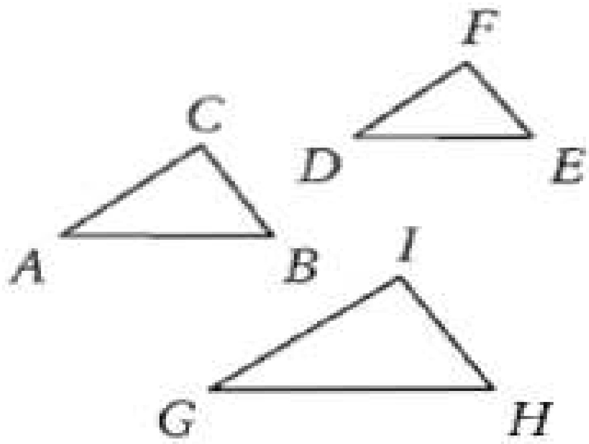
١٢) $\Delta AQP \cong \Delta DEF$

١٣) $\angle APQ \cong \angle F$

١٤) $\angle C \cong \angle F$ خاصية التعدي.

١٥) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ مسلمة التشابه AA.

18) النظرية 2.4



خاصية الانعكاس للتشابه.

المطلوب: أ ABC $\sim$ أ ABC

(البرهان):

$\angle A \cong \angle A$ @$\angle B \cong \angle B$

أ ABC $\sim$ أ ABC حسب مسلمة AA

خاصية التماثل للتشابه

المعطيات: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

المطلوب: $\Delta DEF \sim \Delta ABC$

البرهان: العبارات المبررات

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ معطى.

$\angle A \cong \angle D$ @$\angle B \cong \angle E$ خاصية التماثل.

$\Delta DEF \sim \Delta ABC$ مسلمة التشابه AA.

خاصية التعدي للتشابه

المعطيات: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$,$\Delta DEF \sim \Delta GHI$

المطلوب: $\Delta ABC \sim \Delta GHI$

البرهان: العبارات المبررات

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$,$\Delta DEF \sim \Delta GHI$

$\angle E \cong \angle H$ @$\angle A \cong \angle D$ @$\angle B \cong \angle E$ @$\angle D \cong \angle G$

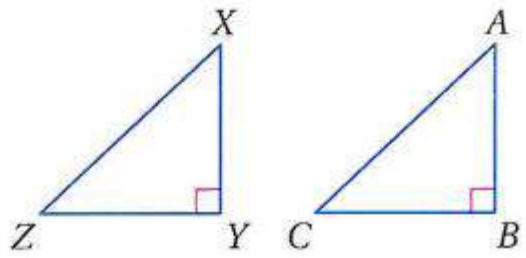
$\angle A \cong \angle G$ @$\angle B \cong \angle H$

$\Delta ABC \sim \Delta GHI$ حسب مسلمة AA

19) **المعطيات:** $\triangle XYZ$ و $\triangle ABC$ قائما الزاوية

$$\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC}$$

المطلوب: $\triangle YXZ \sim \triangle BAC$



البرهان: العبارات المبررات.

١) ΔABC, ΔXYZ قائمة الزاوية. (معطى)

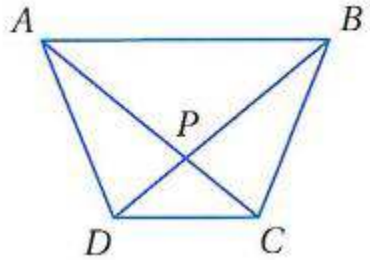
٢) $\angle ABC \cong \angle XYZ$ قائمتان.

٣) $\frac{YZ}{BC} = \frac{XY}{AB}$ معطى

٤) $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$ نظرية التشابه SAS.

20) **المعطيات:** $ABCD$ شبه منحرف.

المطلوب: $\frac{DP}{PB} = \frac{CP}{PA}$



البرهان: العبارات المبررات

١) $ABCD$ شبه منحرف.

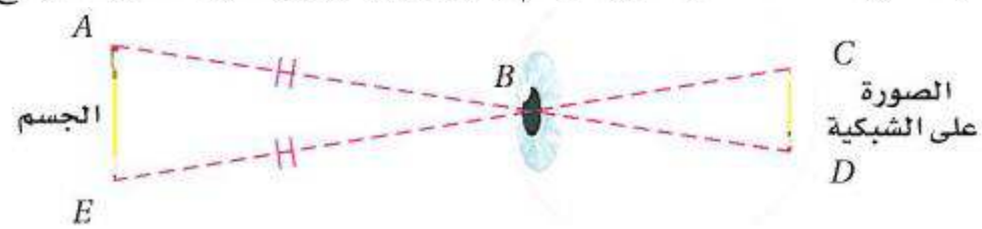
٢) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ تعريف شبه المنحرف.

٣) $\angle DCA \cong \angle BAC$ @$\angle ABD \cong \angle BDC$ نظرية الزوايا المتبادلة داخليا.

٤) $\Delta BAP \sim \Delta DCP$ نظرية التشابه AA.

٥) $\frac{CP}{PA} = \frac{DP}{PB}$ الأضلاع المتناظرة في المثلثين المتشابهين متناسبة.

21) **رؤية:** عندما ننظر إلى جسم فإن صورته تُسْقَطُ على الشبكيّة عبر البؤبؤ. وتكون المسافتان من البؤبؤ إلى أعلى الجسم وأسفله متساويتين، والمسافتان من البؤبؤ إلى أعلى الصورة وأسفلها على الشبكية متساويتين أيضا. هل المثلثان المتكوّنان بين الجسم والبؤبؤ وبين البؤبؤ والصورة متشابهان؟ وضّح إجابتك.



نعم؛ $\overline{DB} \cong \overline{CB}$ @$\overline{EB} \cong \overline{AB}$

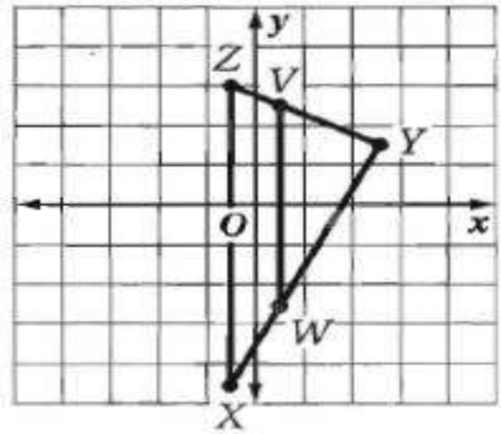
إذن $\frac{EB}{DB} = \frac{AB}{CB}$ و $\angle CBD \cong \angle ABE$

لأن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان لذلك؛ $\Delta CBD \sim \Delta ABE$ وفق نظرية SAS.

هندسة إحداثيّة: إحداثيات رؤوس المثلثين $\triangle XYZ, \triangle WYV$ هي $X(-1,-9), Y(5,3), Z(-1,6), W(1,-5), V(1,5)$.

22) مثّل المثلثين بيانيًّا، وأثبت أنّ $\triangle XYZ \sim \triangle WYV$.

هندسة احداثيات:



$$XY = \sqrt{12^2+6^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$YZ = \sqrt{3^2+(-6)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$ZX = \sqrt{15^2+0^2} = \sqrt{15^2} = 15$$

$$VW = \sqrt{10^2+0^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$WY = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$VY = \sqrt{2^2+(-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{XY}{WY} = \frac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{YZ}{YV} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{ZX}{VW} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

وبما أن كلاهما $= \frac{3}{2}$ فإن $\Delta XYZ \sim \Delta WYV$ نظرية التشابه SSS.

23) أوجد النسبة بين محيطي المثلثين.

النسبة بين محيطي المثلثين $= \frac{3}{2}$

24) **قياس:** إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle JKL$. وطول كل ضلع في $\triangle JKL$ يساوي نصف طول الضلع المناظر في $\triangle ABC$، ومساحة $\triangle ABC$ تساوي $40\,in^2$، فما مساحة $\triangle JKL$؟ ما العلاقة بين مساحتي $\triangle ABC$، $\triangle JKL$، ومعامل التشابه بينهما؟

$$\frac{JK}{AB} = \frac{KL}{BC} = \frac{JL}{AC} = \frac{1}{2}$$

مساحة $\Delta ABC = 40in$

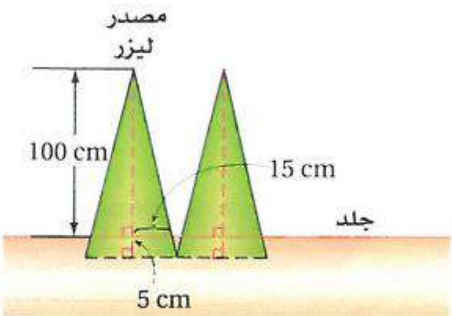
$$\frac{x}{40} = \frac{1}{2}$$

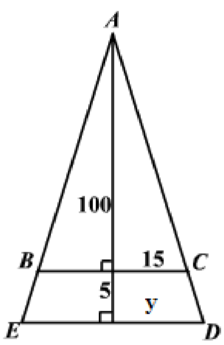
$$x = \frac{40}{2} = 20$$

مساحة $\Delta JKL = 20in^2$

النسبة بين المساحتين تساوي مربع التشابه. ومعامل التشابه $= \frac{1}{2}$

25) **علاج:** استعمل معلومات الربط بالحياة والشكل المجاور لإيجاد المسافة التي يجب أن تفصل بين مصدري أشعة الليزر حتى تكون المنطقتان المعالجتان بكلٍ من المصدرين غير متداخلتين.





الطول الكلي $= 100 + 5 = 105$

المثلثان ABC, AED متشابهان

$$\frac{105}{y} = \frac{100}{15}$$

$$105(15) = 100(y)$$

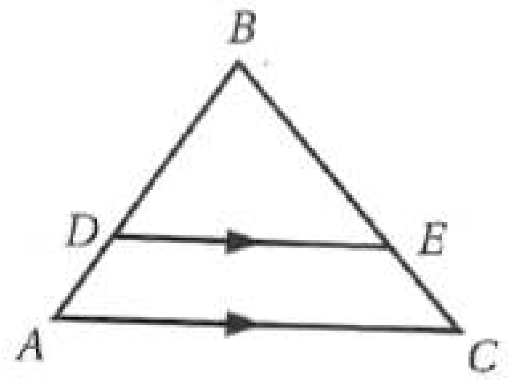
$$y = 15.75$$

$$x = 2y$$

$$x = 2(15.75) = 31.5\,cm$$

26) **تمثيلات متعدّدة :** سوف تستقصي في هذه المسألة الأجزاء المتناسبة لمثلثين.

a) **هندسيًّا :** ارسم $\triangle ABC$ وارسم $\overline{DE}$ بحيث تكون موازيةً لِـ $\overline{AC}$ كما في الشكل المجاور.



b) **جدوليًّا :** قس الأطوال AD, DB, CE, EB وسجلها في جدول.

وأوجد النسبتين $\frac{CE}{EB}$ ، $\frac{AD}{DB}$ وسجّلهما في الجدول نفسه.

الأطوال		النسب	
AD	0.9 cm	$\frac{AD}{DB}$	$\frac{1}{2}$
DB	1.8 cm		
CE	1.1 cm	$\frac{CE}{EB}$	$\frac{1}{2}$
EB	2.2 cm		

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول القطع المستقيمة الناتجة عن مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين.

القطع المستقيمة الناتجة عن مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع ضلعيه الآخرين أطوالها متناسبة.

مسائل مهارات التفكير العليا:

27) **اكتب:** بين أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين مسلمة التشابه AA ونظرية التشابه SSS ونظرية التشابه SAS.

مسلمة التشابه AA ونظرية التشابه SSS ونظرية التشابه SAS كلها اختبارات يمكن استعمالها لتحديد ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا. وتستعمل مسلمة التشابه AA عندما يكون معلوما أن زوجين من زوايا المثلثين متطابقان وتستعمل نظرية التشابه SSS عندما تكون أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين معلومة. وتستعمل نظرية التشابه SAS عندما يكون معلوما أن طولي ضلعين في أحد المثلثين متناسبان مع طولي الضلعين لهما في المثلث الآخر، والزاوية المحصورة بينهما متطابقة في كلا المثلثين.

تحدٍّ: إذا كانت النسبة بين أطوال أضلاع مثلث هي 2:3:4 ومحيطه 54 in ، فأجب عما يلي:

28) إذا كان طول أصغر أضلاع مثلثٍ آخر مشابه هو 16 in، فما طول كلٍّ من الضلعين الآخرين فيه؟

بفرض أن طول الضلعين الأخرين x_2 و x_3

وبما أن المثلثات متشابهة إذا الأضلاع المتناظرة متشابهة

$$2:3:4=16:x_2:x_3$$

$$\frac{2}{16}=\frac{3}{x_2}=\frac{4}{x_3}$$

$$x_2=\frac{3\times16}{2}=24$$

$$x_3=\frac{4\times16}{2}=32$$

29) قارن النسبة بين محيطَي المثلثين ومعامل التشابه بينهما. ماذا تلاحظ؟

محيط المثلث الثاني = مجموع أطوال أضلاعه

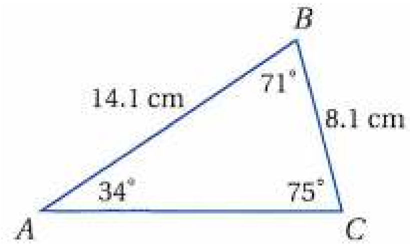
محيط المثلث = $16+24+32=72$

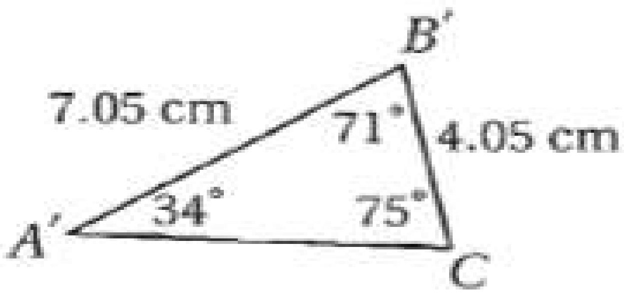
النسبة بين محيطي المثلثين = $\frac{54}{72}=\frac{3}{4}$

30) **تبرير:** قياسات زوايا مثلثين متشابهين هي: $45°, 85°, 50°$. وأطوال أضلاع أحدهما $5.2, 4, 3$ وحدات وأطوال أضلاع المثلث الآخر $x, x - 1.5, x + 1.8$ وحدة، أوجد قيمة x.

$$\frac{4}{5.2} = \frac{x}{x+1.8}$$
$$x5.2 = 4x + 7.2$$
$$5.2x - 4x = 7.2$$
$$1.2x = 7.2$$
$$x = \frac{7.2}{1.2}$$
$$x = 6$$

31) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا مشابهًا لـ $\triangle ABC$ المجاور، ووضح كيف تعرف أنهما متشابهان.





$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ لأن طول كل ضلع يساوي نصف طول الضلع المناظر له وقياسات الزوايا المتناظرة متساوية.

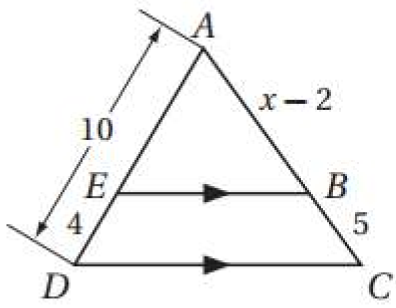
32) **اكتب:** اشرح طريقة يمكنك استعمالها لرسم مثلث يشابه مثلثًا معلومًا وأطوال أضلاعه مثلا أطوال أضلاع المثلث المعلوم.

أختار ضلعا من أضلاع المثلث الأصلي وأقيس وله وأرسم قطعة مستقيمة طولها يساوي مثلي طول هذا الضلع. ثم أقيس الزاويتين المحصورتين بين الضلع الذي قست طوله في المثلث الأصلي والضلعين الآخرين. وارسم زاويتين مطابقتين للزاويتين للتين أوجدت قياسيهما في المثلث الأصلي عند طرفي القطعة التي

رسمتها وأمد ضلعي الزاويتين الجديدتين حتى تلتقا فيكون المثلث الجديد مشابها للمثلث الأصلي وأبعاده مثلي أبعاد المثلث الأصلي.

تدريب على الاختبار المعياري

33) إجابة مطوّلة : في الشكل أدناه $\overline{DC} \parallel \overline{EB}$.



a) اكتب تناسبًا يمكن استعماله لإيجاد قيمة x.

$$\frac{10}{x+3} = \frac{6}{x-2}$$

b) أوجد قيمة x وطول $\overline{AB}$.

$$\frac{10}{x+3} = \frac{6}{x-2}$$

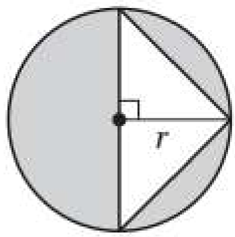
$$10x - 20 = 6x + 18$$

$$4x = 38$$

$$x = 9.5$$

$$\overline{AB} = 9.2 - 2 = 7.2$$

34) **جبر:** أيٌّ مما يأتي يُمثل مساحة المنطقة المظلّلة؟



A πr^2

B $\pi r^2 + r^2$

C $\pi r^2 + r$

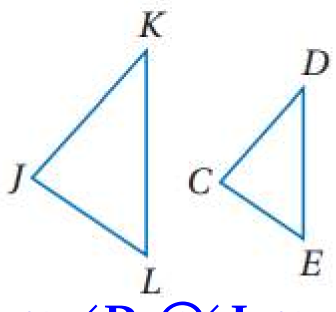
D $\pi r^2 - r^2$

مساحة المنطقة المظللة = D

مراجعة تراكمية

اكتب جميع الزوايا المتطابقة، واكتب تناسبًا يربط الأضلاع المتناظرة للمضلعين في كل مما يأتي:

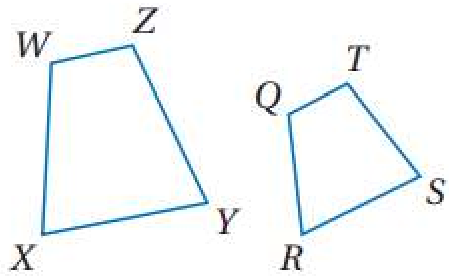
35) $\triangle JKL \sim \triangle CDE$



$\angle L \cong \angle E$ @$\angle K \cong \angle D$ @$\angle J \cong \angle C$

$$\frac{KL}{DE} = \frac{JK}{CD} = \frac{JL}{CE}$$

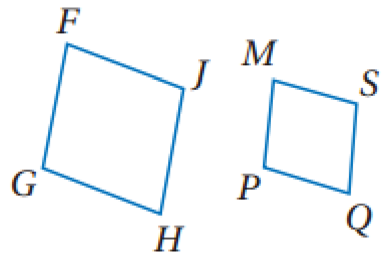
$WXYZ \sim QRST$ (36



$\angle Y \cong \angle S$ @$\angle Z \cong \angle T$ @$\angle X \cong \angle R$ @$\angle W \cong \angle Q$

$$\frac{WX}{QR} = \frac{XY}{RS} = \frac{YZ}{ST} = \frac{WZ}{QT}$$

$FGHJ \sim MPQS$ (37



$\angle J \cong \angle S$ @$\angle H \cong \angle Q$ @$\angle G \cong \angle P$ @$\angle F \cong \angle M$

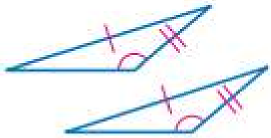
$$\frac{FG}{MP} = \frac{GH}{PQ} = \frac{HJ}{QS} = \frac{FJ}{MS}$$

38) **القطع الهندسية السبع:** تتكون مجموعة القطع الهندسية السبع (Tangram) في الشكل المجاور من سبع قطع: مربع صغير، مثلثين صغيرين قائمَي الزاوية ومتطابقين، مثلثين كبيرين قائمَي الزاوية ومتطابقين، مثلث قائم الزاوية متوسط المقاس، وشكل رباعي. كيف يمكنك أن تتحقق من أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع؟ وضّح إجابتك. (الدرس 3-5)

إذا كان زوج من الأضلاع المتقابلة متطابقين ومتوازين. فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

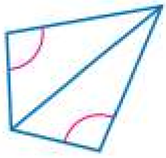
حدّد المسلمة التي يمكن استعمالها لإثبات تطابق المثلثين في كل مما يأتي، واكتب "غير ممكن" في الحالة التي لا يمكنك فيها إثبات التطابق.

(39



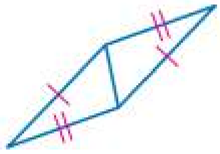
غير ممكن.

(40



غير ممكن.

(41



SSS

استعد للدرس اللاحق

حل كل تناسبٍ ممَّا يأتي:

(42 $\frac{3}{4} = \frac{x}{16}$

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{16}$$
$$4x = 3 \times 16$$
$$x = \frac{48}{4} = 12$$

(43 $\frac{x}{10} = \frac{22}{50}$

$$\frac{x}{10} = \frac{22}{50}$$
$$50x = 10 \times 22$$
$$x = \frac{220}{50} = 4.4$$

$$\frac{20.2}{88} = \frac{12}{x} \quad (44$$

$$\frac{20.2}{88} = \frac{12}{x}$$

$$20.2\,x = 12 \times 88$$

$$x = \frac{1056}{20.2} = 52.3$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{3}{8} \quad (45$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{3}{8}$$

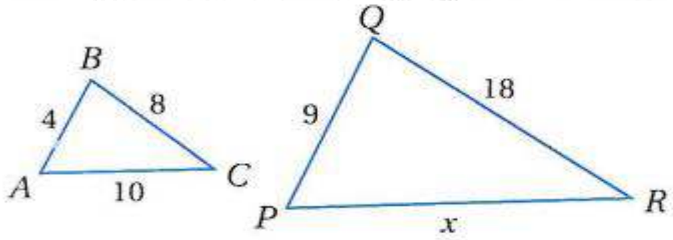
$$8\,x - 16 = 6$$

$$x = \frac{22}{8} = 2.75$$

* اختبار منتصف الفصل

إذا كان المضلعان في كل من السؤالين الآتيين متشابهين. فأوجد قيمة x . (الدرس 1-2)

(1

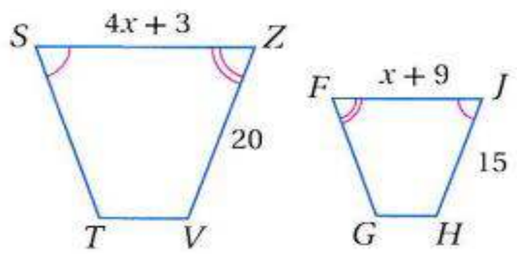


$$\frac{10}{x} = \frac{4}{9}$$

$$4x = 90$$

$$x = \frac{90}{4} = 22.5$$

(2



$$\frac{4x+3}{x+9} = \frac{20}{15}$$

$$60x + 45 = 20x + 180$$

$$40x = 135$$

$$x = 135 \div 4 = 3.4$$

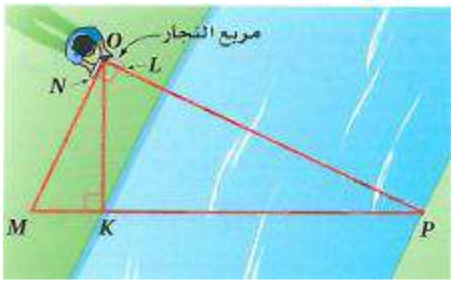
3) **اختيار من متعدد:** إذا كانت المسافة بين الطائف والدمام على خريطة تساوي 98 cm ، وكان مقياس رسم الخريطة 2.5 cm : 30 km ، فما المسافة الحقيقية بينهما؟

1176 : C

$$\frac{30}{2.5\times100}=\frac{x}{98\times100}$$

$$x=\frac{98\times100\times30}{2.5\times100}=1176$$

4) **قياس:** يستعمل عبدالله زواية النجارين لحساب KP عبر النهر كما في الشكل أدناه، إذا كان: $MK = 1.5\,\text{ft}$ ، $OK = 4.5\,\text{ft}$ ، فأوجد المسافة KP عبر النهر. (الدرس 2-6)

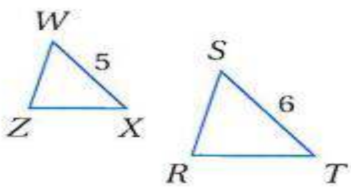


$$\Delta POK \sim \Delta OMK$$

$$\frac{1.5}{4.5}=\frac{4.5}{PK}$$

$$PK=\frac{4.5\times4.5}{1.5}=13.5\ \text{ft.}$$

5) إذا كان $\triangle WZX \sim \triangle SRT$ ، $WX = 5$ ، $ST = 6$ ، فأوجد محيط $\triangle WZX$ إذا كان محيط $\triangle SRT$ يساوي 18 وحدة. (الدرس 2-2)



$$\frac{WX}{ST}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{x}{18} = \frac{5}{6}$$

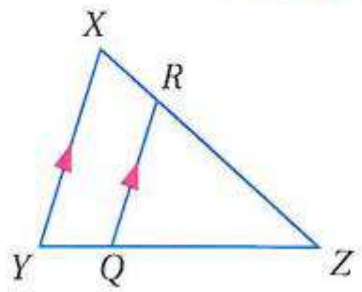
$$6x = 5 \times 18$$

$$x = 90 \div 6 = 15$$

محيط WZX أ = 15 وحدة

حدّد، ما إذا كان المثلثان في السؤالين 6, 7 متشابهين أم لا. وإن كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه. وإلاّ فحدد المعلومات الإضافية الكافية لإثبات أنهما متشابهان، وضح إجابتك.
(الدرس 2-2)

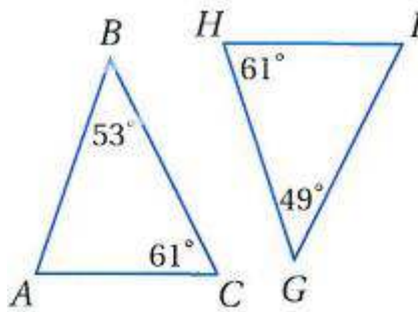
6)



بما أن $XY \parallel RQ$ إذن $\angle XYZ \cong \angle RQZ$ و $\angle XZY \cong \angle RZQ$

إذن $\Delta QRZ \sim \Delta YXZ$ بحسب مسلمة التشابه AA.

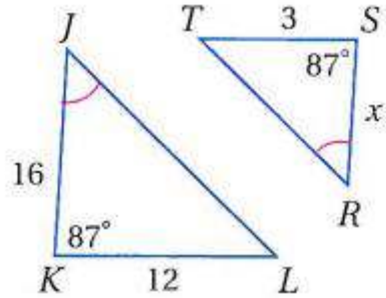
7)



لا؛ الزوايا غير متطابقة. لذلك فالمثلثان غير متشابهين.

جبر أوجد الطول المطلوب في كلّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 6-2)

8) SR



$\Delta JKL \sim \Delta RST$ حسب مسلمة AA

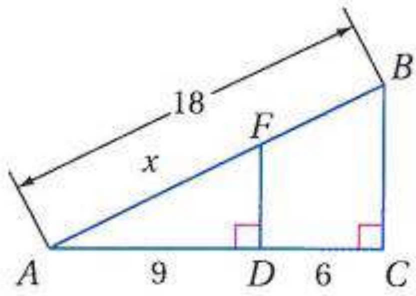
$$\frac{JK}{RS}=\frac{KL}{ST}$$

$$\frac{16}{x}=\frac{12}{3}$$

$$x=\frac{3\times 16}{12}$$

$$x=4$$

9) AF



$\Delta ABC \sim \Delta AFD$ حسب مسلمة AA

$$\frac{AF}{AB}=\frac{AD}{AC}$$

$$\frac{x}{18}=\frac{9}{15}$$

$$x=\frac{9\times 18}{15}$$

$$x=10.8$$

6-3 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

تحقق

1) في الشكل أعلاه، إذا كان $PT = 15$, $SR = 5$, $PS = 12.5$ ، فأوجد TQ .

نظرية التناسب في مثلث

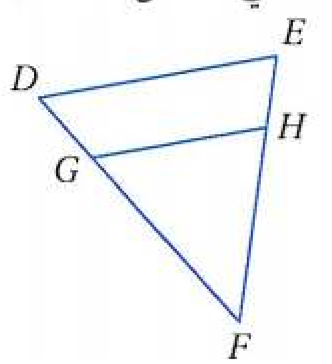
$$\frac{PS}{SR} = \frac{PT}{TQ}$$

$$\frac{12.5}{5} = \frac{15}{TQ}$$

$$TQ = \frac{5 \times 15}{12.5}$$

$$TQ = 6$$

2) في الشكل أعلاه، إذا كان $HF = 10$, $EH = 6$, $DG = \frac{1}{2}GF$. فهل $\overline{GH} \parallel \overline{DE}$ ؟

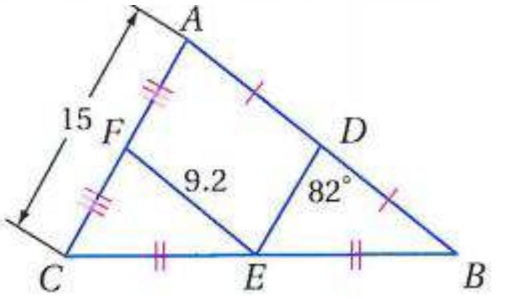


لا ، لأن $\frac{EH}{HF} \neq \frac{DG}{GF}$

$$\frac{EH}{HF} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{DG}{GF} = \frac{1}{2}$$

أوجد كل قياس مما يأتي معتمدًا على الشكل المجاور:



DE (3A

بما أن $AD = DB,\ AF = FC$ إذن D, F منتصقات مثلث وحسب نظرية

القطعة المنصفة لمثلث $DE \parallel AC$ و $DE = \frac{1}{2} AC$

$$DE = \frac{1}{2} AC$$

$$DE = \frac{15}{2} = 7.5$$

DB (3B

بما أن $AD = DB,\ CE = EP$ إذن E, F منتصقات مثلث وحسب نظرية

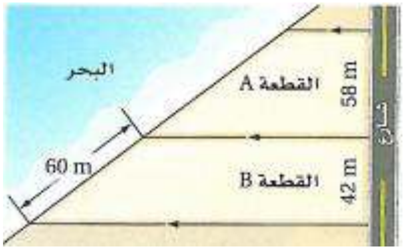
القطعة المنصفة لمثلث $FE \parallel AB$ و $FE = \frac{1}{2} AB$

إذن $DB = 9.2$

$m\angle FED$ (3C

$\angle FED = 82^\circ$ بالتبادل داخليا

4) **عقارات:** واجهة قطعة الأرض هي طول حدها المحاذي لمعْلَم ما مثل شارع أو بحر أو نهر. أوجد الواجهة البحرية للقطعة A إلى أقرب عشر المتر.



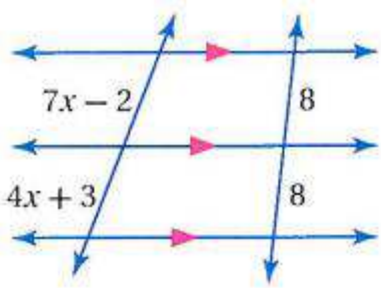
$$\frac{x}{60} = \frac{58}{42}$$

$$x = \frac{60 \times 58}{42}$$

$$x = 82.9$$

الواجهة البحرية للقطعة A = 82.9 m

(5A

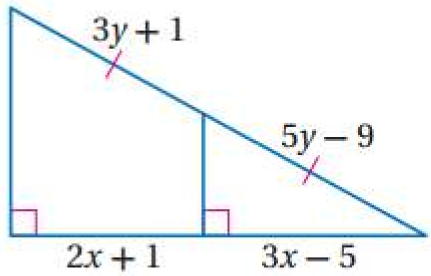


$$\frac{7x - 2}{4x + 3} = \frac{8}{8} = 1$$

$$7x - 2 = 4x + 3$$

$$3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3} = 1.7$$



(5B

$$\frac{3x-5}{2x+1}=\frac{1}{1}$$

$$3x-5=2x+1$$

$$x=6$$

$$\frac{3y+1}{5y-9}=\frac{2x+1}{3x-5}$$

$$\frac{3y+1}{5y-9}=\frac{13}{13}=\frac{1}{1}$$

$$3y+1=5y-9$$

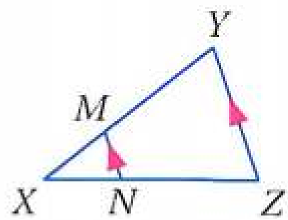
$$5y-3y=1+9$$

$$2y=10$$

$$y=5$$

تأكد:

في $\triangle XYZ$ ، إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{YZ}$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين:



1) إذا كان $NZ = 9$ ، $XN = 6$ ، $XM = 4$ ، فأوجد XY .

$$\frac{XM}{XY} = \frac{XN}{XZ}$$

$$\frac{4}{XY} = \frac{6}{6+9}$$

$$XY = \frac{4 \times 15}{6}$$

$$XY = 10$$

2) إذا كان $XY = 10$ ، $XM = 2$ ، $XN = 6$ ، فأوجد NZ .

$$\frac{XM}{XY} = \frac{XN}{XZ}$$

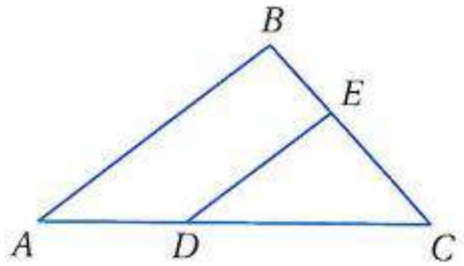
$$\frac{2}{10} = \frac{6}{6 + NZ}$$

$$12 + 2NZ = 60$$

$$2NZ = 48$$

$$NZ = 24$$

3) في $\triangle ABC$، إذا كان $BE = 6$، $BC = 15$، $AD = 8$، $DC = 12$. فهل $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$؟
برّر إجابتك.



$$\frac{AD}{DC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

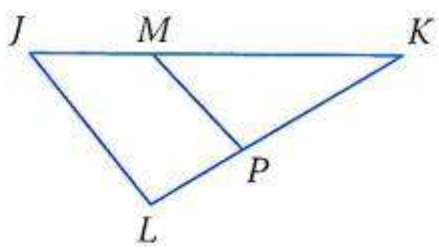
$$\frac{BE}{EC} = \frac{6}{15-6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC} = \frac{2}{3}$$

بما أن $\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$ إذن $DE \parallel AB$ حسب عكس نظرية التناسب في مثلث

4) في $\triangle JKL$، إذا كان $JM = 5$، $JK = 15$، $PK = 9$، $LK = 13$. فهل $\overline{MP} \parallel \overline{JL}$؟

برّر إجابتك.



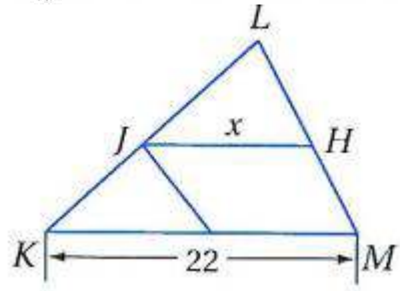
$$\frac{PK}{LK} = \frac{9}{13}$$

$$\frac{KM}{KJ} = \frac{15-5}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

لا؛ لأن $\frac{PK}{LK} \neq \frac{KM}{KJ}$

إذا كانت $\overline{JH}$ قطعة منصِّفة في $\triangle KLM$ ، فأوجد قيمة x في السؤالين الآتيين:

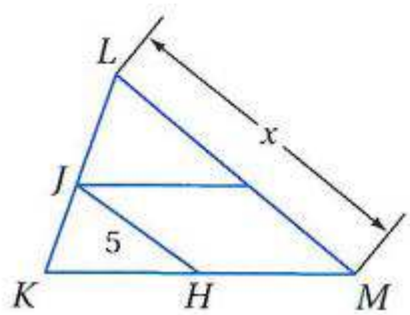
(5



بما أن $\overline{JH}$ قطعة منصفة في ΔKLM فإن $JH = \frac{1}{2}KM$

$$x = \frac{1}{2} \times 22 = 11$$

(6



بما أن $\overline{JH}$ قطعة منصفة في ΔKLM فإن $JH = \frac{1}{2}LM$

$$5 = \frac{1}{2} \times x$$

$$x = 2 \times 5 = 10$$

7) **خرائط:** الشارعان 5 , 3 في الخريطة المجاورة متوازيان. إذا كانت المسافة بين الشارع 3 والمركز التجاري على امتداد شارع أبو عبيدة 3201 m ، فأوجد المسافة بين الشارع 5 والمركز التجاري على امتداد شارع الاتحاد، مقربًا إجابتك إلى أقرب عُشر المتر.

$$\frac{1162}{1056} = \frac{x}{3201}$$

x المسافة بين شارع 3 والمركز التجاري على امتداد شارع الاتحاد.

$$\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{CD} = 1$$

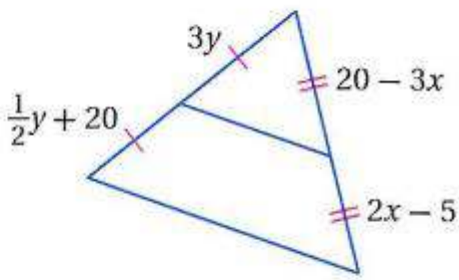
$$x = \frac{1162 \times 3201}{1056}$$

$$x = 3522.3$$

$$2360.3 = 1162 - 3522.3 \ .$$

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل من السؤالين الآتيين:

8)



$$2x - 5 = 20 - 3x$$

$$-3x - 2x = -5 - 20$$

$$-5x = -25$$

$$x = 5$$

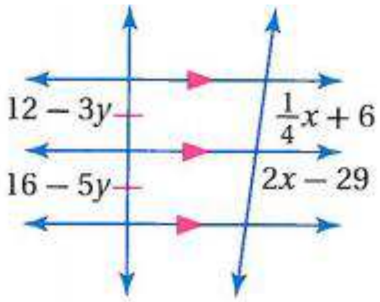
$$3y = 0.5y + 20$$

$$3y - 0.5y = 20$$

$$2.5y = 20$$

$$y = 8$$

(9



$$12 - 3y = 16 - 5y$$

$$-3y + 5y = 16 - 12$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

$$\frac{1}{4}x + 6 = 2x - 29$$

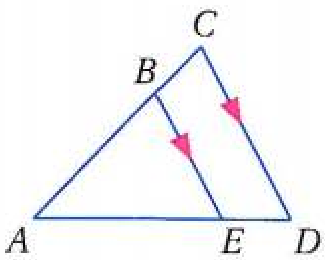
$$2x - \frac{1}{4}x = 6 + 29$$

$$1.75x = 35$$

$$x = 20$$

تدرب وحل المسائل:

في $\triangle ACD$ ، إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$، فأجب عن السؤالين الآتيين:



10) إذا كان $AE = 9 , BC = 4 , AB = 6$، فأوجد ED .

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{AD}{9} = \frac{10}{6}$$

$$AD = 90 \div 6 = 15$$

$$ED = 15 - 9 = 6$$

11) إذا كان $ED = 5 , AC = 16 , AB = 12$، فأوجد AE .

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

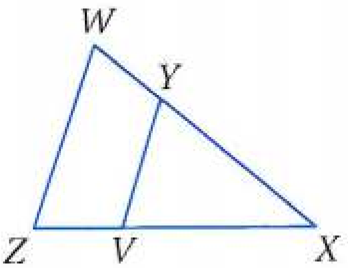
$$\frac{12}{16} = \frac{AE}{5 + AE}$$

$$16AE = 60 + 12AE$$

$$4AE = 60$$

$$AE = 15$$

حدّد ما إذا كان $\overline{ZW} \parallel \overline{VY}$ أم لا، وبرّر إجابتك في كلٍّ من السؤالين الآتيين:



12) $ZX = 18, ZV = 6, WX = 24, YX = 16$

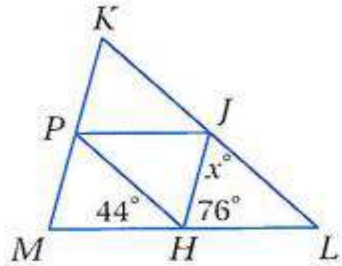
نعم؛ $\frac{ZV}{VX} = \frac{WY}{YX} = \frac{1}{2}$

13) $WX = 31, YX = 21, ZX = 4ZV$

لا؛ $\frac{ZV}{VX} \neq \frac{WY}{YX}$

في $\triangle KLM$، إذا كانت $\overline{JH}, \overline{JP}, \overline{PH}$ قطعًا منصّفة، فأوجد قيمة x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

14)

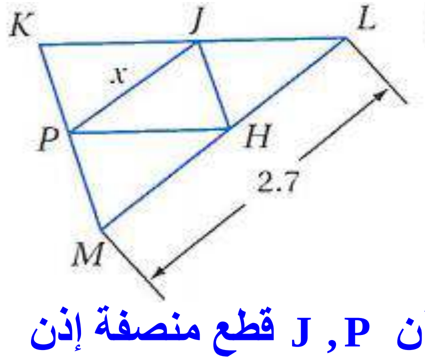


بما أن H, J قطع منصفة إذن $JH \parallel KM$

$\angle LJH = \angle JHP$ بالتبادل داخليا

$\angle LJH = 180 - (76 + 44) = 60^\circ$

15)



بما أن P, J قطع منصفة إذن $JP \parallel LM$

$$JP = \frac{1}{2} LM$$

$$x = \frac{1}{2} \times 2.7 = 1.35$$

16) **خرائط:** المسافة من مدخل الحديقة إلى طريق المشاة على امتداد الطريق المرصوف 880 m. إذا كان طريق المشاة يوازي الطريق الترابي، فأوجد المسافة من مدخل الحديقة إلى طريق المشاة على امتداد منطقة الأشجار.

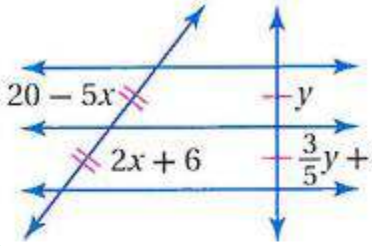
بفرض أن المسافة من مدخل الحديقة إلى طريق المشاة $= x$

$$\frac{880}{1408} = \frac{x}{1760}$$

$$x = \frac{1760 \times 880}{1408} = 1100\text{m}$$

جبر: أوجد قيمة كل من x, y في السؤالين الآتيين:

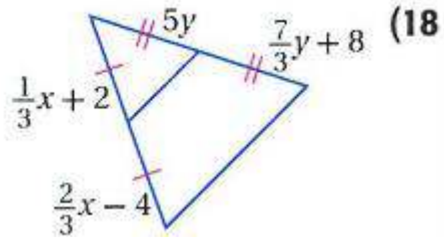
17)



نتيجة 2.2

$$2x + 6 = 20 - 5x$$
$$2x + 5x = 20 - 6$$
$$7x = 14$$
$$x = 2$$
$$y = \frac{3}{5}y + 2$$
$$y - \frac{3}{5}y = 2$$
$$\frac{2}{5}y = 2$$
$$y = 5$$

(18



نتيجة 2.2

$$5y = \frac{7}{3}y + 8$$

$$5y - \frac{7}{3}y = 8$$

$$\frac{8}{3}y = 8$$

$$y = 3$$

$$\frac{1}{3}x + 2 = \frac{2}{3}x - 4$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x = 2 + 4$$

$$\frac{1}{3}x = 6$$

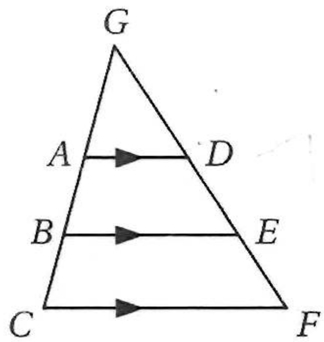
$$x = 18$$

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلّ مما يأتي:

(19 النتيجة 2.1

المعطيات: $AD \parallel BE \parallel CF$

المطلوب: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$



البرهان:

في ΔGBE ، $AD \parallel BE$. ومن نظرية التناسب في المثلث يكون

$$\frac{GA}{GD} = \frac{AB}{DE}$$

وفي ΔGCF ، $BE \parallel CF$. ومن نظرية التناسب في المثلث يكون

$$\frac{GB}{GE} = \frac{BC}{EF}$$

ولأن $\Delta GBE \sim \Delta GAD$ فإن:

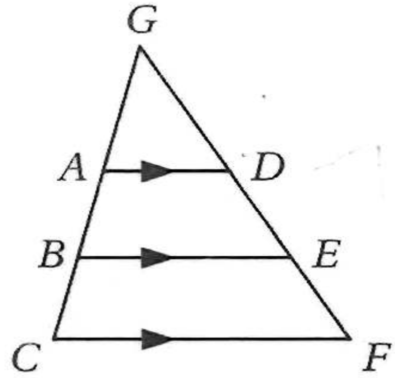
$$\frac{GA}{GD} = \frac{GB}{GE}$$

وبالتعويض $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ أي أن $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

20) النتيجة 2.2

المعطيات: $AB \equiv BC \ , \ DE \equiv EF$

المطلوب: $DE \equiv EF$



البرهان:

من النتيجة 2.1، $\frac{DE}{EF} = \frac{AB}{BC}$.

وبما أن $AB \equiv BC$ ، فإن $AB = BC$ حسب تعريف التطابق.

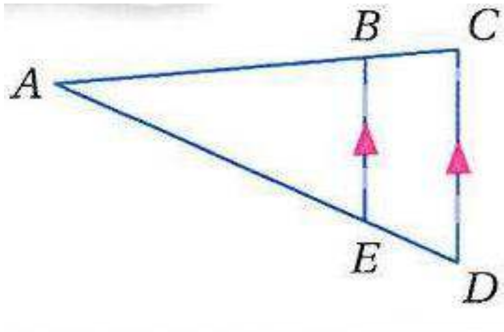
إذن $1 = \frac{AB}{BC}$ ؛ وبالتعويض $1 = \frac{DE}{EF}$ لذلك $DE = EF$

ومن تعريف التطابق يكون $DE \equiv EF$

21) النظرية 2.5

المعطيات: BE □CD

المطلوب: $\frac{BC}{AB} = \frac{ED}{AE}$



البرهان:

$\angle ADC \equiv \angle AEB$

$\angle ACD \equiv \angle ABE$ لأنها زوايا متناظرة.

أ AEB □أ ADC من مسلمة التشابه AA

$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$ من تعريف المضلعين المتشابهين

$AC = AB + BC, \quad AD = AE + ED$

وبالتعويض $\frac{AB + BC}{AB} = \frac{AE + ED}{AE}$

$\frac{AB}{AB} + \frac{BC}{AB} = \frac{AE}{AE} + \frac{ED}{AE}$ بتوزيع البسط على المقام

وبالتبسيط $1 + \frac{BC}{AB} = 1 + \frac{ED}{AE}$

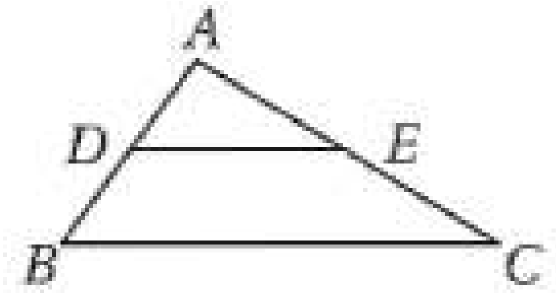
بطرح 1 من الطرفين ينتج $\frac{BC}{AB} = \frac{ED}{AE}$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للنظريتين الآتيتين:

(22 النظرية 2.6

المعطيات: $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

المطلوب: $DE \parallel BC$



البرهان: العبارات (المبررات)

$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ (معطى)

$\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EC}{AE}$ (خاصية الإضافة)

$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$ (بالجمع)

$AB = AD + DB \, , \, AC = AE + EC$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (بالتعويض)

$\angle A \cong \angle A$ (خاصية الانعكاس)

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (نظرية التشابه SAS)

$\angle ADE \cong \angle ABC$ (تعريف المضلعين المتشابهين)

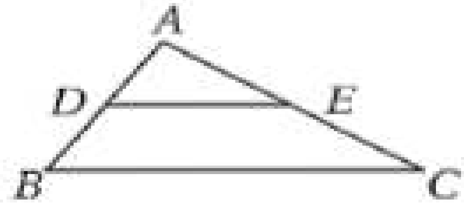
$\angle AED \cong \angle ACB$ (تعريف المضلعين المتشابهين)

$DE \parallel BC$ (إذا تطابقت الزوايا المتناظرة فإن المستقيمين متوازيان)

23) النظرية 2.7

المعطيات: D نقطة منتصف AB، E نقطة منتصف AC.

المطلوب: $BC \ ,DE = \frac{1}{2} BC \quad DE \parallel BC$



البرهان: العبارات (المبررات)

1) D نقطة منتصف AB، E نقطة منتصف AC. (معطيات)

2) $AD \cong DB\ ,\ AE \cong EC$ (تعريف نقطة المنتصف)

3) $AD = DB\ ,\ AE = EC$ (تعريف القطعتين المتطابقتين)

4) $AB = AD + DB\ ,\ AC = AE + EC$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

5) $AB = AD + AD\ ,\ AC = AE + AE$ (بالتعويض)

6) $AB = 2AD\ ,\ AC = 2AE$ (بالجمع)

7) $\frac{AB}{AD} = 2$ @ $\frac{AC}{AE} = 2$ (خاصية القسمة)

8) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (خاصية التعدي)

9) $\angle A \cong \angle A$ (خاصية الانعكاس)

10) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (نظرية التشابه SAS)

11) $\angle ADE \cong \angle ABC$ (تعريف المضلعين المتشابهين)

12) $DE \parallel BC$ (إذا تطابقت الزوايا المتناظرة فإن المستقيمين متوازيان)

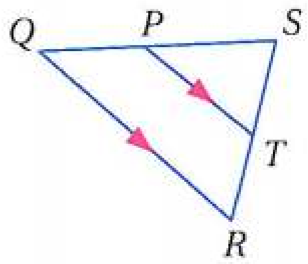
13) $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$ (تعريف المضلعين المتشابهين)

14) $\frac{BC}{DE} = 2$ (خاصية التعويض)

15) $2DE = BC$ (بالضرب)

16) $DE = \frac{1}{2} BC$ (بالقسمة)

استعمل $\triangle QRS$ للإجابة عن السؤالين الآتيين:



24) إذا كان $PT = 6$, $TR = 4$, $ST = 8$، فأوجد QR.

بما أن $PT \parallel QR$ إذن $\angle SPT = \angle SQR\,,\ \angle STP = \angle SRQ$

إذن $\Delta PST \sim \Delta QSR$

$$\frac{ST}{SR} = \frac{PT}{QR}$$

$$\frac{8}{8+4} = \frac{6}{QR}$$

$$QR = \frac{6 \times 12}{8}$$

$$QR = 9$$

25) إذا كان $QR = 12$, $PT = 6$, $SP = 4$، فأوجد SQ.

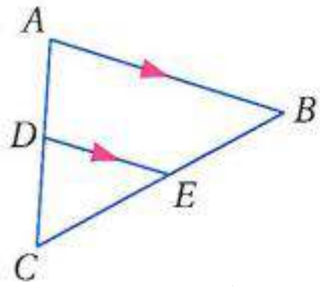
$$\frac{PS}{QS} = \frac{ST}{SR} = \frac{PT}{QR}$$

$$\frac{4}{QS} = \frac{6}{12}$$

$$QS = \frac{4 \times 12}{6}$$

$$QS = 8$$

26) إذا كان $EB = t+1$, $CE = t-2$, $CA = 10$, $CD = 2$ ، فأوجد قيمة كل من CE , t .



بما أن $DE \parallel AB$ إذن $\angle CED = \angle CBA$ و $\angle CDE = \angle CAB$

$\Delta ECD \sim \Delta BCA$

$$\frac{EC}{BC} = \frac{CD}{CA} = \frac{ED}{BA}$$

$$\frac{t-2}{t-2+t+1} = \frac{2}{10}$$

$$10t - 20 = 2t - 4 + 2t + 2$$

$$10t - 20 = 4t - 2$$

$$10t - 4t = -2 + 20$$

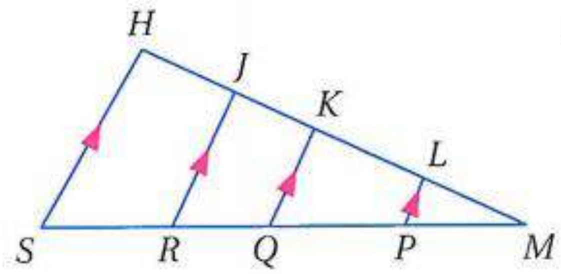
$$6t = 18$$

$$t = 3$$

$$CE = t - 2$$

$$CE = 1$$

27) إذا كان $KJ = 2$, $PQ = 6$, $MP = 3$, $LK = 4$, $LP = 2$ $RS = 6$ ، فأوجد قيمة كل من ML, QR, QK, JH



بما أن $HS \parallel JR \parallel KQ \parallel LP$

$$\frac{MP}{PQ} = \frac{QR}{RS} = \frac{ML}{KL} = \frac{JK}{JH}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{QR}{6} = \frac{ML}{4} = \frac{2}{JH}$$

$$QR = \frac{6 \times 3}{6} = 3$$

$$JH = \frac{2 \times 6}{3} = 4$$

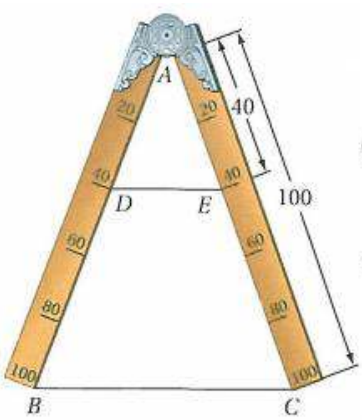
$$ML = \frac{3 \times 4}{6} = 2$$

$$QMK \sim PML$$

$$\frac{QM}{PM} = \frac{MK}{ML} = \frac{QK}{PL}$$

$$\frac{QM}{3} = \frac{4+2}{2} = \frac{QK}{2}$$

$$QK = \frac{2 \times 6}{2} = 6$$



(28 **تاريخ الرياضيات:** ابتكر جاليلو الفرجار في القرن السادس عشر الميلادي لاستعماله في القياس. ولرسم قطعة مستقيمة طولها يساوي خُمسي طول قطعة معلومة، اجعل نهايتي ساقي الفرجار عند طرفي القطعة المعلومة، ثم ارسم قطعة مستقيمة بين علامتي 40 على ساقي الفرجار. بيِّن أن طول $\overline{DE}$ يساوي خمسي طول $\overline{BC}$.

$\Delta ABC \sim \Delta ADE$ نظرية التشابه SAS

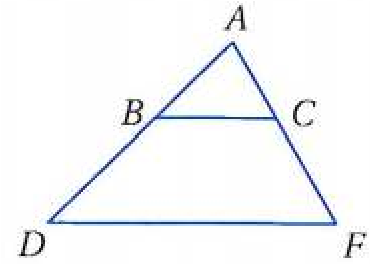
$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$ تعريف المثلثين المتشابهين

$\frac{DE}{BC} = \frac{40}{100}$ بالتعويض

$\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$ بالتبسيط

$DE = \frac{2}{5} BC$ بالضرب

أوجد قيمة x بحيث يكون $\overline{BC} \parallel \overline{DF}$.



(29 $AB = x + 5, BD = 12, AC = 3x + 1, CF = 15$

بما أن $DF \parallel BC$

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{3x+1}{15} = \frac{x+5}{12}$$

$$15x + 75 = 36x + 12$$

$$36x - 15x = 75 - 12$$

$$21x = 63$$

$$x = 3$$

$AC = 15,\ BD = 3x - 2,\ CF = 3x + 2,\ AB = 12$ (30

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{15}{3x+2} = \frac{12}{3x-2}$$

$$45x - 30 = 36x + 24$$

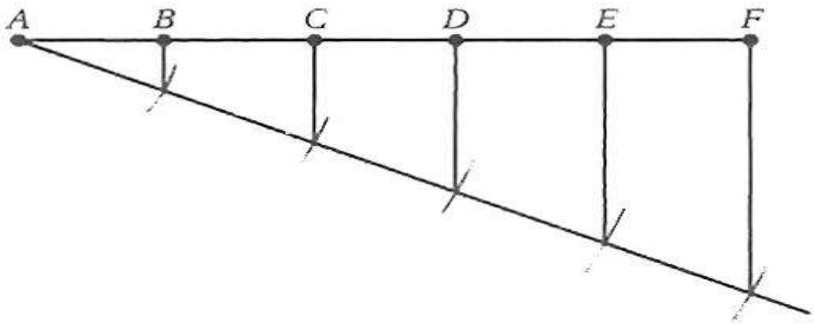
$$45x - 36x = 24 + 30$$

$$9x = 54$$

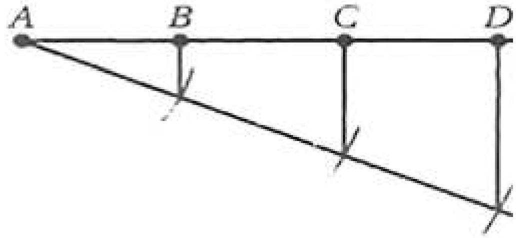
$$x = 6$$

إنشاءات هندسية: أنشئ كل قطعة مستقيمة فيما يأتي وفق التعليمات التالية:

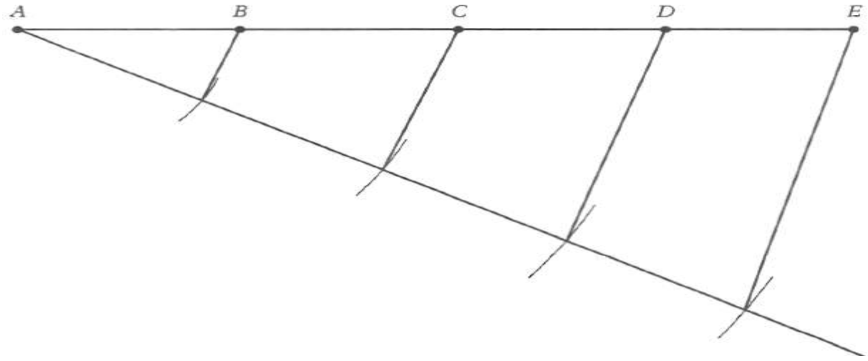
(31 قطعة مستقيمة مقسّمة إلى خمس قطع متطابقة.



(32 قطعة مستقيمة مقسّمة إلى قطعتين النسبة بين طوليهما 1 إلى 3.

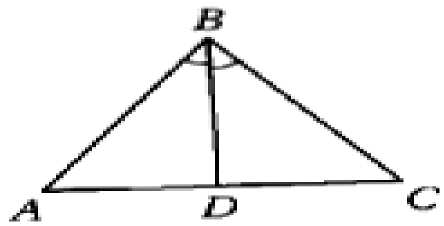


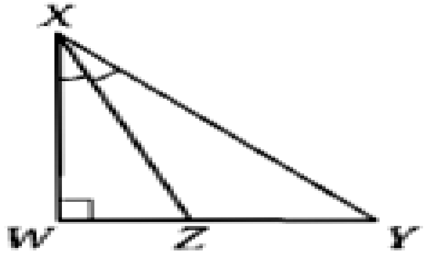
33) قطعة مستقيمة طولها 11 cm ، ومقسمة إلى أربع قطع متطابقة.

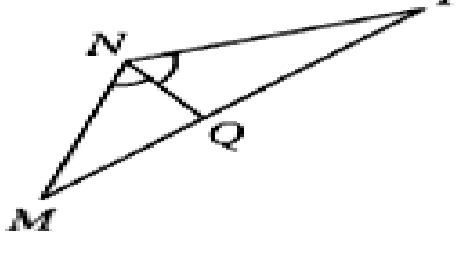


34) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة تناسبات مرتبطة بمنصفات زوايا المثلث.

a) هندسيًا: ارسم ثلاثة مثلثات: حادّ الزوايا، وقائم الزاوية، ومنفرج الزاوية. وسمِّ أحدها ABC وارسم $\overrightarrow{BD}$ منصّفًا لـ $\angle B$. وسمِّ الثاني MNP وارسم $\overrightarrow{NQ}$ منصّفًا لـ $\angle N$ ، وسمِّ الثالث WXY وارسم $\overrightarrow{XZ}$ منصّفًا لـ $\angle X$.







b) **جدوليًا:** أكمل الجدول المجاور بالقيم المناسبة.

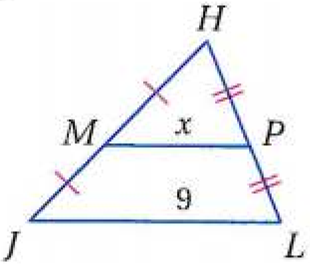
المثلث	الطول		النسبة	
ABC	AD	1.1 cm	$\frac{AD}{CD}$	1.0
	CD	1.1 cm		
	AB	2.0 cm	$\frac{AB}{CB}$	1.0
	CB	2.0 cm		
MNP	MQ	1.4 cm	$\frac{MQ}{PQ}$	0.8
	PQ	1.7 cm		
	MN	1.6 cm	$\frac{MN}{PN}$	0.8
	PN	2.0 cm		
WXY	WZ	0.8 cm	$\frac{WZ}{YZ}$	0.7
	YZ	1.2 cm		
	WX	2.0 cm	$\frac{WX}{YX}$	0.7
	YX	2.9 cm		

c) **لفظيًا:** اكتب تخمينًا حول القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما ضلع مثلث عند رسم منصّف للزاوية المقابلة لذلك الضلع.

النسبة بين طولي القطعتين اللتين ينقسم إليها ضلع مثلث عند رسم منصف للزاوية المقابلة لذلك الضلع تساوي النسبة بين طولي الضلعين المجاورين للقطعتين على الترتيب.

مسائل مهارات التفكير العليا:

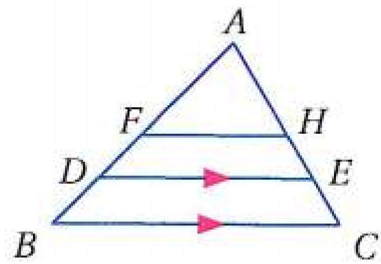
35) **اكتشف الخطأ:** يجد كل من أسامة وسلطان قيمة x في $\triangle JHL$. يقول أسامة: إنّ MP يساوي نصف JL؛ إذن x تساوي 4.5. ويقول سلطان: إن JL يساوي نصف MP؛ إذن x تساوي 18. هل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضّح إجابتك.



أسامة؛ بما أن MP قطعة منصفة فإن

$$MP = \frac{1}{2} JL$$

36) **تبرير:** في $\triangle ABC$، إذا كان $AH = HC$, $AF = FB$، $EA = \frac{3}{4}AC$, $DA = \frac{3}{4}AB$، فهل $DE = \frac{3}{4}BC$ دائمًا أو أحيانًا أو لا يساويه أبدًا؟



دائماً؛ FH قطعة منصفة افرض أن $BC = x$ فيكون $FH = \frac{1}{2}x$. وبما أن

FHCB شبه منحرف فإن:

$$DE = \frac{1}{2}(BC + FH) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}x)$$

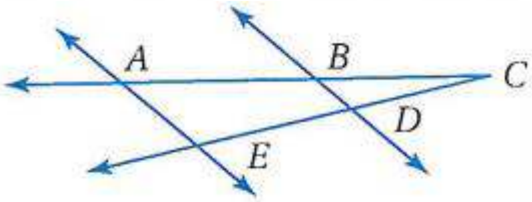
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$$

لذلك، $DE = \frac{3}{4}BC$.

37) **تحدٍّ:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $AB = 4$ ، $BC = 4$ ، $CD = DE$

المطلوب: إثبات أن $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$



البرهان: العبارات (المبررات)

1) $AB = 4, BC = 4$ (معطيات)

2) $AB = BC$ (بالتعويض)

3) $AB + BC = AC$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

4) $BC + BC = AC$ (بالتعويض)

5) $2BC = AC$ (بالجمع)

6) $AC = 2BC$ (خاصية التماثل)

7) $\frac{AC}{BC} = 2$ (بالقسمة)

8) $ED = DC$ (معطى)

9) $EC + DC = EC$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

10) $DC + DC = EC$ (بالتعويض)

11) $2DC = EC$ (بالجمع)

12) $\frac{EC}{DC} = 2$ (خاصية القسمة)

13) $\frac{EC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ (خاصية التعدي)

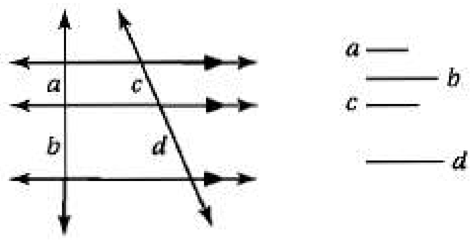
14) $\angle C \equiv \angle C$ (خاصية الانعكاس)

15) ΔACE □ ΔBCD (نظرية التشابه SAS)

16) $\angle CAE \equiv \angle CBD$ (تعريف المضلعين المتشابهين)

17) BD □ AE (إذا تطابقت الزوايا المتناظرة فإن المستقيمين متوازيان)

38) **مسألة مفتوحة:** ارسم ثلاث قطع مستقيمة أطوالها مختلفة a, b, c. وارسم قطعة رابعة طولها d، بحيث يكون $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$



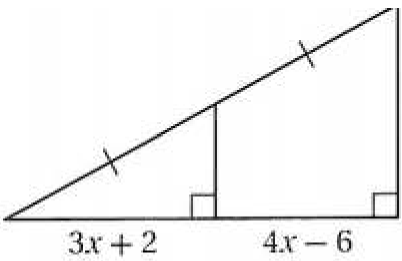
حسب النتيجة 6.1، $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

39) **اكتب:** قارن بين نظرية التناسب للمثلث ونظرية القطعة المنصّفة للمثلث.

النظريتان تبحثان في المستقيمات المتوازية داخل المثلث. ونظرية القطعة المنصفة حالة خاصة لعكس نظرية التناسب.

تدريب على الاختبار المعياري

40) **إجابة قصيرة:** ما قيمة x؟

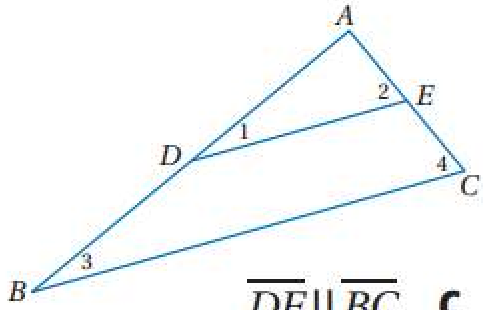


$$3x + 2 = 4x - 6$$

$$4x - 3x = 2 + 6$$

$$x = 8$$

(41 في $\triangle ABC$ ، إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة منصّفة، فأي العبارات التالية غير صحيحة؟



A $\angle 1 \cong \angle 4$

B $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

C $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

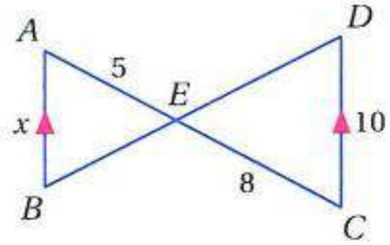
D $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

A : $\angle 1 \cong \angle 4$

مراجعة تراكمية

جبر: اذكر النظرية أو المسلمة التي تبرر تشابه المثلثين، واكتب عبارة التشابه، ثم أوجد أطوال القطع المذكورة في كلٍّ ممّا يأتي:

(42 $\overline{AB}$



ΔABE ΔCDE بحسب مسلمة التشابه AA

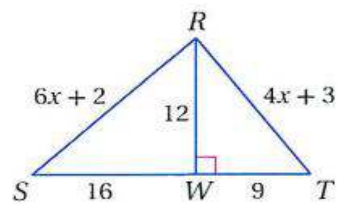
$$\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE}$$

$$\frac{x}{10} = \frac{BE}{DE} = \frac{5}{8}$$

$$x = \frac{5 \times 10}{8} = 6.25$$

$$\overline{AB} = 6.25$$

(43 $\overline{RT}, \overline{RS}$



ΔRSW ΔTRW بحسب نظرية التشابه SAS؛

$$\frac{RS}{TR} = \frac{SW}{RW} = \frac{RW}{TW}$$

$$\frac{6x+2}{4x+3} = \frac{16}{12} = \frac{12}{9}$$

$$54x + 18 = 48x + 36$$

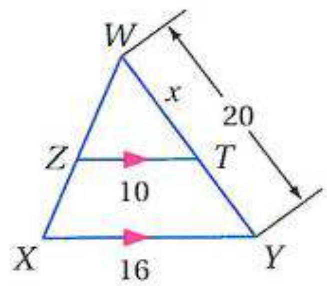
$$6x = 36 - 18$$

$$6x = 18 \quad , \quad x = 3$$

$$RS = 6x + 2 = 18 + 2 = 20$$

$$RT = 4x + 3 = 15$$

(44 $\overline{TY}$



$\Delta WZT \sim \Delta WXY$ بحسب مسلمة التشابه AA لأن $ZT \parallel XY$

إذن $\angle WTZ = \angle WYX$ و $\angle WZT = \angle WXY$ ؛

$$\frac{WZ}{WX} = \frac{ZT}{XY} = \frac{WT}{WY}$$

$$\frac{WZ}{WX} = \frac{10}{16} = \frac{x}{20}$$

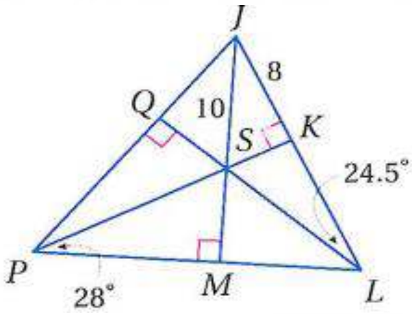
$$x = \frac{20 \times 10}{16} = 12.5$$

$$TY = WY - WT$$

$$TY = 20 - 12.5$$

$$TY = 7.5$$

إذا كانت النقطة S مركز الدائرة الداخليةِ لِـ $\triangle JPL$. فأوجد كل قياس مما يأتي:



45) SQ

بما أن S مركز الدائرة الداخلية لـ ΔJPL إذن $SK = QS = SM$

$$(SK)^2 = (JS)^2 - (JK)^2$$

$$(SK)^2 = (10)^2 - (8)^2 = 36$$

$$SK = 6 = SQ = 6$$

46) QJ

$$(QJ)^2 = (JS)^2 - (SQ)^2$$

$$(QJ)^2 = (10)^2 - (6)^2 = 64$$

$$QJ = 8$$

47) $m\angle MPQ$

$$\angle MPQ = 2 \times 28 = 56^\circ$$

48) $m\angle SJP$

$$\angle SJP = 180 - (90 + 56) = 34^\circ$$

استعد للدرس اللاحق

حُل كل تناسب مما يأتي.

49) $\frac{1}{3} = \frac{x}{2}$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

50) $\frac{3}{4} = \frac{5}{x}$

$3x = 20$

$x = 6.7$

51) $\frac{2.3}{4} = \frac{x}{3.7}$

$4x = 8.51$

$x = 2.1$

52) $\frac{x-2}{2} = \frac{4}{5}$

$5(x-2) = 8$

$5x - 10 = 8$

$5x = 8 + 10$

$5x = 18$

$x = 3.6$

53) $\frac{x}{12-x} = \frac{8}{3}$

$96 - 8x = 3x$

$3x + 8x = 96$

$x = 8.72$

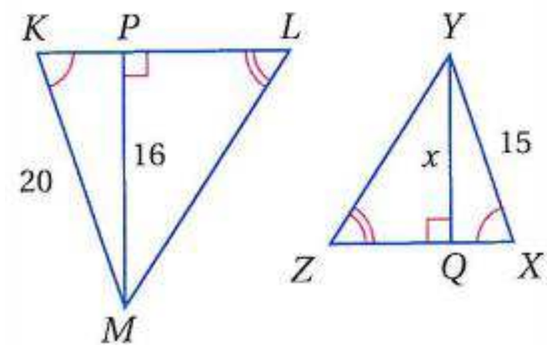
عناصر المثلثات المتشابهة

6-4

تحقق

أوجد قيمة x في كل من السؤالين الآتيين.

(1A



$\Delta KLM \sim \Delta ZYX$

إذا تشابه مثلثين فإن النسبة بين كل ارتفاعين متناظرين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة

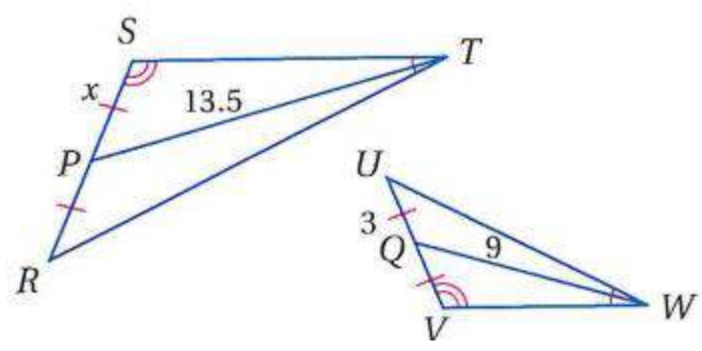
$$\frac{YQ}{PM} = \frac{YX}{KM}$$

$$\frac{x}{16} = \frac{15}{20}$$

$$x = \frac{15 \times 16}{20}$$

$$x = 12$$

(1B



ΔWVU ΔRST

إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طولي القطعتين المنصفتين لكل زاويتين متناظرتين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{WQ}{TP}=\frac{VU}{RS}$$

$$\frac{9}{13.5}=\frac{6}{2x}$$

$$x=\frac{3\times 13.5}{9}$$

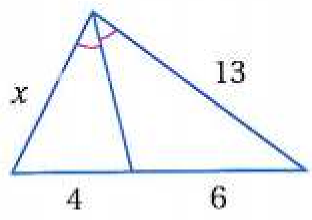
$$x=4.5$$

2) **حدائق:** حديقتان بجوارهما نافورة. إذا كانت الحديقتان تشكلان مثلثين متشابهين، فأوجد المسافة من مركز النافورة إلى الضلع الأطول في حديقة الفُلّ.

$$\frac{x}{7.8}=\frac{2.7}{6}$$

$$x=\frac{7.8\times 2.7}{6}$$

$$x=3.51m$$

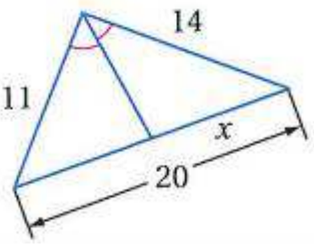


(3A

$$\frac{6}{4} = \frac{13}{x}$$

$$x = \frac{13 \times 4}{6}$$

$$x = 8.7$$



(3B

$$\frac{x}{20 - x} = \frac{14}{11}$$

$$11x = 280 - 14x$$

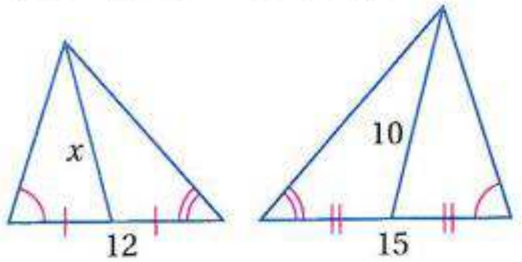
$$11x + 14x = 280$$

$$25x = 280$$

$$x = 11.2$$

أوجد قيمة x في كل من السؤالين الآتيين:

(1



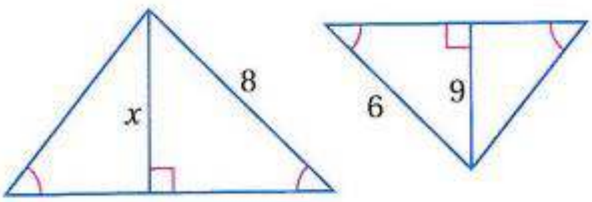
المثلثان متشابهان حسب مسلمة AA
إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طولي القطعتين المتوسطتين المتناظرتين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{10}{x} = \frac{15}{12}$$

$$x = \frac{10 \times 12}{15}$$

$$x = 8$$

(2



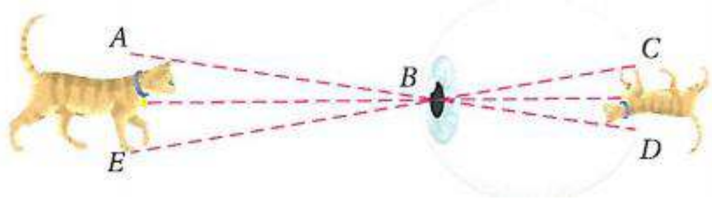
المثلثان متشابهان حسب مسلمة AA
إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين كل ارتفاعين متناظرين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{9}{x} = \frac{6}{8}$$

$$x = \frac{8 \times 9}{6}$$

$$x = 12$$

3) **صورة:** ارتفاع قطّة 10 in، وارتفاع صورتها على شبكيّة العين 7 mm. إذا كان $\triangle ABE \sim \triangle DBC$، وكانت المسافة من بؤبؤ العين إلى الشبكيّة 25 mm، فكم تبعد القطة عن بؤبؤ العين؟



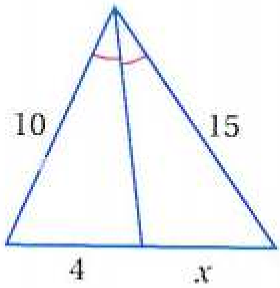
$$\frac{10}{x} = \frac{7}{25}$$

$$x = \frac{25 \times 10}{7}$$

$$x = 35.7in$$

أوجد قيمة المتغيّر في كل من السؤالين الآتيين. (لاحظ أن الشكلين ليسا مرسومين وفق مقياس رسم):

4)



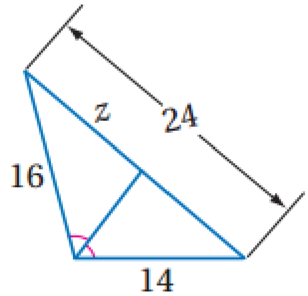
إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طولي القطعتين المنصفتين لكل زاويتين متناظرتين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{15}{x} = \frac{10}{4}$$

$$x = \frac{4 \times 15}{10}$$

$$x = 6$$

(5



إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طولي القطعتين المنصفتين لكل زاويتين متناظرتين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{14}{24-z}=\frac{16}{z}$$

$$14z=384-16z$$

$$14z+16z=384$$

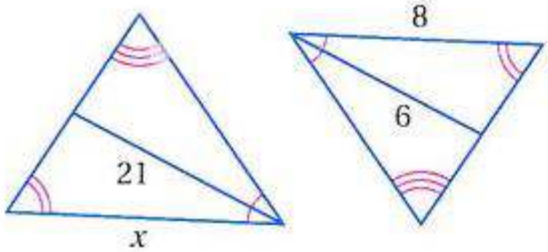
$$30z=384$$

$$z=12.8$$

تدرب وحل المسائل:

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

(6



المثلثان متشابهان حسب مسلمة AA

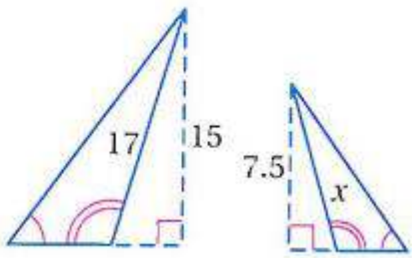
إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طول القطعتين المنصفتين لكل زاويتين متناظرين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{6}{21}=\frac{8}{x}$$

$$x=\frac{8\times 21}{6}$$

$$x=28$$

(7



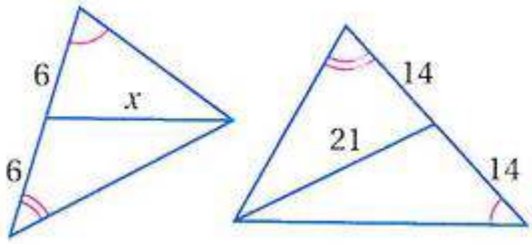
المثلثان متشابهان حسب مسلمة AA

$$\frac{x}{17}=\frac{7.5}{15}$$

$$x=\frac{7.5\times 17}{15}$$

$$x=8.5$$

(8



المثلثان متشابهان حسب مسلمة AA

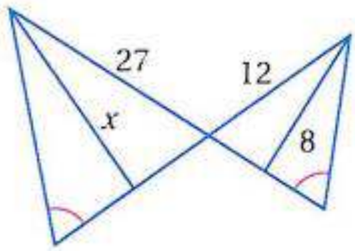
إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طولي القطعتين المتوسطتين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{21}{x} = \frac{14+14}{6+6}$$

$$x = \frac{21 \times 12}{28}$$

$$x = 9$$

(9



المثلثان متشابهان حسب مسلمة AA

إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين كل ارتفاعين متناظرين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{8}{x} = \frac{12}{27}$$

$$x = \frac{27 \times 8}{12}$$

$$x = 18$$

10) **طرق:** يشكل الطريقان المتقاطعان في الشكل أدناه مثلثين متشابهين. إذا كان $AC = 382\text{ ft}$، $MP = 248\text{ ft}$، وتبعد محطة المحروقات 50 ft عن التقاطع، فكم يبعد المصرف عن التقاطع؟

بما أن المثلثان متشابهان
إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين كل ارتفاعين متناظرين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة

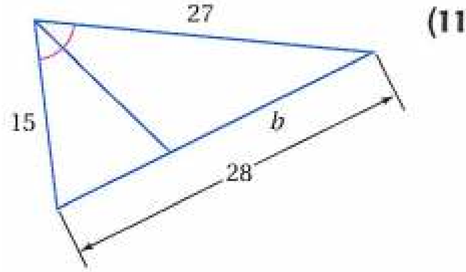
$$\frac{AC}{MP} = \frac{x}{50}$$

$$\frac{382}{248} = \frac{x}{50}$$

$$x = \frac{50 \times 382}{248} = 77\text{ft}$$

أوجد قيمة المتغيّر في كل من السؤالين الآتيين. (لاحظ أن الأشكال ليست مرسومة وفق مقياس رسم):

11)



$$\frac{27}{b} = \frac{15}{28-b}$$

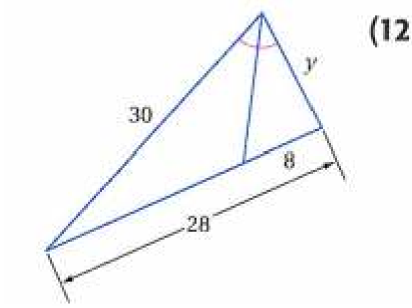
$$756 - 27b = 15b$$

$$15b + 27b = 756$$

$$42b = 756$$

$$b = 18$$

(12



المثلثان متشابهان حسب مسلمة AA

إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طول القطعتين المنصفتين لكل زاويتين متناظرين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

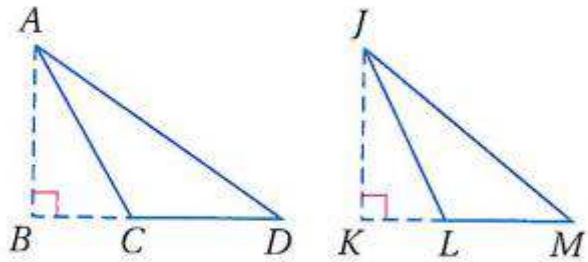
$$\frac{y}{8} = \frac{30}{28-8}$$

$$20y = 30 \times 8$$

$$y = \frac{240}{20}$$

$$y = 12$$

(13 جبر إذا كانت $\overline{JK}$, $\overline{AB}$ ارتفاعين، وكان $AB = 9$, $\triangle DAC \sim \triangle MJL$, $JM = 5x + 3$, $JK = 21$, $AD = 4x - 8$ ، فأوجد قيمة x .



$$\frac{AB}{JK} = \frac{AD}{JM}$$

$$\frac{9}{21} = \frac{4x-8}{5x+3}$$

$$45x + 27 = 21(4x-8)$$

$$45x + 27 = 84x - 168$$

$$84x - 45x = 27 + 168$$

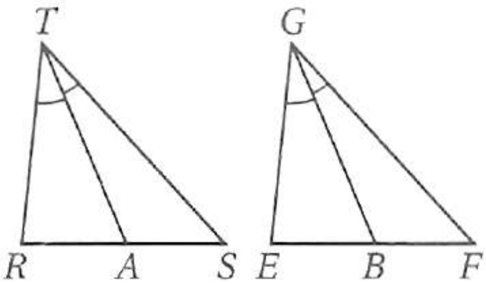
$$39x = 195$$

$$x = 5$$

14) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 2.9 .

المعطيات: $\Delta RTS \sim \Delta EGF$ ، TA, GB منصفا زاويتين.

المطلوب: $\frac{TA}{GB} = \frac{RT}{EG}$



البرهان: بما أن الزوايا المتناظرة في المثلثين المتشابهين تكون متطابقة.

فإن $\angle R \cong \angle E$

$\angle RTS \cong \angle EGF$

ولأن $\angle RTS \cong \angle EGF$ نُصِفتا فإن

$2(m\angle RTA) = m\angle RTS$

$2(m\angle EGB) = m\angle EGF$

ولكن $m\angle RTS = m\angle EGF$

$2m\angle RTA = 2m\angle EGB$

إذن $m\angle RTA = m\angle EGB$

أي أن $\angle RTA \cong \angle EGB$

وحسب مسلمة التشابه AA، يكون $\Delta RTA \sim \Delta EGB$

إذن $\frac{TA}{GB} = \frac{RT}{EG}$

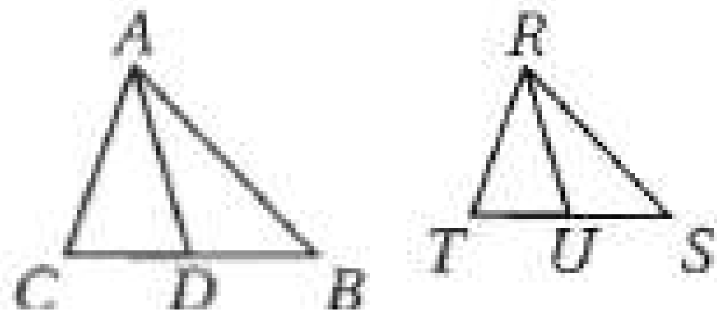
15) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.10 .

المعطيات: $\Delta ABC \sim \Delta RST$

DA قطعة متوسطة لـ ΔABC

UR قطعة متوسطة لـ ΔRST

المطلوب: $\frac{AD}{RU} = \frac{AB}{RS}$



البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\Delta ABC \sim \Delta RST$ ؛ AD قطعة متوسطة لـ ΔABC ؛ RU قطعة متوسطة لـ ΔRST (معطيات)

2) $CD = DB ; TU = US$ (تعريف القطعة المتوسطة)

3) $\frac{CB}{TS} = \frac{AB}{RS}$ (تعريف المثلثين المتشابهين)

4) $CB = CD + DB ; TS = TU + US$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

5) $\frac{CD + DB}{TU + US} = \frac{AB}{RS}$ (بالتعويض)

6) $\frac{2(DB)}{2(US)} = \frac{DB + DB}{US + US} = \frac{AB}{RS}$ (بالتعويض)

7) $\frac{DB}{US} = \frac{AB}{RS}$ (بالتعويض)

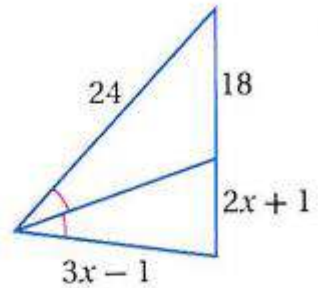
8) $\angle B \cong \angle S$ (تعريف المثلثين المتشابهين)

9) $\Delta ABD \sim \Delta RSU$ (نظرية التشابه SAS)

10) $\frac{AB}{RS} = \frac{AD}{RU}$ (تعريف المثلثين المتشابهين)

جبر: أوجد قيمة x في كل من السؤالين الآتيين:

16)



$$\frac{24}{18}=\frac{3x-1}{2x+1}$$

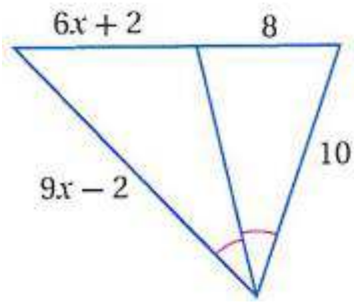
$$48x+24=54x-18$$

$$48x-54x=-18-24$$

$$-6x=-42$$

$$x=7$$

17)



$$\frac{8}{10}=\frac{6x+2}{9x-2}$$

$$72x-16=60x+20$$

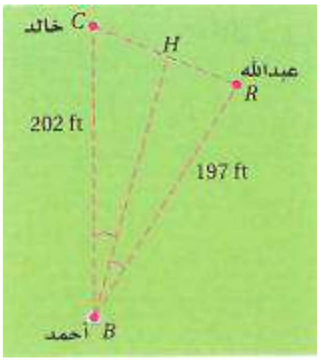
$$72x-60x=20+16$$

$$12x=36$$

$$x=3$$

$$x=7$$

18) **رياضة:** تأمل المثلث المتشكل في المسارات بين أحمد وعبدالله وخالد في أثناء مباراة كرة قدم كما في الشكل المجاور. إذا ركل أحمد الكرة بمسار ينصف $\angle B$ في $\triangle CBR$، فأيهما أقرب إلى الكرة عبد الله أم خالد؟ وضح إجابتك.



عبد الله؛ بما أن مسار الكرة ينصف $\angle B$، فإن النسبة بين طولي القطعتين اللتين قُسم إليهما الضلع المقابل للزاوية CBR تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين.

أو $$\frac{CH}{RH} = \frac{BC}{BR}$$

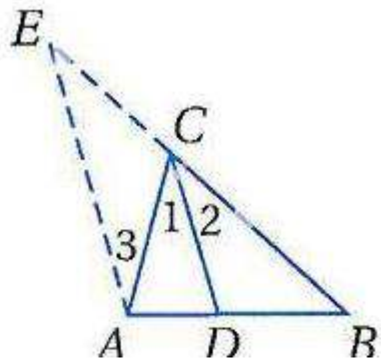
وبالتعويض

$$\frac{CH}{RH} = \frac{BC}{BR}$$

وبما أن $\frac{CH}{RH}$ أكبر قليلاً من 1 فإن CH أطول قليلاً من RH؛ ولذلك فإن عبد الله أقرب إلى الكرة.

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كل من السؤالين الآتيين.

19) النظريّة 2.11



معطيات: CD تنصف $\angle ACB$ ،

المطلوب: $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{DB}$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) CD تنصف $\angle ACB$ ، وبالرسم AE □CD . (معطيات)

2) $\dfrac{EC}{BC} = \dfrac{AD}{DB}$ (نظرية التناسب في المثلث)

3) $\angle 2 \cong \angle 1$ (تعريف منصف الزاوية)

4) $\angle 1 \cong \angle 3$ (نظرية الزوايا المتبادلة داخلياً)

5) $\angle E \cong \angle 2$ (مسلمة الزوايا المتناظرة)

6) $\angle E \cong \angle 3$ (خاصية التعدي)

7) $CE \equiv CA$ (عكس نظرية المثلث متطابق الضلعين)

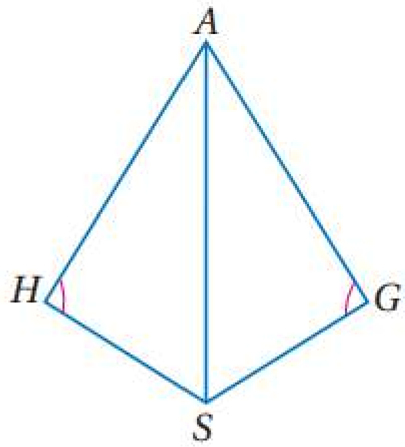
8) $AC = EC$ (تعريف القطعتين المتطابقتين)

9) $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{DB}$ (بالتعويض)

20) **المعطيات:** $\overline{AS}$ تنصف $\angle HAG$

$\angle H \cong \angle G$

المطلوب: إثبات أن: $\frac{HS}{GS} = \frac{AH}{AG}$



معطيات: $\overline{AS}$ تنصف $\angle HAG$ ، $\angle G \cong \angle H$

المطلوب: $\frac{AH}{AG} = \frac{HS}{GS}$

البرهان: العبارات (المبررات)

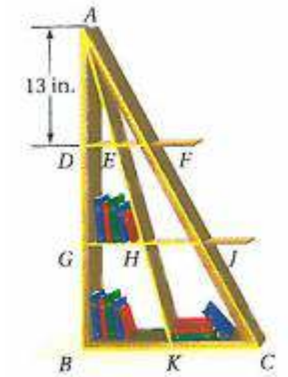
1) $\overline{AS}$ تنصف $\angle HAG$ (معطى)

2) $\angle GAS = \angle HAS$ (تعريف القطعة المنصفة)

3) $\Delta HAS \sim \Delta SAG$ (حسب مسلمة التشابه بزاويتين AA)

4) $\frac{AH}{AG} = \frac{HS}{GS}$ (تعريف المثلثين المتشابهين)

(21 **أثاث:** يمثل الشكل المجاور خزانة كتب مثلثة الشكل، المسافة بين كل رفّين تساوي 13 in، و $\overline{AK}$ قطعة متوسطة لِـ $\triangle ABC$. إذا كان $EF = 3\frac{1}{3}$ in فكم يكون BK؟



$$EF = DE = 3\frac{1}{2}$$

$$AB = 13 \times 3 = 39 \text{ in.}$$

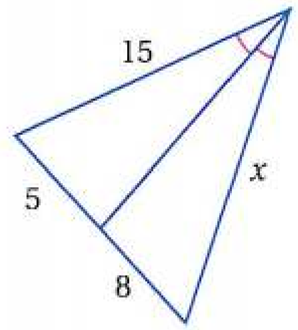
$$\Delta ADE \sim \Delta ABK$$

$$\frac{13}{39} = \frac{3.5}{BK}$$

$$BK = \frac{39 \times 3.5}{13} = 10.5 \text{ in.}$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

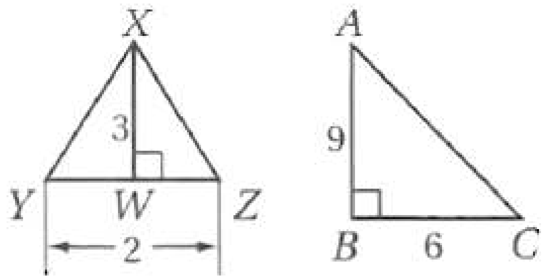
22) **اكتشف الخطأ:** يحاول كل من عبد الله وفيصل أن يجد قيمة x في الشكل المجاور.
يقول عبد الله: لإيجاد قيمة x أحل التناسب $\frac{15}{x} = \frac{5}{8}$، ويقول فيصل: لإيجاد قيمة x،
أحل التناسب $\frac{8}{15} = \frac{5}{x}$، أيٌّ منهما على صواب؟ وضح إجابتك.



عبد الله؛ وفق نظرية منصف زاوية في مثلث
التناسب الصحيح هو $\frac{5}{8} = \frac{15}{x}$

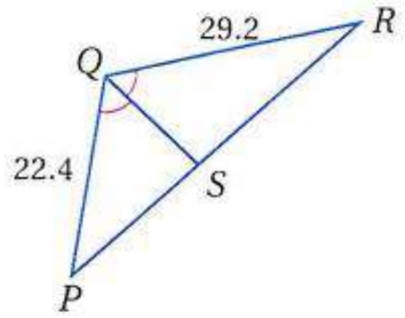
23) **تبرير:** أوجد مثالًا مضادًّا للعبارة الآتية. وضِّح إجابتك.

"إذا كانت النسبة بين ارتفاع مثلث وطول أحد أضلاعه تساوي النسبة بين الارتفاع وطول الضلع المناظرين لهما في مثلث آخر، فإنّ المثلثين متشابهان".



$\frac{XW}{YZ} = \frac{AB}{BC}$ **، ولكن** ΔABC **لا يشابه** ΔXYZ

24) **تحدٍّ:** إذا كان محيط $\triangle PQR$ يساوي 94 وحدة، $\overline{QS}$ منصّف في $\angle PQR$، فأوجد RS، PS.



محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

محيط المثلث = $94 = 29.2 + 22.4 + RP$

$42.4 = RP$

المثلثان متشابهان حسب مسلمة AA

إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طول القطعتين المنصفتين لكل زاويتين متناظرين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

بفرض أن طول الضلع $x = RS$

$$\frac{QR}{QP} = \frac{RS}{SP}$$

$$\frac{29.2}{22.4} = \frac{x}{42.4 - x}$$

$$22.4x = 1238.08 - 29.2x$$

$$51.6x = 1238.08$$

$$x = RA = 24$$

$$PS = 42.4 - x$$

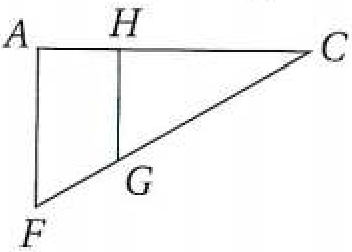
$$PS = 18.4$$

25) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين النظريّة 2.9 والنظرية 2.11 .

تتضمن كلا النظريتين قطعة مستقيمة تنصف زاوية، ونسباً متكافئة. نظرية منصف الزاوية تنطبق على مثلث واحد، بينما تنطبق النظرية 9-2 على مثلثين متشابهين بخلاف نظرية منصف الزاوية التي تجزئ الضلع المقابل إلى قطعتين مستقيمتين بنسبة مساوية للنسبة بين الضلعين الآخرين، النظرية 9-2 تربط طول منصف الزاوية بأطوال الأضلاع.

تدريب على الاختبار المعياري

26) أي الحقائق الآتية ليست كافية لإثبات أن المثلثين ACF و HCG متشابهان؟



A $\overline{AF} \parallel \overline{HG}$

B $\frac{AC}{HC} = \frac{FC}{GC}$

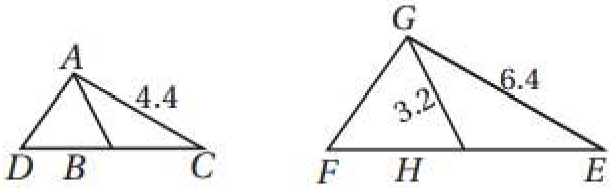
C $\frac{CG}{CF} = \frac{1}{2}$

D $\angle FAH$ و $\angle CHG$ قائمتان.

C $\frac{CG}{CF} = \frac{1}{2}$

27) **إجابة قصيرة:** في الشكلين أدناه، $\overline{DB} \cong \overline{BC}$ ، $\overline{FH} \cong \overline{HE}$

إذا كان $\triangle ACD \sim \triangle GEF$ ، فأوجد AB .



بما أن $FH \cong HE$, $DB \cong BC$ إذا AB , GH متوسطات

إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طول القطعتين المتوسطتين تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة.

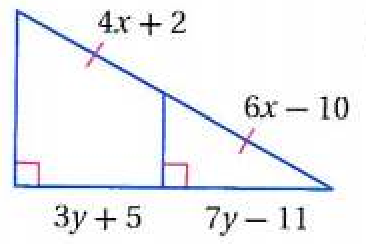
$$\frac{3.2}{AB} = \frac{6.4}{4.4}$$

$$AB = \frac{4.4 \times 3.2}{6.4} = 2.2$$

مراجعة تراكمية

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي. (الدرس 3-2)

(28



$4x + 2 = 6x - 10$

$4x - 6x = -10 - 2$

$-2x = -12$

$x = 6$

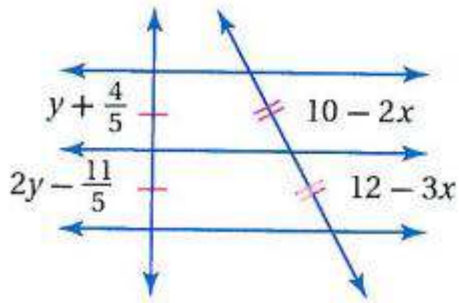
$7y - 11 = 3y + 5$

$7y - 3y = 5 + 11$

$4y = 16$

$y = 4$

(29



$10 - 2x = 12 - 3x$

$10 - 12 = -3x + 2x$

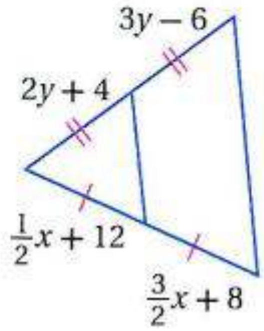
$-2 = -x$

$x = 2$

$$y + \frac{4}{5} = 2y - \frac{11}{5}$$

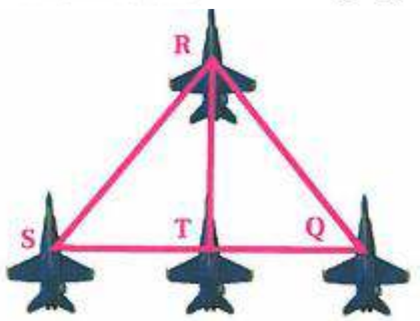
$$2y - y = \frac{4}{5} + \frac{11}{5}$$
$$y = \frac{15}{5}$$
$$y = 3$$

(30



$$3y - 6 = 2y + 4$$
$$3y - 2y = 4 + 6$$
$$y = 10$$
$$\frac{1}{2}x + 12 = \frac{3}{2}x + 8$$
$$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x = 12 - 8$$
$$x = 4$$

(31 **طائرات:** في عرض للطائرات النفاثة شكلت الطائرات تشكيلًا يبدو كمثلثين بينهما ضلع مشترك. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $\triangle SRT \cong \triangle QRT$ علمًا بأن T منتصف $\overline{SQ}$، و $\overline{SR} \cong \overline{QR}$. (مهارة سابقة)



المعطيات: $SR \equiv QR$ ، T نقطة منتصف SQ

المطلوب: $\Delta SRT \equiv \Delta QRT$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $SR \equiv QR$ ، T نقطة منتصف SQ . (معطيات)

2) $ST \equiv TQ$. (تعريف نقطة المنتصف)

3) $RT \equiv RT$ (خاصية الانعكاس)

4) $\Delta SRT \equiv \Delta QRT$ (SSS)

أوجد المسافة بين كل نقطتين في كل مما يأتي:

32) $E(-3,-2), F(5,8)$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$
$$\sqrt{(8+2)^2+(5+3)^2}=\sqrt{100+64}=12.8$$

33) $A(2,3), B(5,7)$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$
$$\sqrt{(3-7)^2+(2-5)^2}=\sqrt{25}=5$$

34) $C(-2,0), D(6,4)$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$
$$\sqrt{(0-4)^2+(-8)^2}=\sqrt{80}=8.9$$

35) $W(7,3), Z(-4,-1)$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$
$$\sqrt{(3+1)^2+(7+4)^2}=\sqrt{137}=11.7$$

36) $J(-4,-5), K(2,9)$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$
$$\sqrt{(-5-9)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{232}=15.2$$

37) $R(-6,10), S(8,-2)$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$
$$\sqrt{(10+2)^2+(-6-8)^2}=2\sqrt{85}=18.4$$

6-4

توسع: معمل الهندسة: الكسريات

تحليل النتائج:

1) إذا استمررت في هذه العمليّة، فكم يكون عدد المثلثات غير المظلّلة في المرحلة 3؟

$3 \times 9 = 27$

2) ما محيط المثلث غير المظلّل في المرحلة 4؟

طول ضلع المثلث في المرحلة الرابعة $= \frac{1}{2} = \frac{8}{16}$

محيط المثلث $= 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3$

3) إذا استمررت في هذه العملية إلى مالانهاية، فماذا سيحصل لمحيط كل مثلث غير مظلّل؟

سيقترب المحيط من الصفر

4) **تحدّ** أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\triangle KAP$ متطابق الأضلاع.

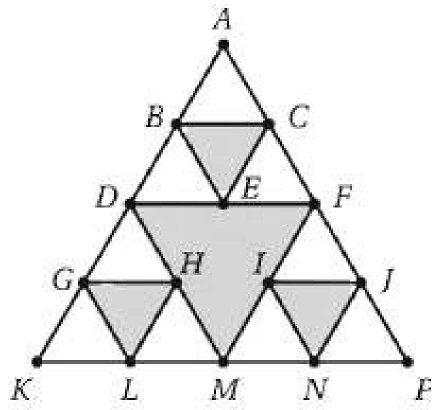
D, F, M, B, C, E منتصفات $\overline{FD}, \overline{AF}, \overline{DA}, \overline{PK}, \overline{AP}, \overline{KA}$ على الترتيب.

المطلوب: $\triangle BAC \sim \triangle KAP$.

المعطيات: ΔKAP متطابق الأضلاع.

D, F, M, B, C, E منتصفات FD, AF, DA, PK, AP, KA على الترتيب.

المطلوب: ΔBAC ▯ ΔKAP



البرهان: العبارات (المبررات)

1) ΔKAP متطابق الأضلاع. النقاط E, C, B, M, F, D هي منتصفات FD, AF, DA, PK, AP, KA على الترتيب. (معطيات)

2) DF قطعة منصفة في ΔKAP، BC قطعة منصفة في ΔADF (تعريف القطعة المنصفة)

3) $BC \parallel DF$, $DF \parallel KP$ (نظرية القطعة المنصفة للمثلث)

4) $BC \parallel KP$ (القطعتان الموازيتان لقطعة مستقيمة متوازيتان)

5) $\angle AKP \equiv \angle ABC$ (مسلمة الزوايا المتناظرة)

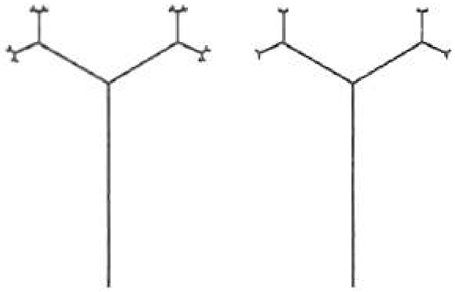
6) $\angle A \equiv \angle A$ (خاصية الانعكاس)

7) $\Delta KAP \sim \Delta BAC$ (نظرية التشابه AA)

5) يمكن رسم شجرة كسريّة برسم غصنين جديدين من نهاية كل غصن أصلي، بحيث يكون طول كل غصن منها مساويًا ثلث طول الغصن السابق له .

a) ارسم المرحلة 3 والمرحلة 4 للشجرة الكسريّة. ما العدد الكلّي للأغصان في المراحل الأربع جميعها؟ (لا تعدّ السيقان)

المرحلة 1 :2، المرحلة 2 :6، المرحلة 3 :14، المرحلة 4 :30



المرحلة 3 المرحلة 4

b) اكتب عبارة جبرية يمكن استعمالها للتنبؤ بالعدد الكلّي للأغصان في نهاية كل مرحلة.

في المرحلة n، العدد الكلي للأغصان يساوي $2\left(2^n - 1\right)$

6) اكتب صيغة للمجموع S لحدود الصف n لمثلث باسكال.

$S = 2^{n-1}$

7) ما مجموع حدود الصف الثامن في مثلث باسكال؟

$\left(2^{8-1}\right) = 2^7 = 128$

تمارين:

اكتب صيغة ترددية لِـ $F(x)$.

8)

x	2	4	6	8	10
$F(x)$	3	7	11	15	19

$F(x) = 2x - 1$

9)

x	0	5	10	15	20
$F(x)$	0	20	90	210	380

$F(x) = x^2 - x$

10)

x	1	2	4	8	10
$F(x)$	1	0.5	0.25	0.125	0.1

$F(x) = \frac{1}{x}$

11)

x	4	9	16	25	36
$F(x)$	5	6	7	8	9

$F(x) = \sqrt{x} + 3$

12) **تحدٍّ** يمثّل النمط أدناه متتابعة أعداد مثلثيّة. ما عدد النقاط في الحد الثامن في هذه المتتابعة؟ هل من الممكن كتابة صيغة ترددية يمكن استعمالها لتحديد عدد النقاط في العدد المثلثي ذي الرقم n في هذه المتتابعة؟ وإذا كان ذلك ممكنًا فاكتب الصيغة، وإلّا فوضّح السبب.

1 2 3 4

الحد الثامن = 36

$$F(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

دليل الدراسة والمراجعة

اختبار المفردات:

1) طرفا ___؟___ لمثلث هما منتصفا ضلعين فيه.
f القطعة المنصفة

2) إذا كانت $\angle A \cong \angle X, \angle C \cong \angle Z$ فإنّ $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ وفق ___؟___
c مسلمة التشابه AA

3) النسبة بين طولي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هي ___؟___
b معامل التشابه

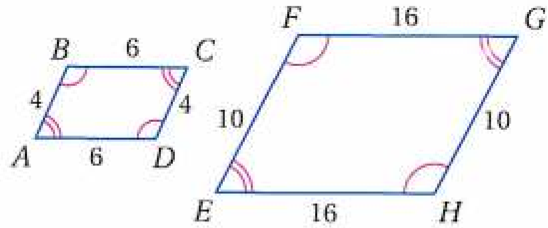
4) إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين متناسبة، فإن المثلثين متشابهان وفق ___؟___
d نظرية التشابه SSS

5) يطلق أحيانًا على معامل التشابه بين مضلعين اسم ___؟___ .
a نسبة التشابه

6) إذا كانت $\angle A = \angle F$ ، وكان $\frac{DF}{EF} = \frac{BA}{CA}$ ، فإن $\triangle BAC \sim \triangle EFD$ وفق ___؟___.
e نظرية التشابه SAS

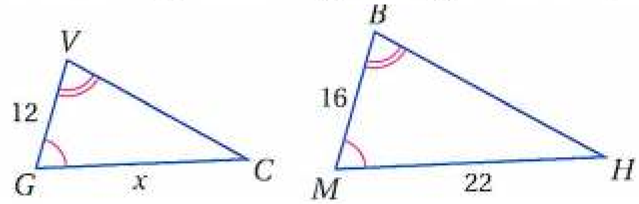
2-1 المضلعات المتشابهة

1) حدد ما إذا كان المضلعان أدناه متشابهين أم لا؟ وإن كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. وإلا فوضح السبب.



لا؛ المضلعان ليسا متشابهين؛ لأن الأضلاع المتناظرة ليست متناسبة.

2) المثلثان في الشكل أدناه متشابهان. أوجد قيمة x .



$$\frac{MP}{GV} = \frac{MH}{CG}$$

$$\frac{16}{12} = \frac{22}{x}$$

$$x = \frac{22 \times 12}{16}$$

$$x = 16.5$$

3) **النظام الشمسي:** في نموذج دقيق لنظامنا الشمسي، وضعت سميرة الأرض على بعد 1 ft من الشمس، علمًا بأن المسافة الحقيقية بين الأرض والشمس 93000000 mi. إذا كانت المسافة من بلوتو إلى الشمس 3695950000 mi، فعلى أي بعد من الشمس ستضع سميرة بلوتو في نموذجها؟

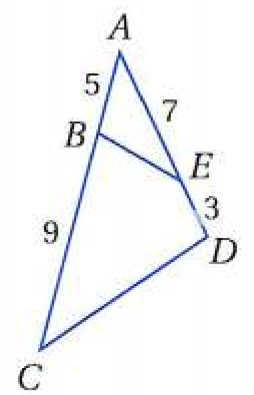
النظام الشمسي: ستصبح سميرة بلوتو على بعد 39.7 ft تقريباً من الشمس.

$$39.7 = \frac{3695950000}{93000000} = \frac{x}{1}$$

2-2 المثلثات المتشابهة

حدد ما إذا كان المثلثان في كل من السؤالين الآتيين متشابهين أم لا؟ وإن كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه. و وضّح إجابتك.

(4



$\angle BAE = \angle CAD$

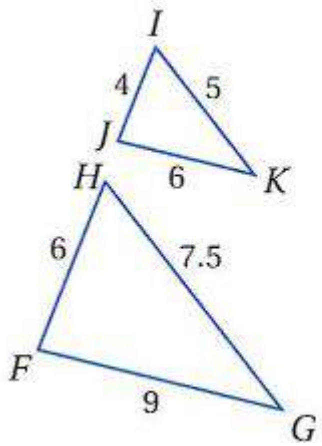
$$\frac{AB}{AD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

بما أنه يوجد ضلعان في المثلث الأول طولهما متناسبان مع طول نظيرهما في الثاني وأن الزاويتان المحصورة بينهم متطابقتان إذا:

$\Delta ABE \sim \Delta ADC$ وفق نظرية التشابه SAS.

(5



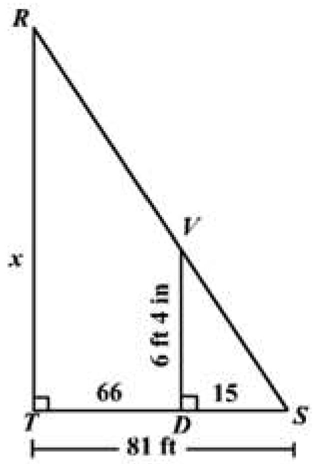
$$\frac{IK}{HG} = \frac{5}{7.5} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{IJ}{HF} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{JK}{FG} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

ΔIJK □ ΔHFG وفق نظرية التشابه SSS.

6) **أشجار:** يريد عبد الله آن يقدّر ارتفاع شجرة فوقف على مسافة 66 ft منها، فكانت نهاية ظلّه ونهاية ظل الشجرة عند النقطة نفسها، إذا كان طول عبد الله 6 ft و 4 in وطول ظلّه 15 ft، فما ارتفاع الشجرة؟



$$\frac{x}{66} = \frac{4 \times 12 + 6}{15}$$

6ft 41 in = $6(12) + 4$in = 76 in.

15 ft. = $15(12)$ = 180 in.

66ft. = $66(12) = 792$ in.

نفرض أن ارتفاع الشجرة x in.

$$\angle T \cong \angle D = 90^\circ$$

$\angle S$ مشتركة

$$\angle S \cong \angle S$$

باستخدام مسلمة التشابه AA ، ΔTRS □ DVS

$$\frac{x}{76} = \frac{972}{180}$$

$$x(180) = 76(972)$$

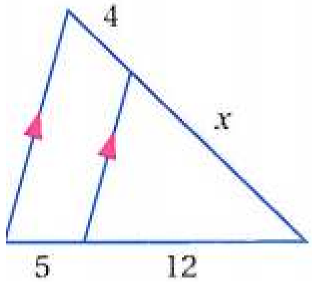
$$180x = 73872$$
$$x = 410.4$$

طول الشجرة = 410.4 in. أو 34.2 ft.

2-3 المستقيمات المتوازية و الأجزاء المتناسبة

أوجد قيمة x في كل من السؤالين الآتيين:

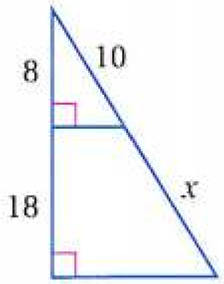
7)



المثلثين المتشابين بحسب AA

$$\frac{x}{4} = \frac{12}{5}$$
$$x = \frac{12 \times 4}{5}$$
$$x = 9.6$$

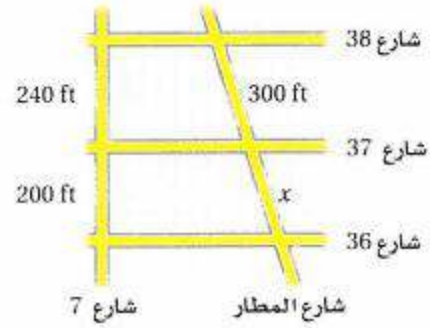
8)



المثلثين المتشابين بحسب AA

$$\frac{10}{x} = \frac{8}{18}$$
$$x = \frac{10 \times 18}{8}$$
$$x = 22.5$$

9) **شوارع:** أوجد المسافة على امتداد شارع المطار بين الشارعين 36 , 37 بفرض أن الشوارع 38 , 37 , 36 متوازية



$$\frac{x}{300} = \frac{200}{240}$$

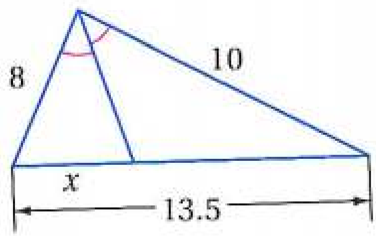
$$x = \frac{200 \times 300}{240}$$

$$x = 250ft$$

2-4 عناصر المثلثات المتشابهة

أوجد قيمة المتغيّر في كل من السؤالين الآتيين:

(10



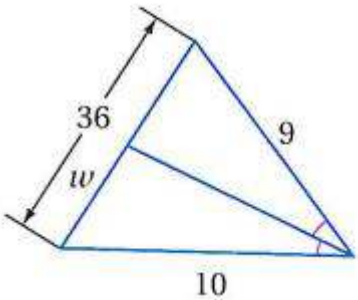
$$\frac{x}{13.5 - x} = \frac{8}{10}$$

$$108 - 8x = 10x$$

$$108 = 18x$$

$$x = 6$$

(11



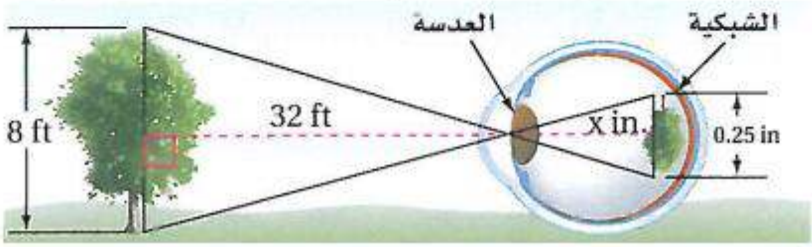
$$\frac{w}{36 - w} = \frac{10}{9}$$

$$360 - 10w = 9w$$

$$360 = 19w$$

$$w = 18.9$$

12) **عين الإنسان:** تستعمل عين الإنسان المثلثات المتشابهة لقلب الشيء وتصغيره عندما يمر خلال العدسة إلى الشبكية فكم المسافة بين عدسة العين والشبكية؟



المسافة بين عدسة العين إلى الشبكية 1 in

$$\frac{x}{32} = \frac{0.25}{8}$$

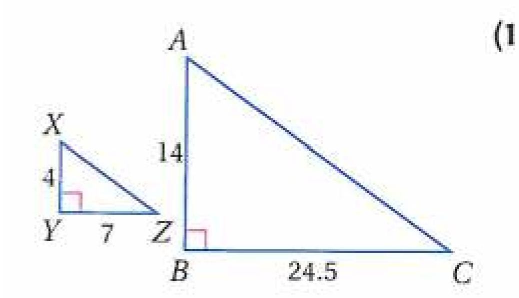
$$x = \frac{0.25 \times 32}{8}$$

$$x = 1\text{in}$$

* اختبار الفصل

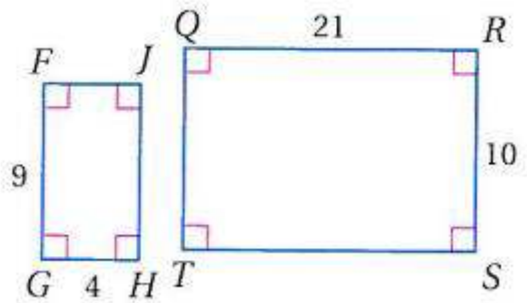
حدّد ما إذا كان المضلعان متشابهين أم لا في كل من السؤالين الآتيين؟
وإن كانا كذلك، فاكتب عبارة التشابه ومعامل التشابه. وإلّا فوضّح السبب.

(1



نعم؛ $\frac{2}{7}$؛ $\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC}$

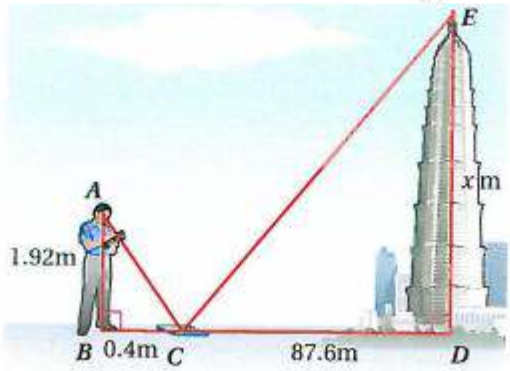
(2



لا؛ $\frac{FG}{QR} \neq \frac{GH}{RS}$

$$\frac{9}{21} \neq \frac{4}{10}$$

3) **أبراج:** استعمل المعلومات الآتية لحل السؤالين الآتيين: لتقدير ارتفاع برج Jin Mao في شنغهاي في الصين، شاهد سائح قمة البرج في مرآة موضوعة على الأرض ووجهها إلى الأعلى.



a) كم مترًا ارتفاع البرج تقريبًا؟

$$\frac{1.92}{x} = \frac{0.4}{87.6}$$

$$x = \frac{87.6 \times 1.92}{0.4}$$

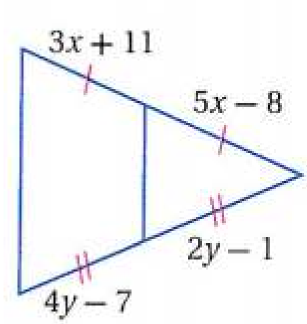
$$x = 420.5m$$

b) لماذا تكون طريقة الانعكاس في المرآة في هذه الحالة أفضل للقياس غير المباشر لارتفاع البرج من استعمال الظل؟

من الصعب قياس طول الظل داخل المدن.

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل من السؤالين الآتيين. مقربًا إجابتك إلى أقرب عشر إن كان ضروريًا.

(4



$3x + 11 = 5x - 8$

$3x - 5x = -8 - 11$

$-2x = -19$

$x = 9.5$

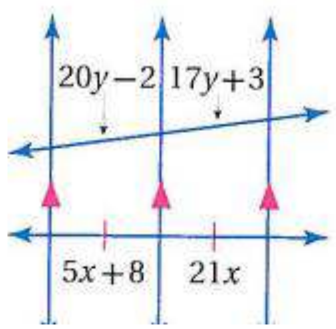
$2y - 1 = 4y - 7$

$4y - 2y = -1 + 7$

$2y = 6$

$y = 3$

(5



$20y - 2 = 17y + 3$

$20y - 17y = 3 + 2$

$3y = 5$

$y = 1.7$

$$20y - 2 = 17y + 3$$
$$20y - 17y = 3 + 2$$
$$3y = 5$$
$$y = 1.7$$

6) **جبر:** $\triangle MNP$ متطابق الأضلاع محيطه $12a + 18b$ ، إذا كانت $\overline{QR}$ قطعة منصّفة فيه، فما قيمة QR؟

$$\frac{12a + 18b}{3} = 4a + 6b$$

$$QR = \frac{4a + 6b}{2} = 2a + 3b$$

7) **جبر:** $\triangle ABC$ قائم الزاوية ومتطابق الضلعين، وطول وتره h إذا كانت $\overline{DE}$ قطعة منصّفة فيه طولها $4x$ ، فما محيط $\triangle ABC$؟

بما أن القطعة المنصفة طولها = $4x$ إذن طول الضلع $8x$

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

$$8x + 8x + h = 16x + h$$

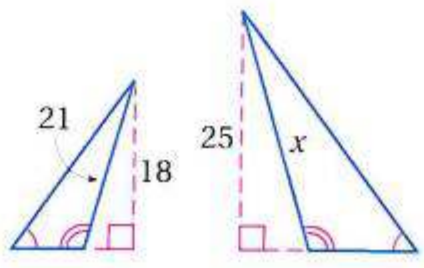
8) **نماذج:** لدى سالم نموذج لسيارة سباق حقيقيّة. إذا كان طول السيارة الحقيقيّة 10 ft و 6 in ، وطول النموذج 7 in ، فما معامل تشابه النموذج إلى السيارة الحقيقيّة؟

1: 18

$$8x + 8x + h = 16x + h \quad 8x + 8x + h = 16x + h$$
$$8x + 8x + h = 16x + h \quad 8x + 8x + h = 16x + h$$

أوجد قيمة x في كل من السؤالين الآتيين:

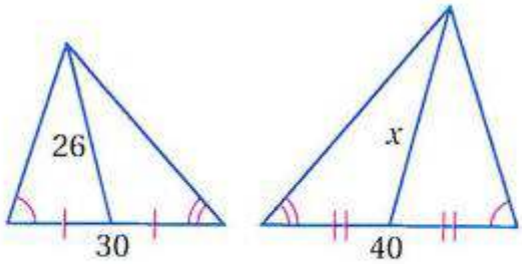
9)



$$\frac{x}{21}=\frac{25}{18}$$

$$x=\frac{25\times 21}{18}=29.2$$

(10

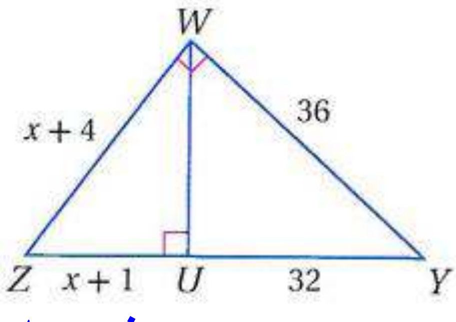


$$\frac{x}{40}=\frac{26}{30}$$

$$x=\frac{40\times 26}{30}=34.7$$

جبر: عيّن المثلثين المتشابهين، وأوجد كل طول مشار إليه في كل من السؤالين الآتيين:

(11 WZ, UZ



ΔWUZ □ ΔYUW وفق مسلمة التشابه AA

$$\frac{36}{x+4}=\frac{32}{x+1}$$

$$32x+128=36x+36$$

$$36x-32x=128-36$$

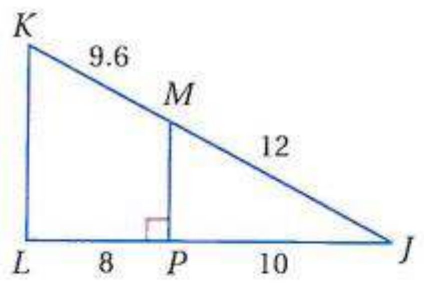
$$4x=92$$

$$x=23$$

$$WZ=x+4=27$$

$$UZ=x+1=24$$

KL (12



$\Delta MJP \sim \Delta KJL$ وفق نظرية التشابه AA

$$(KL)^2=(KJ)^2-(JL)^2$$

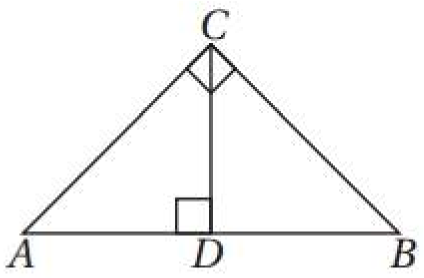
$$(KL)^2=(9.6+12)^2-(18)^2$$

$$KL=11.9$$

* الإعداد للاختبارات المعيارية

اقرأ كل سؤال ممَّا يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة:

1) أيٌّ التناسبات التالية غير صحيحة في الشكل أدناه؟



A $\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{CD}$

B $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$

C $\frac{CB}{DB} = \frac{AB}{CB}$

D $\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{AB}$

C : $\frac{CB}{DB} = \frac{AB}{CB}$

2) أي شكل يمكن أن يكون مثالًا مضادًا للتخمين أدناه؟

إذا كانت جميع زوايا شكل رباعي قوائم فإنه مربّع.

F متوازي الأضلاع

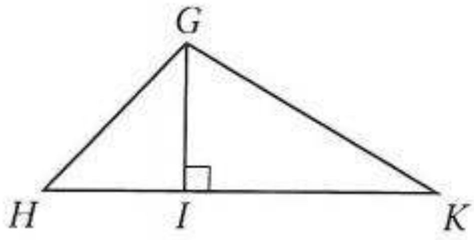
G المستطيل

H المعين

J شبه المنحرف

G : المستطيل

3) أيّ مما يأتي لا يكفي لإثبات أنّ $\triangle HIG \sim \triangle GIK$؟



A $\angle GKI \cong \angle HGI$

B $\frac{HI}{GI} = \frac{GI}{IK}$

C $\frac{GH}{GI} = \frac{GK}{IK}$

D $\angle IGK \cong \angle IHG$

C: $\frac{GH}{GI} = \frac{GK}{IK}$

4) أي مثلثين مما يأتي ليسا بالضرورة متشابهين؟

F مثلثان قائما الزاوية في كل منهما زاوية قياسها $30°$

G مثلثان قائما الزاوية في كل منهما زاوية قياسها $45°$

H مثلثان متطابقا الساقين

J مثلثان متطابقا الأضلاع

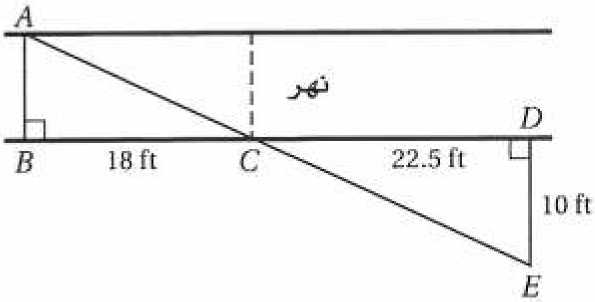
H: مثلثان متطابقا الساقين

* اختبار معياري

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي. ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على نموذج الإجابة:

1) يُريد عادل أن يقيس عرض نهر صغير. فعيّن الأطوال المبيّنة في الشكل أدناه.



أوجد العرض التقريبي للنهر باستعمال هذه المعلومات.

A 40.5 ft   **C** 7 ft

B 6 ft   **D** 8 ft

$\Delta ABC \sim \Delta EDC$ حسب مسلمة AA لأن $\angle ACB = \angle ECD$ بالتبادل

بالرأس و $\angle ABC = \angle EDC = 90^\circ$

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC}$$

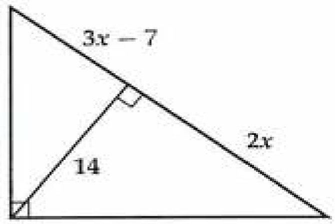
$$\frac{AB}{10} = \frac{18}{22.5}$$

$$AB = \frac{10 \times 18}{22.5}$$

$$AB = 8ft$$

D: 8ft

2) أوجد قيمة x في الشكل أدناه؟



A 5

B 7

C 8

D 10

7 : B

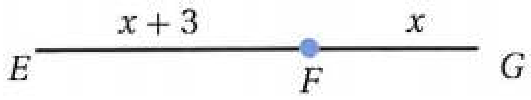
$$\frac{14}{14} = \frac{3x - 7}{2x}$$

$$2x = 3x - 7$$

$$3x - 2x = 7$$

$$x = 7$$

3) إذا كان $EG = 15m$ ، فما طول $\overline{EF}$؟



A 6 m

B 9 m

C 10 m

D 12 m

9m : B

$$EG = EF + FG$$

$$15 = x + 3 + x$$

$$15 = 2x + 3$$

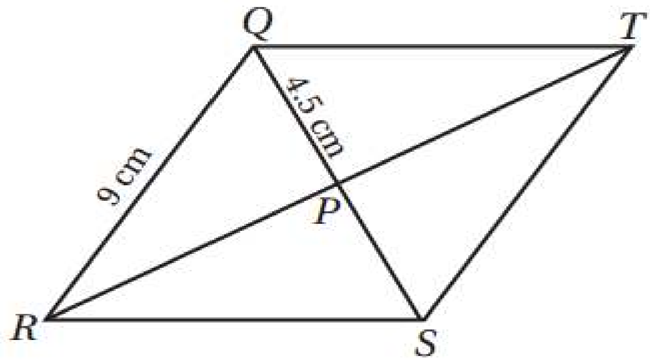
$$2x = 15 - 3$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

$$EF = 6 + 3 = 9$$

4) أوجد $m\angle RST$ في المعين $QRST$ أدناه.



A $60°$ C $120°$

B $90°$ D $150°$

C : $120°$

من خصائص المعين أن قطراه متطابقان وينصف كل منهما الأخر

إذا $PS = QP = 4.5$

$QS = 9$

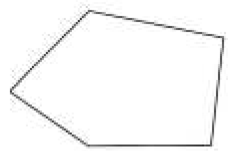
$ST = 9$

ΔQST متطابق الضلعين

وبالتبادل $\angle RST = 60 + 60 = 120$

و $QS = ST$

5) ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع أدناه؟



A $450°$ C $630°$

B $540°$ D $720°$

$n = 5$

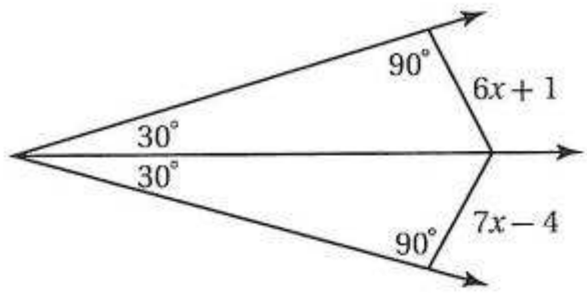
$(n-2).180$

$(5-2).180$

$3.180 = 540°$

B: $540°$

6) أوجد قيمة x .



A 3 C 5

B 4 D 6

5 : C

$$6x + 1 = 7x - 4$$

$$6x - 7x = -4 - 1$$

$$-x = -5$$

$$x = 5$$

7) شكلان رباعيان متشابهان بمعامل تشابه 3:2. إذا كان محيط الشكل الرباعي الأكبر 21 m ، فما محيط الشكل الرباعي الأصغر ؟

A 14 m C 28 m

B 17.5 m D 31.5 m

بفرض أن محيط الصغير x

14m A

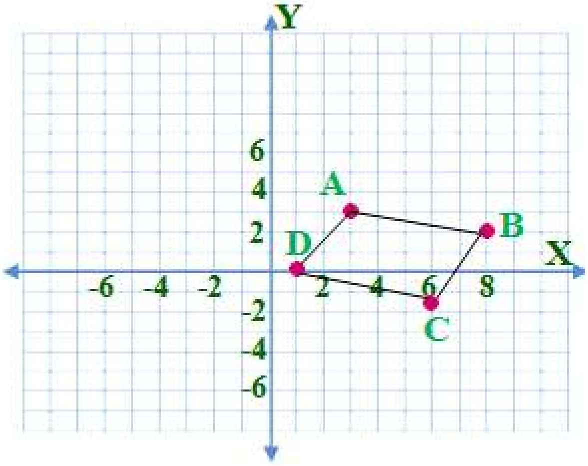
$$\frac{3}{2} = \frac{21}{x}$$

$$x = \frac{2 \times 21}{3}$$

$$= 14m$$

أسئلة ذات إجابات قصيرة

8) هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $ABCD$ الذي رؤوسه: $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$، وحدد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا.



ميل $\overline{AB}$: $\frac{3-8}{3-2} = \frac{-5}{1} = -5$

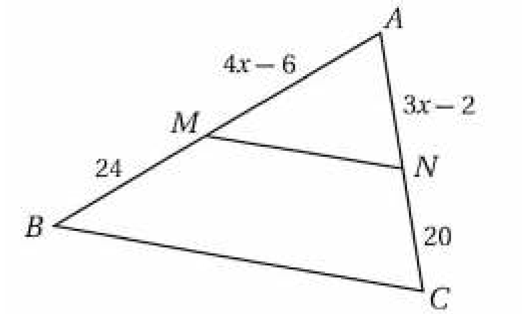
ميل $\overline{CD}$: $\frac{6-1}{-1-0} = \frac{5}{-1} = -5$

ميل $\overline{AD}$: $\frac{3-1}{3-0} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

ميل $\overline{CB}$: $\frac{8-6}{2+1} = \frac{2}{3}$

بما أن ميل كل ضلعين متقابلين متساويين إذا هما متوازيان
إذا الشكل متوازي أضلاع

9) **إجابة شبكيّة :** إذا كان $\overline{BC} \parallel \overline{MN}$ في المثلث أدناه، فأوجد قيمة x .



بما أن $MN \parallel BC$ إذا $\Delta ABC \sim \Delta AMN$ حسب مسلمة AA

$$\frac{4x-6}{24}=\frac{3x-2}{20}$$

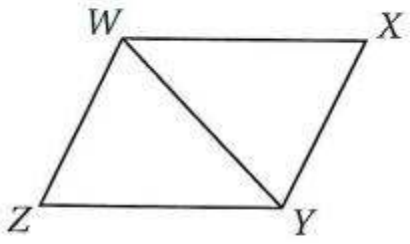
$$72x-48=80x-120$$

$$80x-72x=-48+120$$

$$8x=72$$

$$x=9$$

10) الشكل الرباعي $WXYZ$ معين. إذا كان $m\angle XYZ = 110°$، فأوجد $m\angle ZWY$.



بما أن الشكل الرباعي معين إذا قطراه ينصف الزوايا

$$\mathbf{m\angle XYZ = 110}$$

$$\mathbf{m\angle WYX = \frac{110}{2} = 55^{\circ}}$$

وبما أن من خواص المعين إن كل ضلعين متقابلين متوازيين إذا

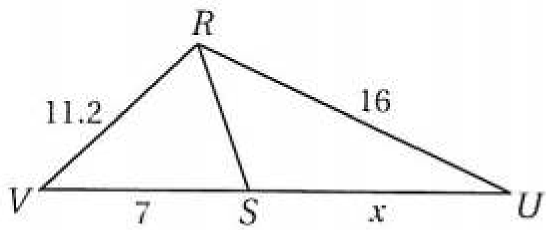
$$\mathbf{m\angle ZWY = \angle WYX = 55^{\circ}}$$

11) ما المعاكس الإيجابي للعبارة أدناه؟

إذا كان صالح مولودًا في الرياض، فإنّه مولود في السعوديّة.

اذا لم يكن صالح مولوداً في السعودية فانه لم يولد في الرياض

12) **إجابة شبكيّة:** إذا كان $\overline{RS}$ تنصّف $\angle VRU$ في المثلث أدناه، فأوجد قيمة x.



بما أن $\overline{RS}$ تنصف $\angle VRU$ إذا باستعمال نظرية منصف الزاوية

$$\mathbf{\frac{US}{SV} = \frac{RU}{RV}}$$

$$\mathbf{\frac{x}{7} = \frac{16}{11.2}}$$

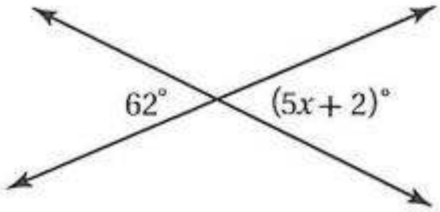
$$\mathbf{x = \frac{7 \times 16}{11.2} = 10}$$

13) **إجابة شبكيّة:** يبين مقياس رسم خريطة أن $1\text{ cm} = 25\text{ km}$، ما المسافة الحقيقية بين مدينتين إذا كانت المسافة بينهما على الخريطة 4.5 cm؟

$$\frac{1}{4.5} = \frac{25}{x}$$

$$x = 112.5\text{km}$$

14) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



بالتقابل بالرأس $\angle 5x + 2 = \angle 62$

$$62 = 5x + 2$$

$$5x = 62 - 2$$

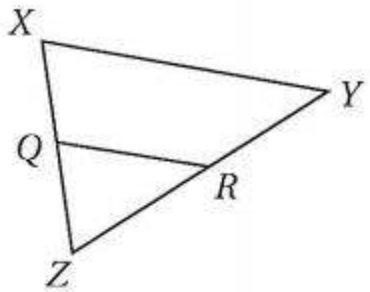
$$5x = 60$$

$$x = 12$$

أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك على نموذج الإجابة مبينًا خطوات الحل.

15) استعمل الشكل أدناه للإجابة عن كل من الأسئلة الآتية:



a) إذا كان $\overline{XY} \parallel \overline{QR}$ فما العلاقة بين الأطوال XQ, QZ, YR, RZ ؟

$$\frac{XQ}{QZ} = \frac{YR}{RZ}$$

b) إذا كان $YR = 20 , QZ = 12 , XQ = 15 , \overline{XY} \parallel \overline{QR}$ ، فما طول $\overline{RZ}$ ؟

$$\frac{XQ}{QZ} = \frac{YR}{RZ}$$

$$\frac{15}{12} = \frac{20}{RZ}$$

$$RZ = \frac{20 \times 12}{15}$$

$$RZ = 16$$

c) إذا كان $QR = 9.5 , XQ = QZ , \overline{XY} \parallel \overline{QR}$ ، فما طول $\overline{XY}$؟

$$QR = \frac{1}{2} XY$$

$$9.5 = \frac{1}{2} XY$$

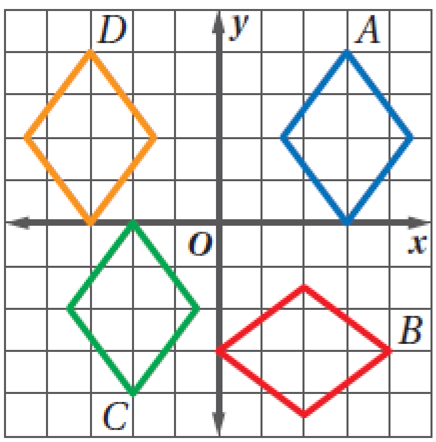
$$XY = 19$$

7

التحويلات الهندسية والتماثل

التهيئة

صنِّف كلًّا من التحويلات الهندسية الآتية إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران مستعملًا الشكل المجاور.



1) A إلى B

دوران

2) D إلى A

إزاحة أو انعكاس

3) A إلى C

إزاحة

4) **هندسة إحداثية :** إحداثيات رؤوس $\triangle PQR$ هي $Q(3,0)$, $R(4,3)$, $P(-4,2)$. إذا أُزيح $\triangle PQR$ 4 وحدات إلى أسفل و 6 وحدات إلى اليمين للحصول على $\triangle P'Q'R'$ ، فما إحداثيات رؤوس $\triangle P'Q'R'$ ؟

الاحداثيات بعد الإزاحة: $P^{\hat{O}}(-8,8)$, $Q^{\hat{O}}(-1,6)$, $R^{\hat{O}}(0,-9)$

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد البعد بين كل نقطتين فيما يلي:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

5) $(0,1)\ ,\ (2,8)$

$$d=\sqrt{(2-0)^2+(8-1)^2}$$
$$=\sqrt{4+49}$$
$$=\sqrt{53}$$

6) $(-2,0)\ ,\ (3,3)$

$$d=\sqrt{[3-(-2)]^2+(3-0)^2}$$
$$=\sqrt{25+9}$$
$$=\sqrt{34}$$

7) $(6,4),(2,1)$

$$d=\sqrt{(6-2)^2+(4-1)^2}$$
$$=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}$$
$$=5$$

8) $(-3,-1),(0,5)$

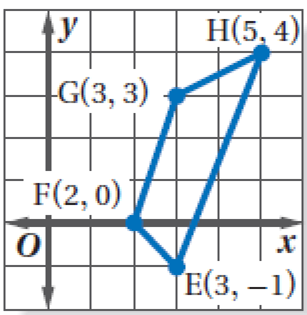
$$d=\sqrt{[0-(-3)]^2+(5-(-1))^2}$$
$$=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$
$$=3\sqrt{5}$$

9) **تصوير:** رسم أسعد صورةً مكبرة لنملة؛ لاستعمالها في درس العلوم، أوجد مقياس الرسم للصورة إذا كان طول النملة الحقيقي $\frac{1}{2}$ in ، وكان طول الصورة 1 ft

1ft. = 12in.

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$$

احسب طول كل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي $EFGH$.



10) $\overline{EF}$

$$d = \sqrt{(2-3)^2 + (0-(-1))^2}$$
$$= \sqrt{1+1}$$
$$= \sqrt{2}$$

11) $\overline{FG}$

$$d = \sqrt{(3-2)^2 + (3-0)^2}$$
$$= \sqrt{1+9}$$
$$= \sqrt{10}$$

12) $\overline{GH}$

$$d = \sqrt{(3-5)^2 + (3-4)^2}$$
$$= \sqrt{4+1}$$
$$= \sqrt{5}$$

13) $\overline{HE}$

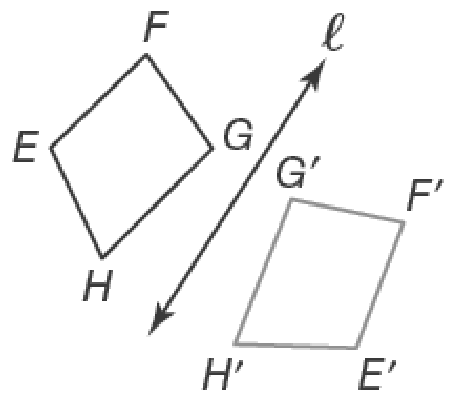
$$d = \sqrt{(5-3)^2 + [4-(-1)]^2}$$
$$= \sqrt{4+25}$$
$$= \sqrt{29}$$

7-1 الانعكاس

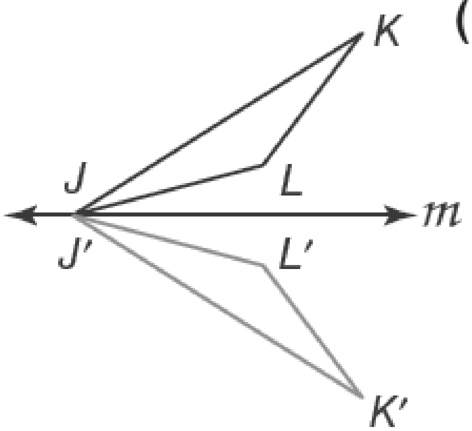
تحقق

ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى:

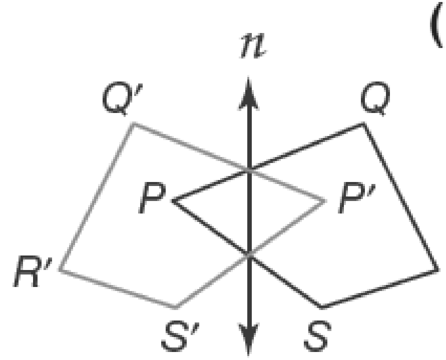
(1A



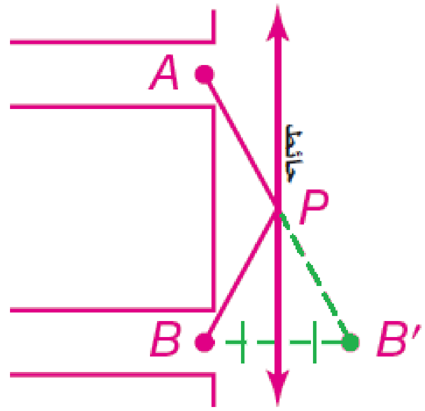
(1B



(1C



2) **مبيعات تذاكر:** يريد فهد أن يختار موقعًا مناسبًا لبيع تذاكر مباراة كرة قدم، عيّن النقطة P على الحائط، بحيث تكون المسافة التي يسيرها شخصٌ ما من النقطة A إلى P ثم إلى النقطة B أقل ما يمكن.



أفهم:

المعطيات:

يريد فهد أن يختار موقعاً مناسباً لبيع تذاكر مباراة كرة القدم

المطلوب:

عين النقطة P على الحائط، بحيث تكون المسافة التي يسيرها شخص ما من النقطة A إلى P ثم إلى النقطة B أقل ما يمكن

خطط:

تكون المسافة المطلوبة أقل ما يمكن عندما يكون هذه النقاط على استقامة واحدة،

حل:

ارسم $\overline{BB'}$ بحيث B' صورة النقطة B بالانعكاس حول الحائط، ثم أصل AB' فيكون $AP + PB'$ أقل ما يمكن

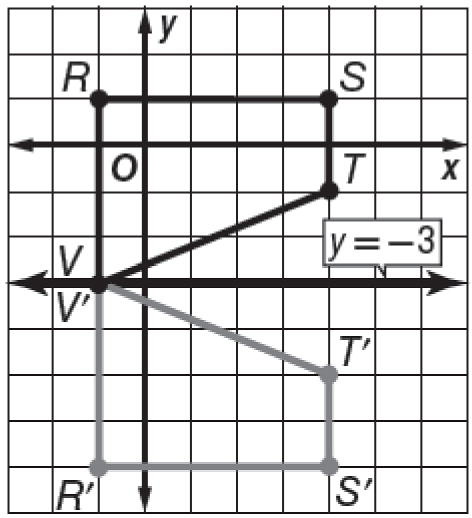
تحقق:

اختر واقع أخرى للنقطة P على الحائط وتأكد ان الموقع الذي تم تحديده هو الذي يجعل المجموع أقل ما يمكن

مثِّل بيانيًّا شبه المنحرف $RSTV$، الذي إحداثيات رؤوسه هي: $V(-1, -3)$, $R(-1, 1), S(4, 1), T(4, -1)$، وارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم المُعطَى في كلٍّ ممّا يأتي:

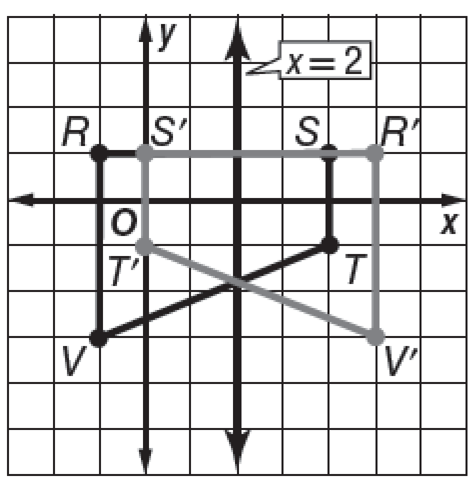
3A) $y = -3$

استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $y = -3$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.



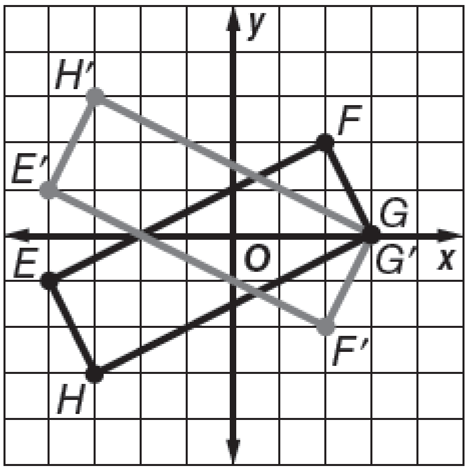
3B) $x = 2$

استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $x = 2$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.



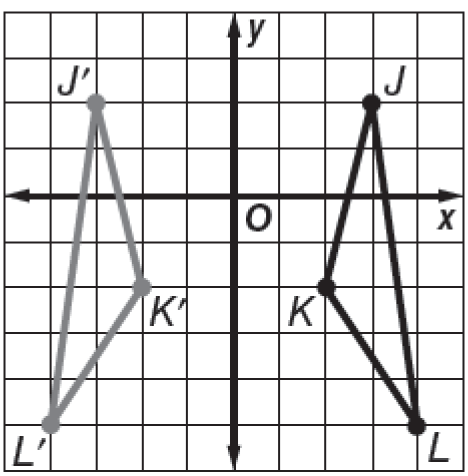
مثّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد.

4A) المستطيل الذي إحداثيات رؤوسه: $G(3,0), H(-3,-3)$, $E(-4,-1), F(2,2)$ بالانعكاس حول المحور x.



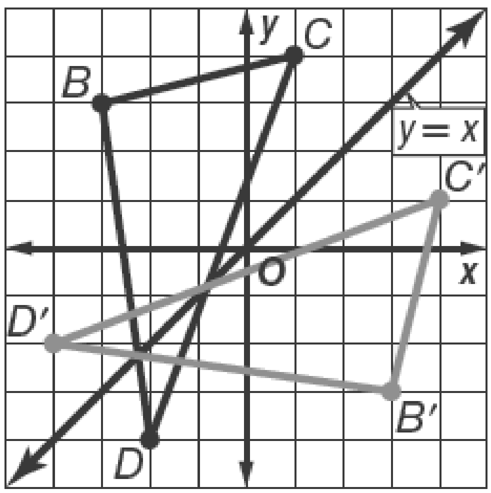
$G(3, 0) \rightarrow G'(3, 0)$
$H(-3, -3) \rightarrow H'(-3, 3)$
$F(2, 2) \rightarrow F'(2, -2)$
$E(-4, -1) \rightarrow E'(-4, 1)$

4B) $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $K(2,-2), L(4,-5)$, $J(3,2)$ بالانعكاس حول المحور y .



$J(3, 2) \rightarrow J'(-3, 2)$
$K(2, -2) \rightarrow K'(-2, -2)$
$L(4, -5) \rightarrow L'(-4, -5)$

5) مثِّل بيانيًّا $\triangle BCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $B(-3, 3), C(1, 4), D(-2, -4)$ ، ثم ارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

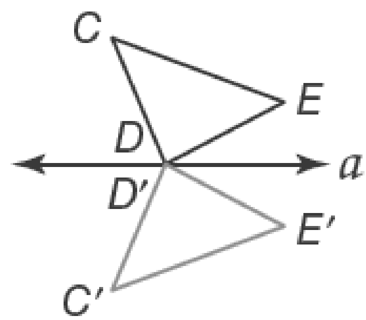


$$B(-3, 3) \rightarrow B'(3, -3)$$
$$C(1, 4) \rightarrow C'(4, 1)$$
$$D(-2, -4) \rightarrow D'(-4, -2)$$

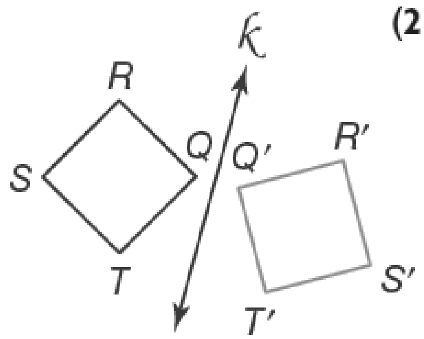
تأكد:

ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى:

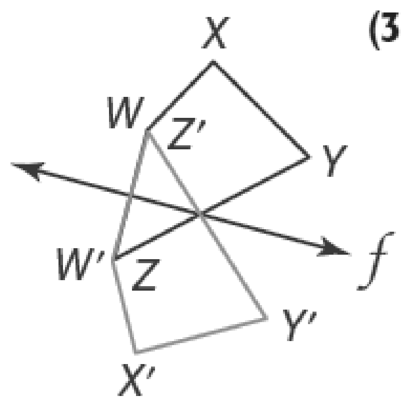
(1



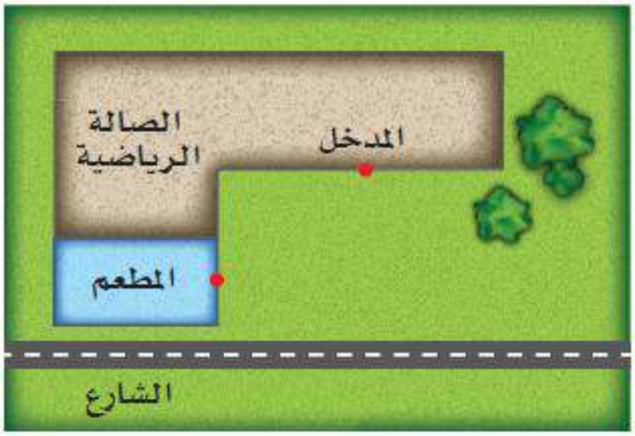
(2

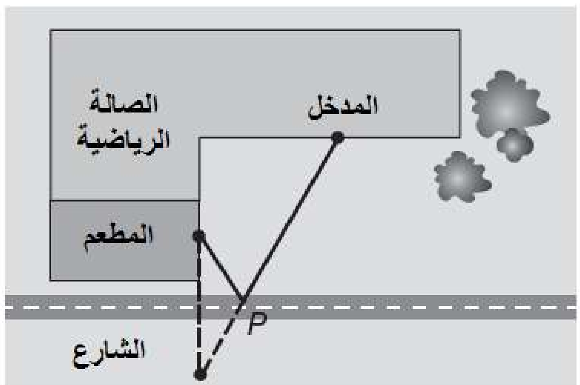


(3



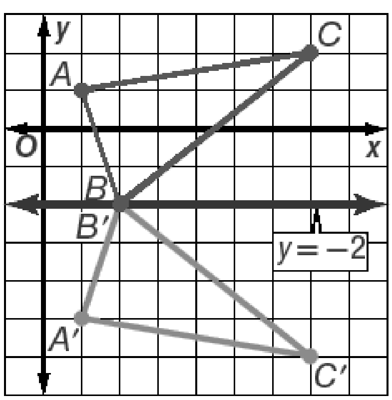
4) **مباريات:** ينتظر ماجد في المطعم صديقًا سيأتيه بتذكرة لحضور مباراة في الصالة الرياضية. في أي موقع على الشارع، يجب أن يُوقِفَ صديقه سيارته، حتى تكون المسافة التي يسيرها ماجد من المطعم إلى السيارة ثم إلى مدخل الصالة الرياضية أقل ما يمكن؟ ارسم شكلًا يوضح إجابتك.





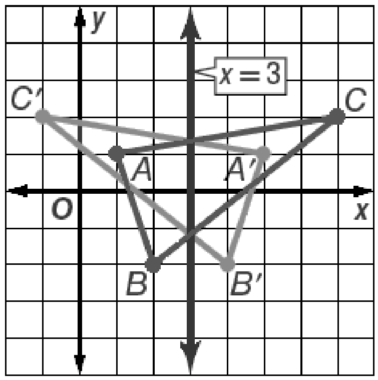
مثِّل بيانيًّا صورة $\triangle ABC$ المبيّن جانبًا بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كلٍّ من السؤالين 6، 5.

5) $y = -2$



$$\mathbf{A(1,1)} \rightarrow \mathbf{A'(1,-5)}$$
$$\mathbf{B(-2,-2)} \rightarrow \mathbf{B'(-2,-2)}$$
$$\mathbf{C(7,2)} \rightarrow \mathbf{C'(7,-6)}$$

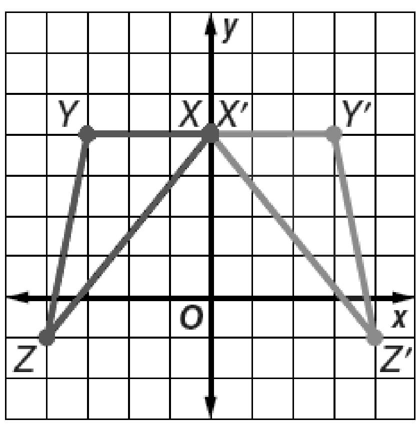
6) $x = 3$



$$A(1, 1) \rightarrow A'(5, 1)$$
$$B(-2, -2) \rightarrow B'(4, -2)$$
$$C(7, 2) \rightarrow C'(7, -6)$$

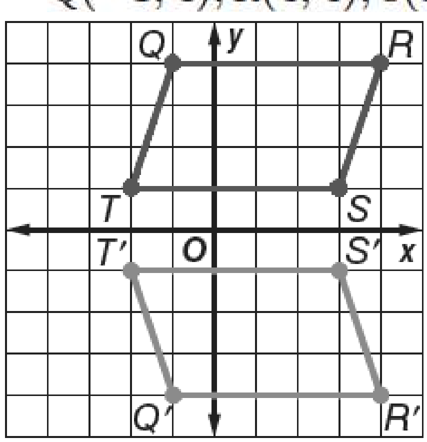
مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد.

7) $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $X(0, 4), Y(-3, 4), Z(-4, -1)$ بالانعكاس حول المحور y.



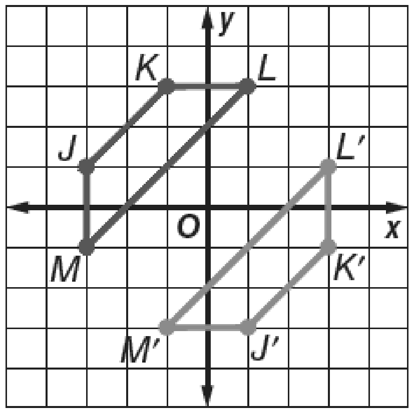
$$X(0, 4) \rightarrow X'(0, 4)$$
$$Y(-3, 4) \rightarrow Y'(3, 4)$$
$$Z(-4, -1) \rightarrow Z'(4, -1)$$

8) $\square QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-1, 4), R(4, 4), S(3, 1), T(-2, 1)$ بالانعكاس حول المحور x.



$$T(-2, 1) \rightarrow T'(-2, -1)$$
$$Q(-1, 4) \rightarrow Q'(-1, -4)$$
$$R(5, 4) \rightarrow R'(5, -4)$$
$$S(3, 1) \rightarrow S'(3, -1)$$

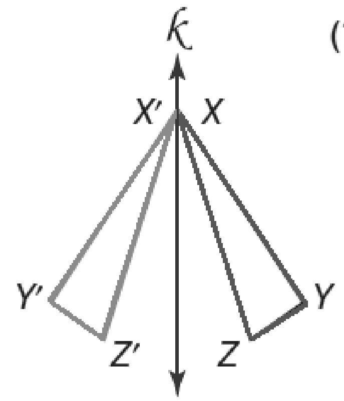
9) الشكل الرباعي الذي إحداثيات رؤوسه: $J(-3, 1), K(-1, 3), L(1, 3), M(-3, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.



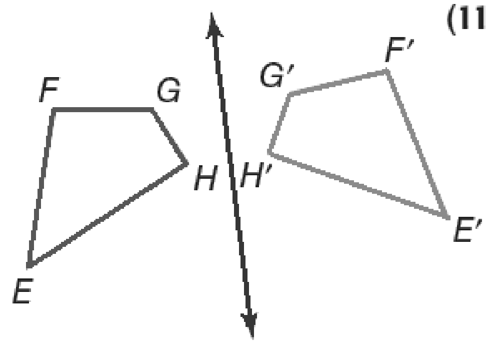
$$\mathbf{J(-3, 1) \rightarrow J'(1, -3)}$$
$$\mathbf{K(-1, 3) \rightarrow K'(3, -1)}$$
$$\mathbf{L(1, 3) \rightarrow L'(3, 1)}$$
$$\mathbf{M(-3, -1) \rightarrow M'(-1, -3)}$$

ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى.

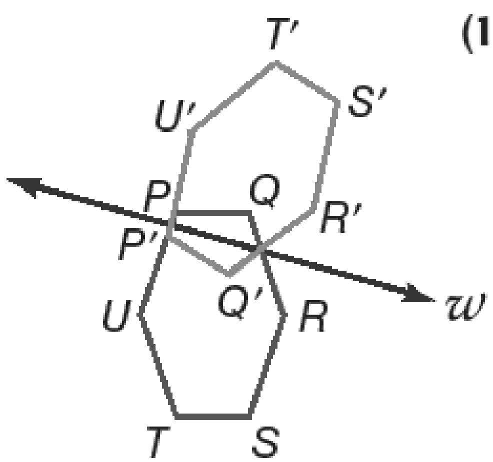
10)



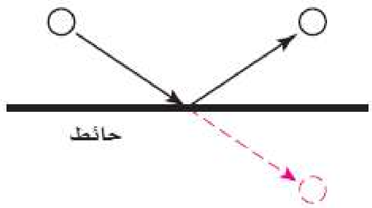
11)



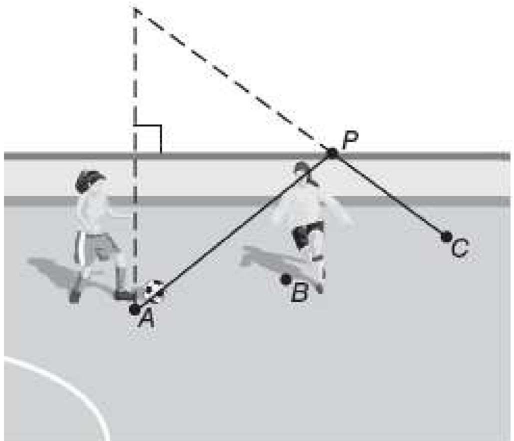
12)



13) **كرة قدم:** عندما ترتطم كرة بحائطٍ فإنها ترتدُّ عنه وتتحرك في مسار نصف مستقيم يمثل انعكاس مسار حركتها لو أنها اخترقت الحائط كما هو موضح جانبًا.



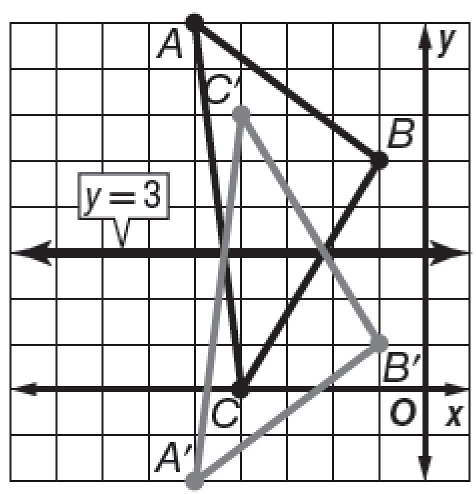
استعمل هذه المعلومات في رسم شكل يبين الموقع الدقيق للنقطة P على الحائط التي يجب أن يصوب سليمان إليها الكرة إذا كان يشارك في مباراة كرة قدم في ملعبٍ داخليٍّ، ويريد أن يمرّر الكرة إلى صديقه يوسف عند النقطة C، متجنبًا لاعبًا من الفريق الخصم عند النقطة B، ولذلك قرر أن يركل الكرة من النقطة A إلى نقطة على الحائط الجانبي، بحيث ترتد عنه نحو النقطة C.



لتكن P النقطة التي يصوب اليها سليمان، لذا P تقع على المستقيم الواصل بين النقطة C و نقطة انعكاس A على الحائط الجانبي، و تكون عند التقاطع مع الحائط الجانبي.

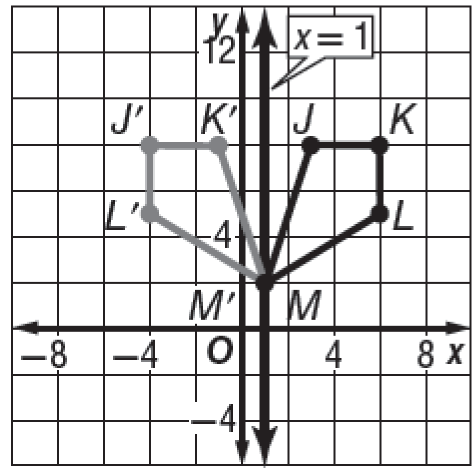
مثّل صورة كل شكلٍ مما يأتي بيانيًّا بالانعكاس حول المستقيم المُعطَى.

14) $\triangle ABC, y = 3$



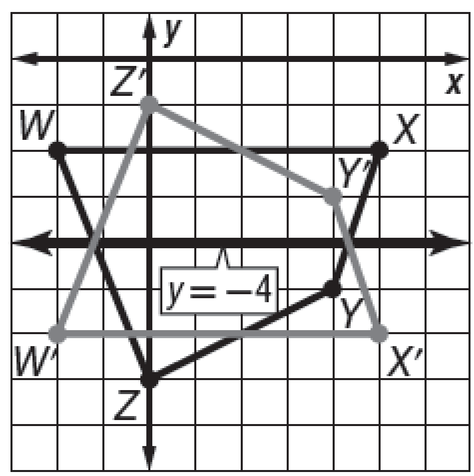
استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $y = 3$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.

(15 $JKLM, x = 1$



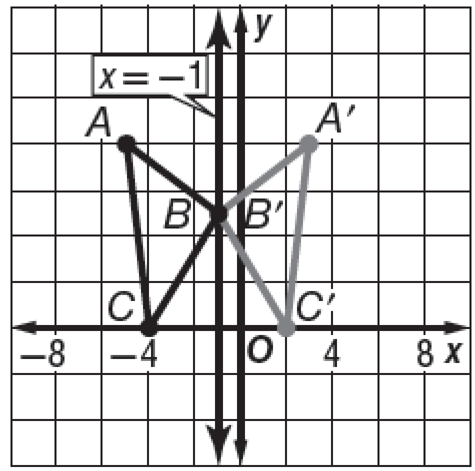
استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $x = 1$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.

(16 $WXYZ, y = -4$



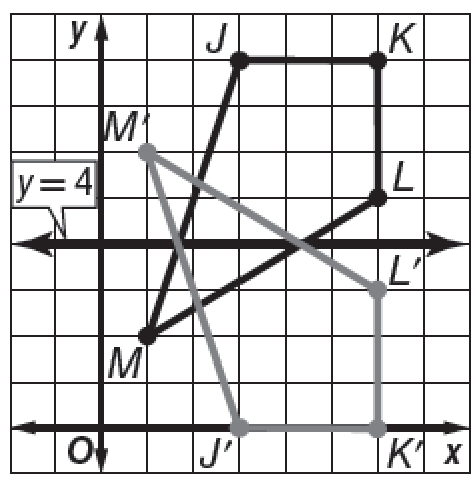
استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $y = -4$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.

17) $\triangle ABC, x = -1$



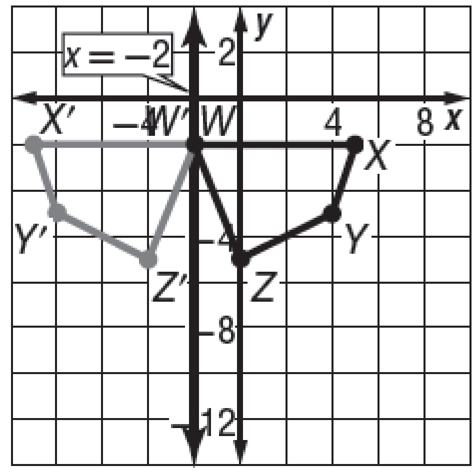
استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $x = -1$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.

18) $JKLM, y = 4$



استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $y = 4$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.

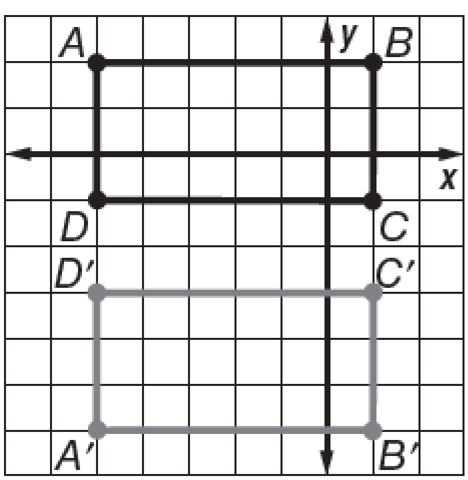
$WXYZ; x = -2$ **(19**



استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $x = -2$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.

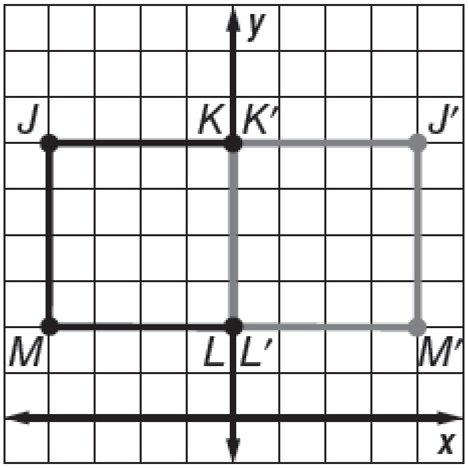
مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد .

(20 المستطيل $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-5, 2)$, $B(1, 2)$, $C(1, -1)$, $D(-5, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = -2$.



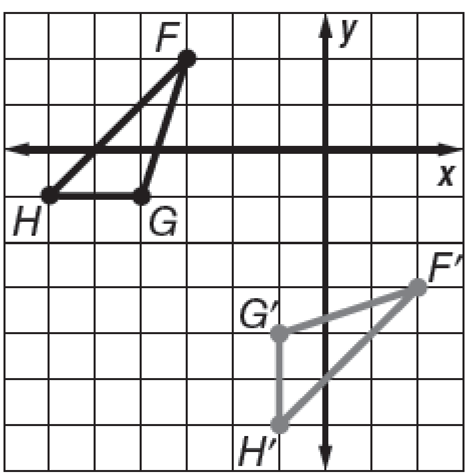
$$\begin{aligned}
&\mathbf{A(-5, 2)} &&\rightarrow &&\mathbf{A'(-5, -6)}\\
&\mathbf{B(1, 2)} &&\rightarrow &&\mathbf{B'(1, -6)}\\
&\mathbf{C(1, -1)} &&\rightarrow &&\mathbf{C'(1, -3)}\\
&\mathbf{D(-5, -1)} &&\rightarrow &&\mathbf{D'(-5, -3)}
\end{aligned}$$

21) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(-4,6), K(0,6), L(0,2), M(-4,2)$ بالانعكاس حول المحور y.



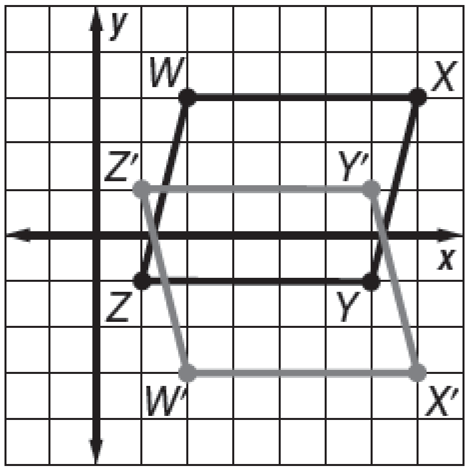
$J(-4, 6) \rightarrow J'(4, 6)$
$K(0, 6) \rightarrow K'(0, 6)$
$L(0, 2) \rightarrow L'(0, 2)$
$M(-4, 2) \rightarrow M'(4, 2)$

22) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(-3,2), G(-4,-1), H(-6,-1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.



$F(-3, 2) \rightarrow F'(2, -3)$
$H(-6, -1) \rightarrow H'(-1, -6)$
$G(-4, -1) \rightarrow G'(-1, -4)$

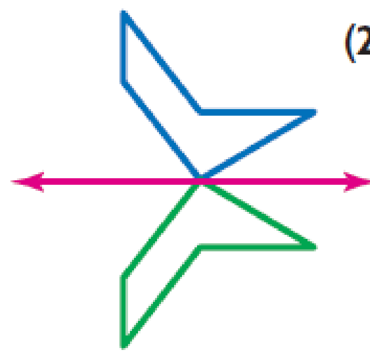
(23 $\square WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $W(2, 3), X(7, 3), Y(6, -1), Z(1, -1)$ بالانعكاس حول المحور x.



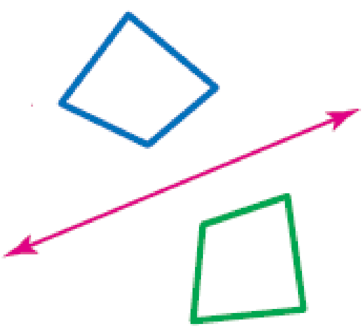
$$W(2, 3) \rightarrow W'(2, -3)$$
$$X(7, 3) \rightarrow X'(7, -3)$$
$$Y(6, -1) \rightarrow Y'(6, 1)$$
$$Z(1, -1) \rightarrow Z'(1, 1)$$

يبينِّ كلٌّ من الأشكال الآتية مضلعًا وصورته بالانعكاس حول مستقيمٍ ما، ارسم محور الانعكاس في كلٍّ منها.

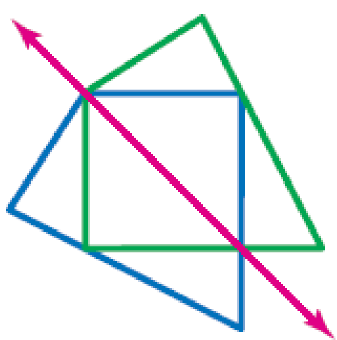
(24



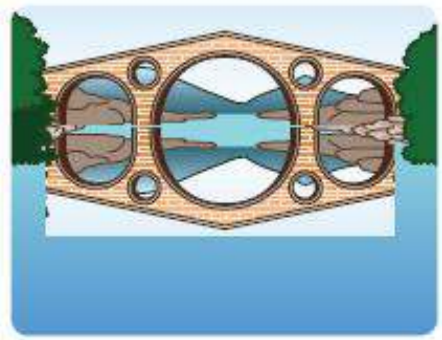
(25



(26

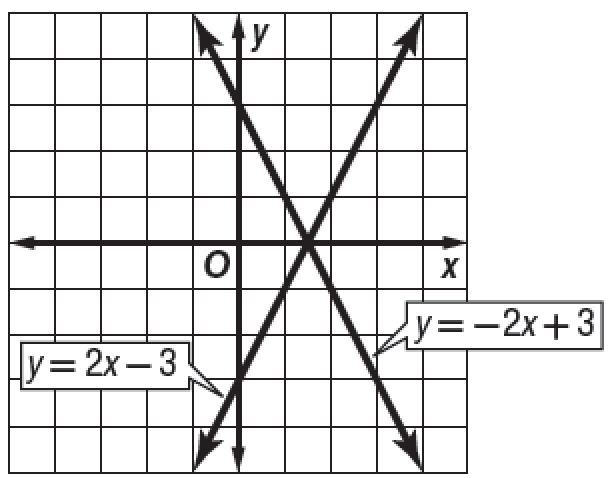


27) **تصوير:** ارسم صورة الجسر الموضح في الصورة المجاورة بالانعكاس في الماء.



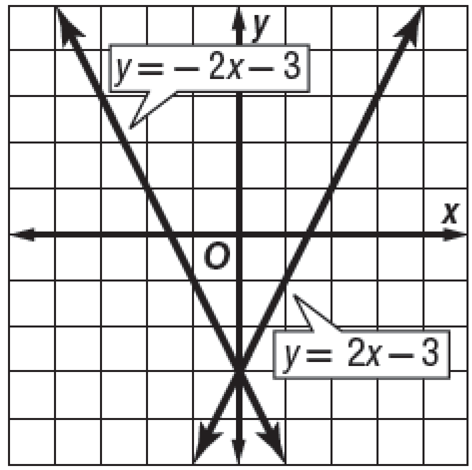
جبر: مثّل بيانيًّا المستقيم $y = 2x - 3$ وصورته بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كلٍّ مما يأتي، ثم اكتب معادلة المستقيم الناتج عن الانعكاس

28) المحور x



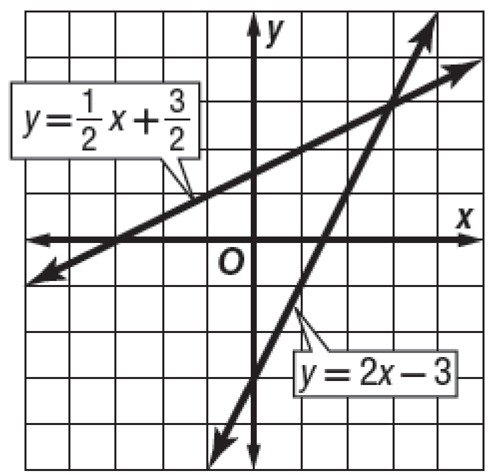
معادلة المستقيم بعد الانعكاس: $y = -2x + 3$

29) المحور y



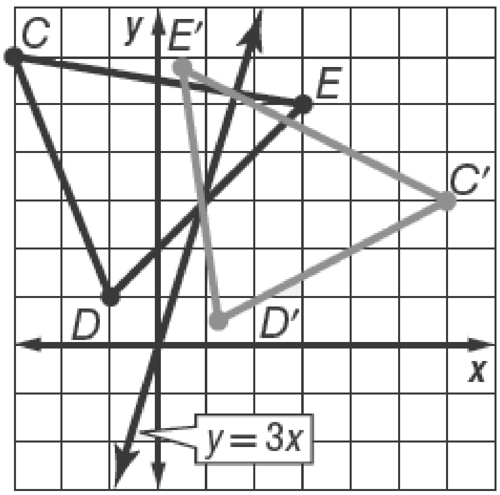
معادلة المستقيم بعد الانعكاس: $y = -2x - 3$

30) المستقيم $y = x$

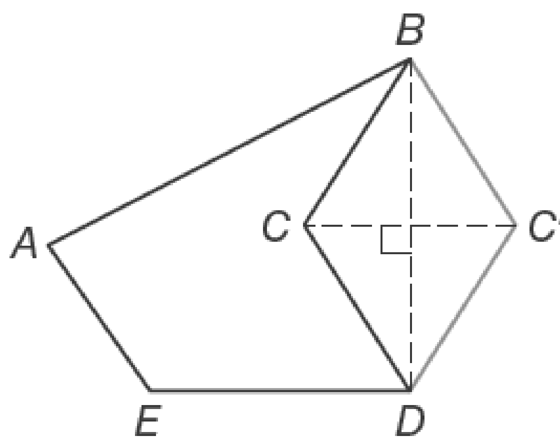


معادلة المستقيم بعد الانعكاس: $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

31) مثِّل بيانيًّا صورة $\triangle CDE$ المبين أدناه بالانعكاس حول المستقيم $y = 3x$.

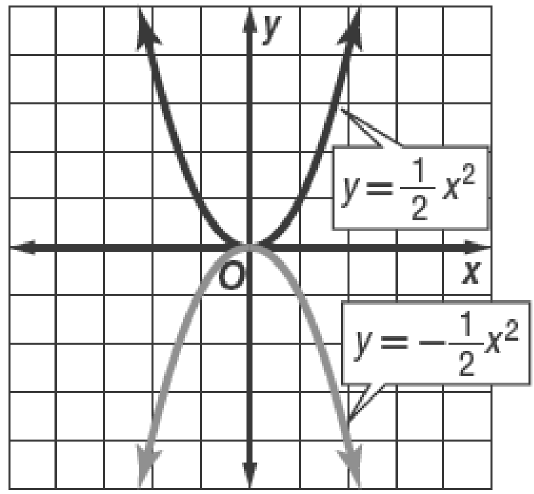


32) غيِّر موقع الرأس C ليصبح المضلع $ABCDE$ محدبًا، وتبقى أطوال أضلاعه كما هي دون تغيير.



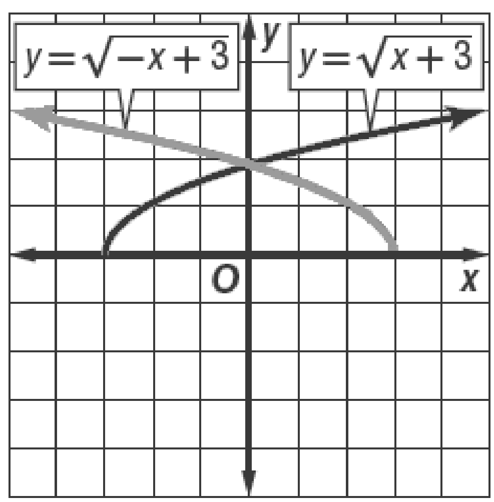
جبر: مثّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الدوال الآتية بالانعكاس حول المحور المحدد، ثم اكتب معادلة الصورة الناتجة عن الانعكاس.

33) المحور x



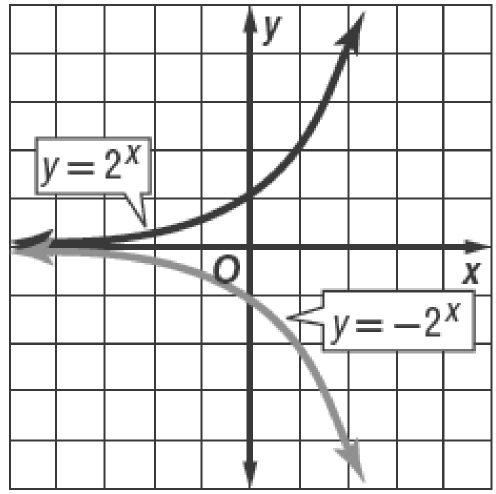
معادلة المستقيم بعد الانعكاس: $y=-\frac{1}{2}x^2$

34) المحور y



معادلة المستقيم بعد الانعكاس: $y=\sqrt{-x+3}$

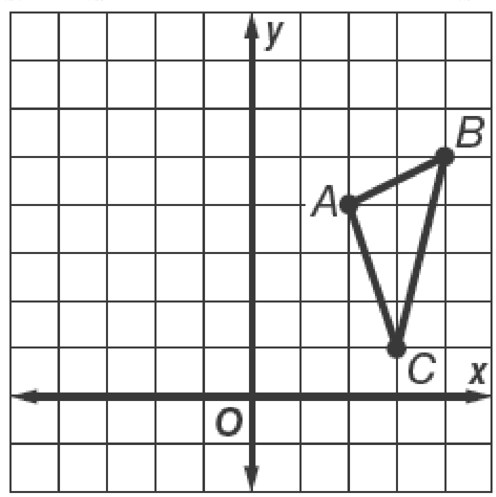
35) المحور x



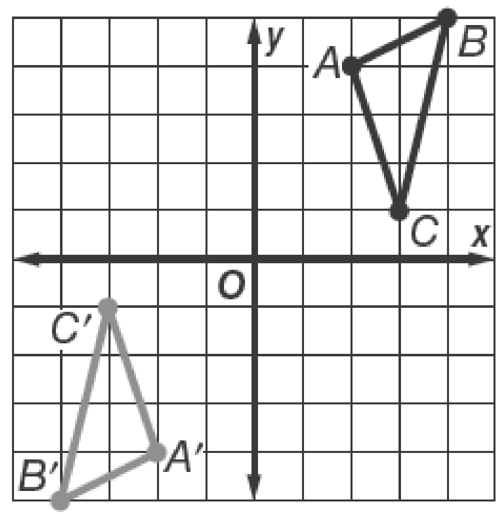
معادلة المستقيم بعد الانعكاس: $y = -2^x$

36) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي الانعكاس حول نقطة الأصل.

a) **هندسيًّا:** ارسم المثلث $\triangle ABC$ في المستوى الإحداثي، بحيث تكون إحداثيات رؤوسه أعدادًا صحيحة موجبة.



b) **بيانيًا:** عيِّن النقاط A', B', C' الناتجة عن الانعكاس، بحيث تكون النقطة الأصلية وصورتها ونقطة الأصل على استقامةٍ واحدةٍ، وتكون النقطة الأصلية وصورتها على البعد نفسه من نقطة الأصل.



c) **جدوليًا:** انقل الجدول الآتي وأكمله.

	$\triangle ABC$		$\triangle A'B'C'$	
الإحداثيات	A	(2, 4)	A'	(-2, -4)
	B	(4, 5)	B'	(-4, -5)
	C	(3, 1)	C'	(-3, -1)

d) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول العلاقة بين إحداثيات الرؤوس المتناظرة لشكلٍ وصورته الناتجة عن انعكاسه حول نقطة الأصل .

إحداثيا الصورة بالانعكاس في نقطة الأصل هما المعكوسان الجمعيان لإحداثيي النقطة الأصلية.

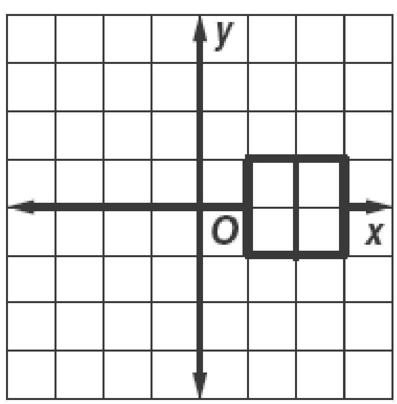
مسائل مهارات التفكير العليا:

37) **اكتشف الخطأ :** يجد جميل وإبراهيم إحداثيات صورة النقطة $C(2, 3)$،الناتجة عن انعكاس حول المحور x ، فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح إجابتك.

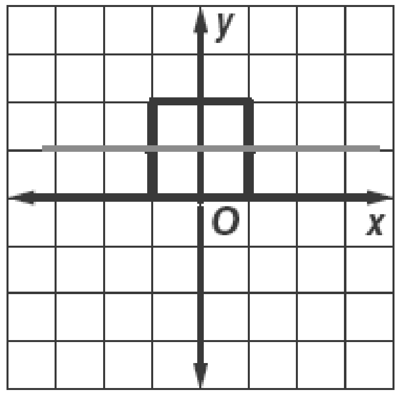
إبراهيم	جميل
$C'(-2, 3)$	$C'(2, -3)$

جميل، إجابة ممكنة: صورة نقطة بالانعكاس حول المحور X يبقي موقع الصورة الأفقي نفسه ولكنه يتغير رأسياً. عندما تعكس النقطة (2, 3) حول المحور X يكون إحداثيا الصورة (3- , 2) لأنها تكون في الموقع الأفقي نفسه ولكن في الجهة الأخرى من المحور X رأسياً.

38) **مسألة مفتوحة :** ارسم مضلعًا في المستوى الإحداثي، بحيث تكون صورته الناتجة عن انعكاس حول المحور x منطبقةً عليه تمامًا.



(39 **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا في المستوى الإحداثي، يكون اتجاه صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم $y = 1$ مماثلًا لاتجاه الشكل نفسه. وضِّح الشروط التي يجب توافرها لتحقيق هذا الأمر.



استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $y = 1$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.

(40 **تحدٍّ:** إذا كانت صورة النقطة $A(4, 3)$ بعد الانعكاس حول مستقيم معينٍ هي $A'(-1, 0)$، فأوجد معادلة محور الانعكاس. وضح إجابتك.

ميل المستقيم الذي يمر بالنقطة وصورتها $\frac{3}{5}$. وباستعمال قانون نقطة المنتصف نجد أن نقطة منتصف القطعة الواصلة بين النقطة وصورتها $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. وباستعمال صيغة النقطة والميل لمعادلة المستقيم نجد أن معادلة خط الانعكاس $y = \frac{-5}{3}x + 4$.

(ميل العمود المنصف يساوي $\frac{-5}{3}$ لأنه يساوي سالب مقلوب الميل $\frac{3}{5}$)

41) تبرير: هل تقع صورة نقطة بالانعكاس حول مستقيم ما في الجهة الثانية من هذا المستقيم دائمًا أم أحيانًا أم لا تقع فيها أبدًا؟

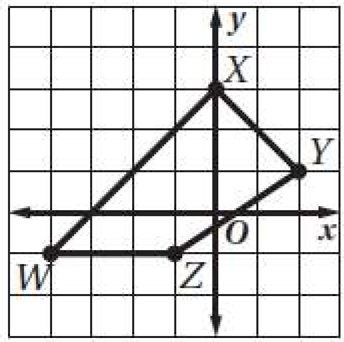
أحياناً، إذا وقعت النقطة على محور الانعكاس فتبقى صورتها في الموقع نفسه.

42) اكتب: تقع النقاط P, Q, R على استقامةٍ واحدةٍ، حيث Q واقعة بين P و R. باستعمال الهندسة الإحداثية، صف خطةً لإثبات أن انعكاس هذه النقاط حول مستقيم يحافظ على الاستقامة وترتيب مواقع النقاط.

أنشئ النقاط P، Q ، R على استقامة واحدة، بحيث تكون Q بين R وP. ارسم المستقيم l، ثم أنشئ أعمدة من كل من P,Q ,R على المستقيم l.
واستعمل صيغة الميل لتبين أم ميل P\`Q\` يساوي ميل P\`R\` فتكون النقاط P\`، Q\` ، R\` على استقامة واحدة ولأن PQ = P\`Q\`، PR =P\`R\` , QR= Q\`R\`
وحيث أن PR= PQ+ QR فإن P\`R\`= P\`Q\`+ Q\`R\` ما يعني أن Q\` تقع بين R\` وP\`.

تدريب على اختبار

43) **إجابة قصيرة:** إذا كانت صورة الشكل الرباعي $WXYZ$ الناتجة عن انعكاسه حول المحور y هي $W'X'Y'Z'$ ، فما إحداثيات X'؟



$$X' = (0, 3)$$

44) إحداثيات النقطتين A, B في المستوى الإحداثي هي $(-2, 4), (3, 3)$ على الترتيب، احسب AB.

A $(1, 7)$

B $\sqrt{26}$

C $(5, -1)$

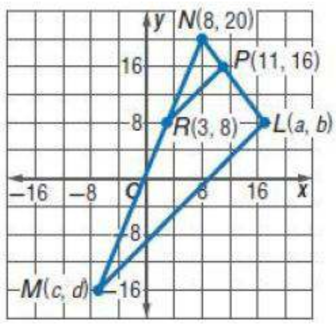
D $\sqrt{50}$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$AB = \sqrt{[3-(-2)]^2 + (3-4)^2}$$
$$= \sqrt{(5)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{25+1}$$
$$= \sqrt{26}$$

الاختيار الصحيح: **B** $\sqrt{26}$

مراجعة تراكمية

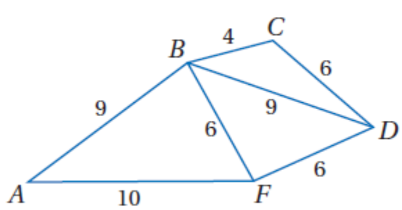
45) **هندسة إحداثية :** في $\triangle LMN$ ، $\overline{PR}$ تقسّم الضلعين MN , NL إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة، إذا كانت $\frac{LP}{PN} = \frac{2}{1}$ وكانت $RN = 3$ ، فأوجد MR.



L (17, 8), M (-7, -16)

استعمل الشكل المجاور لتكتب متباينةً تصف العلا
أو طولَي القطعتين المستقيمتين في كلٍّ مما يأتي .

46) $m\angle BDC, m\angle FDB$



$\because \overline{BF} \cong \overline{DC}$, $\overline{BD} \cong \overline{BD}$, $BC < FD$

$\therefore m\angle BDC < m\angle FDB$

47) $m\angle FBA, m\angle DBF$

$\because \overline{AB} \cong \overline{BD}$, $\overline{BF} \cong \overline{BF}$, $FD < AF$

$\therefore m\angle FBA < m\angle DBF$

استعد للدرس اللاحق

48) إحداثيات طرفيَ $\overline{AB}$ هما $A(5, 4)$, $B(3, -1)$ ، تحركت كلٌّ من هاتين النقطتين 3 وحداتٍ إلى اليمين و5 وحداتٍ إلى أسفل، فكانت مواقعهما الجديدة A' , B' على الترتيب.

a) اكتب قاعدة هذا التحويل الهندسي.

$$(x , y) \to (x+3 , y-5)$$

b) أوجد إحداثيات A' , B' .

$$A'(8, -1) \ , \ B'(6, -6)$$

c) أوجد طول كلٍّ من $\overline{AB}, \overline{A'B'}$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3-5)^2 + (-1-4)^2}$$
$$= \sqrt{4+25}$$
$$= \sqrt{29}$$

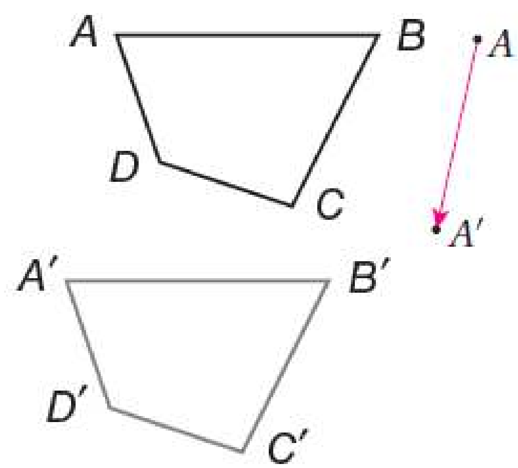
$$A'B' = \sqrt{(6-8)^2 + [-6-(-1)]^2}$$
$$= \sqrt{4+25}$$
$$= \sqrt{29}$$

7-2 الإزاحة (الانسحاب)

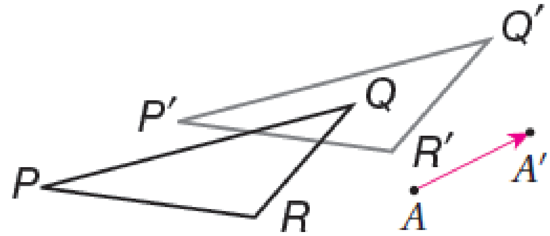
تحقق

ارسم صورة المضلع الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' .

(1A

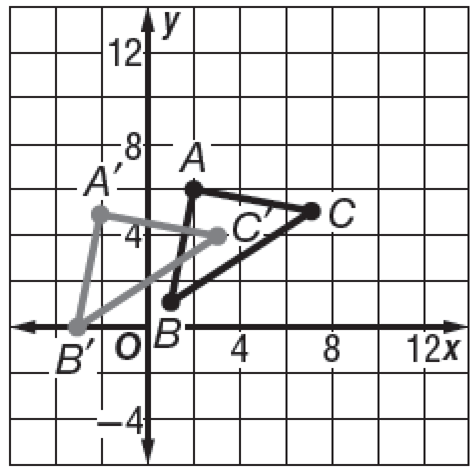


(1B

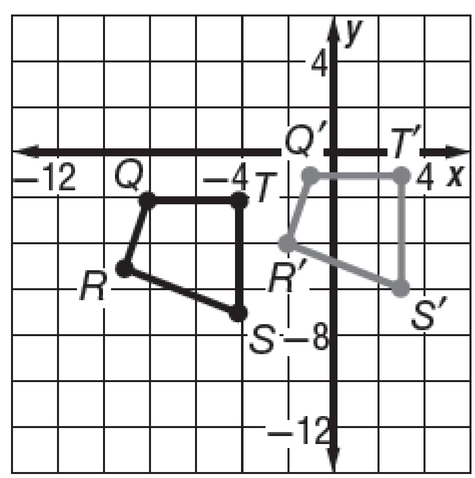


مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

2A) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(2, 6), B(1, 1), C(7, 5)$ ، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x-4, y-1)$

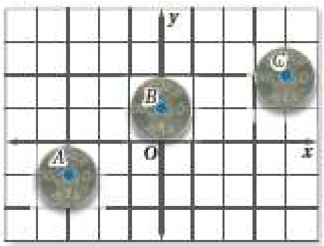


2B) الشكل الرباعي $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-8, -2), R(-9, -5), S(-4, -7), T(-4, -2)$ ، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x+7, y+1)$



3) **نقود:** تمَّ تصوير حركة قطعة نقود في مواقع مختلفة على المستوى الإحداثي.

A) صِفْ حركة القطعة عند انتقالها من الموقع A إلى الموقع B لفظيًّا.



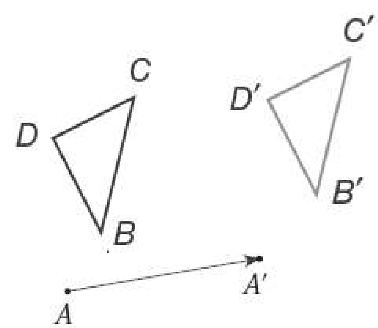
تحركت قطعة النقد 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى.

B) صِفْ حركة القطعة عند انتقالها من الموقع A إلى الموقع C باستعمال قاعدة الإزاحة.

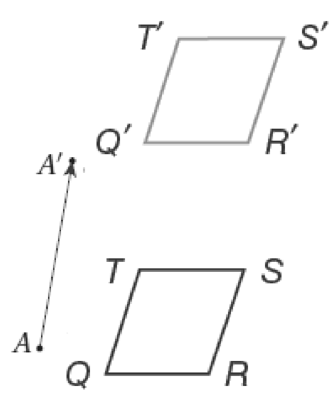
$$-3 + a = 4$$
$$a = 4 + 3 = 7$$
$$-1 + b = 2$$
$$b = 2 + 1 = 3$$
$$(x\ ,\ y) \rightarrow (x + 7\ ,\ y + 3)$$

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' في كلٍّ ممَّا يأتي:

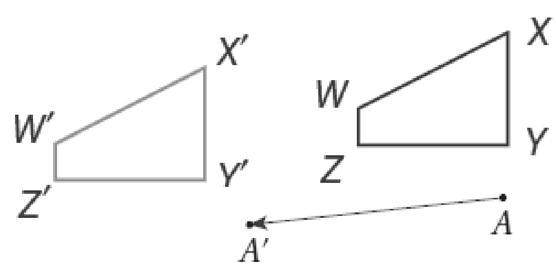
(1



(2

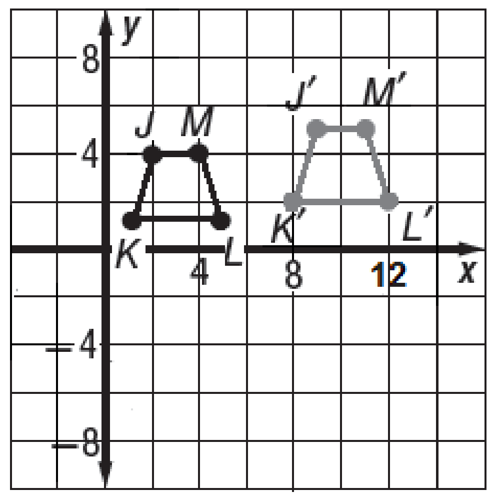


(3

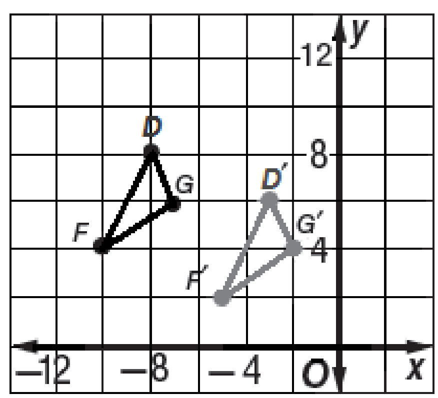


مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

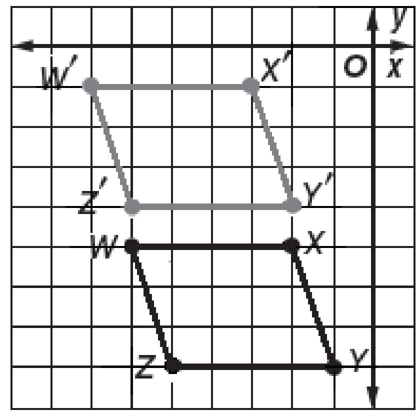
4) شبه المنحرف $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(2, 4), K(1, 1), L(5, 1), M(4, 4)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 7, y + 1)$

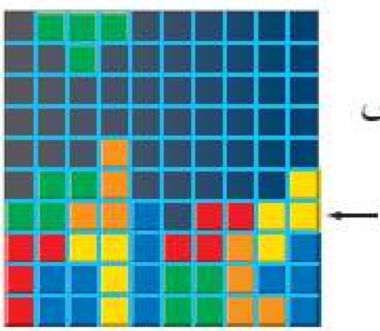


5) $\triangle DFG$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(-8, 8), F(-10, 4), G(-7, 6)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 5, y - 2)$



6) متوازي الأضلاع $WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Y(-1,-8), Z(-5,-8), (-8)$,
$W(-6,-5), X(-2,-5)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x-1, y+4)$





7) ألعاب فيديو: إن هدف اللعبة المجاورة هو تحريك القطع الملونة إلى اليمين أو اليسار، عندما تنزل من أعلى الشاشة لملء كل صف دون ترك فراغاتٍ فيه. إذا كان الموقع الابتدائي للقطعة في أعلى الشاشة (x, y)، فاكتب قاعدةً لوصف الانسحاب الذي يملأ الصف المشار إليه بالسهم.

يجب ان تتحرك القطعة 3 وحدات إلى اليمين و 5 إلى الأسفل، لذا الإزاحة تكون $\left(3, -5\right)$

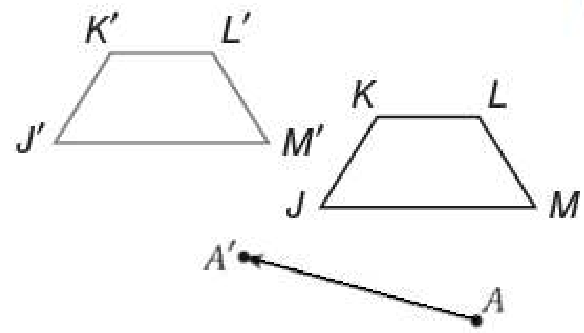
قاعدة الانسحاب:

$$\left(\mathbf{x},\ \mathbf{y}\right) \rightarrow \left(\mathbf{x}+\mathbf{3},\ \mathbf{y}-\mathbf{5}\right)$$

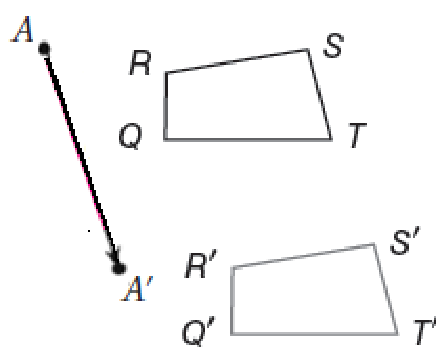
تدرب وحل المسائل:

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' في كلٍّ مما يأتي:

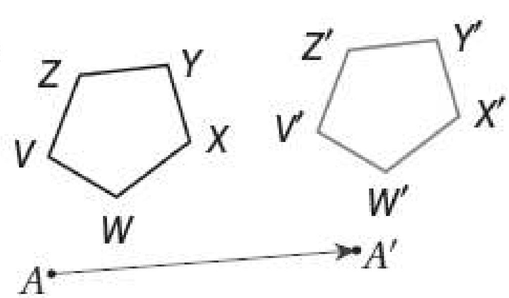
(8



(9

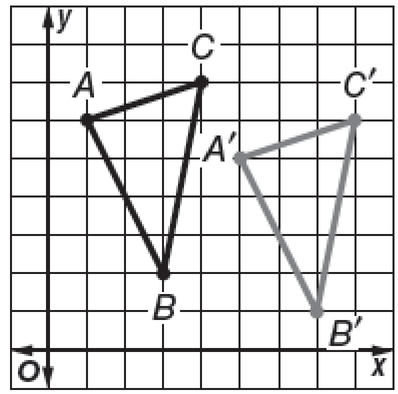


(10

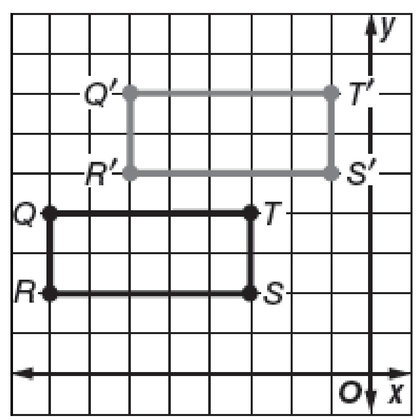


مثّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

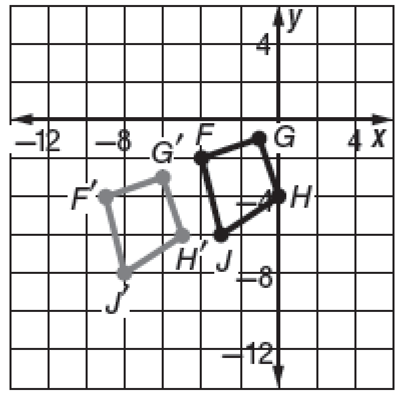
11) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(1, 6), B(3, 2), C(4, 7)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \to (x + 4, y - 1)$



12) المستطيل $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $S(-3, 2), T(-3, 4)$، $Q(-8, 4), R(-8, 2)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \to (x + 2, y + 3)$



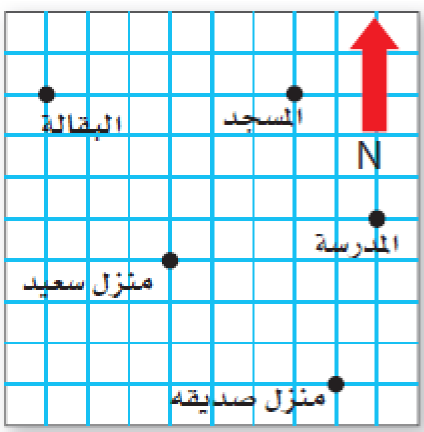
13) الشكل الرباعي $FGHJ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $H(0,-4), J(-3,-6)$ ، $F(-4,-2), G(-1,-1)$ ، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x-3, y-6)$



14) **مواقع:** تبين الشبكة المجاورة بعض المواقع في الحي الذي يقطنه سعيد.

a) إذا غادر سعيد منزله، وانتقل 4 وحدات إلى الشمال و 3 وحدات إلى الشرق، فأين يصل؟

المسجد

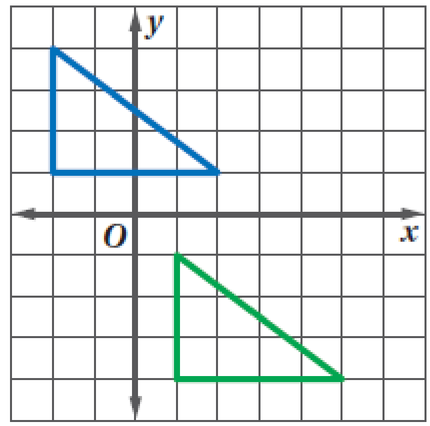


b) صِف لفظيًّا إزاحتين تنقلان سعيد من المدرسة إلى منزله.

يمكن أن يسير 5 وحدات باتجاه الغرب، ثم وحدة واحدة إلى الجنوب، أو أن يسير وحدة واحدة إلى الجنوب ثم 5 وحدات باتجاه الغرب.

اكتب قاعدة الإزاحة التي تنقل الشكل الأزرق إلى الشكل الأخضر في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

(15

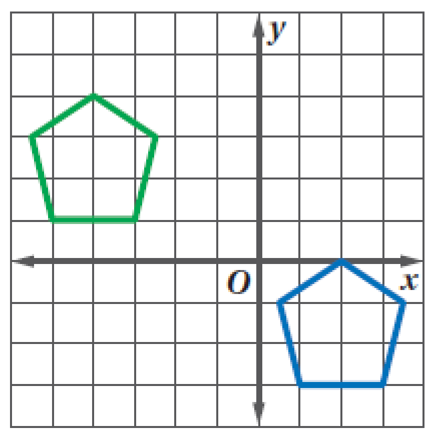


يجب ان تتحرك النقطة 3 وحدات إلى اليمين و 5 إلى الأسفل، لذا الإزاحة تكون $(3, -5)$

قاعدة الانسحاب:

$$(x, y) \rightarrow (x+3, y-5)$$

(16



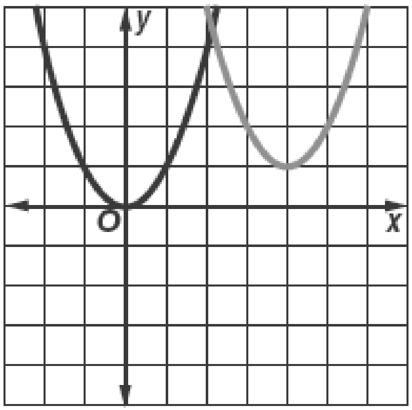
يجب ان تتحرك النقطة 6 وحدات إلى اليسار و 4 إلى الأعلى، لذا الإزاحة تكون $(3, -5)$

قاعدة الانسحاب:

$$(x, y) \rightarrow (x-6, y+4)$$

جبر: مثِّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الدالتين الآتيتين الناتجة عن الإزاحة المعطاة، ثم اكتب معادلة هذه الصورة.

17) $(x, y) \rightarrow (x+4, y+1)$



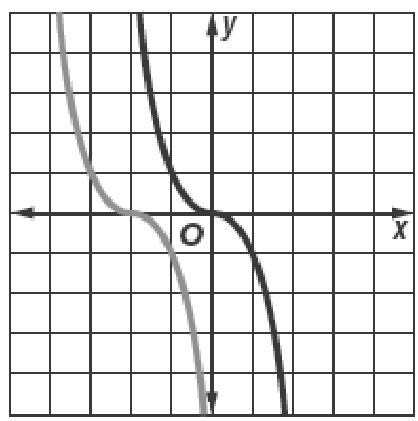
الإزاحة $(4, 1)$ تزيح كل نقطة من المنحنى 4 وحدات إلى اليمين و 1 وحدة إلى الأعلى، و على هذا النقطة $(0, 0)$ تزاح إلى النقطة $(4, 1)$.

و النقطة $(1, 1)$ تزاح إلى النقطة $(5, 2)$. و النقطة $(-1, 1)$ تزاح الى النقطة $(3, 2)$. .... و هكذا

معادلة المنحنى بعد الإزاحة تكون

$$y = (x-4)^2 + 1$$

18) $(x, y) \rightarrow (x-2, y)$

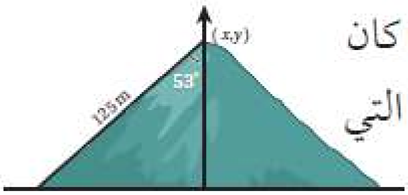


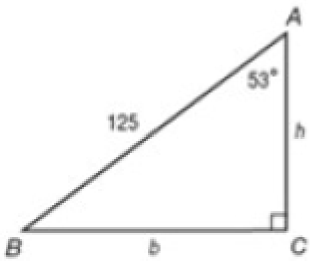
إزاحة النقطة $(-2, 0)$ تزيح كل نقطة من المنحنى 2 وحدة إلى اليسار، و على هذا النقطة $(0, 0)$ ستزاح إلى $(-2, 0)$.

و النقطة $(1, -1)$ تزاح إلى $(-1, -1)$، و النقطة $(-1, 1)$ تزاح إلى النقطة $(-3, 1)$. .... و هكذا

معادلة المنحنى بعد الإزاحة تكون $y = -(x+2)^3$

19) **تضاريس:** طول منحدر تلةٍ من قمتها حتى أسفلها 125 m، وقياس الزاوية التي يصنعها مع المستقيم الرأسي °53، إذا كان موقع منصور عند قمة التلة (x, y)، فاكتب قاعدة الإزاحة التي تمثل انتقاله إلى أسفل التلة.



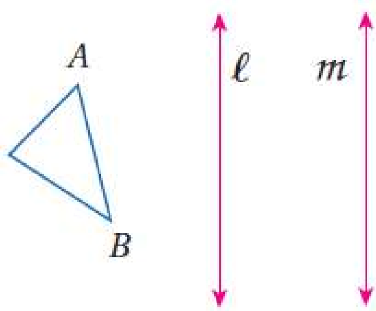


$$\sin 53^\circ = \frac{b}{125}$$
$$125\sin 53^\circ = b$$
$$100 \approx b$$
$$\cos 53^\circ = \frac{h}{125}$$
$$125\cos 53^\circ = h$$
$$75 \approx h$$

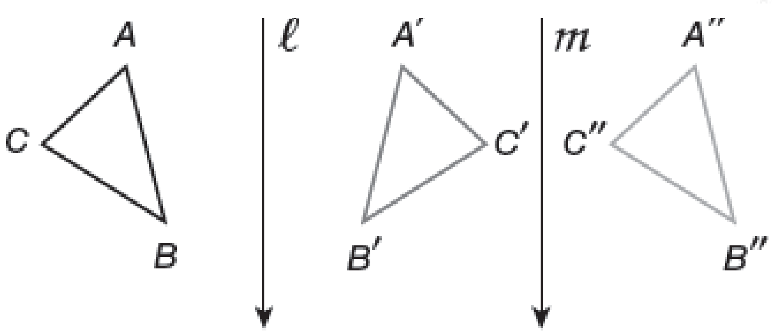
الرأس B ازيح الى (الأسفل .75 ft و إلى اليسار بـ .100 ft) بالنسبة إلى A

قاعدة الازاحة: $(x,\ y) \rightarrow (x-75,\ y-100)$

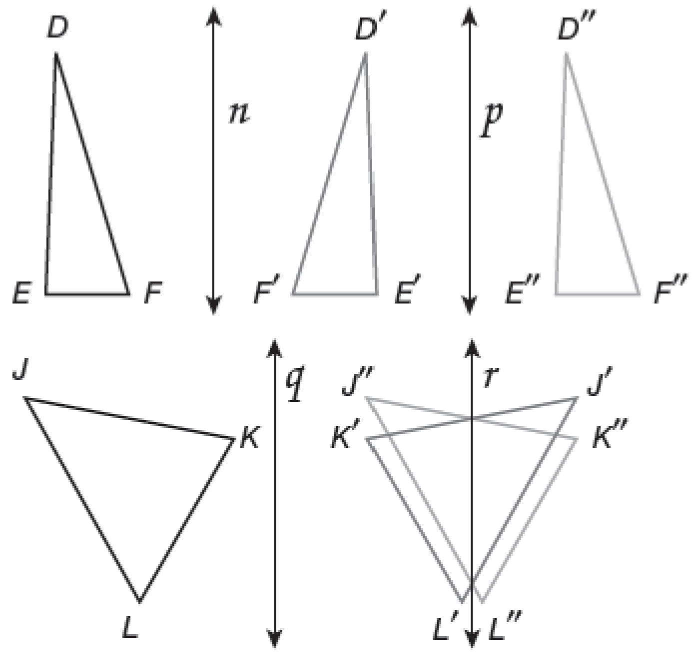
20) **تمثيلات متعددة:** ستستقصي في هذه المسألة نتيجة انعكاسين حول مستقيمين رأسيَّين.



a) **هندسيًا:** ارسم على ورق شفاف $\triangle ABC$ ، والمستقيمين الرأسيّين ℓ, m ، وارسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم ℓ ، بطيِّ الورقة على امتداد المستقيم ℓ وسمِّ هذه الصورة $\triangle A'B'C'$، ثم ارسم صورة $\triangle A'B'C'$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m ، بطيّ الورقة على امتداد المستقيم m ، وسمّ هذه الصورة $\triangle A''B''C''$.



b) هندسيًّا : كرّر العملية التي نفذتها في الفرع **a** لرسم صورة $\triangle DEF$ الناتجة عن انعكاسين متعاقبين حول المستقيمين الرأسيين n, p، وصورة $\triangle MNP$ الناتجة عن انعكاسين متعاقبين حول المستقيمين الرأسيين q, r.



c) جدوليًّا : انسخ الجدول الآتي وأكمله.

المسافة بين المستقيمين الرأسيين (cm)		المسافة بين النقاط المتناظرة (cm)	
2.2	ℓ, m	4.4	A و A''، B و B''، C و C''
2.8	n, p	5.6	D و D''، E و E''، F و F''
1.4	q, r	2.8	M و M''، N و N''، P و P''

d) لفظيًّا : صِفْ نتيجة الانعكاسين حول المستقيمين الرأسيين باستعمال الإزاحة.

يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين رأسيين باعتباره إزاحة أفقية مسافتها مثلا المسافة بين المستقيمين الرأسيين، واتجاهها عمودي عليهما.

مسائل مهارات التفكير العليا:

21) **تبرير:** أجريت إزاحةٌ لشكل ما، وفقًا للقاعدة: $(x, y) \to (x-3, y+8)$،
ثم إزاحةٌ أخرى للصورة الناتجة وفقًا للقاعدة: $(x, y) \to (x+3, y-8)$.
من دون استعمال الرسم، حدِّد مكان الشكل النهائي وبرِّر إجابتك.

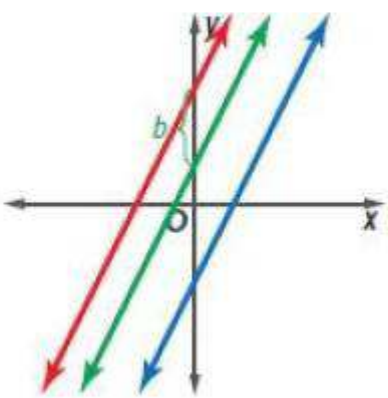
المكان النهائي: (x, y)

الازاحة $(x-3, y+8)$ ثم $(x+3, y-8)$ هي نفسها الإزاحة

$(x-3+3, y+8-8)$

22) **تحدٍّ:** أزيح المستقيم $y = mx + b$ وفق القاعدة $(x, y) \to (x+a, y+b)$.
اكتب معادلة صورته الناتجة عن هذه الإزاحة. ما مقطع المحور y للمستقيم الجديد؟

عند إزاحة المستقيم $y = mx + b$ وفق القاعدة المذكورة :



اولاً: مقطع المحور y الجديد عند $b - ma$.

الآن المستقيم $y = m(x-a) + b$

يزاح b وحدات رأسياً.

في هذه الحالة، $b = -4$

هذا يشكل المعادلة $y = m(x-a) + b + b$

أو $y = m(x-a) + 2b$

بعد الإزاحة الأولى، المقطع y عند $b - ma$

الآن يجب أن يكون عند $2b - ma$

$$2b - ma = 2(-4) - 2(-5)$$
$$= -8 + 10$$
$$= 2$$

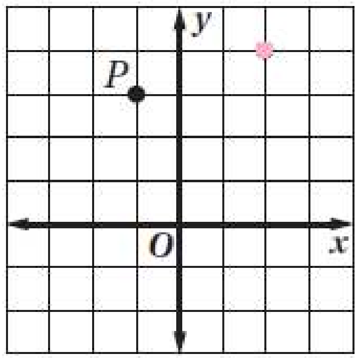
$y = m(x-a) + 2b$;$2b$

23) **اكتب:** تذكر من الدرس السابق أن النقطة الثابتة هي النقطة التي تنطبق صورتها عليها. هل توجد نقاط ثابتة في الإزاحة؟ وضح أسباب وجودها أو أسباب عدم وجودها.

لا، لأنه يجب أن تتحرك النقطة حتى تتم الإزاحة، ويبقي الشكل محافظاً على هيئته. فلا يمكن أن تبقي أي نقطة ثابتة في الإزاحة. إذا بقيت أي نقطة ثابتة عندئذ تكون الصورة هي الشكل الأصلي نفسه.

تدريب على اختبار

24) أوجد صورة النقطة P الناتجة عن الإزاحة: $(x, y) \rightarrow (x + 3, y + 1)$.



A $(0, 6)$ **C** $(2, -4)$

B $(0, 3)$ **D** $(2, 4)$

الاختيار الصحيح: D $(2, 4)$

25) يحتوي كيس على 5 كرات حمراء وكرتين زرقاوين و 4 كرات بيضاء وكرة واحدة صفراء. إذا سُحب من الكيس كرتان على التوالي من دون إرجاع، فما احتمال سحب كرتين بيضاوين؟

A $\frac{1}{66}$ **B** $\frac{1}{11}$ **C** $\frac{1}{9}$ **D** $\frac{5}{33}$

$$P(A \& B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \& B) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11}$$

$$= \frac{1}{11}$$

الاختيار الصحيح: B $\frac{1}{11}$

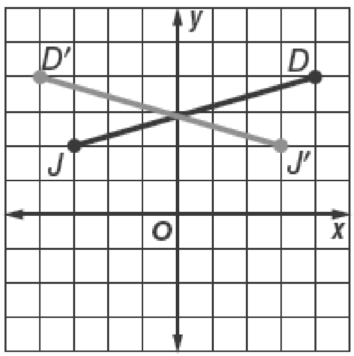
26) **إجابة قصيرة:** ما قاعدة الإزاحة التي تنقل النقطة $A(3, -5)$ إلى النقطة $A'(-2, -8)$؟

$$(x\ ,\ y)(x - 5\ ,\ y - 3)$$

مراجعة تراكمية

مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد.

27) $\overline{DJ}$ التي إحداثيات طرفَيها $D(4, 4), J(-3, 2)$ ، بالانعكاس حول المحور y .

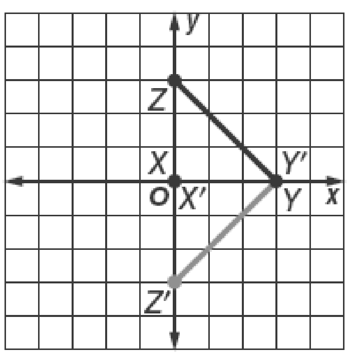


$$(x, y) \rightarrow (-x, y)$$

$$D(4, 4) \rightarrow D'(-4, 4)$$

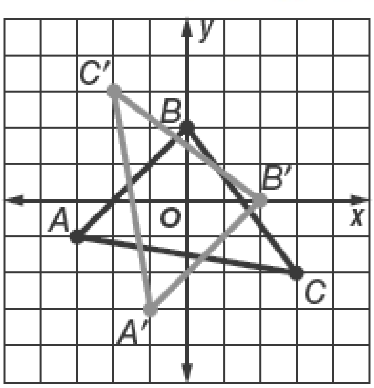
$$J(-3, 2) \rightarrow J'(3, 2)$$

28) $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $X(0, 0), Y(3, 0), Z(0, 3)$ ، بالانعكاس حول المحور x .



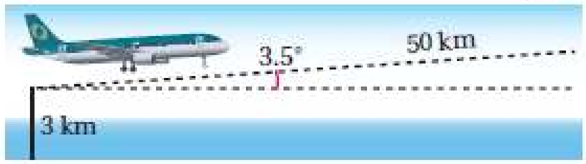
$$(x, y) \rightarrow (-x, y)$$
$$X(0, 0) \rightarrow X'(0, 0)$$
$$Y(3, 0) \rightarrow Y'(3, 0)$$
$$Z(0, 3) \rightarrow Z'(0, -3)$$

29) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-3, -1), B(0, 2), C(3, -2)$ ، بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.



$$(x, y) \rightarrow (y, x)$$
$$A(-3, -1) \rightarrow A'(-1, -3)$$
$$B(0, 2) \rightarrow B'(2, 0)$$
$$C(3, -2) \rightarrow C'(-2, 3)$$

30) **الملاحة الجوية :** كان ارتفاع طائرة 3 km فوق سطح البحر عندما بدأت بالارتفاع بزاوية $3.5°$ ، إذا بقيت هذه الزاوية ثابتةً، فكم كيلو مترًا يكون ارتفاعها فوق سطح البحر بعد طيرانها مسافة 50 km؟



نفرض أن x ارتفاع الطائرة بعد طيران 50 km من نقطة الارتفاع.

$$\sin 3.5^{\circ} = \frac{x}{50}$$

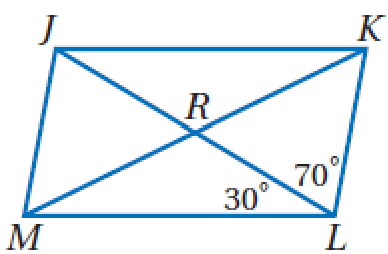
$$50\sin 3.5^{\circ} = x$$

$$3.1 \approx x$$

الطائرة تكون على ارتفاع 3km فوق سطح البحر عند بدأ الارتفاع.

لهذا، بعد 50km ستكون حوالي $3 + 3.1 = 6.1$ km فوق مستوى البحر.

أوجد كلًّا من القياسات الآتية مستعملًا $\square JKLM$ المجاور.



31) $m\angle MJK$

$$\because \angle MJK \cong \angle MLK$$

$$\therefore \angle MLK = 30 + 70 = 100$$

$$\therefore m\angle MLK = 100^{\circ}$$

$$\therefore m\angle MJK = 100^{\circ}$$

32) $m\angle JML$

$$360 = m\angle JML + 100 + m\angle LKJ + 100$$

$$360 = m\angle JML + 200 + m\angle LKJ$$

$$160 = m\angle JML + m\angle LKJ$$

$$160 = 2m\angle JML$$

$$80 = m\angle JML$$

$m\angle JKL$ (33

$$360 = m\angle JML + 100 + m\angle LKJ + 100$$
$$360 = m\angle JML + 200 + m\angle LKJ$$
$$160 = m\angle JML + m\angle LKJ$$
$$160 = 2m\angle LKJ$$
$$80 = m\angle LKJ$$

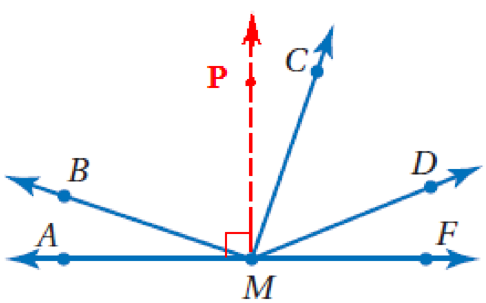
$m\angle KJL$ (34

الزاويتين $\angle JLM$ و $\angle KJL$ متناظرتين ، و حسب مسلمة الزاوية المتناظرة،

$$m\angle KJL = 30^\circ$$

استعد للدرس اللاحق

صنّف كلًّا من الزوايا الآتية إلى قائمة أو حادة أو منفرجة، ثم استعمل المنقلة لقياس الزاوية إلى أقرب درجة.



$\angle AMC$ (35

باستخدام المنقلة ارسم خط عمودي على النقطة M مثل $\angle AMP$ تمثل زاوية قائمة.

واضح أن الزاوية $\angle AMC > \angle AMP$

$$\angle AMC > 90^\circ$$

زاوية منفرجة

بقياس الزاوية بالمنقلة نجد ان $m\angle AMC = 110^\circ$

$\angle FMD$ (36

واضح أن الزاوية $\angle FMD < \angle FMP$

$$\angle FMD < 90^\circ$$

زاوية حادة

بقياس الزاوية بالمنقلة نجد ان $m\angle FMD = 20^\circ$

37) $\angle BMD$

الزاوية منفرجة وباستعمال المنقلة نجد أن

$m\angle BMD = 140^\circ$

38) $\angle CMB$

الزاوية قائمة وباستعمال المنقلة نجد أن

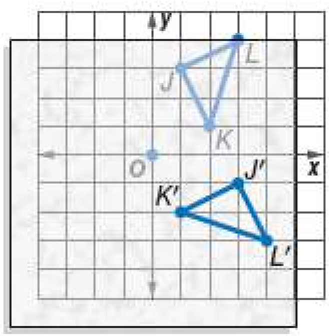
$m\angle BMD = 90^\circ$

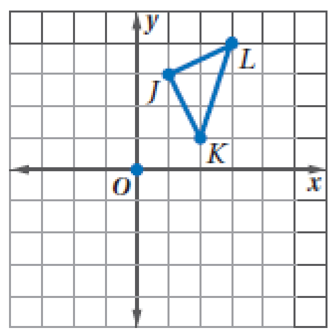
استكشاف
7-3
معمل الهندسة: الدوران
Rotations

تمارين

1) انسخ $\triangle JKL$ الموضح في الشكل المجاور الذي إحداثيات رؤوسه هي: $L(3, 4)$, $K(2, 1)$, $J(1, 3)$ في قطعة من الورق الشفاف ثم أجب عما يأتي:

a) استعمل الورق الشفاف والمنقلة لتدوير كل رأس بزاوية $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل. ما إحداثيات رؤوس صورة المثلث الناتجة عن الدوران؟





$$J'(3, -1)\ ,\ K'(1, -2)\ ,\ L'(4, -3)$$

b) استعمل الورق الشفاف والمنقلة لتدوير $\triangle JKL$ بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل. ما إحداثيات رؤوس صورة المثلث الناتجة عن الدوران؟

$$J''(-1, -3)\ ,\ K''(-2, -1)\ ,\ L''(-3, -4)$$

c) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين؛ لإيجاد المسافة بين نقطة الأصل وكلٍّ من النقاط J, K, L.
ثم أوجد المسافة بين نقطة الأصل وكلٍّ من رؤوس المثلثين $J'K'L'$, $J''K''L''$.

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$OJ=\sqrt{(1-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$$
$$OK=\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$$
$$OL=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$$
$$OJ'=\sqrt{(3-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{10}$$
$$OK'=\sqrt{(1-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{5}$$
$$OL'=\sqrt{(4-0)^2+(-3-0)^2}=5$$
$$OJ''=\sqrt{(-1-0)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{10}$$
$$OK''=\sqrt{(-2-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$$
$$OL''=\sqrt{(-3-0)^2+(-4-0)^2}=5$$

$$OJ=OJ'=OJ''=\sqrt{10}$$
$$OK=OK'=OK''=\sqrt{5}$$
$$OL=OL'=OL''=5$$

2) **اكتب:** إذا تم تدوير النقطة $(4, 2)$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل بزاويةٍ $90°$، وبزاوية $180°$، فما التغيير الذي يطرأ على الإحداثي x وعلى الإحداثي y؟

يتبدل الإحداثيان x, y عند تدوير النقطة بزاوية 90° وتتغير إشارة الإحداثي x.
وعند التدوير بزاوية 180° تتغير إشارة كلا الإحداثيين.

3) **تخمين:** ما إحداثيًا صورة النقطة (x, y) الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟

$$(-y\ ,\ x)$$

4) **تخمين:** اكتب تخميناً حول المسافة بين مركز الدوران P ، والرؤوس المتناظرة للشكلين $A'B'C'D'$, $ABCD$.

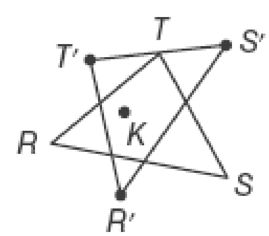
بعد كل نقطة عن مركز الدوران يساوي بعد صورتها عنه.

7-3 الدوران

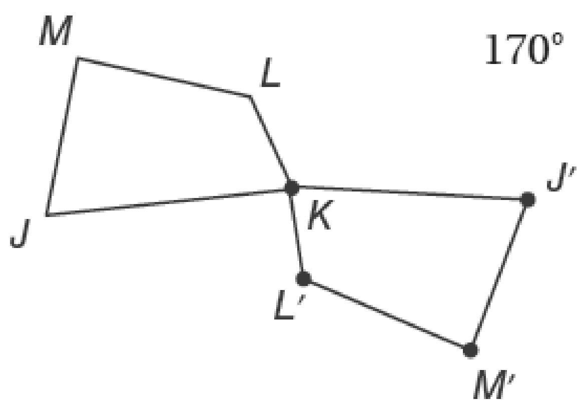
تحقق

استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كل من السؤالين الآتيين:

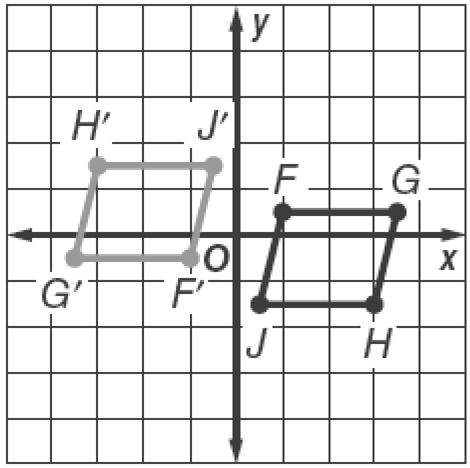
1A) $65°$



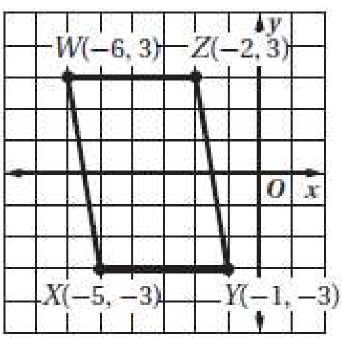
1B) $170°$



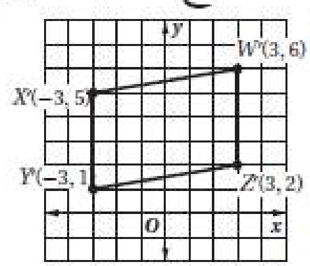
2) إحداثيات رؤوس متوازي الأضلاع $FGHJ$ هي: $H(6, -3), J(1, -3)$, $F(2, 1), G(7, 1)$. مثِّل بيانيًّا $FGHJ$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.



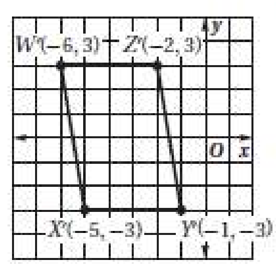
3) تمّ تدوير متوازي الأضلاع $WXYZ$ في الشكل المجاور بزاوية $180°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، أيُّ الأشكال الآتية يمثل صورة متوازي الأضلاع الناتجة عن الدوران؟



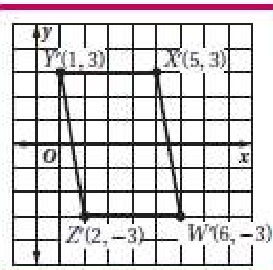
A



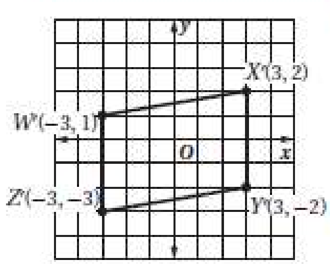
B



C



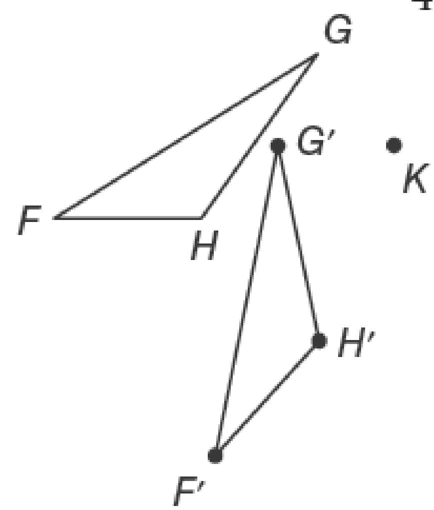
D



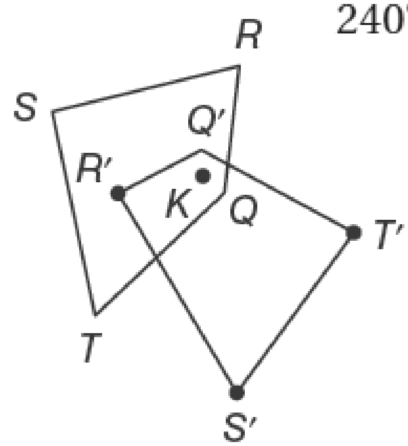
تأكد:

استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

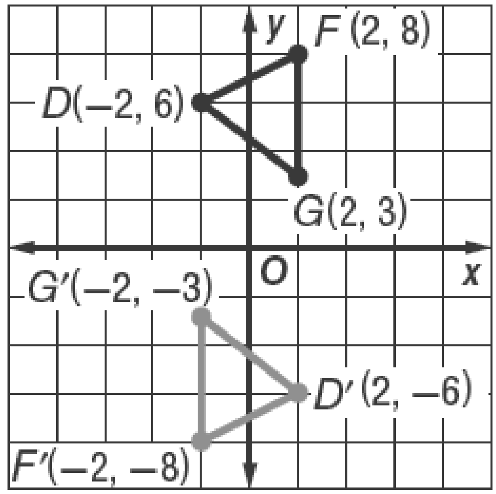
1) $45°$



2) $240°$



3) إحداثيات رؤوس المثلث DFG هي: $D(-2, 6)$, $F(2, 8)$, $G(2, 3)$، مثّل بيانيًّا $\triangle DFG$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ حول نقطة الأصل .

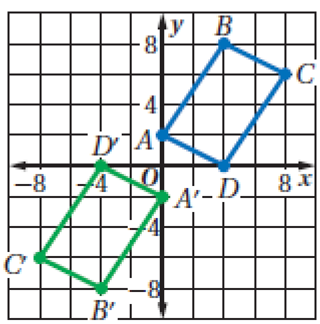


4) **اختيار من متعدد:** الشكل المجاور يبيّن الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ الناتجة عن دوران حول نقطة الأصل.

ما قياس زاوية الدوران؟

A $90°$ **C** $270°$

B $180°$ **D** $360°$

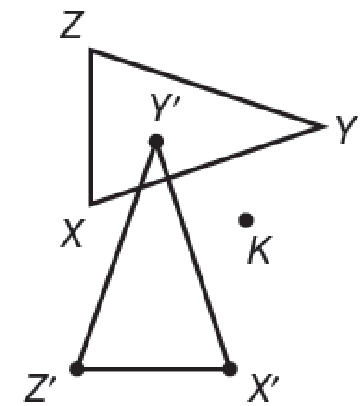


الاختيار الصحيح: B $180°$

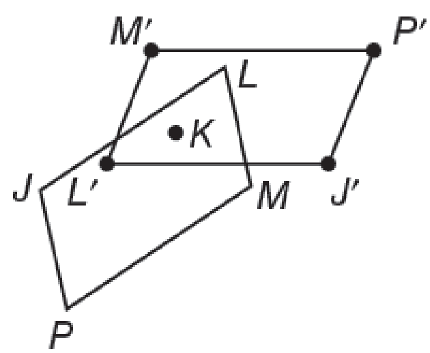
تدرب وحل المسائل:

استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كلٍّ ممَّا يأتي:

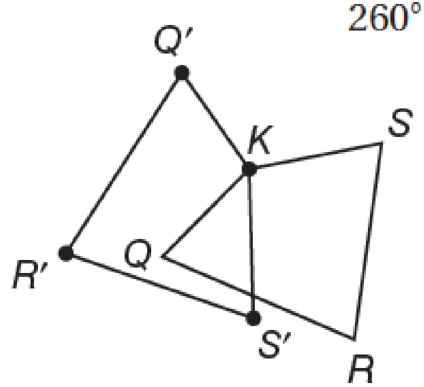
5) $90°$



6) $145°$

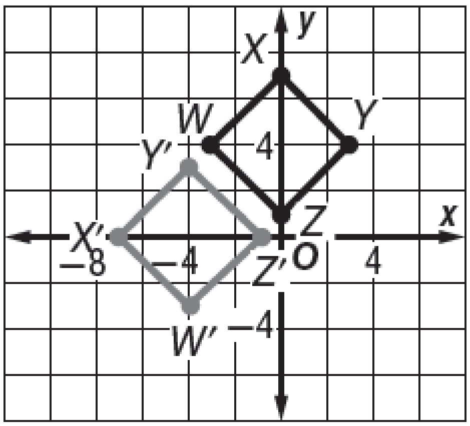


7) $260°$



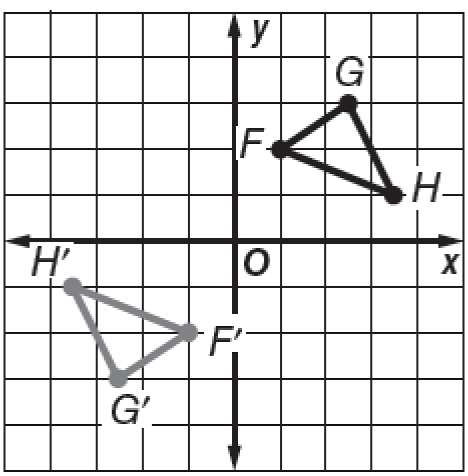
مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كلٍّ ممّا يأتي:

8) المعين $WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Y(3, 4), Z(0, 1)$, $W(-3, 4), X(0, 7)$ ، $90°$



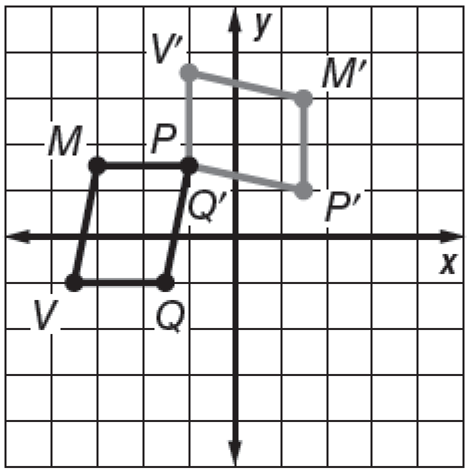
$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$
$$(-3, 4) \rightarrow (-4, -3)$$
$$(0, 7) \rightarrow (-7, 0)$$
$$(3, 4) \rightarrow (-4, 3)$$
$$(0, 1) \rightarrow (-1, 0)$$

9) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(2, 4), G(5, 6), H(7, 2)$ ، $180°$



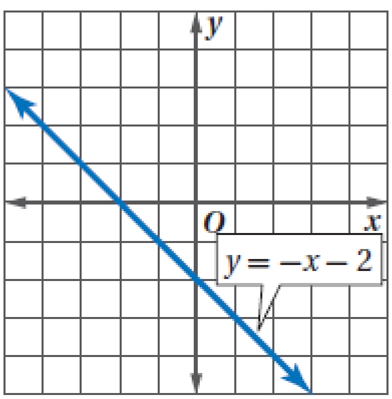
$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$
$$(2, 4) \rightarrow (-2, -4)$$
$$(5, 6) \rightarrow (-5, -6)$$
$$(7, 2) \rightarrow (-7, -2)$$

10) متوازي الأضلاع $MPQV$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-3,-2), V(-7,-2)$ ، $M(-6,3), P(-2,3)$ ، $270°$.



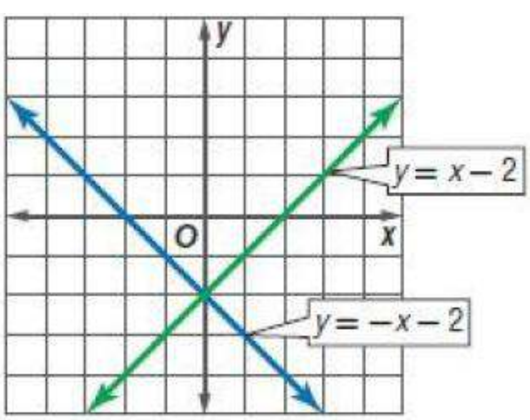
$$\begin{aligned}(x,\ y) &\rightarrow (-y,\ x)\\ (-6,3) &\rightarrow (3,6)\\ (-2,3) &\rightarrow (3,2)\\ (-3,-2) &\rightarrow (-2,3)\\ (-7,-2) &\rightarrow (-2,7)\end{aligned}$$

جبر: أوجد معادلة صورة المستقيم $y=-x-2$ الناتجة عن دوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كلٍّ من الأسئلة الآتية، ثم صِفِ العلاقة بين المستقيم الأصلي وصورته.



11) $90°$

$$\begin{aligned}(x,\ y) &\rightarrow (-y,\ x)\\ (0,-2) &\rightarrow (2,0)\\ (-2,0) &\rightarrow (0,-2)\end{aligned}$$



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m=\frac{0-(-2)}{-2-0}$$

$$m=\frac{2}{-2}=-1$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

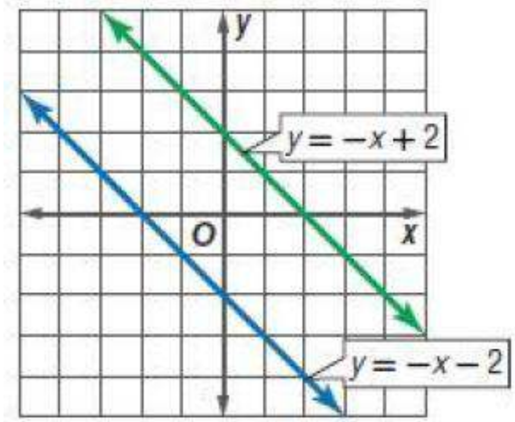
$$y+2=(-1)(x-0)$$

$$y=-x-2$$

حيث أن حاصل ضرب الميلين $=-1$ ، فهما متعامدين

$180°$ (12

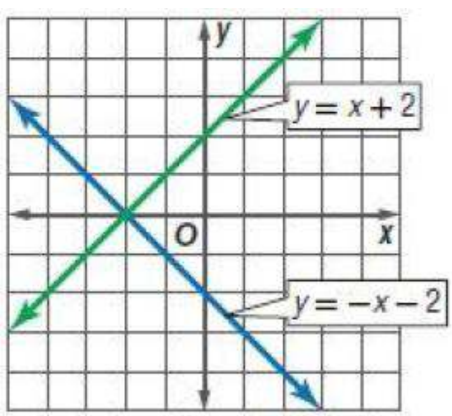
$$(x,\ y) \rightarrow (-x, -y)$$
$$(0, -2) \rightarrow (0, 2)$$
$$(-2, 0) \rightarrow (2, 0)$$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{0-2}{2-0}$$
$$m = -\frac{2}{2} = -1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = -1(x - 0)$$
$$y = -x + 2$$

حيث أن الميلين متساويان، فهما متوازيان

$270°$ (13



$$(x,\ y) \rightarrow (y, -x)$$
$$(0, -2) \rightarrow (-2, 0)$$
$$(-2, 0) \rightarrow (0, 2)$$

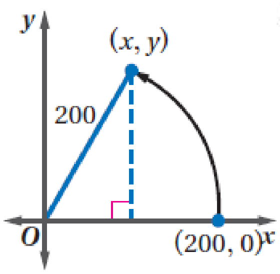
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{0-2}{-2-0}$$
$$m = \frac{-2}{-2} = 1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = 1(x - 0)$$
$$y = x + 2$$

حيث أن حاصل ضرب الميلين = -1 ، فهما متعامدين

14) 360°

عند الدوران 360° حول نقطة الأصل احداثيات (x, y) لا تتغير ، ويكونا على استقامة واحدة

$$y = -x - 2$$



18) **سباق الدراجات:** يشارك سليمان وعبد الله في سباق دراجات على مسار دائري الشكل نصف قطره 200 ft

a) إذا بدأ السباق من النقطة (200, 0) وأتمَّ الاثنان دورة واحدة في 30 ثانيةً، فما إحداثيات موقعهما بعد 5 ثوانٍ؟

نفرض أن زاوية الدوران x في خمس ثواني

$$\frac{360^\circ}{30} = \frac{x^\circ}{5}$$

$$30x = 1800$$

$$x = 60^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \frac{y}{200}$$

$$y = 200\sin 60^\circ$$

$$y \approx 173.2$$

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{200}$$

$$x = 200\cos 60^\circ$$

$$x = 100$$

الاحداثيات: $(100, 173.2)$

b) افترض أن السباق يتكون من 50 دورةً، وأن سليمان استمر بالسرعة نفسها. إذا أنهى عبد الله مسافة السباق في 26.2 دقيقةً، فمن الفائز؟

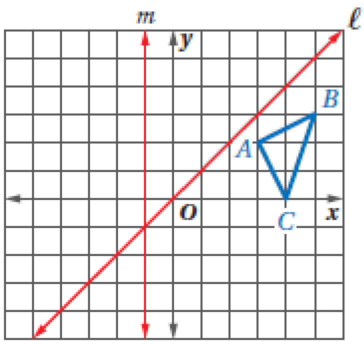
الدورة الواحدة تستغرق 30 ثانية، 50 دورة تستغرق $30 \times 50 = 1500$ ثانية

$$\frac{1500}{60} = 25$$

$25 < 26.2$ ، لذا الفائز هو سليمان

19) **تمثيلات متعددة:**

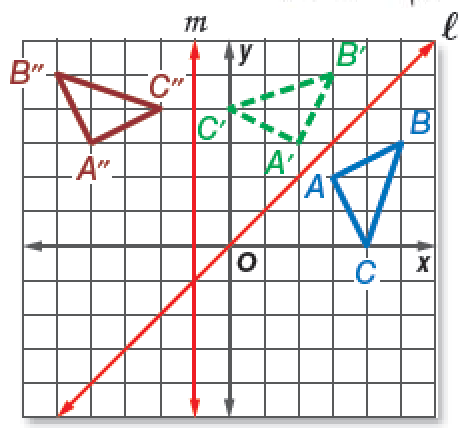
في هذه المسألة ستستقصي الانعكاس حول مستقيمين متقاطعين.



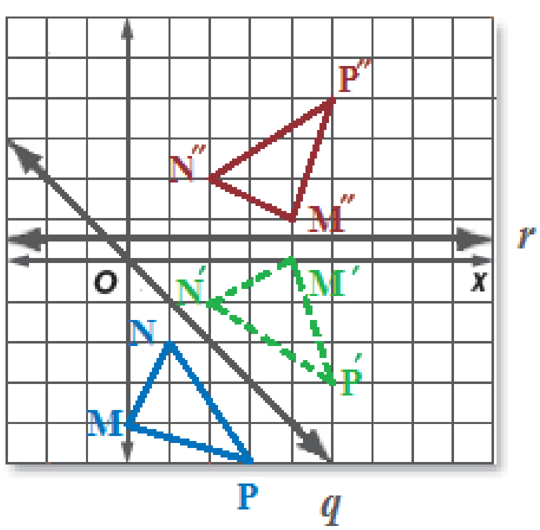
a) **هندسيًا:** في المستوى الإحداثي المجاور، رسم $\triangle ABC$ والمستقيمان المتقاطعان ℓ, m.

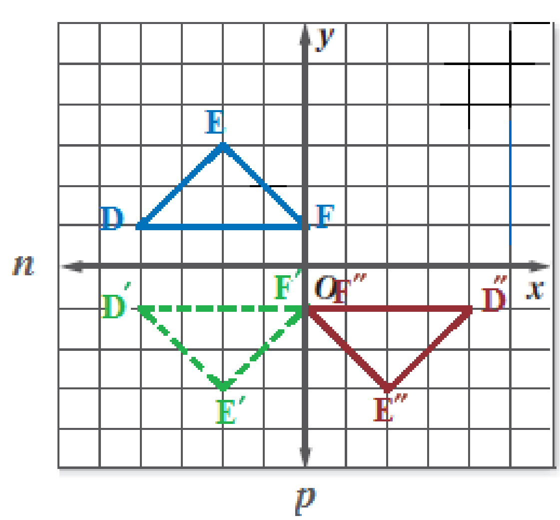
ارسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم ℓ.

وسمّها $\triangle A'B'C'$، ثم ارسم صورة $\triangle A'B'C'$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m. وسمّها $\triangle A''B''C''$.



b) **هندسيًا:** كرّر العملية السابقة مرتين في رُبعين مختلفين، سمّ المثلث الثاني DEF، وارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيمين المتقاطعين n, p. وسمّ المثلث الثالث MNP، وارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيمين المتقاطعين q, r.





c) **جدوليًا:** قِسْ زاوية الدوران لكل مثلثٍ حول نقطة تقاطع المستقيمين، وانسخ الجدول الآتي وأكمله.

قياس الزاوية بين المستقيمين المتقاطعين		قياس زاوية الدوران بين الشكلين	
45°	ℓ, m	90°	$\triangle ABC, \triangle A''B''C''$
90°	n, p	180°	$\triangle DEF, \triangle D''E''F''$
45°	q, r	90°	$\triangle MNP, \triangle M''N''P''$

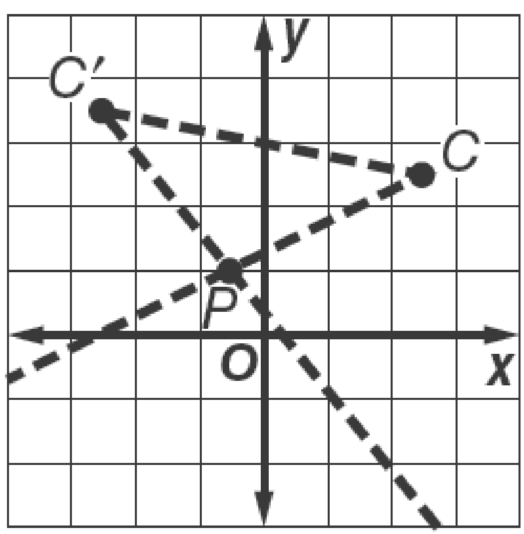
d) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قياس زاوية الدوران الذي تحصل عليه عند إجراء انعكاسين متعاقبين للشكل حول مستقيمين متقاطعين.

قياس زاوية الدوران حول نقطة تقاطع المستقيمين يساوي مثلي قياس الزاوية بين المستقيمين المتقاطعين.

مسائل مهارات التفكير العليا:

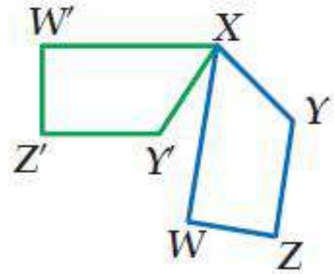
20) **تحدٍّ:** إحداثيًا النقطة C هما $C(5, 5)$، وإحداثيًا صورتها الناتجة عن دوران بزاوية $100°$ حول نقطة معينة هما $C'(-5, 7.5)$، أوجد إحداثيَّي مركز الدوران. وضّح إجابتك.

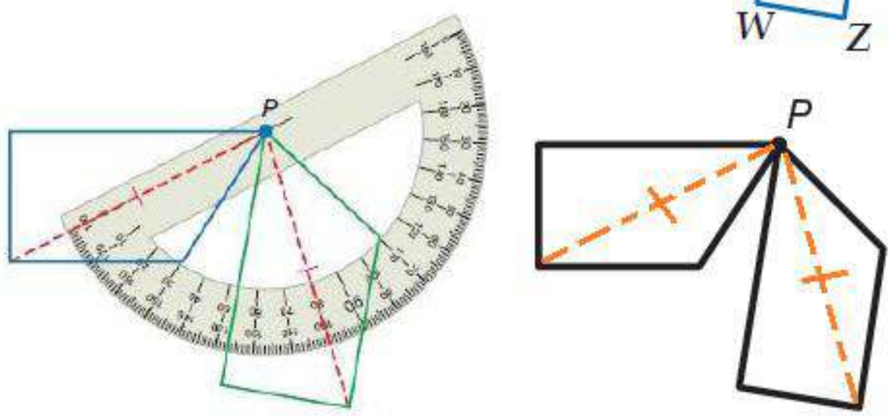
$(-1,2)$، بما أن $CC'P$ متطابق الضلعين وزاوية رأسه تساوي زاوية الدوران، فإن كل من $m\angle PCC'$ و $m\angle PC'C$ يساوي $40°$ لأن زاويتي القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان. وعندما ترسم زاوية قياسها $40°$ عند الرأس C وزاوية قياسها $40°$ عند الرأس C' يتقاطع الشعاعان اللذان يكونان هاتين الزاويتين عند مركز الدوران أي عند النقطة $(-1,2)$.



يظهر في كلٍّ من السؤالين الآتيين الشكل الأصلي وصورته الناتجة عن دوران حول النقطة P،
انسخ في دفترك كلًّا من الشكلين وحدِّد موقع النقطة P ، ثم أوجد قياس زاوية الدوران.

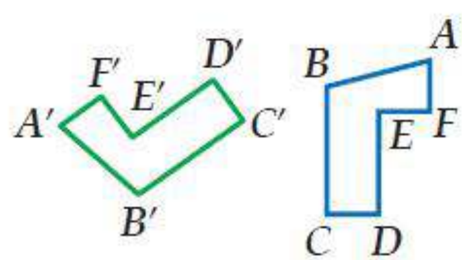
(21

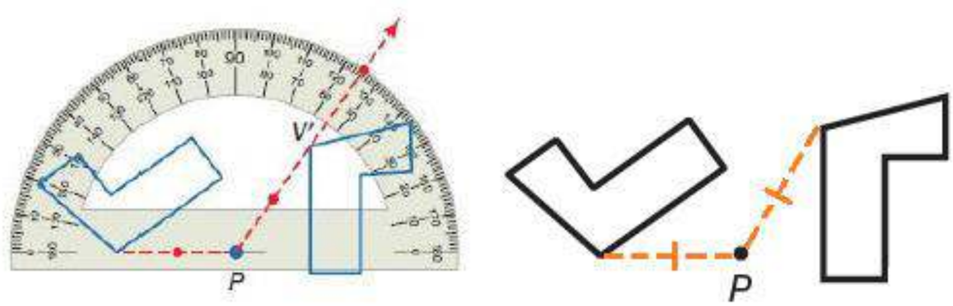




زاوية الدوران: 80°

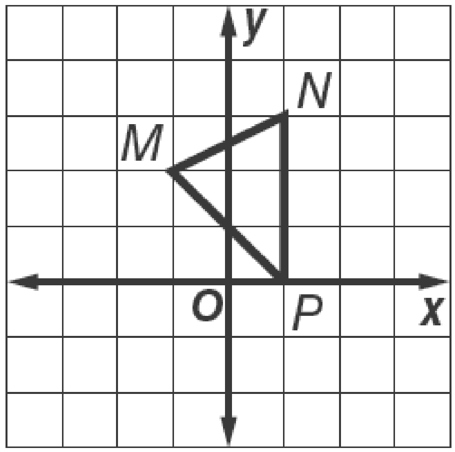
(22





زاوية الدوران: 125°

(23 **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا في المستوى الإحداثي، وصف دورانًا زاويته لا تساوي الصفر، وتنطبق فيه الصورة والشكل الأصلي أحدهما على الآخر.



دوران $360°$، يعيد الشكل إلى وضعه الأصلي، دوران $360°$ عبارة عن دوران $180°$ مرتين.
مثلاً النقطة $N(1, 3)$ بدوران $180°$ تنقل النقطة N إلى $(-1, -3)$، ثم بدوران $180°$ مرة أخرى تنقل النقطة N إلى *وضعها الأصلي* $(1, 3)$

(24 **تبرير:** هل يكافئ انعكاس شكل حول المحور x دورانًا حول نقطة الأصل للشكل نفسه بزاوية $180°$؟ وضح إجابتك.

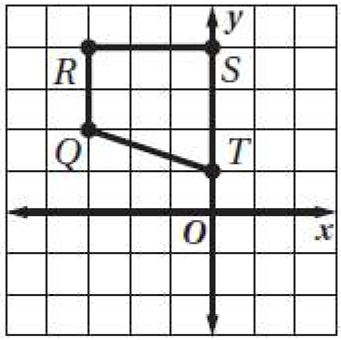
لا، إجابة ممكنة: عندما يعكس الشكل حول المحور X يبقي الإحداثي X ثابتاً وتتغير إشارة الإحداثي Y وعندما يتم تدوير الشكل نفسه بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل تتغير إشارتا الإحداثيين $x < y$. لذا فإن هذين التحويلين غير متكافئين.

(25 **اكتب:** هل تبقى نقاط ثابتة في الدوران دائمًا أو أحيانًا أو لا تبقى أي نقاطٍ ثابتةٍ أبدًا؟

تبقي نقاط ثابتة أحياناً، إجابة ممكنة: عندما يتم تدوير الشكل حول نقطة من الشكل نفسه تبقي هذه النقطة التي تمثل مركز الدوران ثابتة. وأما إذا تم تدوير الشكل حول نقطة ليست واقعة عليه فلن يبقي نقاط ثابتة نتيجة الدوران.

تدريب على اختبار

26) ما الدوران الذي يُجرى على شبه المنحرف $QRST$ لينقل الرأس R إلى $R'(4, 3)$؟



A °270 عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة T.

B °185 عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة T.

C °180 في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

D °90 في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

$\mathbf{R(-3, 4)}$

$\mathbf{270^\circ : (-3, 4) \rightarrow (3, 4)}$

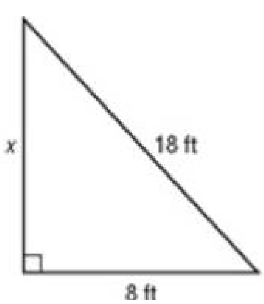
$\mathbf{185^\circ : (-3, 4) \rightarrow}$ **بين** $\mathbf{(3, -2)}$ **و** $\mathbf{(4, -1)}$

$\mathbf{180^\circ : (-3, 4) \rightarrow (3, -4)}$

$\mathbf{90^\circ : (-3, 4) \rightarrow (4, 3)}$

الاختيار الصحيح: D °90 في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل

27) يرتكز سُلّم طوله 18 ft على حائط رأسي وأرض أفقية، إذا كان أسفل السلم يبعد 8 ft عن الحائط، فما ارتفاع رأس السلم عن الأرض مقربًا إلى أقرب عُشر قدم؟



A 10.0 ft　　**C** 19.7 ft

B 16.1 ft　　**D** 26.0 ft

$$\mathbf{x = \sqrt{(18)^2 - 8^2} \approx 16.1}$$

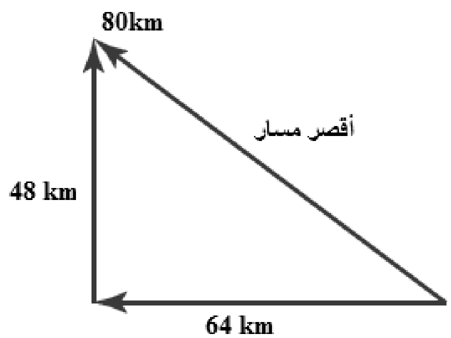
الاختيار الصحيح: 16.1 ft. B

مراجعة تراكمية

28) **براكين:** تحركت سُحُب من الغبار والغازات المنبعثة من بركان مسافة 64 km غربًا و48 km شمالًا.

ارسم شكلًا يوضح الإزاحة التي وقعت على حُبيبات الغبار، ثم أوجد طول أقصر مسار ينقل الغبار إلى الموقع نفسه.

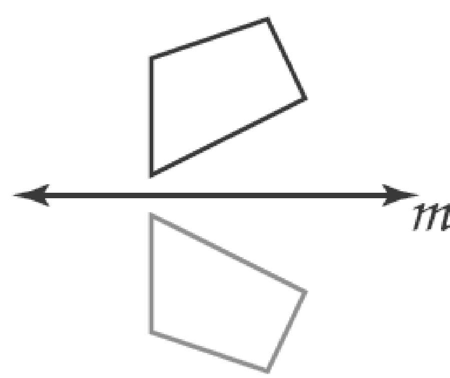
لإيجاد طول أقصر مسار نستخدم نظرية فيثاغورث



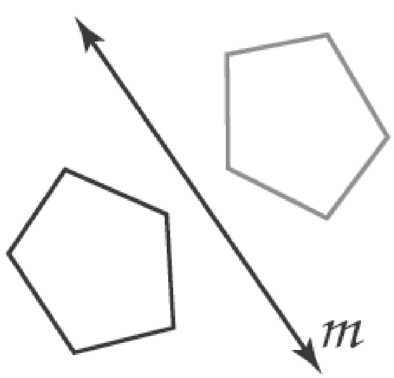
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 48^2 + 64^2$$
$$c^2 = 2304 + 4096$$
$$c^2 = 6400$$
$$c = \sqrt{6400}$$
$$c = 80\text{ km}$$

ارسم صورة المضلع الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m في كلٍّ ممّا يأتي:

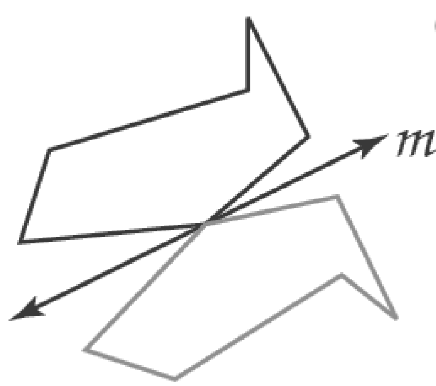
29)



30)



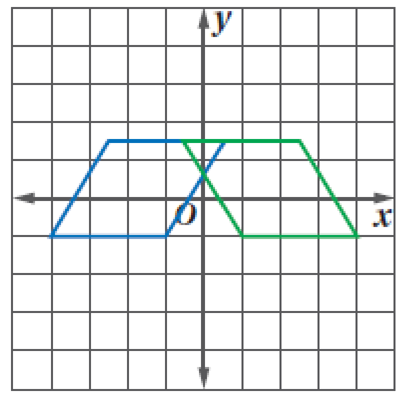
31)



استعد للدرس اللاحق

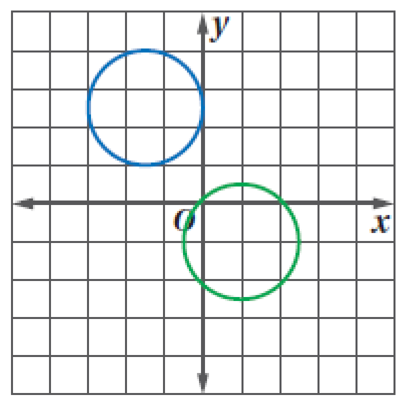
صنِّف التحويل المبيَّن في كلٍّ من الأشكال الآتية إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران.

(32



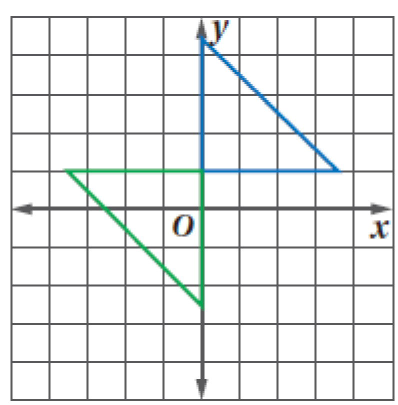
انعكاس

(33



إزاحة

(34

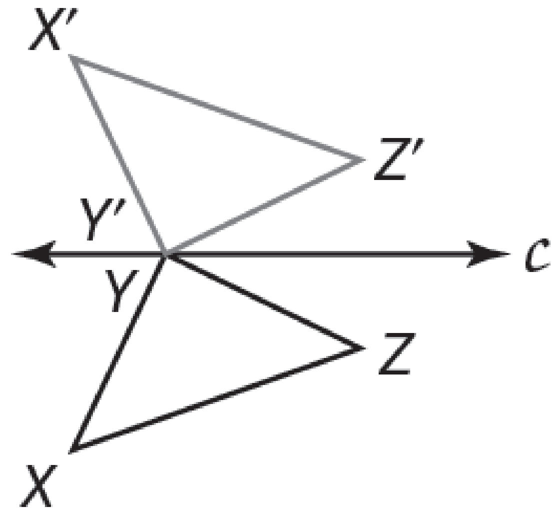


دوران أو انعكاس

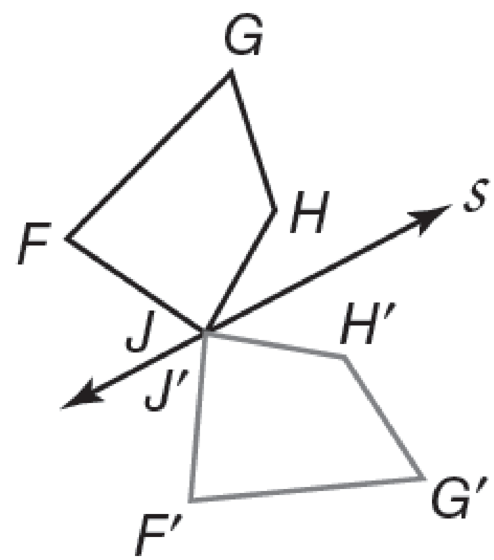
* اختبار منتصف الفصل

ارسم صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين بالانعكاس حول المستقيم المعطى.

(1

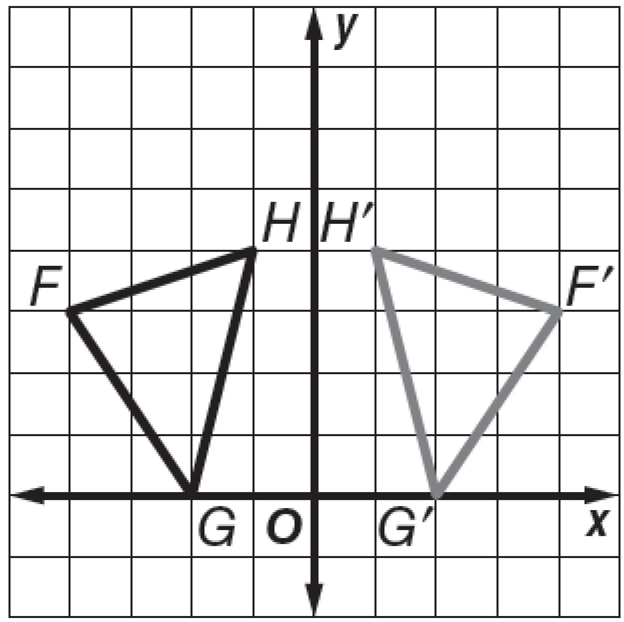


(2

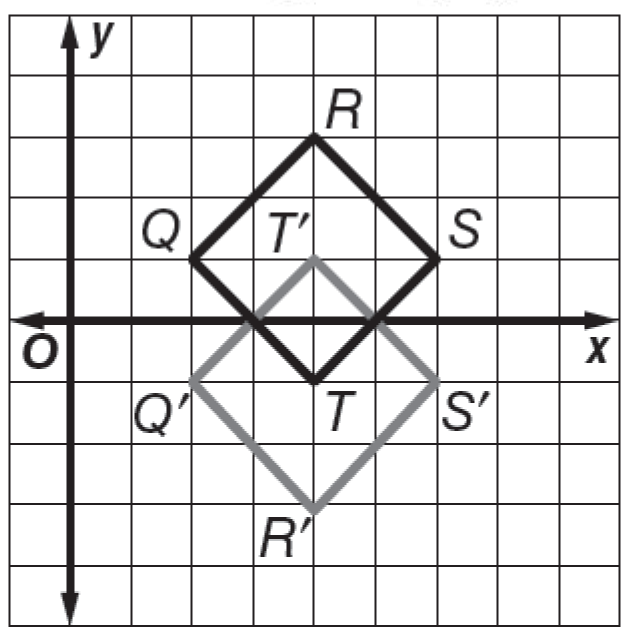


مثل كلًّا من الشكلين الآتيين بيانيًّا، ثم ارسم صورة كلٍّ منهما بالانعكاس المحدد:

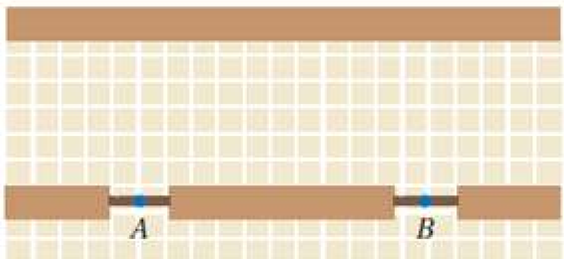
3) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(-4, 3), G(-2, 0), H(-1, 4)$، بالانعكاس حول المحور y.

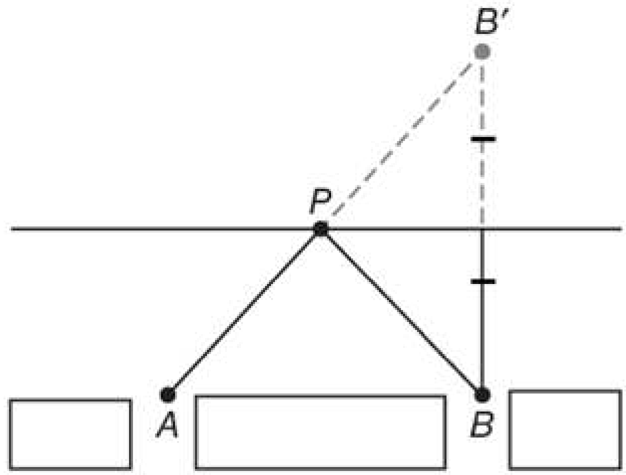


4) المعين $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(2, 1), R(4, 3), S(6, 1), T(4, -1)$، بالانعكاس حول المحور x.



5) **احتفالات:** وضع المشرفون على احتفال المدرسة طاولة قرب الحائط المقابل للمدخلين A, B لقاعة الاحتفال؛ لتقديم بعض الحلوى للحضور بعد نهاية الاحتفال. حدّد موقع النقطة P التي تمثل موقع الطاولة، بحيث يسير الأشخاص الذين يعبرون من المدخل A أو المدخل B المسافة نفسها حتى يصلوا إلى الطاولة مستخدمًا الانعكاس.

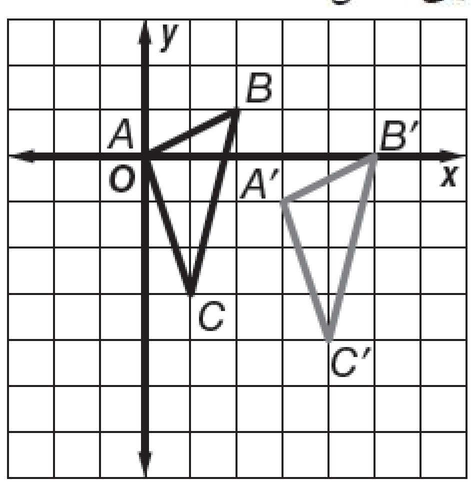




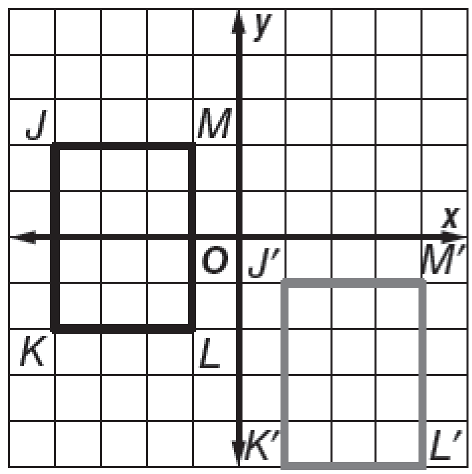
ارسم $\overline{BB'}$ بحيث B' صورة النقطة B بالانعكاس حول الحائط، ثم أصل AB' فيكون $AP + PB'$ أقل ما يمكن

مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

6) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(0, 0), B(2, 1), C(1, -3)$، إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل.

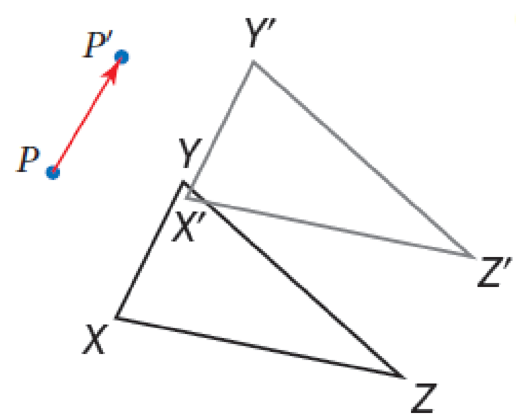


7) المستطيل $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$J(-4, 2), K(-4, -2), L(-1, -2), M(-1, 2)$،
إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليمين و3 وحدات إلى أسفل.

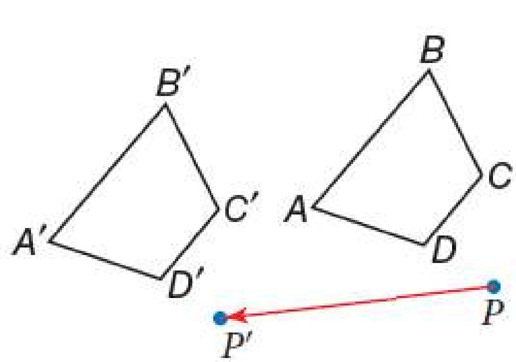


ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة P إلى P' في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

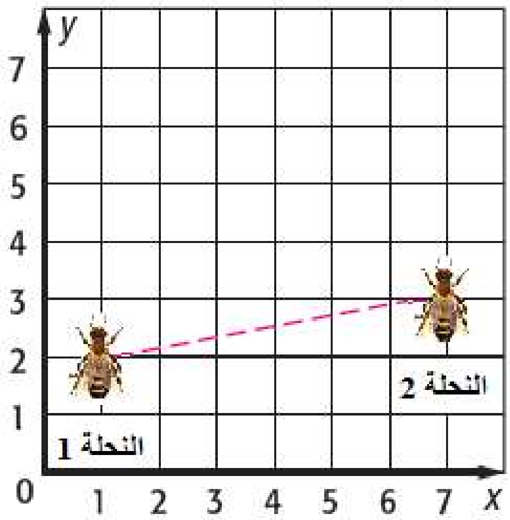
8)



9)



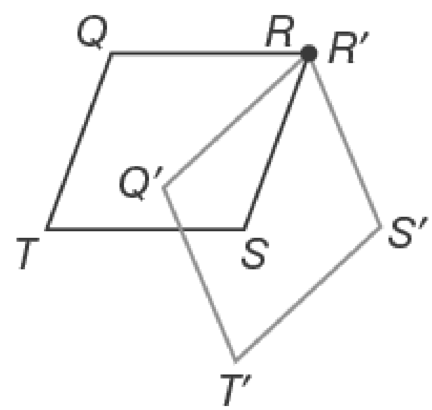
10) **قصص مصورة:** يكتب سامي قصة مصورة وهو يستعمل ورق الرسم البياني؛ ليتأكد من أن قياسات الأشكال التي يرسمها دقيقة. إذا رسم مستوى إحداثيًّا ونحلتين كما في الشكل المجاور، فما الإزاحة التي تنقل النحلة 1 إلى موقع النحلة 2؟



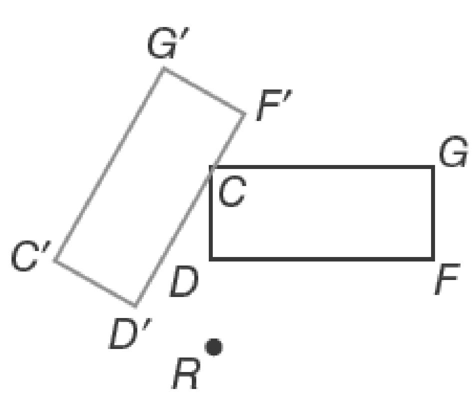
6-وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أعلى

استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة R بالزاوية المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

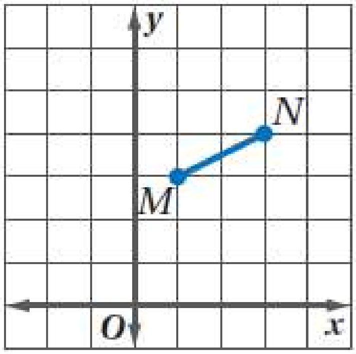
11) $45°$



12) $60°$



13) **اختيار من متعدد:** ما صورة النقطة M الناتجة عن الدوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل؟



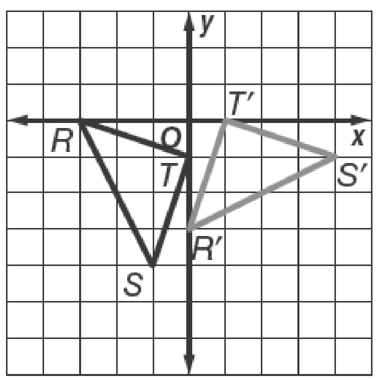
A $(-3, 1)$ **C** $(-1, -3)$

B $(-3, -1)$ **D** $(3, 1)$

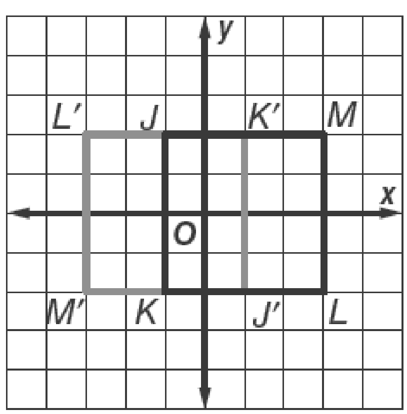
الاختيار الصحيح: A $(-3, 1)$

مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحدّدة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

14) $\triangle RST$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$R(-3, 0), S(-1, -4), T(0, -1)$، وزاوية دورانه $90°$



15) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$J(-1, 2), K(-1, -2), L(3, -2), M(3, 2)$،
وزاوية دورانه $180°$



7-4 استكشاف: معمل المحاسبة البيانية: تركيب التحويلات الهندسية

تحليل النتائج:

1) ما العلاقة بين الشكل الأصلي والشكل النهائي؟

الشكلان متطابقان ولهما الاتجاه نفسه.

2) ما التحويل الهندسي الذي يمكن استعماله للحصول على الشكل النهائي؟

الإزاحة

3) ماذا يحدث إذا حركت المستقيم m؟ وماذا يحدث إذا حركت المستقيم r؟

إذا حركت المستقيم m، فستتحرك صورتا الشكل بالانعكاس، أما إذا حركت المستقيم r، فستتحرك الصورة النهائية فقط.

4) **خمّن:** إذا أُجرِي انعكاس لهذا الشكل حول مستقيم ثالثٍ، فما التحويل الهندسي الواحد الذي يمكن أن يستعمل للحصول على الشكل النهائي؟ وضّح إجابتك.

بما أنه سيكون اتجاه الشكل عكس اتجاهه الأصلي فيمكن استعمال انعكاس أو دوران لإنتاج الشكل النهائي بتحويل هندسي واحد.

5) كرّر هذا النشاط مع مستقيمين متعامدين. ما التحويل الهندسي الذي يمكن أن يُستعمل للحصول على الشكل النهائي؟

يمكن استعمال دوران بزاوية 180° حول نقطة التقاطع لإنتاج الشكل النهائي بتحويل هندسي واحد.

6) **خمّن:** إذا أجريت انعكاسًا للشكل الناتج في السؤال 5 حول مستقيم ثالثٍ يعامد المستقيم الثاني، فما التحويل الهندسي الواحد الذي يمكن أن يستعمل لإنتاج الشكل النهائي؟ وضّح إجابتك.

سوف يتطلب الأمر أن تستعمل الدوران لإنتاج الشكل النهائي بتحويل هندسي واحد لأن اتجاه الشكل النهائي لن يكون مماثلاً لاتجاه الشكل الأصلي.

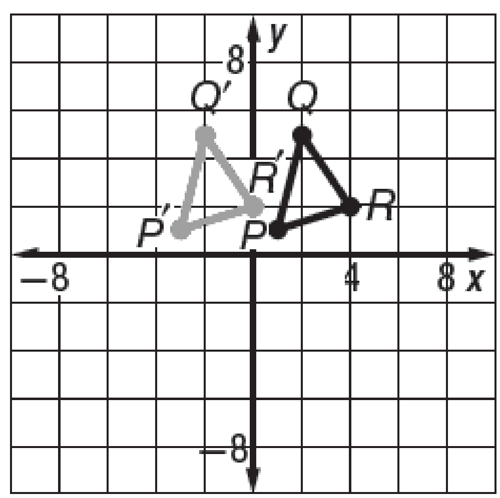
7-4 تركيب التحويلات الهندسية

تحقق

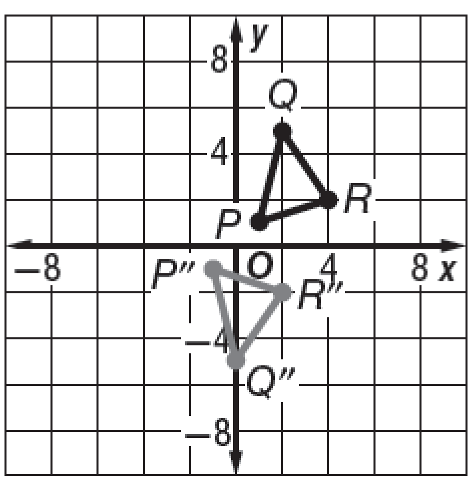
إحداثيات رؤوس المثلث PQR هي: $P(1, 1), Q(2, 5), R(4, 2)$ ، مثِّل بيانيًّا $\triangle PQR$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1A) إزاحة مقدارها وحدتين إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور x .

الازاحة

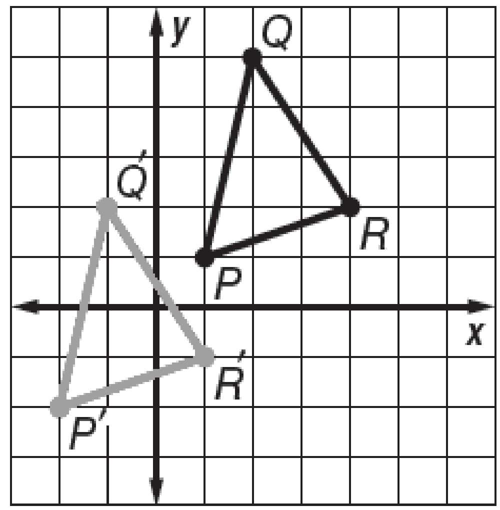


الدوران

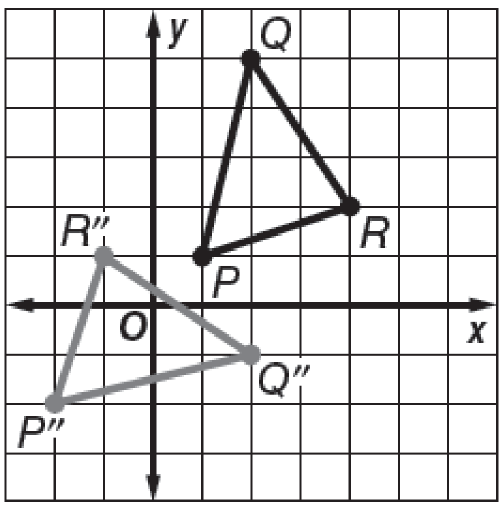


1B) إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى أسفل و3 وحدات إلى اليسار، ثم انعكاس حول المستقيم $y = x$.

الازاحة

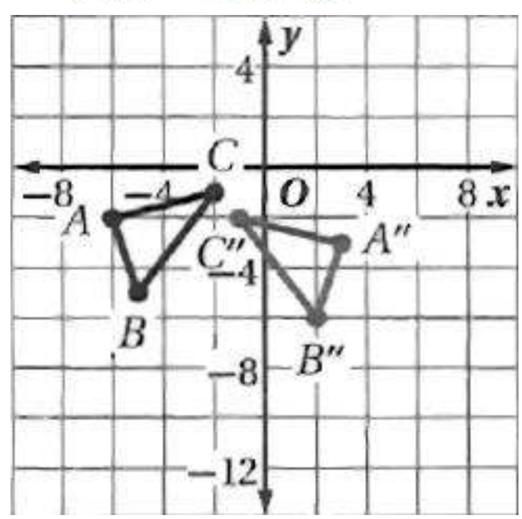


الدوران

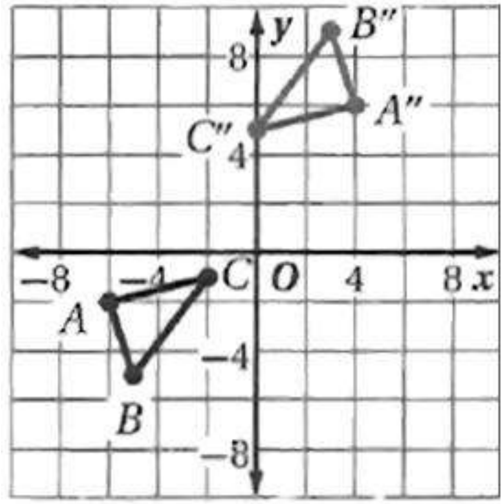


إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي: $A(-6, -2), B(-5, -5), C(-2, -1)$ ، مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته الناتجة عن تركيب التحويلين الهندسيين بالترتيب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

2A) إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل، ثم انعكاس حول المحور y .

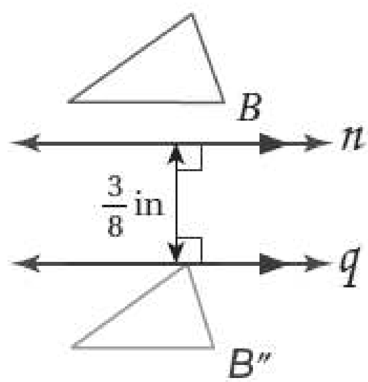


2B) دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل، ثم إزاحة مقدارها وحدتين إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

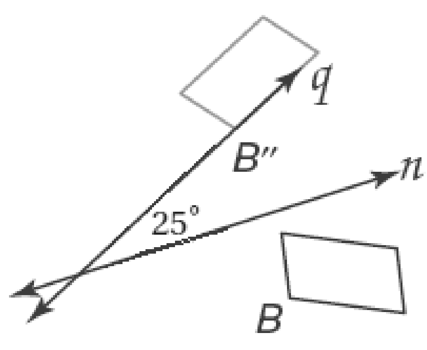


ارسم صورة الشكل B الناتجة عن انعكاس حول المستقيم n ثم حول المستقيم q، ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل B إلى B''.

3A)

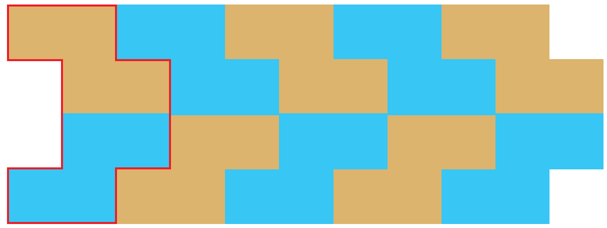


3B)



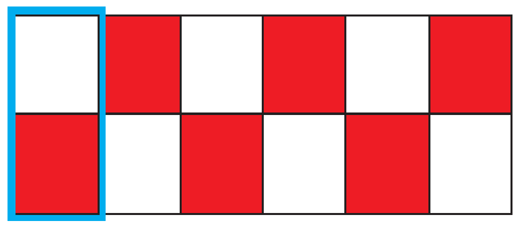
4) سجاد : صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتكوين النمط في كل مِمَّا يأتي:

A)



تركيب انعكاس وإزاحة

B)



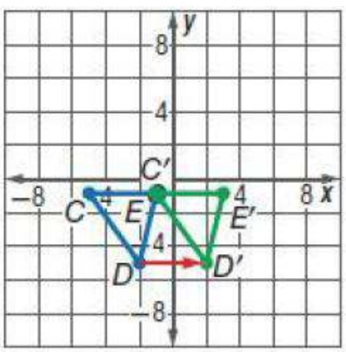
تركيب انعكاس وإزاحة

تأكد:

إحداثيات رؤوس المثلث CDE هي: $C(-5,-1), D(-2,-5), E(-1,-1)$،

مثّل بيانيًّا $\triangle CDE$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

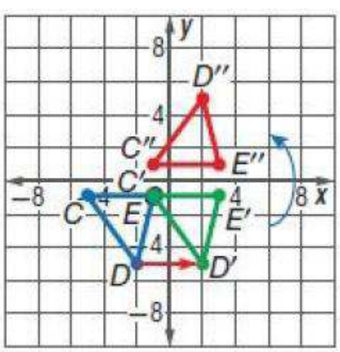
1) إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى اليمين، ثم انعكاس حول المحور x



الازاحة:

$$(x,\ y) \rightarrow (x+4,\ y)$$

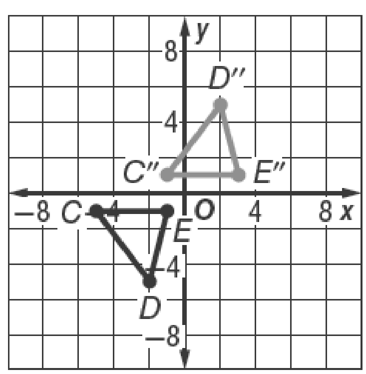
$$C(-5,-1) \rightarrow C'(-1,-1)$$
$$D(-2,-5) \rightarrow D'(2,-5)$$
$$E(-1,-1) \rightarrow E'(3,-1)$$



الانعكاس:

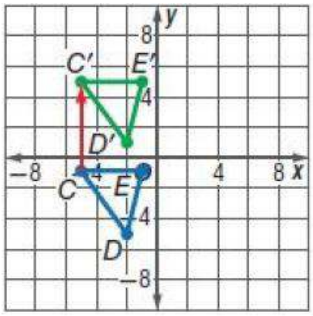
$$(x,\ y) \rightarrow (x,\ -y)$$

$$C'(-1,-1) \rightarrow C''(-1,1)$$
$$D'(2,-5) \rightarrow D''(2,5)$$
$$E'(3,-1) \rightarrow E''(3,1)$$



2) إزاحة مقدارها 6 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y

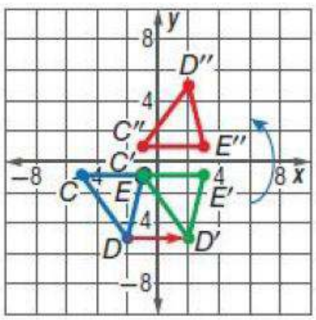
الازاحة:



$$(x,\ y) \rightarrow (x,\ y+6)$$

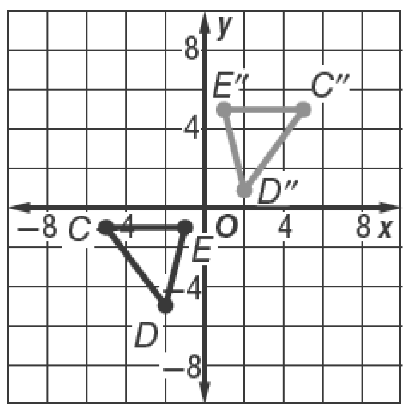
$$C(-5,-1) \rightarrow C'(-5,5)$$
$$D(-2,-5) \rightarrow D'(-2,1)$$
$$E(-1,-1) \rightarrow E'(-1,5)$$

الانعكاس:

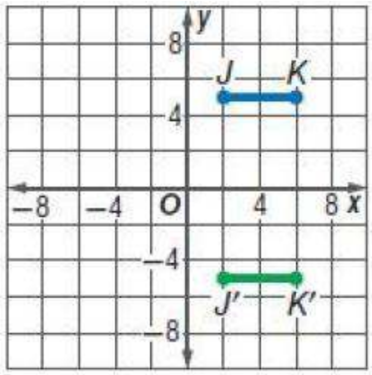


$$(x,\ y) \rightarrow (-x,\ y)$$

$$C'(-5,5) \rightarrow C''(5,5)$$
$$D'(-2,1) \rightarrow D''(2,1)$$
$$E'(-1,5) \rightarrow E''(1,5)$$



3) إحداثيات طرفي $\overline{JK}$ هما $J(2, 5), K(6, 5)$، مثِّل بيانيًّا $\overline{JK}$ وصورتها الناتجة عن انعكاس حول المحور x، ثم دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

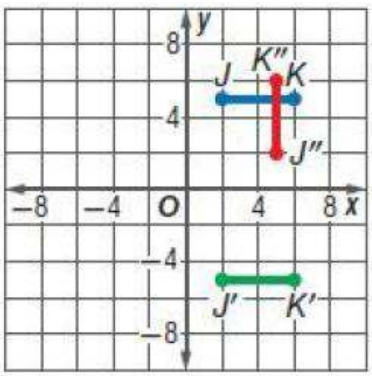


الانعكاس حول المحور x

$$(x,\ y) \to (x, -y)$$

$$J(2, 5) \to J'(2, -5)$$

$$K(6, 5) \to K'(6, -5)$$

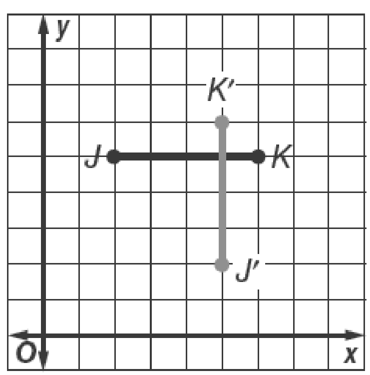


الدوران $90°$ حول نقطة الأصل

$$(x,\ y) \to (-y,\ x)$$

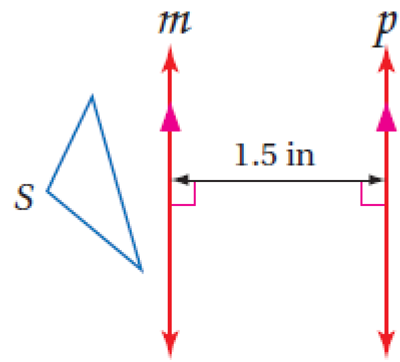
$$J'(2, -5) \to J''(5, 2)$$

$$K'(6, -5) \to K''(5, 6)$$

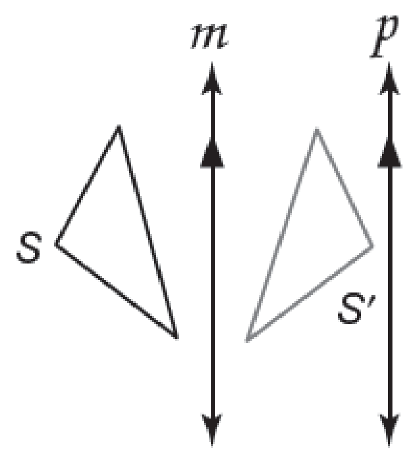


ارسم صورة الشكل S الناتجة عن انعكاس حول المستقيم m ثم حول المستقيم p،
ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل S إلى S''.

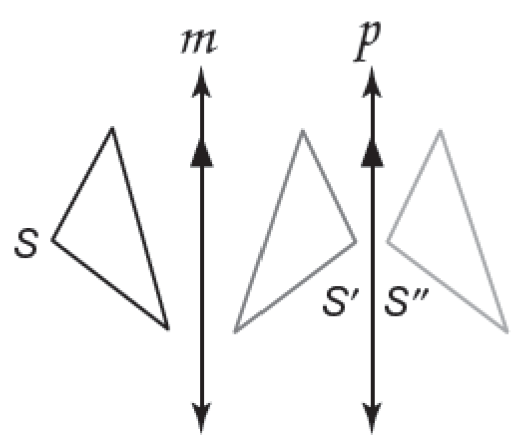
4)



الانعكاس الأول حول المستقيم m



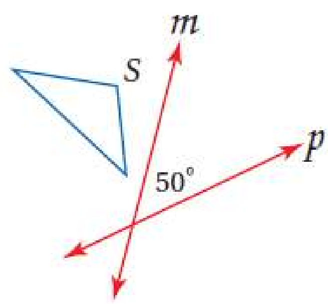
الانعكاس الثاني حول المستقيم p



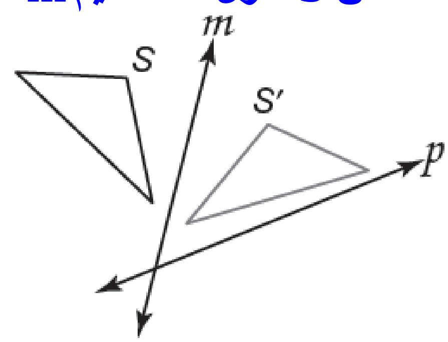
نلاحظ بعد الانعكاسين وبتطبيق النظرية 9.2 يكون مكافئ للإزاحة الافقية لليمين

$$2 \times 1.5 = 3 \text{ in.}$$

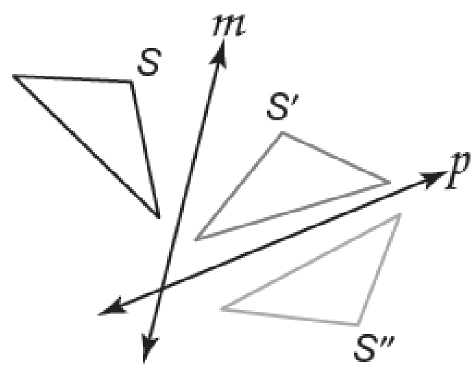
(5



انعكاس S حول المستقيم m

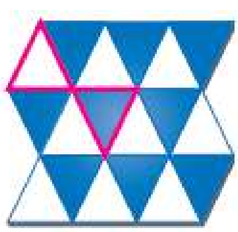


انعكاس S حول المستقيم p



نلاحظ بعد الانعكاسين وبتطبيق النظرية 9.3 يكون مكافئ للدوران في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة تقاطع المستقيمين m,l

6) **أنماط البلاط:** صنع راشدٌ نمطًا من بلاطٍ على شكل مثلث متطابق الضلعين، صِفِ التحويل الهندسي المركّب الذي يمكن استعماله لتكوين هذا النمط.



أنماط البلاط: انعكاس وإزاحة

تدرب وحل المسائل:

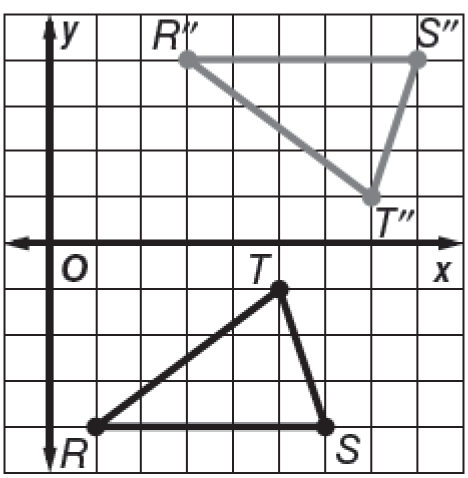
مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل المركّب المحدّد في كلٍّ ممّا يأتي:

7) $\triangle RST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $R(1, -4), S(6, -4), T(5, -1)$ ،
إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x

الازاحة:

$$(x, y) \to (x+2, y)$$

$$R(1, -4) \to R'(3, -4)$$
$$S(6, -4) \to S'(8, -4)$$
$$T(5, -1) \to T'(7, -1)$$



الانعكاس:

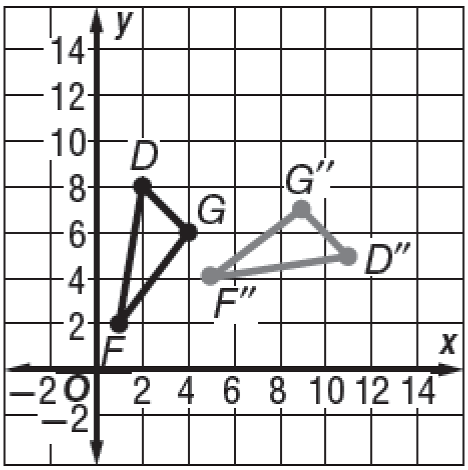
$$(x, y) \to (x, -y)$$

$$R'(3, -4) \to R''(3, 4)$$
$$S'(8, -4) \to S''(8, 4)$$
$$T'(7, -1) \to T''(7, 1)$$

8) $\triangle DFG$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(2, 8), F(1, 2), G(4, 6)$،
إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين و3 وحدات إلى أعلى،
ثم انعكاس حول المستقيم $y = x$

الازاحة:

$$(x, y) \rightarrow (x+3, y+3)$$



$$D(2, 8) \rightarrow D'(5, 11)$$
$$F(1, 2) \rightarrow F'(4, 5)$$
$$G(4, 6) \rightarrow G'(7, 9)$$

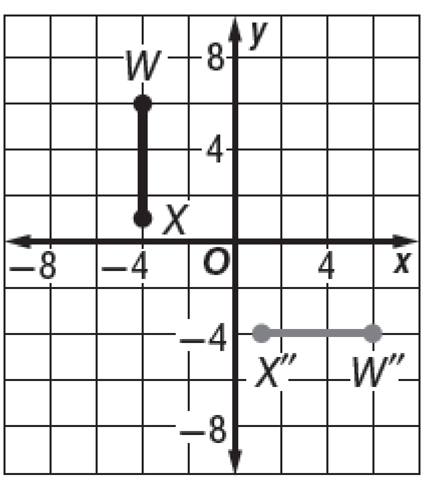
الانعكاس:

$$(x, y) \rightarrow (y, x)$$
$$D'(5, 11) \rightarrow D''(11, 5)$$
$$F'(4, 5) \rightarrow F''(5, 4)$$
$$G'(7, 9) \rightarrow G''(9, 7)$$

مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل المركّب المحدّد في كلٍّ ممَّا يأتي:

9) $\overline{WX}$، حيث $W(-4, 6), X(-4, 1)$، انعكاس حول المحور x
ثم دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

الانعكاس:

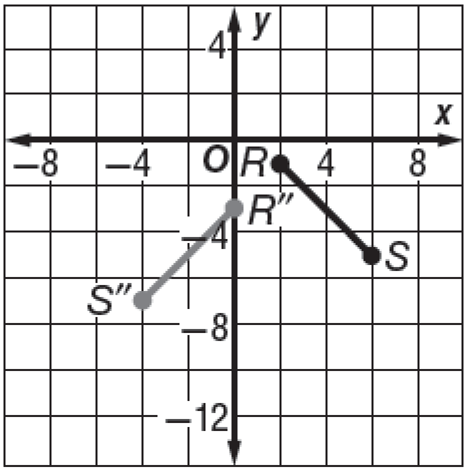


$$(x, y) \rightarrow (x, -y)$$
$$W(-4, 6) \rightarrow W'(-4, -6)$$
$$X(-4, 1) \rightarrow X'(-4, -1)$$

الدوران:

$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$
$$W'(-4, -6) \rightarrow W''(6, -4)$$
$$X'(-4, -1) \rightarrow X''(1, -4)$$

(10 $\overline{RS}$ ، حيث $R(2, -1), S(6, -5)$ ، إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليسار ووحدتان إلى أسفل، ثم انعكاس حول المحور y



الازاحة:

$$(x, y) \rightarrow (x-2, y-2)$$

$$R(2, -1) \rightarrow R'(0, -3)$$
$$S(6, -5) \rightarrow S'(4, -7)$$

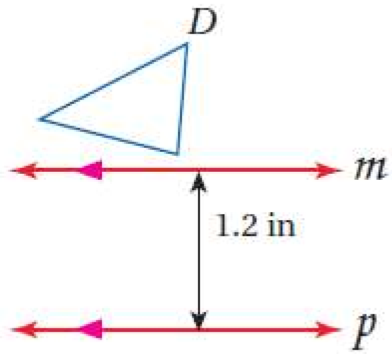
الانعكاس:

$$(x, y) \rightarrow (-x, y)$$

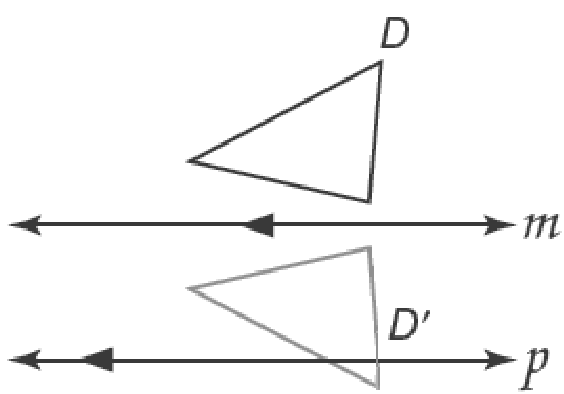
$$R'(0, -3) \rightarrow R''(0, -3)$$
$$S'(4, -7) \rightarrow S''(-4, -7)$$

ارسم صورة الشكل D الناتجة عن انعكاس حول المستقيم m ثم حول المستقيم p.
ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل D إلى D''.

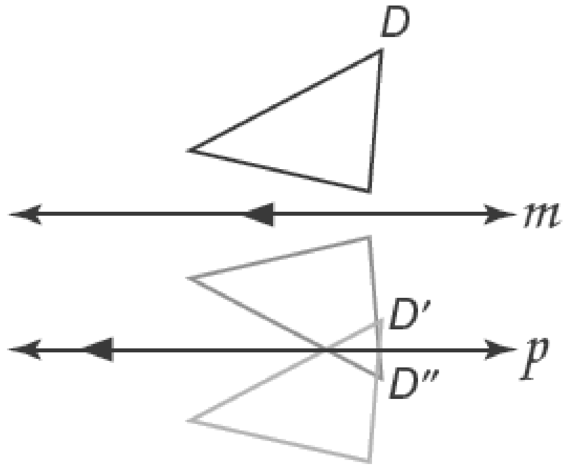
(11



انعكاس D حول المستقيم m

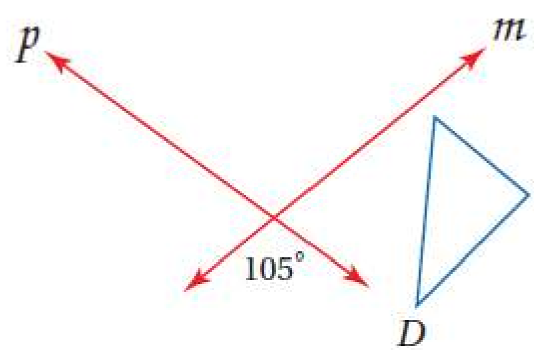


انعكاس D' حول المستقيم p

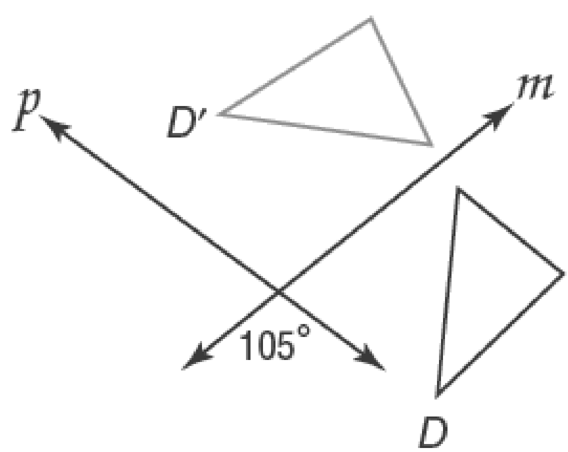


نلاحظ بعد الانعكاسين وبتطبيق النظرية 9.2 يكون مكافئ للإزاحة الرأسية للأسفل $2 \times 1.2 = 2.4$ in.

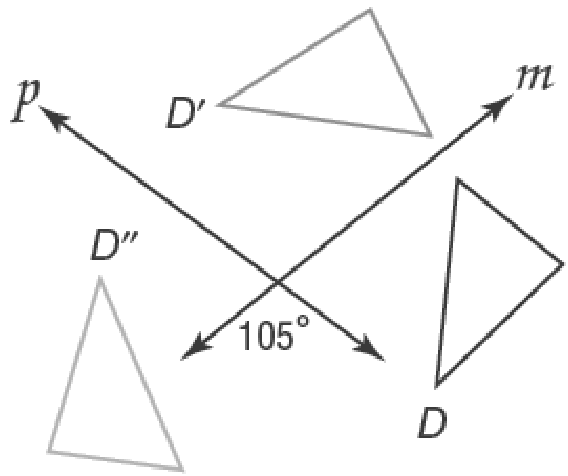
(12



الانعكاس D حول المستقيم m



انعكاس D' حول المستقيم p



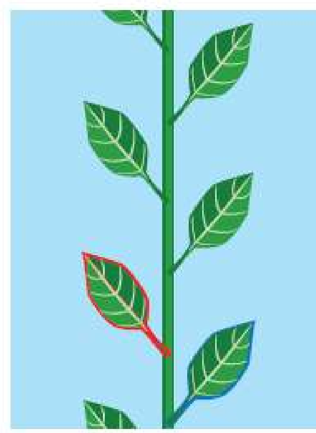
نلاحظ بعد الانعكاسين وبتطبيق النظرية 9.3 يكون مكافئ

للدوران $210^\circ = 2\times105^\circ$ في عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة تقاطع

المستقيمين m, p

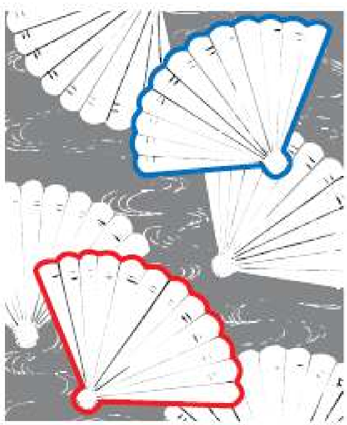
صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتكوين نمط الأقمشة في كلٍّ ممَّا يأتي:

(13



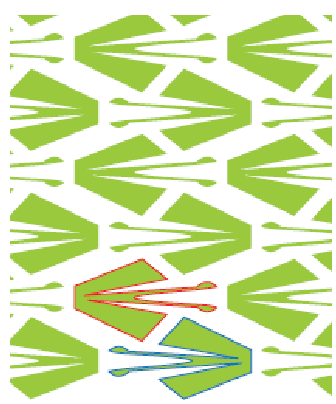
الإزاحة

(14



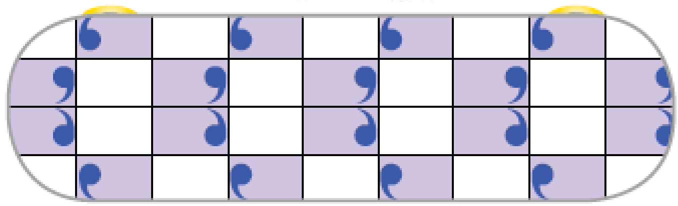
انعكاس و ازاحة

(15



دوران

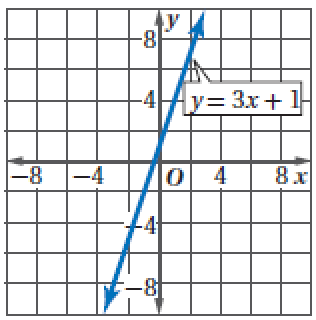
16) **زَلَاجات:** رسم صالح على زلاجته نمطًا، ما التحويل الهندسي المركب الذي استعمله صالح لرسم هذا النمط؟



ازاحتان

جبر: مثّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد:

17) دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل انعكاس حول المحور x



بتعريف نقطتين على المستقيم $y = 3x + 1$

بفرض النقطة $A\,(0, 1)$ و النقطة $B\,(-2, -5)$

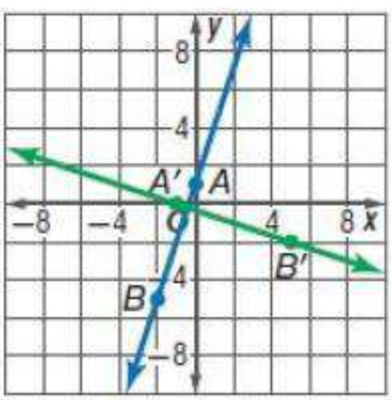
الدوران حول نقطة الأصل

$$(x, y) \to (-y, x)$$

$$A(0, 1) \to A'(-1, 0)$$

$$B(-2, -5) \to B'(5, -2)$$

إيجاد المعادلة باستخدام النقطتين



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-2 - 0}{5 - (-1)}$$

$$m = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

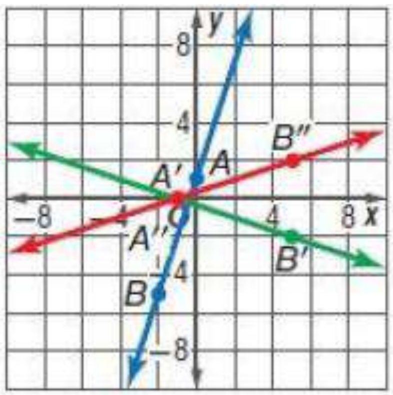
$$y - 0 = -\frac{1}{3}\left[x - (-1)\right]$$

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

انعكاس المستقيم حول المحور x

$$(x,\ y) \rightarrow (x,\ -y)$$

$$A'(-1,\ 0) \rightarrow A''(-1,\ 0)$$
$$B'(5,\ -2) \rightarrow B''(5,\ 2)$$



إيجاد المعادلة باستخدام النقطتين

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

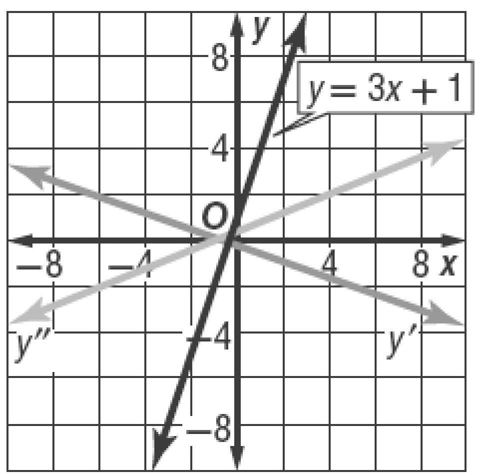
$$m = \frac{2-0}{5-(-1)}$$

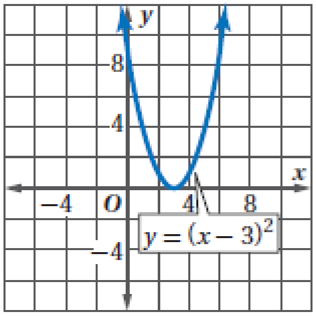
$$m = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{1}{3}\left[x - (-1)\right]$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$





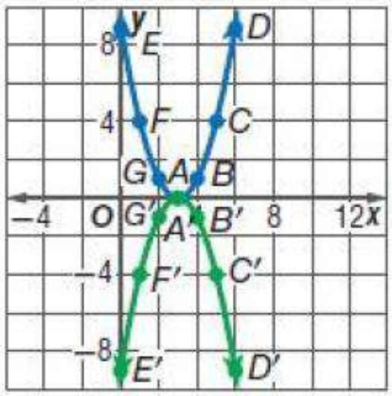
18) انعكاس حول المحور x انعكاس حول المحور y

باختيار عدة نقاط على منحنى الدالة التربيعية

مثل $\mathbf{y=(x-3)^2}$

$A(3,0), B(4,1), C(5,4), D(6,9), E(0,9), F((1,4), G(2,1)$

الانعكاس حول المحور x



$(x,y) \Rightarrow (x,\ -y)$

$A(3,0) \Rightarrow A'(3,0)$

$B(4,1) \Rightarrow B'(4,\ -1)$

$C(5,4) \Rightarrow C'(4,\ -5)$

$D(6,9) \Rightarrow D'(6,\ -9)$

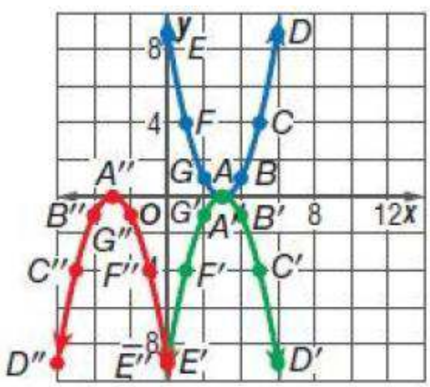
$E(0,9) \Rightarrow E'(0,\ -9)$

$F(1,4) \Rightarrow F'(1,\ -4)$

$G(2,1) \Rightarrow G'(2,\ -1)$

المعادلة التربيعية بعد الانعكاس $\mathbf{y=-(x-3)^2}$

انعكاس حول المحور y



$(x,y) \Rightarrow (-x,y)$

$A'(3,0) \Rightarrow A''(-3,0)$

$B'(4,\ -1) \Rightarrow B''(-4,\ -1)$

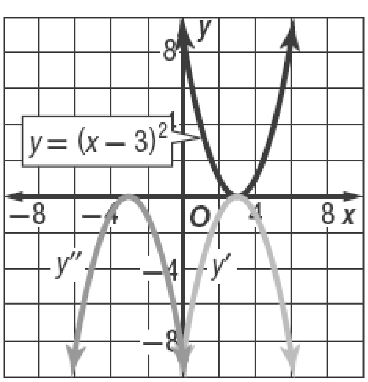
$C'(5,\ -4) \Rightarrow C''(-4,\ -5)$

$D'(6,\ -9) \Rightarrow D''(-6,\ -9)$

$E'(0,\ -9) \Rightarrow E''(-0,\ -9)$

$F'(1,\ -4) \Rightarrow F''(-1,\ -4)$

$G'(2,\ -1) \Rightarrow G''(-2,\ -1)$



المعادلة التربيعية بعد الانعكاس $\mathbf{y=-(x+3)^2}$

19) أوجد إحداثيات رؤوس $\triangle A''B''C''$ الناتج عن انعكاس حول المحور x ثم دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل للمثلث $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(-3, 1), B(-2, 3), C(-1, 0)$.

الانعكاس حول المحور x

$$(x, y) \Rightarrow (x, -y)$$

$$A(-3, 1) \Rightarrow A'(-3, -1)$$

$$B(-2, 3) \Rightarrow B'(-2, -3)$$

$$C(-1, 0) \Rightarrow C'(-1, 0)$$

لدوران النقطة $180°$ في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل

$$(x, y) \Rightarrow (-x, -y)$$

$$A'(-3, -1) \Rightarrow A''(3, 1)$$

$$B'(-2, -3) \Rightarrow B''(2, 3)$$

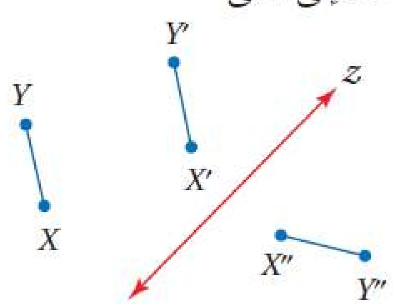
$$C'(-1, 0) \Rightarrow C''(1, 0)$$

الإجابة: $\mathbf{C''(1, 0)}$, $\mathbf{B''(2, 3)}$, $\mathbf{A''(3, 1)}$

20) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للحالة الآتية من نظرية 7.1 تركيب تحويلات التطابق.

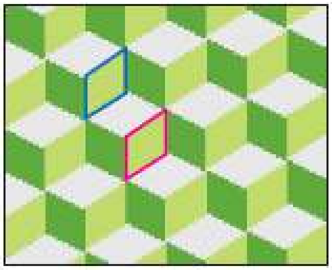
المعطيات: تنقل الإزاحة بمقدار a وحدةً إلى اليمين و b وحدةً إلى أعلى النقطة X إلى X' والنقطة Y إلى Y'.
وينقل الانعكاس حول المستقيم z النقطة X' إلى X'' والنقطة Y' إلى Y''.

المطلوب: $\overline{XY} \cong \overline{X''Y''}$



تعلم أن الإزاحة بمقدار a وحدة إلى اليمين و b وحدة إلى الأعلى تنقل X إلى X' وتنقل Y إلى Y'. ومن تعريف الإزاحة نعلم أن النقطتين X وY تحركتا المسافة نفسها بالاتجاه نفسه ولذلك فإن، $XY = X'Y'$ كما نعلم أن الانعكاس حول المستقيم z ينقل X' إلى X'' وينقل Y' إلى Y'' . وباستعمال تعريف انعكاس، فإن X' و X'' على بعدين متساويين من المستقيم z، وكذلك Y' و Y'' على بعدين متساويين من المستقيم z. إذن $X'Y' = X''Y''$.
ومن خاصية التعدي للتطابق ينتج أن $XY = X''Y''$.

21) **حياكة:** تحيك خولة منديلًا باستعمال النمط الظاهر في الشكل المجاور، صف تركيب التحويلات الهندسية الذي تستعمله خولة لإنشاء هذا النمط.



تركيب انعكاسين

آثار الأقدام: استعن بمعلومات الربط مع الحياة، وصِفِ التحويل المركّب من إزاحة وانعكاس الذي يمكن استعماله للتنبؤ بموقع أثر القدم اللاحق في كلّ من السؤالين الآتيين:

الربط مع الحياة

طول خطوة الحيوان يساوي المسافة بين أثري قدمٍ متتاليين.
فمتوسط طول خطوة طائر الحبش **11 in** تقريبًا، ومتوسط طول خطوة البطة **5 in** تقريبًا.

22) طائر الحبش

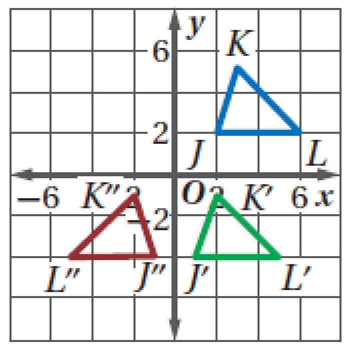
إزاحة بمقدار 5.5 وحدات إلى اليمين وانعكاس حول المستقيم الذي يفصل الآثار اليمنى عن اليسرى.

23) البطة

إزاحة بمقدار 2.5 وحدة إلى اليمين وانعكاس حول المستقيم الذي يفصل الآثار اليمنى عن اليسرى

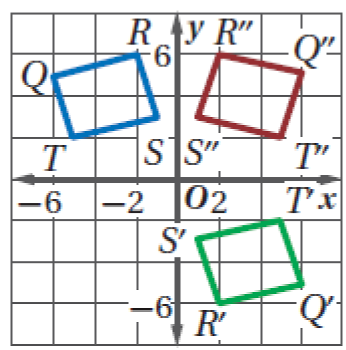
صِفِ التحويل الهندسي المركب الذي ينقل الشكل الأزرق إلى البني في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

24)



إزاحة وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x-1\ ,\ y-6)$ وانعكاس حول المحور y.

25)



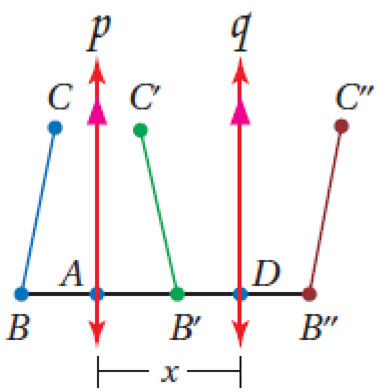
دوران بزاوية 180° حول نقطة الأصل وانعكاس حول المحور x.

26) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 7.2

المعطيات: ينقل الانعكاس حول المستقيم p القطعة $\overline{BC}$ إلى $\overline{B'C'}$ ،

وينقل الانعكاس حول المستقيم q القطعة $\overline{B'C'}$ إلى $\overline{B''C''}$.

$p \parallel q, AD = x$.



المطلوب: a) $\overline{BB''} \perp p$, $\overline{BB''} \perp q$

b) $\overline{BB''} = 2x$

العبارات (المبررات):

1) ينقل الانعكاس حول المستقيم p النقطة B إلى B' ؛ وينقل الانعكاس حول المستقيم q النقطة B' إلى B''؛ وبما أن $p \parallel q$؛ فإن $\overleftrightarrow{BB'}$ يعامد كلًّا من المستقيمين p, q أي أن B, B', B'' واقعة على استقامة واحدة. ومن تعريف الانعكاس نعلم أن A نقطة منتصف $\overline{BB'}$ و $\overline{B'B''}$ ، إذن $\overline{BA} \cong \overline{AB'}$; $\overline{B'D} \cong \overline{DB''}$ أي أن $BA = AB'; B'D = DB''$ حسب تعريف التطابق، ولكن $BB'' = BA + AB' + B'D + DB''$ حسب مسلمة جمع القطع المستقيمة. وبالتعويض

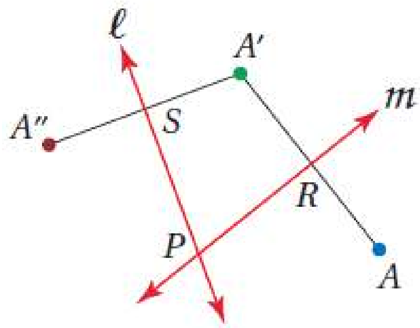
$$BB'' = AB' + AB' + B'D + B'D$$

$$BB'' = 2\,AB' + 2\,B'D$$

$$BB'' = 2(AB' + B'D)$$

وبما أن $AB' + B'D = x$ فإن $BB'' = 2x$

27) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 7.3



المعطيات: يتقاطع المستقيمان ℓ , m في النقطة P.

A نقطة لا تقع على أيٍّ من المستقيمين ℓ أو m.

المطلوب: **a)** إذا أُجري انعكاس للنقطة A حول المستقيم m، ثم أُجري انعكاس لصورتها حول المستقيم ℓ، فإن A'' تكون صورة A بدورانٍ حول النقطة P.

b) $m\angle APA'' = 2(m\angle SPR)$

البرهان: نعلم أن المستقيمين ℓ و m يتقاطعان في النقطة P. وأن النقطة A لا تقع على أي من المستقيمين ℓ أو m. عيّن A' صورة النقطة A بانعكاس حول المستقيم m وعيّن A'' صورة A' بانعكاس حول المستقيم ℓ. ومن تعريف الانعكاس يكون المستقيم m العمود المنصف للقطعة $\overline{AA'}$ عند النقطة R، ويكون المستقيم ℓ العمود المنصف للقطعة $\overline{A'A''}$عند النقطة S. $\overline{AR} \cong \overline{A'R}$ و$\overline{A'S} \cong \overline{A''S}$ من تعريف العمود المنصف، وبما أنه يوجد مستقيم واحد يمر بأي نقطتين فيمكن أن ترسم القطع المساعدة $\overline{A''P}$, $\overline{AP}, \overline{A'P}$ وإن الزوايا $\angle ARP$, $\angle A'RP$, $\angle A'SP$ و $\angle A''SP$ زوايا قائمة من تعريف العمود المنصف. وكذلك $\overline{RP} \cong \overline{RP}$ و $\overline{SP} \cong \overline{SP}$ حسب خاصية الانعكاس. إذن. $\triangle ARP \cong \triangle A'RP$ و $\triangle A'SP \cong \triangle A''SP$ حسب مسلمة التطابق SAS . ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة فإن $\overline{A'P} \cong \overline{A''P}$, $\overline{AP} \cong \overline{A'P}$ ولذلك $\overline{AP} \cong \overline{A''P}$ حسب خاصية التعدي. ومن تعريف الدوران فإن A'' هي صورة A بدوران مركزه P.

وكذلك $\angle APR \cong \angle A'PR$ و $\angle A'PS \cong \angle A''PS$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة. ومن تعريف التطابق يكون $m\angle APR = m\angle A'PR$, $m\angle A'PS = m\angle A''PS$ لكن

$$m\angle APA'' = m\angle APR + m\angle A'PR + m\angle A'PS + m\angle A''PS$$

و $m\angle A'PS + m\angle A'PR = m\angle SPR$ حسب مسلّمة جمع الزوايا إذن

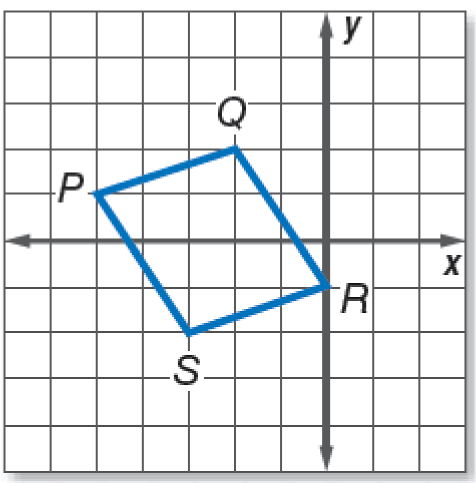
$$m\angle A'PS + m\angle A'PS + m\angle A'PR + m\angle A'PR = m\angle APA''$$

بالتعويض وهذا يعني أن $m\angle APA'' = 2(m\angle A'PR + m\angle A'PS)$.

بالتعويض ينتج أن $m\angle APA'' = 2(m\angle SPR)$.

مسائل مهارات التفكير العليا:

28) **تحدٍّ:** إذا أُزيح الشكل $PQRS$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أسفل، ثم عُكست الصورة حول المستقيم $y = -1$، وبعد ذلك تم تدوير الصورة الجديدة بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل، فما إحداثيات رؤوس الشكل الناتج $P'''Q'''R'''S'''$؟



الازاحة

$(x, y) \Rightarrow (x+3, y-2)$

$P(-5, 1) \Rightarrow P'(-2, -1)$

$Q(-2, 2) \Rightarrow Q'(1, 0)$

$R(0, -1) \Rightarrow R'(3, -3)$

$S(-3, -2) \Rightarrow S'(0, -4)$

الانعكاس عند $y = -1$

$P'(-2, -1) \Rightarrow P''(-2, -1)$

$Q'(1, 0) \Rightarrow Q''(1, -2)$

$R'(3, -3) \Rightarrow R''(3, 1)$

$S'(0, -4) \Rightarrow S''(0, 2)$

الدوران $90°$ حول نقطة الأصل

$(x, y) \Rightarrow (-y, x)$

$P''(-2, -1) \Rightarrow P'''(1, -2)$

$Q''(1, -2) \Rightarrow Q'''(2, 1)$

$R''(3, 1) \Rightarrow R'''(-1, 3)$

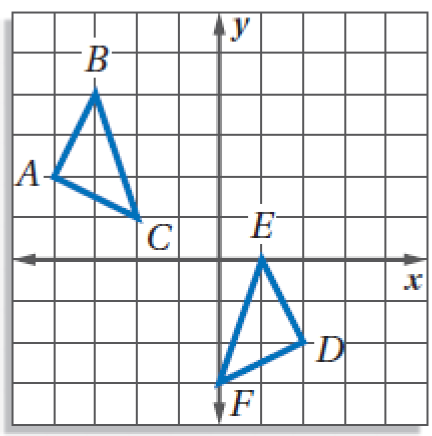
$S''(0, 2) \Rightarrow S'''(-2, 0)$

$$P'''(1, -2) \quad , \quad Q'''(2, 1) \quad , \quad R'''(-1, 3) \quad , \quad S'''(-2, 0)$$

29) **تبرير:** إذا أُجري انعكاسان متعاقبان بشكل ما؛ أحدهما حول المستقيم $y = x$، والآخر حول المحور x، فهل يؤثر ترتيب الانعكاسين في الصورة الناتجة؟ اشرح إجابتك .

نعم، إذا أجري انعكاس في المحورX للقطعة المستقيمة التي إحداثيات طرفيها (a, b) , (c, d) فإن إحداثيات طرفي صورتها هي (-b, a) , (-d, c). وأما إذا أجري الانعكاس في المستقيم y = x ، أولاً فإن إحداثيات طرفي الصورة الأولى (b, a) , (d, c). وإذا أجري لهذه الصورة انعكاس في المحور x فإن إحداثيات طرفي الصورة النهائية هي (b, -a) , (d, -c) وهما مختلفان عن النتيجة النهائية في الحالة الأولى.

30) **مسألة مفتوحة:** صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتحويل $\triangle ABC$ إلى $\triangle DEF$ في الشكل المجاور.



يمكن إجراء إزاحة للمثلث ABC مقدارها 4 وحدات للأسفل ثم انعكاس للصورة حول المستقيم x = –1 لتكوين DEF.

31) **تبرير:** إذا أُخضع شكلٌ ما لدورانين، فهل لترتيب الدورانين تأثير في موقع الصورة الناتجة دائمًا، أو أحيانًا، أو ليس له تأثير أبدًا؟

أحياناً، إجابة ممكنة: عندما يجرى دورانان على شكل ما، فليس لترتيبهما تأثير عندما يكون للدورانين المركز نفسه.

32) **اكتب:** هل تبقى أي نقاط ثابتةً في التحويلات الهندسية المركبة؟ وضّح إجابتك.

لا توجد نقاط ثابتة في الإزاحة تحرك جميع النقاط. قد توجد في بعض التحويلات الهندسية المركبة نقطا ثابتة عند تدويره مرتين، أو انعكاسه مرتين.

تدريب على اختبار

33) ما صورة النقطة $A(4, 1)$ الناتجة عن انعكاس حول المستقيم $y = x$ ؟

A $(1, -4)$ **C** $(-1, 4)$

B $(1, 4)$ **D** $(-1, -4)$

الاختيار الصحيح B $(1, 4)$

34) **إجابة قصيرة:** إحداثيات طرفي $\overline{CD}$ هما $C(2, 4)$ و $D(8, 7)$، إذا أُزيحت هذه القطعة المستقيمة بمقدار 6 وحدات إلى اليسار ووحدتين إلى أعلى، ثم عكست الصورة حول المحور y، فما إحداثيات D''؟

الازاحة:

$$(x, y) \rightarrow (x - 6, y + 2)$$
$$D(8, 7) \rightarrow D'(2, 9)$$

الانعكاس حول المحور y

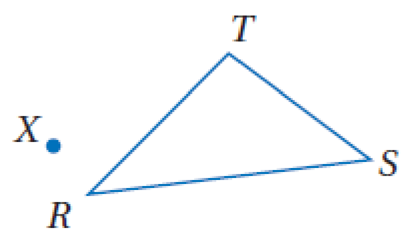
$$(x, y) \Rightarrow (-x, y)$$
$$D'(2, 9) \Rightarrow D''(-2, 9)$$

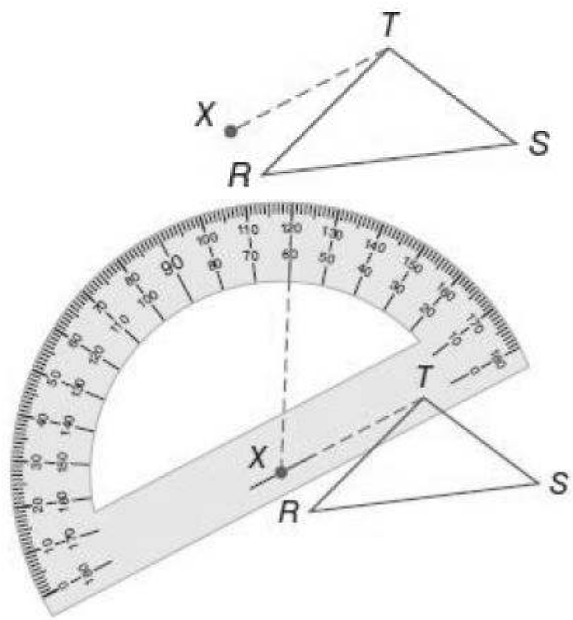
احداثيات النقطة $D''(-2, 9)$

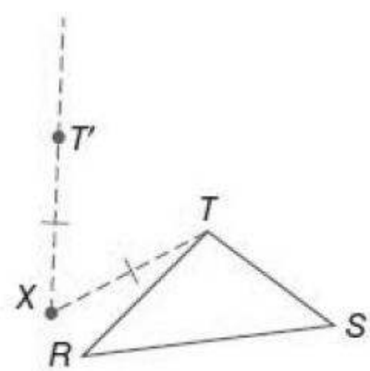
مراجعة تراكمية

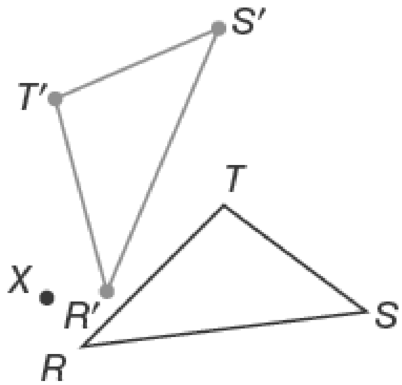
استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة X بالزاوية المبينة في كلٍّ ممّا يأتي:

(35 60°

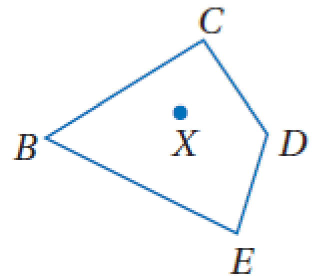


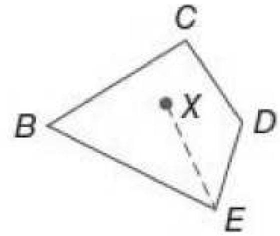


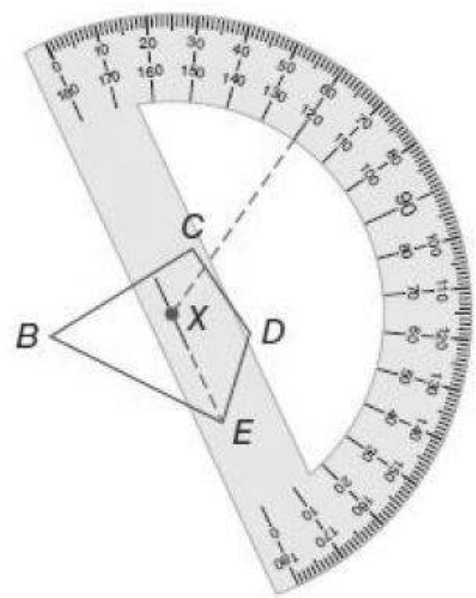


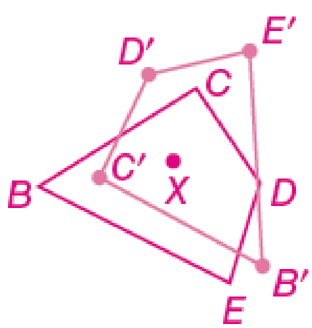


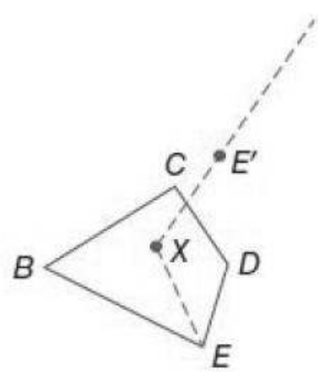
120° **(36**



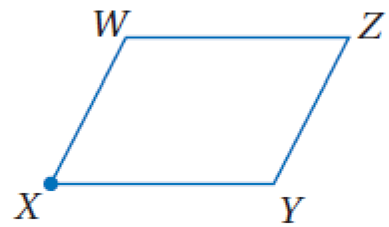


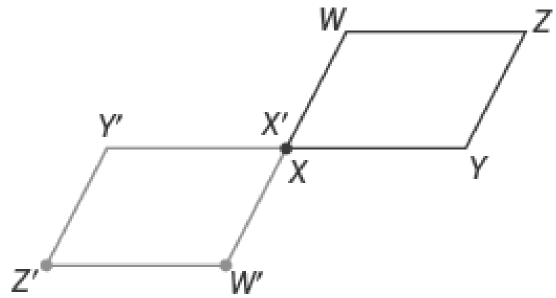






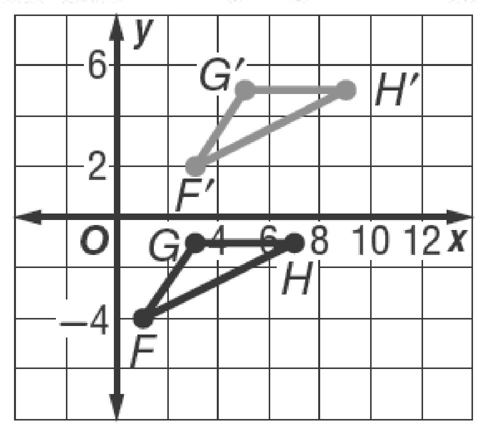
(37 $180°$



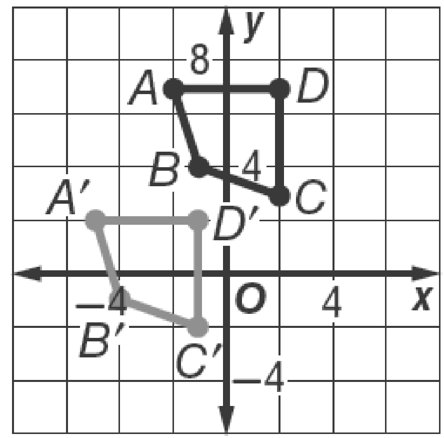


مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحدّدة في كلٍّ ممَّا يأتي:

(38 $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $F(1, -4), G(3, -1), H(7, -1)$؛
إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين و6 وحدات إلى أعلى.



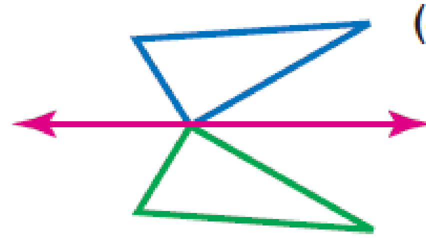
39) الشكل الرباعي $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-2, 7)$, $B(-1, 4)$, $C(2, 3)$, $D(2, 7)$؛ إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و5 وحدات إلى أسفل.



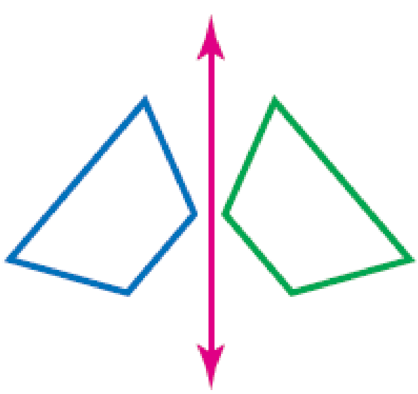
استعد للدرس اللاحق

يبيِّن كل من الأشكال الآتية الأصل والصورة الناتجة عن انعكاسٍ حول مستقيمٍ ما، ارسم محور الانعكاس.

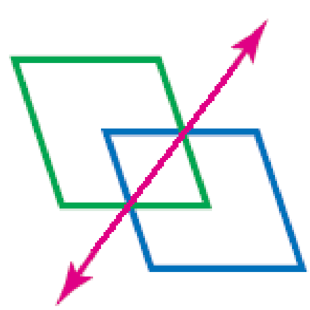
(40



(41



(42



7-4 توسع: معمل الهندسة: التبليط

تمارين

حدّد ما إذا كان استعمال أيٍّ من المضلعات المنتظمة الآتية لتكوين تبليط في المستوى ممكنًا أم لا. اكتب "نعم" أو "لا".

1) مثلث

نعم، إن قياس الزاوية الداخلية للمثلث المتطابق الأضلاع °60، وهو من عوامل العدد 360.

2) مضلع خماسي

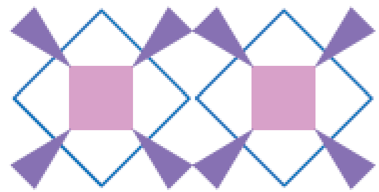
لا، إجابة ممكنة: قياس الزاوية الداخلية للخماسي المنتظم °108، وهذا ليس من عوامل العدد 360.

3) مضلع له 16 ضلعًا

لا، إجابة ممكنة: قياس الزاوية الداخلية للمضلع ذي 16 ضلعاً يساوي °157.5، وهذا ليس من عوامل العدد 360.

حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأنماط الآتية تبليطًا أم لا. اكتب "نعم" أو "لا"، وإن كان كذلك فصنّفه إلى منتظمٍ أو شبه منتظمٍ أو غير منتظم، وإلى متسق أو غير متسق.

(4

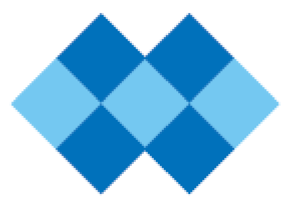


لا

(5

نعم، غير منتظم، غير متسق

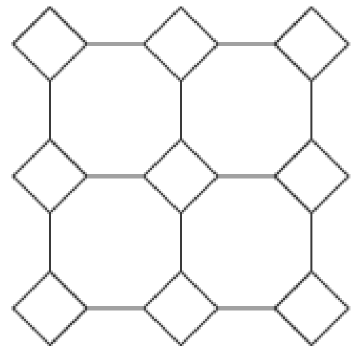
(6



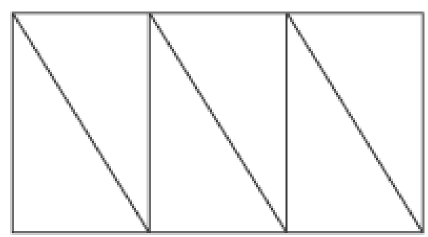
نعم، منتظم، متسق

ارسم نمط تبليط باستعمال الشكل (أو الأشكال) الآتي:

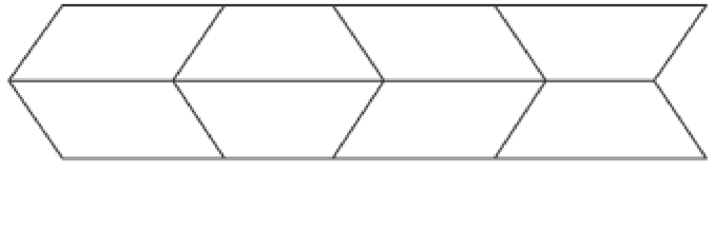
7) مضلع ثماني منتظم ومربع



8) مثلث قائم الزاوية



9) شبه منحرف ومتوازي أضلاع

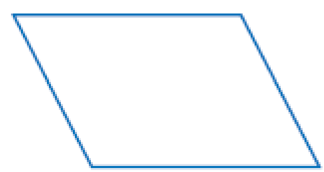


7-5 التماثل

تحقق

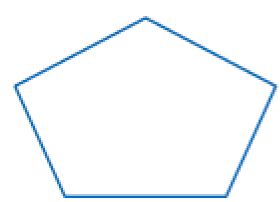
بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ ممَّا يأتي:

1A)

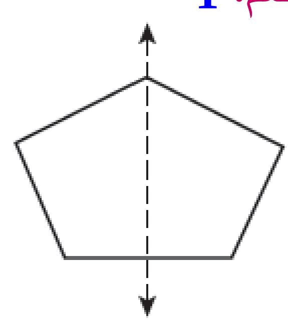


لا

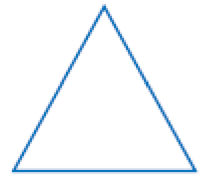
1B)



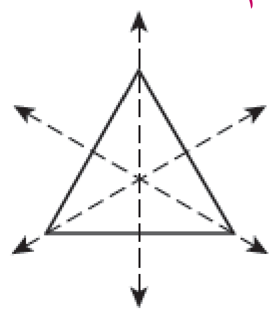
نعم، 1



(1C



نعم، 3



أزهار: بيِّن ما إذا كان يبدو لصورة الزهرة تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدّد رتبته ومقداره في كلٍّ ممّا يأتي:

(2A

(2B

بيِّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى، أو متماثلًا حول محور، أو كلاهما، أو غير ذلك في كلٍّ ممَّا يأتي:

(3A

كلاهما

(3B

غير ذلك

(3C

كلاهما

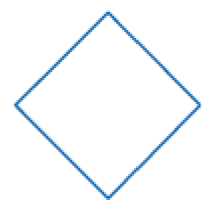
(3D

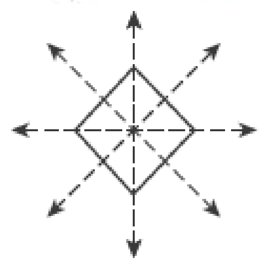
كلاهما

تأكد:

بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

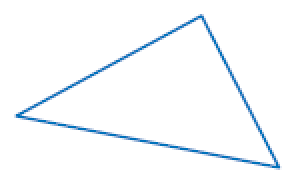
1)





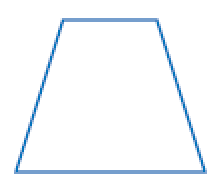
نعم، 4

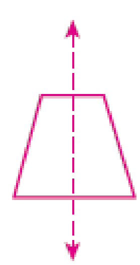
2)



لا

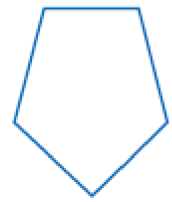
3)



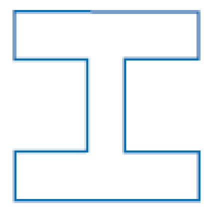


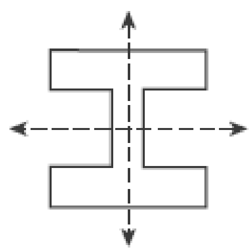
نعم ، 1

بيِّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ مما يأتي:

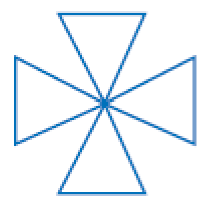
4) 

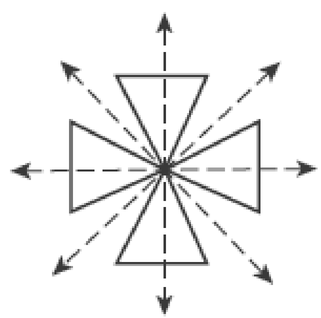
لا

5) 



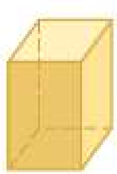
نعم، 2، 180°

6) 



نعم، 4، 90°

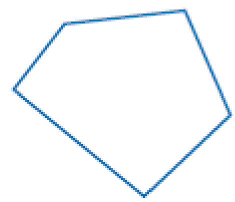
7) بيِّن ما إذا كان الشكل المجاور متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك.



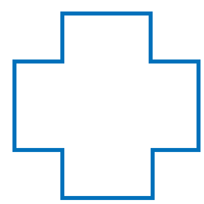
كلاهما.

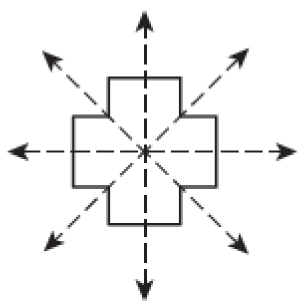
تدرب وحل المسائل:

بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

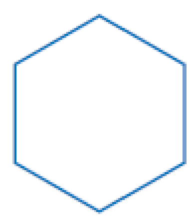
8) 

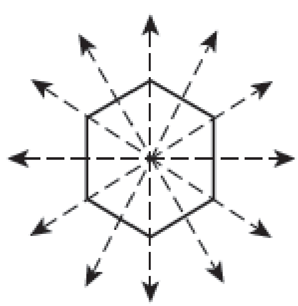
لا

9) 



نعم، 4

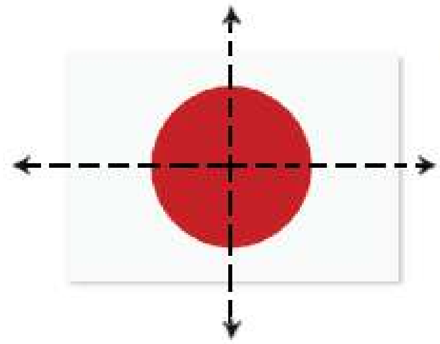
10) 



نعم، 6

أعلام: بيِّن ما إذا كان للعلم محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

11)

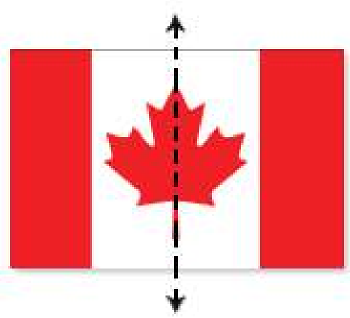


نعم، 2

12)

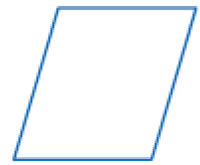
لا

13)

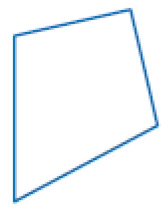


نعم، 2

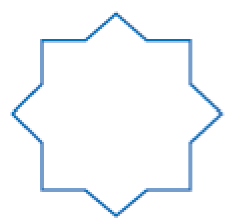
بيِّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيِّن مركز التماثل، وحدّد رتبته ومقداره في كلٍّ مما يأتي:

14) 

نعم، 2، 180°

15) 

لا

16) 

نعم، 8، 45°

إطارات: بيِّن ما إذا كان لصورة غطاء إطار السيارة تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فحدد رتبة التماثل ومقداره .

(17

نعم، 7، 51.4°

(18

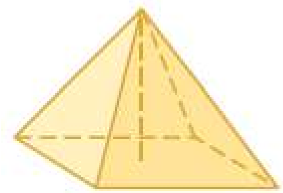
نعم، 6، 60°

(19

نعم، 10، 36°

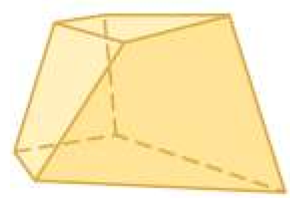
بيِّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محور أو كلاهما أو غير ذلك في كلٍّ ممَّا يأتي:

(20



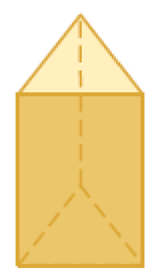
كلاهما

(21



غير ذلك

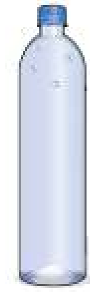
(22



كلاهما

عبوات: حدّد عدد مستويات التماثل الأفقية، ومستويات التماثل الرأسية لكلٍّ من العلب الآتية:

(23



لا يوجد مستويات تماثل أفقية، وهناك عدد لا نهائي من مستويات التماثل الرأسية.

(24

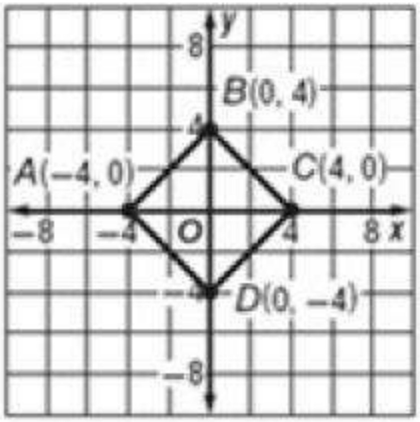
لا يوجد مستويات تماثل أفقية، مستوى تماثل رأسي واحد.

(25

مستوى تماثل أفقي واحد وعدد لا نهائي من مستويات التماثل الرأسية.

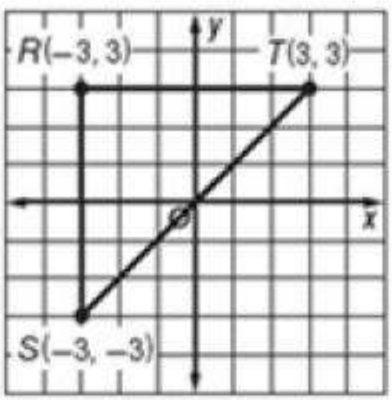
هندسة إحداثية : حدّد ما إذا كان للشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ من الأسئلة الآتية تماثل حول محور و/أو تماثل دوراني أم لا.

(26 $A(-4, 0), B(0, 4), C(4, 0), D(0, -4)$



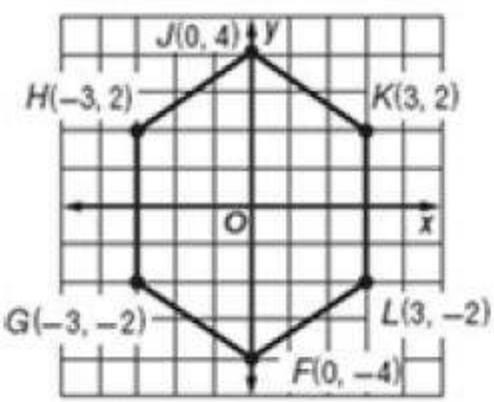
له محور تماثل وتماثل دوراني.

(27 $R(-3, 3), S(-3, -3), T(3, 3)$



له محور تماثل.

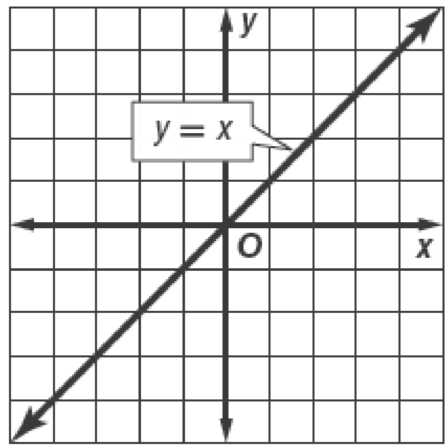
(28 $F(0, -4), G(-3, -2), H(-3, 2), J(0, 4), K(3, 2), L(3, -2)$



له محور تماثل وتماثل دوراني.

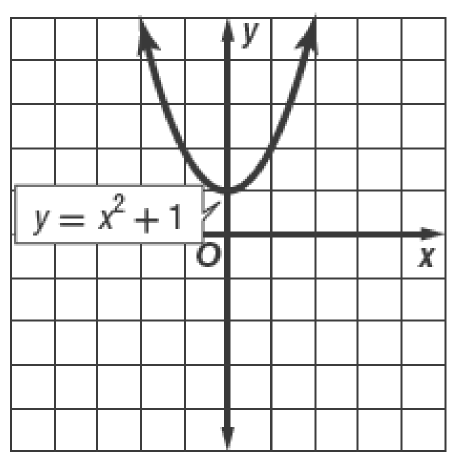
جبر: مثِّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية، وحدّد ما إذا كان لتمثيلها البياني تماثل حول محور و/أو تماثل دوراني أم لا. وإذا كان كذلك، فحدّد رتبة التماثل ومقداره، واكتب معادلة كل محور تماثل.

29) $y = x$



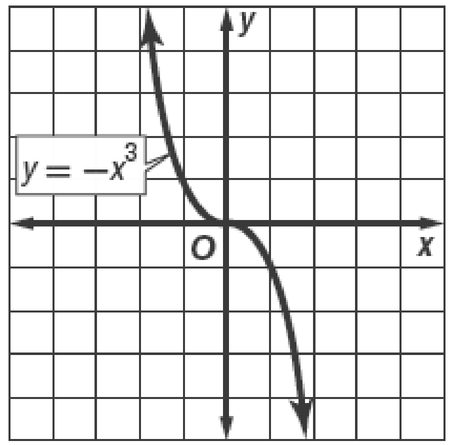
تماثل دوراني، 2، 36° وتماثل حول المستقيم $y = -x$

30) $y = x^2 + 1$



تماثل حول مستقيم، $x = 0$

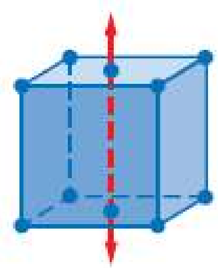
31) $y = -x^3$



تماثل دوراني، 2، 180°

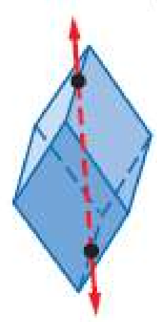
حدِّد ما إذا كانت البلورة متماثلةً حول مستوى أو متماثلة حول محور في كلٍّ ممّا يأتي:

32) مكعب



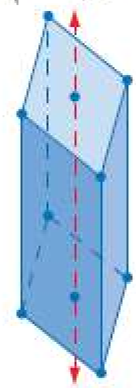
متماثل حول مستوى وحول محور، 90°

33) مجسم ذو ستة أوجه كل منها معين



متماثل حول مستوى وحول محور، 180°

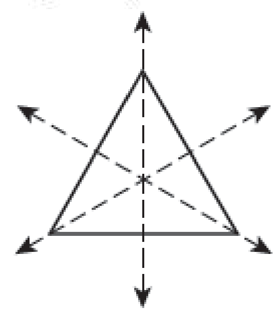
(34 منشور قائم قاعدته معين



متماثل حول مستوى وحول محور، 180°

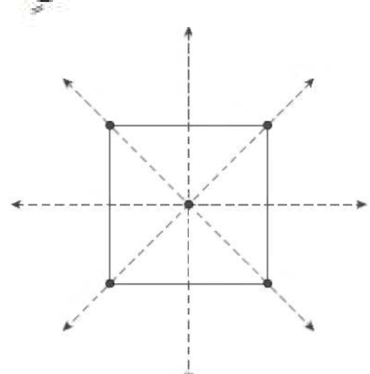
(35 **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي التماثل الدوراني في المضلعات المنتظمة.

a) **هندسيًا:** ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع، وحدّد رتبة تماثله.

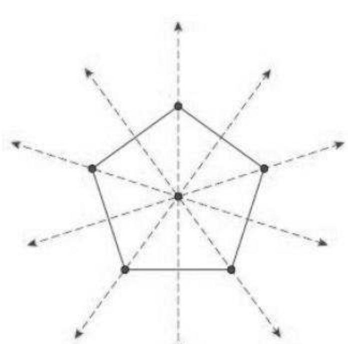


رتبة التماثل = 3

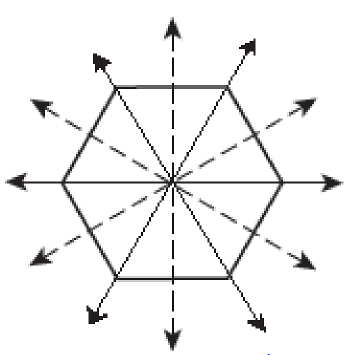
b) **هندسيًا:** كرّر العملية في الفرع **a** على مربعٍ ومضلعٍ خماسيٍّ منتظمٍ ومضلعٍ سداسيٍّ منتظمٍ.



رتبة التماثل = 4



رتبة التماثل = 5



رتبة التماثل = 6

c) **جدوليًا:** نظِّم جدولًا يبين رتبة التماثل لكلٍّ من هذه المضلعات.

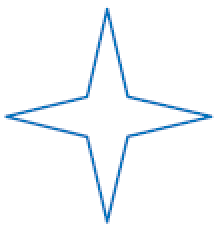
المضلع	عدد الأضلاع	رتبة التماثل
مثلث	3	3
مربع	4	4
خماسي	5	5
سداسي	6	6

d) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول رتبة التماثل لمضلع منتظم.

رتبة التماثل المضلع المنتظم تساوي عدد أضلاعه.

مسائل مهارات التفكير العليا:

36) **اكتشف الخطأ :** يقول جمال: إن للشكل A تماثلًا حول محور فقط، في حين يقول ناصر: إن للشكل A تماثلًا دورانيًّا فقط. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ برر إجابتك.

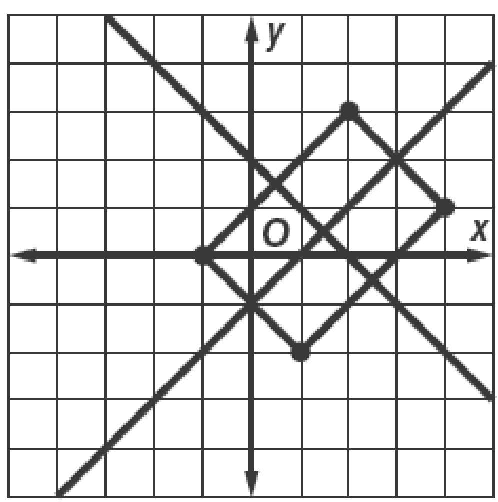


الشكل A

لم تكن إجابة أي منهما صحيحة:

للشكل A تماثل حور محور وتماثل دوراني معاً.

37) **تحدٍّ :** يوجد لشكل رباعي في المستوى الإحداثي محورا تماثل فقط هما: $y = x - 1$, $y = -x + 2$. مثل محوري التماثل بيانيًا ثم أوجد مجموعة من الإحداثيات الممكنة لرؤوس هذا الشكل ومثله بيانيًا.



(-1, 0) , (2, 3) , (4, 1) , (1, -2)

38) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا له محور تماثل، ولكن ليس له تماثل دوراني. اشرح إجابتك.

المثلث المتطابق الضلعين متماثل حول المستقيم المرسوم من الرأس إلى منتصف القاعدة وليس له تماثل دوراني لأنه لا ينطبق على نفسه عند تدويره بزاوية بين 0° و 360° حول أي نقطة.

39) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التماثل حول محور والتماثل الدوراني.

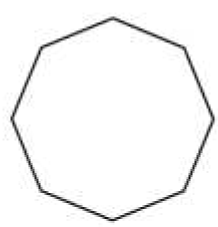
في كلا النوعين من التماثل حول مستقيم والدوراني ينطبق الشكل على نفسه، ففي التماثل حول مستقيم ينطبق الشمل على نفسه بالانعكاس حول المحور. وفي التماثل الدوراني ينطبق الشكل على نفسه من خلال دوران حول مركز التماثل. ويمكن أن يكون للشكل نفسه تماثل خطي وتماثل دوراني.

تدريب على اختبار

40) **إجابة قصيرة:** ما عدد محاور التماثل التي يمكن رسمها في صورة علم مملكة البحرين؟

محور تماثل واحد

41) ما رتبة التماثل للشكل الآتي؟



رتبة الشكل 8

مراجعة تراكمية

إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي: $J(1, 5), K(3, 1), L(5, 7)$، مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

42) إزاحة مقدارها 7 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل ثم انعكاس حول المحور x .

الازاحة:

$(x, y) \to (x - 7, y - 1)$

$J(1,5) \to J'(-6,4)$

$K(3,1) \to K'(-4,0)$

$L(5,7) \to L'(-2,6)$

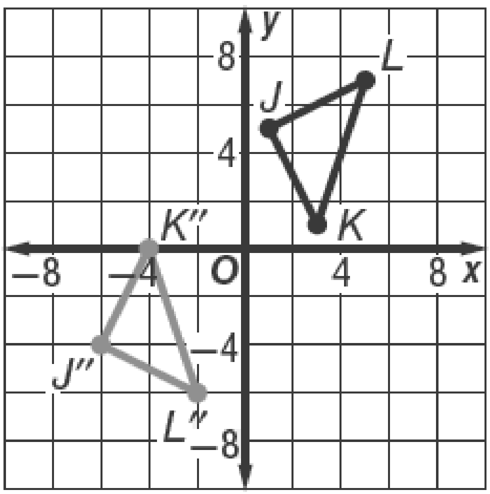
الانعكاس حول محور x

$(x, y) \to (x, -y)$

$J'(-6,4) \to J''(-6,-4)$

$K'(-4,0) \to K''(-4,0)$

$L'(-2,6) \to L''(-2,-6)$



43) إزاحة مقدارها وحدة واحدة إلى اليمين ووحدتان إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y .

الازاحة:

$(x, y) \to (x + 1, y + 2)$

$J(1,5) \to J'(2,7)$

$K(3,1) \to K'(4,3)$

$L(5,7) \to L'(6,9)$

الانعكاس حول محور x

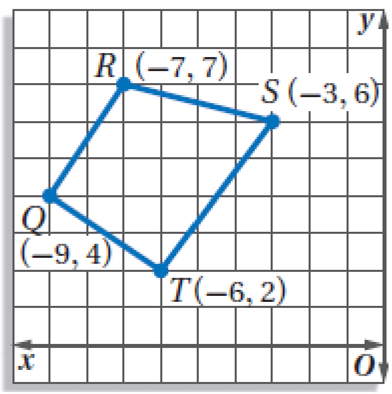
$(x, y) \to (-x, y)$

$J'(2,7) \to J''(-2,7)$

$K'(4,3) \to K''(-4,3)$

$L'(6,9) \to L''(-6,9)$

44) يبيّن الشكل المجاور الشكل الرباعي $QRST$ في المستوى الإحداثي، ما صورة النقطة R الناتجة عن دوران الشكل بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل؟



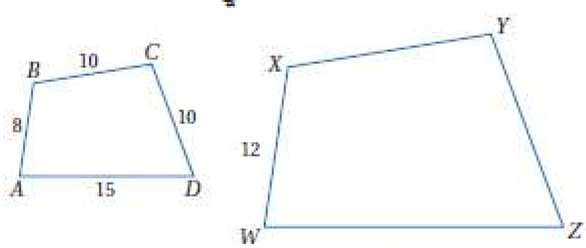
$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$

$$R(-7, 7) \rightarrow R'(7, -7)$$

صورة النقطة $R'(7, -7)$

استعد للدرس اللاحق

إذا كان $WXYZ \sim ABCD$ ، فأوجد كلًّا مما يلي:



45) معامل تشابه $ABCD$ إلى $WXYZ$

معامل التشابه $= \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

46) XY

$$XY = \frac{10 \times 12}{8} = 15$$

47) YZ

$$YZ = \frac{10 \times 12}{8} = 15$$

48) WZ

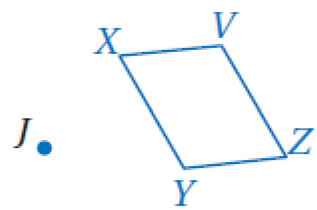
$$WZ = \frac{15 \times 12}{8} = 22.5$$

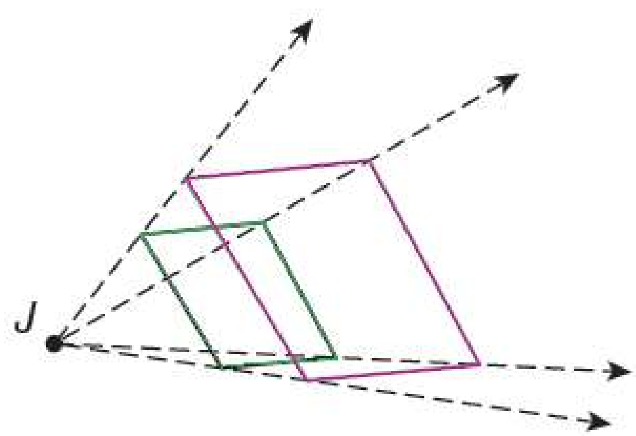
7-6 التمدد

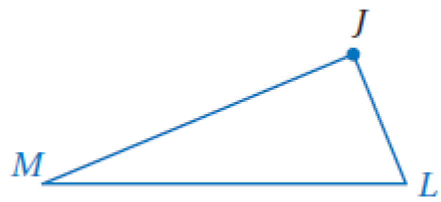
تحقق

استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن التمدد الذي مركزه النقطة J، ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ ممّا يأتي:

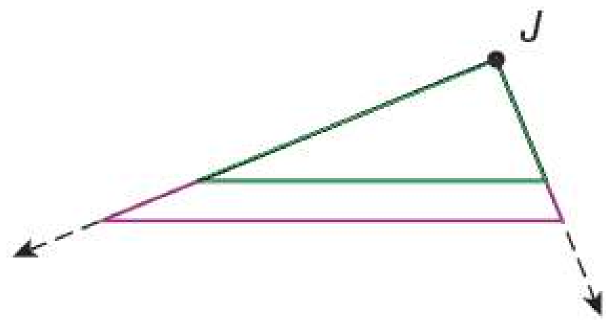
$k = \frac{3}{2}$ (1A



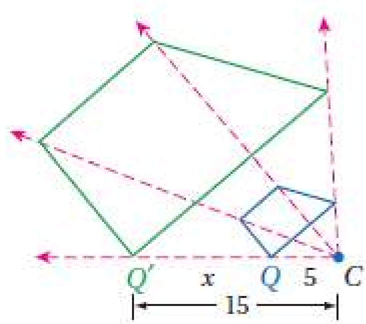




1B) $k = 0.75$



2) حدِّد ما إذا كان التمدد من الشكل Q إلى Q' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامل مقياس التمدد، وقيمة x.



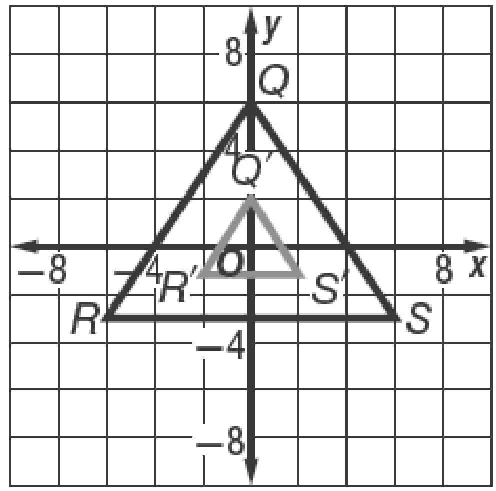
مقياس التمدد $= \frac{15}{5} = 3$

$x = 15 - 5 = 10$

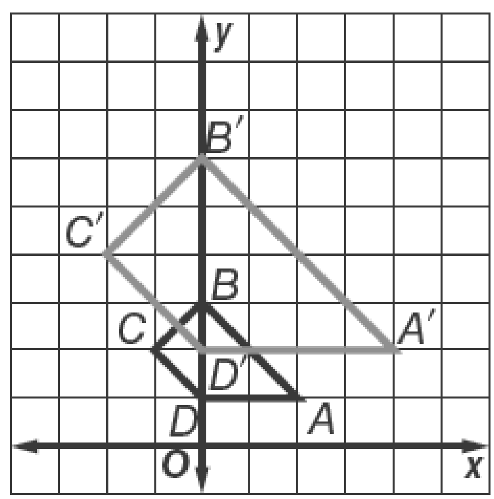
تكبير

مثِّل المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه بيانيًّا، ثم مثِّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل، ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

3A) $Q(0, 6), R(-6, -3), S(6, -3)$ ؛ $k=\frac{1}{3}$



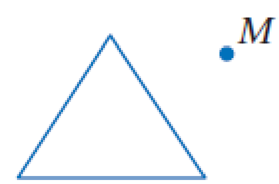
3B) $A(2, 1), B(0, 3), C(-1, 2), D(0, 1)$ ؛ $k=2$



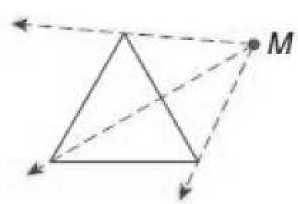
تأكد:

استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه النقطة M ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

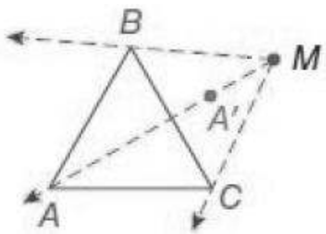
1) $k = \frac{1}{4}$



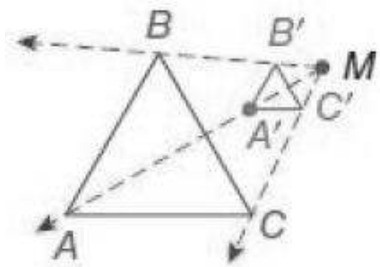
ارسم أنصاف مستقيمات من M تمر برؤوس المثلث



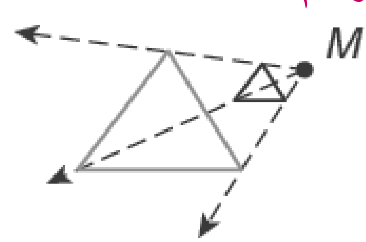
عين A' على $\overrightarrow{MA}$ بحيث يكون $MA' = \frac{1}{2} MA$



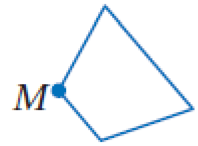
عين B' على $\overrightarrow{MB}$ و C' على $\overrightarrow{MC}$ بنفس الطريقة



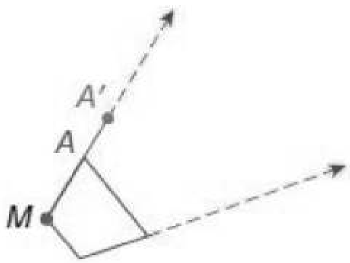
ارسم $\Delta A'B'C'$



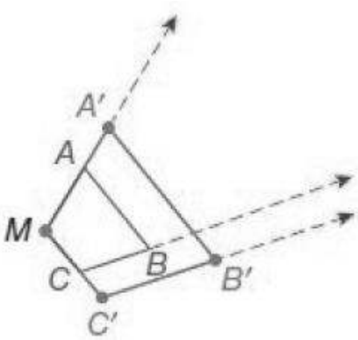
2) $k = 2$



ارسم أنصاف مستقيمات من M

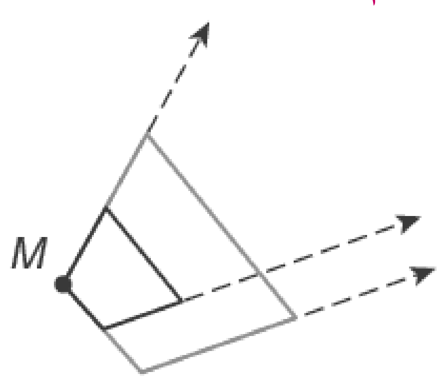


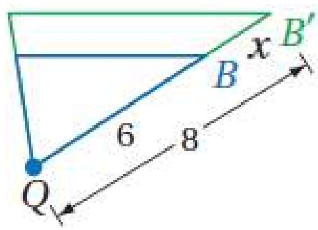
عين A' على $\overrightarrow{MA}$ بحيث يكون $MA' = 2MA$



عين B' على $\overrightarrow{MB}$ و C' على $\overrightarrow{MC}$ بنفس الطريقة

ارسم $A'B'C'M'$ □



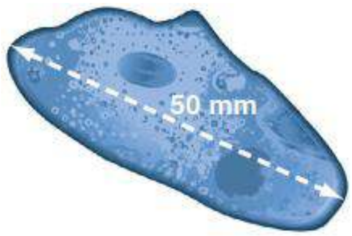


3) حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل B إلى الشكل B' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامله وقيمة x.

معامل التكبير $= \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$x = 8 - 6 = 2$

تكبير



4) **أحياء:** طول مخلوق حيٍّ دقيق وحيد الخلية 200 ميكرون، ويظهر طوله تحت المجهر 50 mm، إذا كان 1000 ميكرون = 1 mm، فما قوة التكبير (معامل مقياس التمدد) المُستعملة؟ وضّح إجابتك.

طول المخلوق بالملمتر $= \frac{200}{1000} = 0.2$ mm.

معامل مقياس التمدد $= \frac{50}{0.2} = 250$

قوة التكبير = 250 مرة

مثِّل المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه بيانيًا، ثم مثِّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

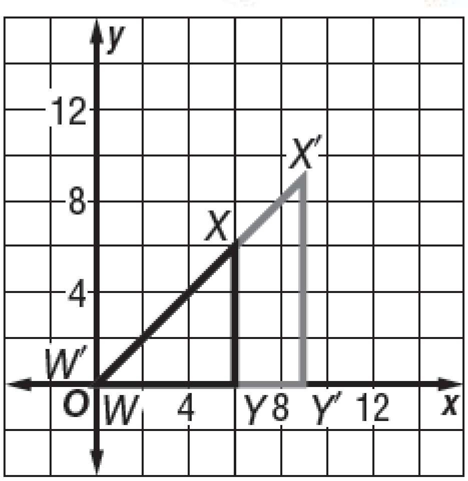
5) $W(0, 0), X(6, 6), Y(6, 0)$؛ $k = 1.5$

$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$

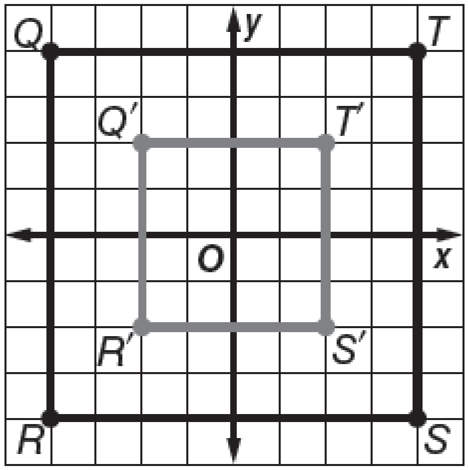
$W(0,0) \rightarrow W'(0,0)$

$X(6,6) \rightarrow X'(9,9)$

$Y(6,0) \rightarrow Y'(9,0)$



6) $Q(-4, 4), R(-4, -4), S(4, -4), T(4, 4)$ ؛ $k = \frac{1}{2}$



$(x, y) \to (kx, ky)$.

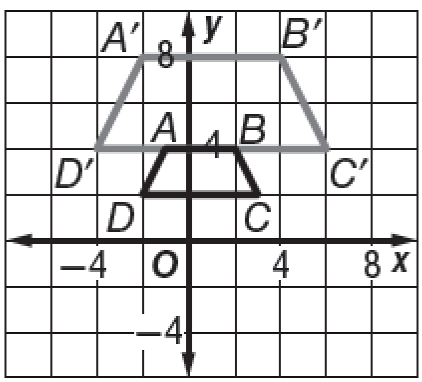
$Q(-4,4) \to Q'(-2,2)$

$R(-4,-4) \to R'(-2,-2)$

$S(4,-4) \to S'(2,-2)$

$T(4,4) \to T'(2,2)$

7) $A(-1, 4), B(2, 4), C(3, 2), D(-2, 2)$ ؛ $k = 2$



$(x, y) \to (kx, ky)$.

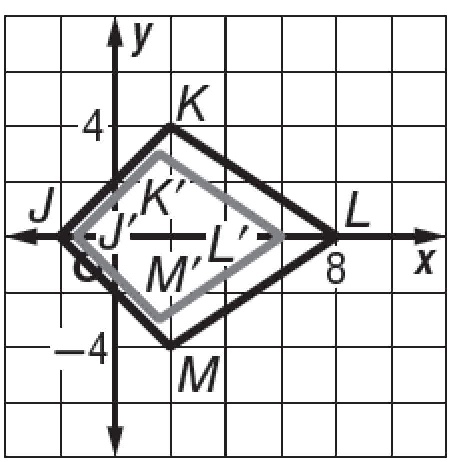
$A(-1,4) \to A'(-2,8)$

$B(2,4) \to B'(4,8)$

$C(3,2) \to C'(6,4)$

$D(-2,2) \to D'(-4,4)$

8) $J(-2, 0), K(2, 4), L(8, 0), M(2, -4)$ ؛ $k = \frac{3}{4}$



$(x, y) \to (kx, ky)$.

$J(-2,0) \to J'(-1.5,0)$

$K(2,4) \to K'(1.5,3)$

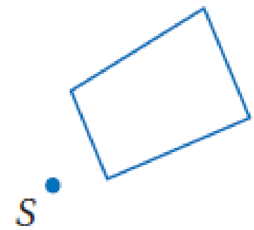
$L(8,0) \to L'(6,0)$

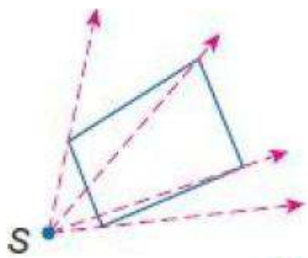
$M(2,-4) \to M'(1.5,-3)$

تدرب وحل المسائل:

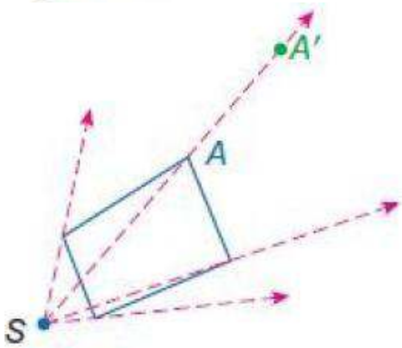
استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه النقطة S ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

9) $k = \frac{5}{2}$

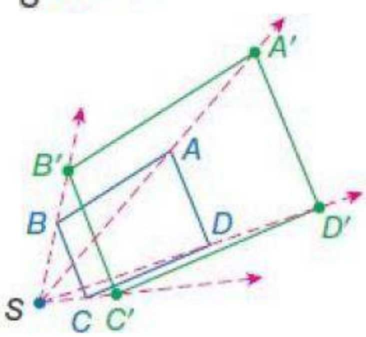




ارسم أنصاف مستقيمات من S

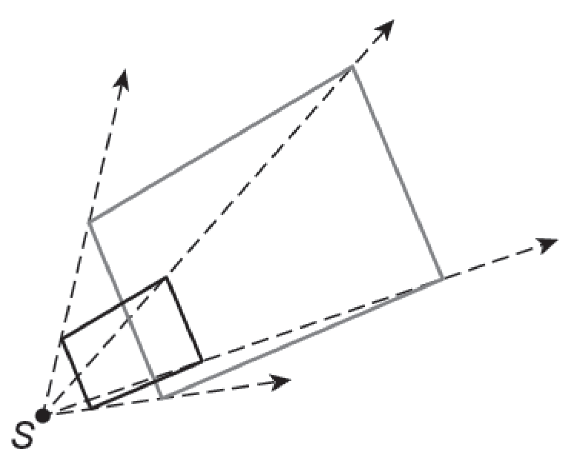


عين A' على $\overrightarrow{SA}$ بحيث يكون $SA' = \frac{5}{2} SA$

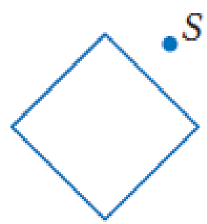


عين B' على $\overrightarrow{SB}$ و C' على $\overrightarrow{SC}$
و D' على $\overrightarrow{SD}$ بنفس الطريقة

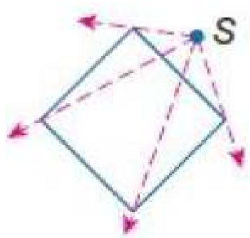
ارسم $A'B'C'D'$



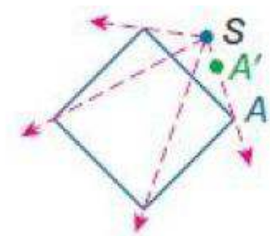
10) $k = \frac{1}{3}$



ارسم أنصاف مستقيمات من S

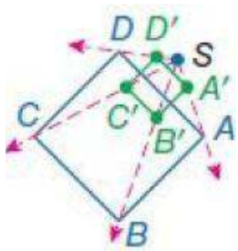


عين A' على $\overrightarrow{SA}$ بحيث يكون $SA' = \frac{1}{3} SA$

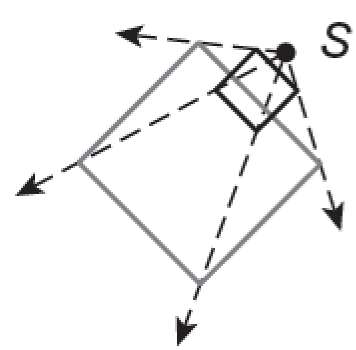


عين B' على $\overrightarrow{SB}$ و C' على $\overrightarrow{SC}$

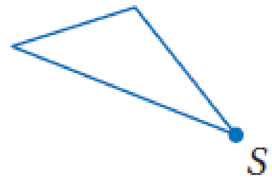
و D' على $\overrightarrow{SD}$ بنفس الطريقة



ارسم $A'B'C'D'$



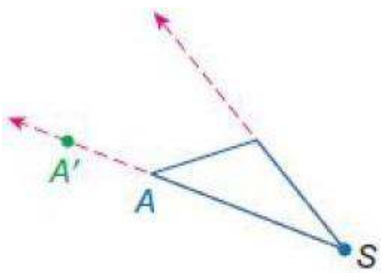
11) $k = 2.25$



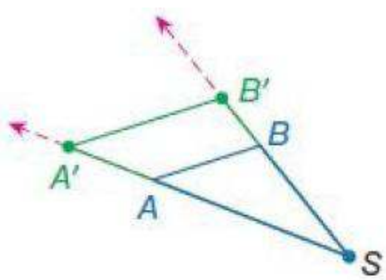
ارسم أنصاف مستقيمات من S

عين A' على $\overrightarrow{SA}$ بحيث يكون

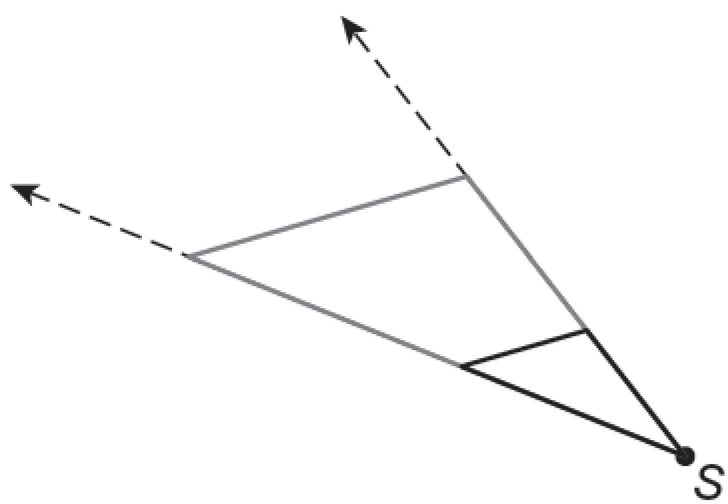
$SA' = 2.25\ SA$



عين B' على $\overrightarrow{SB}$ بنفس الطريقة

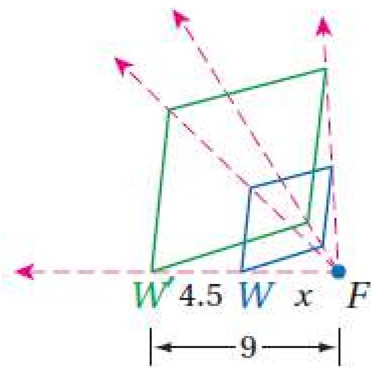


ارسم $A'B'C'D'$



حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل W إلى الشكل W' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامله وقيمة x .

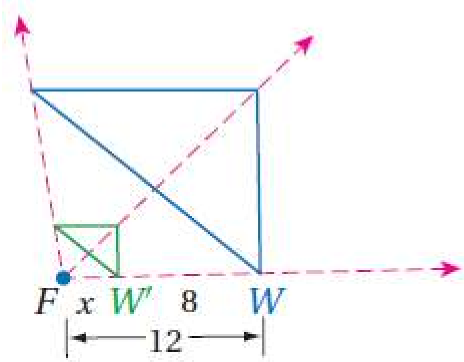
(12



معامل مقياس التمدد $= 2 = \frac{9}{4.5}$

$x = 9 - 4.5 = 4.5$

(13



معامل مقياس التمدد $= \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

$x = 12 - 8 = 4$

حشرات: طول كلٍّ من الحشرتين الآتيتين كما تُرى تحت المجهر مكتوب على الصورة. إذا علمت طول الحشرة الحقيقي، فأوجد قوة التكبير المُستعملة، ووضّح إجابتك.

(14

15 مرة، طول صورة الحشرة بالمليمترات هو 3.75×10 أو 37.5 mm.

ومعامل التمدد يساوي $\frac{37.5}{2.5} = 15$

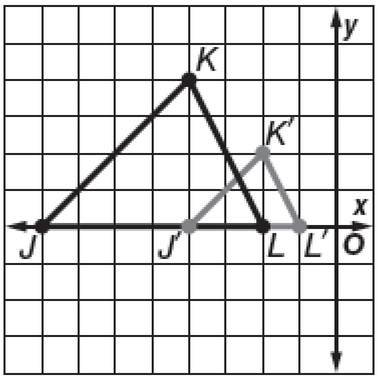
(15

96 مرة، طول صورة الحشرة بالمليمترات هو 4.8×10 أو 48 mm. ومعامل التمدد يساوي $\frac{48}{0.5} = 96$

مثّل بيانيًّا المضلع وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

16) $J(-8, 0), K(-4, 4), L(-2, 0)$ ؛ $k = 0.5$

$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$.

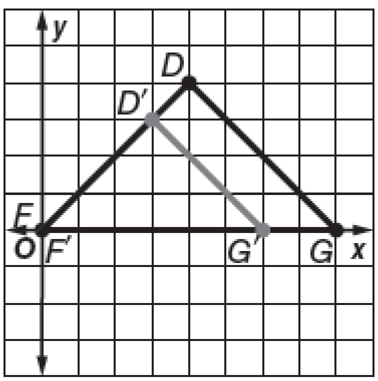


$J(-8,0) \rightarrow J'(-4,0)$

$K(-4,4) \rightarrow K'(-2,2)$

$L(-2,0) \rightarrow L'(-1,0)$

17) $D(4, 4), F(0, 0), G(8, 0)$ ؛ $k = 0.75$



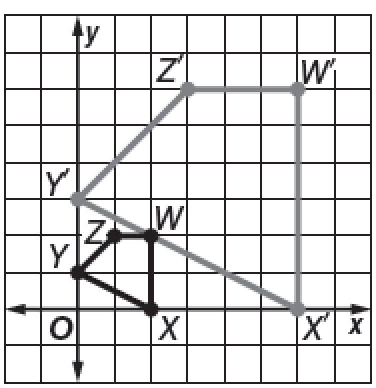
$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$.

$D(4,4) \rightarrow D'(3,3)$

$F(0,0) \rightarrow F'(0,0)$

$G(8,0) \rightarrow G'(6,0)$

18) $W(2, 2), X(2, 0), Y(0, 1), Z(1, 2)$ ؛ $k = 3$



$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$.

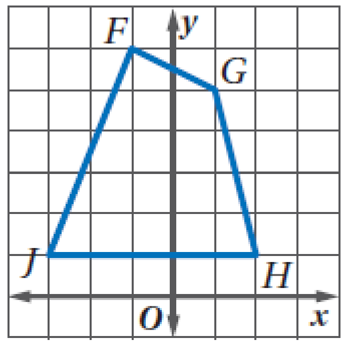
$W(2,2) \rightarrow W'(6,6)$

$X(2,0) \rightarrow X'(6,0)$

$Y(0,1) \rightarrow Y'(0,3)$

$Z(1,2) \rightarrow Z'(3,6)$

19) **هندسة إحداثية:** استعمل التمثيل البياني للمضلع *FGHJ* للإجابة عمّا يلي:



a) مثّل بيانيًّا صورة *FGHJ* الناتجة عن تمدد معامله $\frac{1}{2}$ ومركزه نقطة الأصل، ثم انعكاس حول المحور *y*.

صورة الشكل بعد التمدد

$$(x, y) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$$

$$F(-1, 6) \Rightarrow F'\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$$

$$G(1, 5) \Rightarrow G'\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$H(2, 1) \Rightarrow H'\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$J(-3, 1) \Rightarrow J'\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

الانعكاس حول المحور y

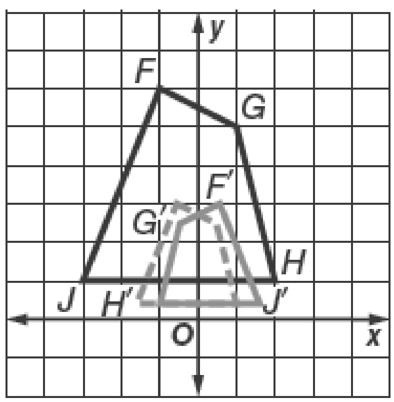
$$(x, y) \Rightarrow (-x, y)$$

$$F'\left(-\frac{1}{2}, 3\right) \Rightarrow F''\left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

$$G'\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow G''\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

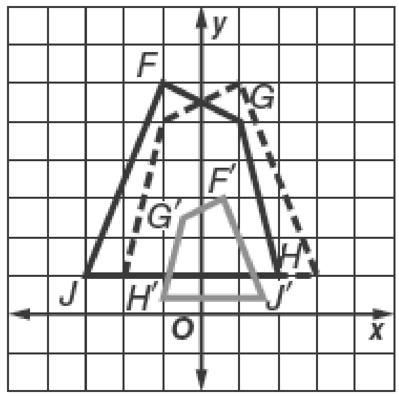
$$H'\left(1, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow H''\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

$$J'\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow J''\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



b) نفّذ التحويل المركب في الفرع **a** بعكس الترتيب.

$$(x, y) \Rightarrow (-x, y)$$
$$F(-1, 6) \Rightarrow F'(1, 6)$$
$$G(1, 5) \Rightarrow G'(-1, 5)$$
$$H(2, 1) \Rightarrow H'(-2, 1)$$
$$J(-3, 1) \Rightarrow J'(3, 1)$$



$$(x, y) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$$
$$F'(1, 6) \Rightarrow F''\left(\frac{1}{2}, 3\right)$$
$$G'(-1, 5) \Rightarrow G''\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$
$$H'(-2, 1) \Rightarrow H''\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$
$$J'(3, 1) \Rightarrow J''\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

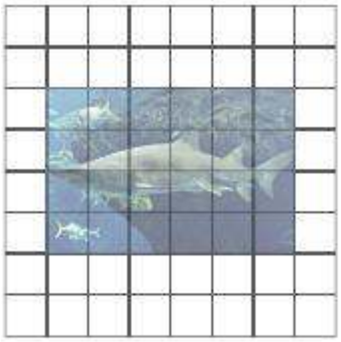
c) هل يؤثر ترتيب التحويلين الهندسيين هنا في الصورة النهائية؟

لا، احداثيات الصورة النهائية هي نفسها بغض النظر أي التحويلات بدأ أولاً

d) هل يؤثر ترتيب تركيب التمدد والانعكاس في الصورة النهائية دائمًا أو أحيانًا أو أنه لا يؤثر عليها أبدًا؟

أحياناً، لا يكون لترتيب تركيب التمدد الذي مركزه نقطة الأصل والانعكاس أهمية إذا كان محور الانعكاس يحتوي نقطة الأصل إي إذا كانت معادلته على الصورة: y = mx.

20) **رسم:** يرسم سليمان صورةً باستعمال طريقة المربعات، فيضع شبكة إحداثية شفافة طول وحدتها $\frac{1}{4}$ cm فوق صورة أبعادها 4 cm × 6 cm، ويضع شبكةً أخرى طول وحدتها $\frac{1}{2}$ cm على ورقة رسم أبعادها 8 cm × 12 cm، ثم يرسم ما يحويه كل مربع من الصورة في المربع المناظر له على ورقة الرسم.



a) ما معامل مقياس هذا التمدد؟

معامل مقياس التمدد 1 : 2

b) ما طول وحدة الشبكة التي يتعيَّن عليه استعمالها لرسم صورة قياسها 10 أمثال قياس الصورة الأصلية؟

بضرب المقياس في 10

$$\frac{1}{4} \times 10 = 2.5$$

تحتاج الى شبكة قياس طول وحدتها 2.5 cm.

c) كم تكون مساحة الرسم الناتج عن صورة أبعادها 5 cm x 7 cm عند استعمال شبكة وحدتها 2 cm على لوحة الرسم؟

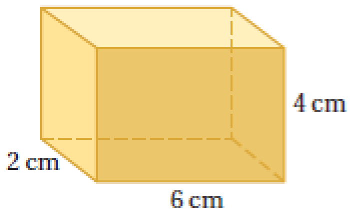
عند استعمال شبكة وحدتها 2cm. ستكون 8 مرات اكبر من الصورة الأصلية.

و هنا تكون الأبعاد الجديدة $5 \times 8 = 40$ و $7 \times 8 = 56$

المساحة = $40 \times 56 = 2240\ cm^2$.

21) تغيير الأبعاد: يمكن إجراء تمددٍ على الأشكال الثلاثية الأبعاد أيضًا.

a) أوجد مساحة سطح المنشور المجاور وحجمه.



مساحة السطح $= 2(lb + bh)$

$= 2(6 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6)$

$= 2(12 + 8 + 24) = 2(44)$

$= 88\ cm^2$

الحجم $= lbh$

$= 6 \cdot 2 \cdot 4$

$= 48\ cm^3$

b) أوجد مساحة سطح المنشور الناتج عن تمددٍ معامله 2، وأوجد حجمه.

عند تمدد الشكل بمعامل تمدد 2، مساحة السطح بعد التمدد يكون 2^2 أو 4 أمثال مساحة السطح الاصلية، و الحجم 2^3 أو 8 أمثال حجم الشكل الأصلي.

مساحة السطح بعد التمدد $= 88 \times 4 = 352\ cm^2$

الحجم بعد التمدد $= 48 \times 8 = 384\ cm^3$

c) أوجد مساحة سطح المنشور الناتج عن تمددٍ معامله $\frac{1}{2}$، وأوجد حجمه.

عند تمدد الشكل بمعامل تمدد $\frac{1}{2}$، مساحة السطح بعد التمدد يكون $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ أو $\frac{1}{4}$ أمثال مساحة السطح الاصلية، و الحجم $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ أو $\frac{1}{8}$ أمثال حجم الشكل الأصلي.

مساحة السطح بعد التمدد $= 88 \times \frac{1}{4} = 22\ cm^2$

الحجم بعد التمدد $= 48 \times \frac{1}{8} = 6\ cm^3$

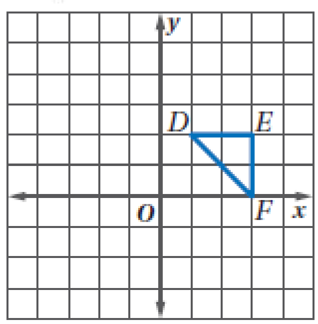
d) أوجد نسبة مساحة سطح المنشور الناتج عن كل تمدد إلى مساحة سطح المنشور الأصلي، ثم أوجد نسبة حجم المنشور الناتج عن كل تمددٍ إلى حجم المنشور الأصلي.

مساحة السطح 4 أمثال المساحة الأصلية عندما يكون معامل التمدد 2 وتساوي $\frac{1}{4}$ المساحة الأصلية إذا كان معامل التمدد $\frac{1}{2}$. حجم المنشور الجديد 8 أمثال حجم المنشور الأصلي عندما يكون معامل التمدد 2 ويساوي $\frac{1}{8}$ الحجم الأصلي إذا كان معامل التمدد $\frac{1}{2}$.

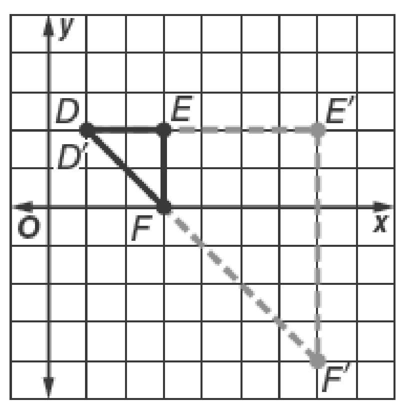
e) ضع تخمينًا حول أثر التمددِ ذي المعامل الموجب في مساحة سطح المنشور وفي حجمه.

تضرب مساحة سطح الشكل الأصلي في r^2. ويضرب حجم الشكل الأصلي في r^3.

22) **هندسة إحداثية:** استعمل التمثيل البياني المجاور للإجابة عمّا يأتي:



a) مثّل بيانيًّا صورة $\triangle DEF$ الناتجة عن تمدد مركزه النقطة D ومعامله 3

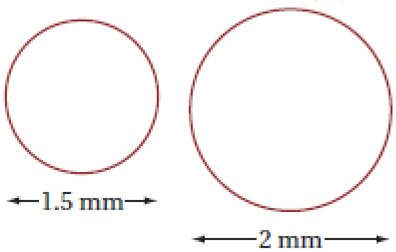


b) عبّر عن هذا التمدد بتركيب تحويلين هندسيين، أحدهما تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 3

تركيب تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 3، إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليسار و 4 وحدات إلى الأسفل.

23) **صحة:** استعمل فقرة الربط مع الحياة المجاورة للإجابة عن السؤالين الآتيين:

a) ينفخ الطبيب بالون القسطرة في الشريان التاجي للمريض مكبرًا البالون كما يتضح في الشكل المجاور.
أوجد معامل هذا التمدد.



معامل التمدد $= \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

b) أوجد مساحة المقطع العرضي للبالون قبل النفخ وبعده .

<u>قبل النفخ</u>

نصف القطر $= \frac{1.5}{2} = 0.75$

مساحة الدائرة $= \pi r^2$

$= \pi(0.75)^2$

≈ 1.77

<u>بعد النفخ</u>

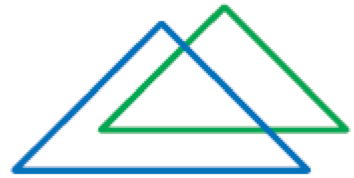
نصف القطر $= \frac{2}{2} = 1$

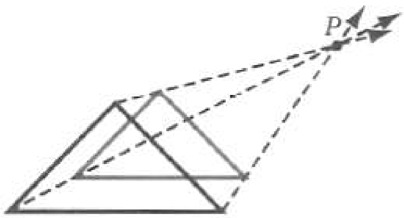
مساحة الدائرة $= = \pi(1)^2$

$\approx 3.14\ mm^2$

أُعطي في كلٍّ من السؤالين الآتيين الشكل الأصلي وصورته الناتجة عن تمدد مركزه النقطة P، عيّن موقع النقطة P، وأجد معامل مقياس التمدد

(24

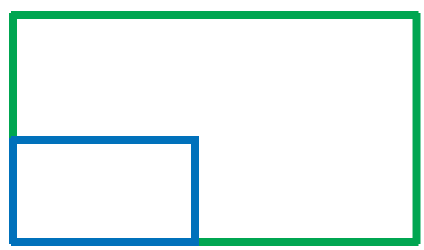


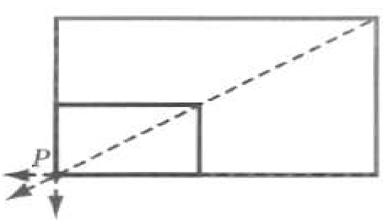


أمد خطاً بين الرؤوس للصورة الاصلية و الصورة بعد التمدد و يتلاقيا في النقطة p
الصورة بعد التمدد أصغر من الصورة الأصلية لذا
التمدد تصغير

معامل مقياس التمدد $= \frac{4}{5}$

(25





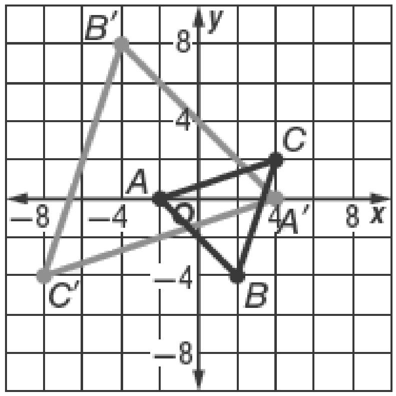
أمد خطاً بين الرؤوس للصورة الاصلية و الصورة بعد التمدد و يتلاقيا في النقطة p
الصورة بعد التمدد أكبر من الصورة الأصلية لذا
التمدد تكبير

معامل مقياس التمدد $= \frac{11}{5}$

26) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب.

a) هندسيًّا: مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(-2, 0)$, $B(2, -4)$, $C(4, 2)$. ثم ارسم صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقط الأصل ومعامله -2.

$(x, y) \to (kx, ky)$.

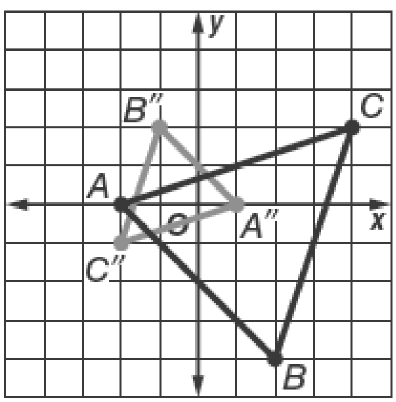


$A(-2,0) \to A'(4,0)$

$B(2,-4) \to B'(-4,8)$

$C(4,2) \to C'(-8,-4)$

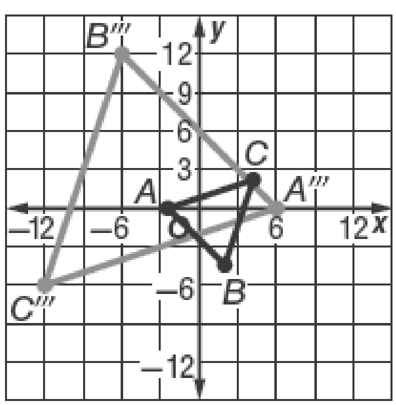
b) هندسيًّا: ارسم صورة المثلث الناتجة عن تمدد معامله $-\frac{1}{2}$ ، وآخر معامله -3



$A(-2,0) \to A''(1,0)$

$B(2,-4) \to B''(-1,2)$

$C(4,2) \to C''(-2,-1)$



$A(-2,0) \to A'''(6,0)$

$B(2,-4) \to B'''(-6,12)$

$C(4,2) \to C'''(-12,-6)$

c) **جدوليًا:** اكتب إحداثيات صورة المثلث الناتجة عن كل تمدد في جدول.

معامل التمدد	A	B	C
	الاحداثيات		
-2	$(4, 0)$	$(-4, 8)$	$(-8, -4)$
$-\frac{1}{2}$	$(1, 0)$	$(-1, 2)$	$(-2, -1)$
-3	$(6, 0)$	$(-6, 12)$	$(-12, -6)$

d) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول قاعدة التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب.

يضرب كل إحداثي في معامل التمدد السالب.

e) **تحليليًا:** اكتب قاعدة التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $-k$.

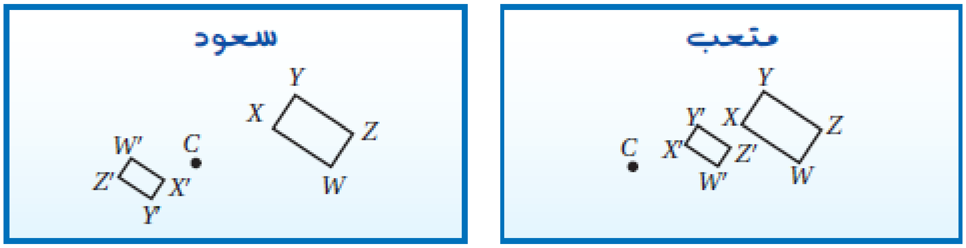
$$(x,\ y)(-kx,\ -ky)$$

f) **لفظيًا:** عبّر عن التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب بتحويل هندسي مركب.

يمكن وصف التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $-k$ بأنه تركيب تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله k ودوران بزاوية 180° حول نقطة الأصل.

مسائل مهارات التفكير العليا:

27) **اكتشف الخطأ:** يحاول كلٌّ من متعب وسعود أن يصف تأثير القيمة السالبة لمعامل مقياس التمدد في صورة الشكل الرباعي $WXYZ$، فأيهما تفسيره صحيح؟ اشرح تبريرك.



سعود، لأن متعب استعمل معامل تمدد موجباً.

28) **تحدٍّ:** أوجد معادلة صورة المستقيم $y = 4x - 2$ الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 1.5

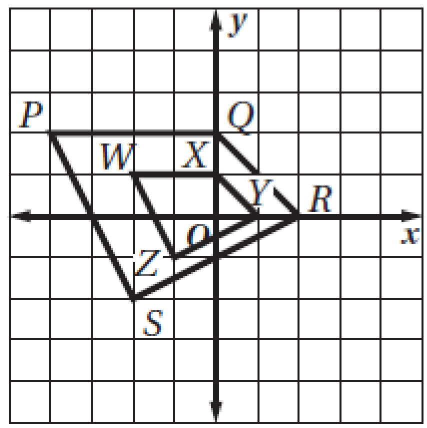
$$\mathbf{y = 4x - 3}$$

29) **اكتب:** هل تحفظ التحويلات الهندسية جميعها التوازي والاستقامة؟ اشرح إجابتك.

نعم، تتكون أشكال متطابقة نتيجة الانعكاس والإزاحة والدوران، مما يعني أن جميع الأضلاع المتوازية قبل التحويل الهندسي تبقى متوازية بعده، وأن النقاط الواقعة على استقامة واحدة قبل التحويل الهندسي تبقى على استقامة واحدة بعده. كما يحفظ التمدد التوازي والاستقامة لأن الأشكال الناتجة تكون مشابهة للأصل أي ان لها الشكل نفسه ولكن بنسب مختلفة.

تدريب على اختبار

32) ما معامل مقياس التمدد من الشكل $PQRS$ إلى الشكل $WXYZ$؟



الشكل $WXYZ$ أصغر من الشكل $PQRS$

التمدد تصغير

المسافة بين النقطتين $Z(-1,-1)$ @ $Y(1,0)$

$$YZ = \sqrt{(1+2)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{5}$$

المسافة بين النقطتين $S(-2,-2)$ @ $R(2,0)$

$$RS = \sqrt{(2+2)^2 + (0+2)^2} = 2\sqrt{5}$$

معامل مقياس التمدد $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}$

33) يرسم توفيق نسخةً من لوحة فنية معروضة في متحف فني. إذا كان عرض اللوحة 3 ft، وطولها 6 ft، وقرر أن يستعمل معامل مقياس تمدد قدره 0.25، فما أبعاد ورقة الرسم بالبوصات المناسبة لإنجاز رسمه؟

A $4 \text{ in} \times 8 \text{ in}$ **C** $6 \text{ in} \times 12 \text{ in}$

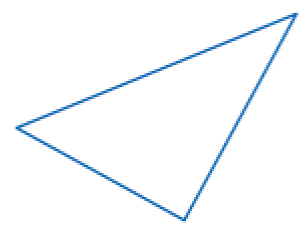
B $8 \text{ in} \times 16 \text{ in}$ **D** $10 \text{ in} \times 20 \text{ in}$

الاختيار الصحيح: D $10\text{in.} \times 20\text{in.}$

مراجعة تراكمية

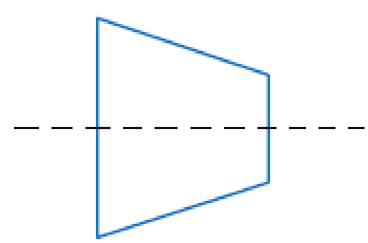
بيّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها، وحدد عددها في كلٍّ ممَّا يأتي:

34)



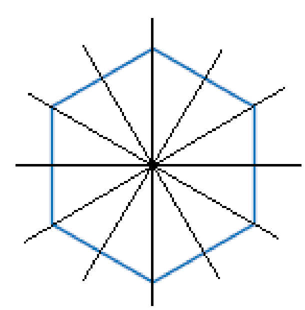
لا

35)



نعم، 1

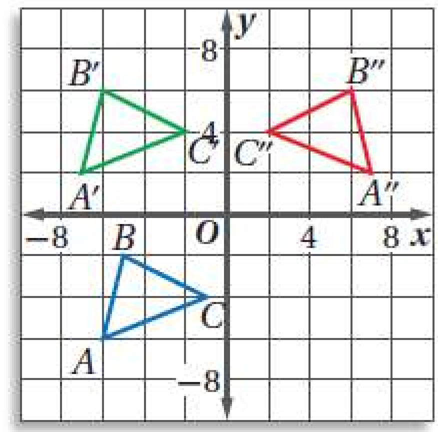
36)



نعم، 6

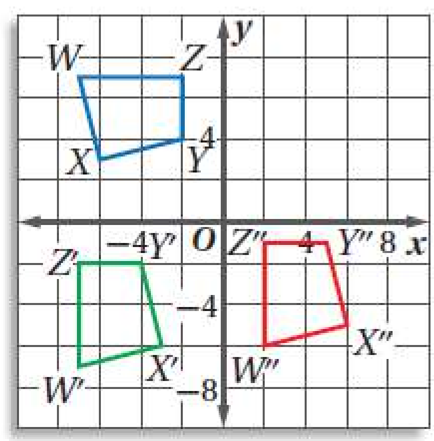
صِفِ التحويل الهندسي المركب الذي ينقل الشكل إلى صورته النهائية في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

(37



إزاحة مقدارها وحدة واحدة إلى اليسار و8 وحدات إلى أعلى ثم انعكاس في المحور y.

(38



دوران بزاوية °90 حول نقطة الأصل وإزاحة مقدارها 9 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى الأعلى.

استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

39) $58.9 = 2x$

$$\frac{58.9}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$29.45 = x$$

40) $\frac{108.6}{\pi} = x$

$$\frac{108.6}{\pi} = x$$

$$34.57 \approx x$$

41) $228.4 = \pi x$

$$\frac{228.4}{\pi} = \frac{\pi x}{\pi}$$

$$72.7 \approx x$$

42) $\frac{336.4}{x} = \pi$

$$\frac{336.4}{\pi} = x$$

$$107.1 \approx x$$

دليل الدراسة والمراجعة

*

اختبار المفردات

1) عند إجراء تحويل هندسي على شكلٍ ما، ثم إجراء تحويلٍ هندسي آخر على صورته، فإن هذه العملية تسّمى (تحويلًا هندسيًّا مركبًا ، رتبة الدوران).

تحويلاً هندسياً مركباً

2) إذا طُوي شكل حول خطٍّ مستقيم، وانطبق نصفاه أحدهماعلى الآخر تمامًا، فإن خط الطي يسمى (محور الانعكاس ، محور التماثل).

محور التماثل

3) التحويل الهندسي الذي يكبّر الشكل أو يصغّره بنسبة محددة هو (التمدد ، الدوران).

التمدد

4) يُطلق على عدد المرات التي ينطبق فيها الشكل على نفسه في أثناء تدويره من $0°$ إلى $360°$ اسم (مقدار التماثل ، رتبة التماثل).

رتبة التماثل

5) يبعد (محور الانعكاس ، مركز التمدد) المسافة نفسها عن كل نقطة في الشكل وصورتها.

محور الانعكاس

6) يكون الشكل (تحويلًا هندسيًّا مركبًا ، متماثلًا) إذا وجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه.

متماثلاً

7) يمكن تمثيل (الإزاحة ، الدوران) بتركيب انعكاسين متتابعين حول مستقيمين متقاطعين.

الدوران

8) لتدوير نقطةٍ ما بزاوية ($90°$ ، $180°$) عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1، وبدّل الإحداثيين x, y.

90°

9) (التمدد ، الانعكاس) هو تحويل تطابق.

الانعكاس

10) يكون للشكل (محور تماثل ، تماثل دوراني) إذا كانت صورته الناتجة عن دوران حول مركزه بزاوية بين $0°$ و $360°$ هي الشكل نفسه.

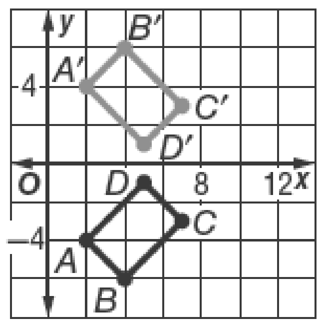
تماثل دوراني

مراجعة الدروس

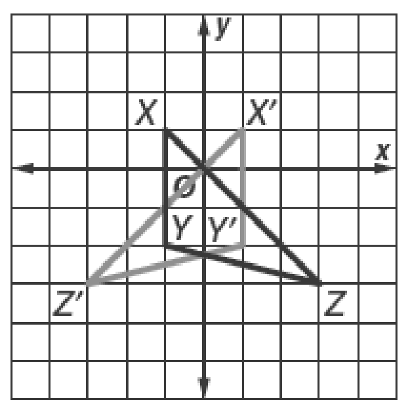
7-1 الانعكاس

مثِّل بيانيًّا كل شكل مما يأتي وصورته بالانعكاس المحدد.

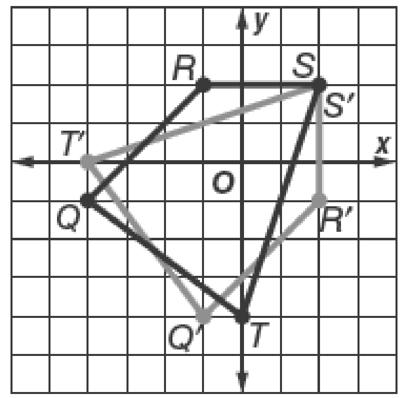
11) المستطيل $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$A(2, -4), B(4, -6), C(7, -3), D(5, -1)$ ؛ الانعكاس حول المحور x .



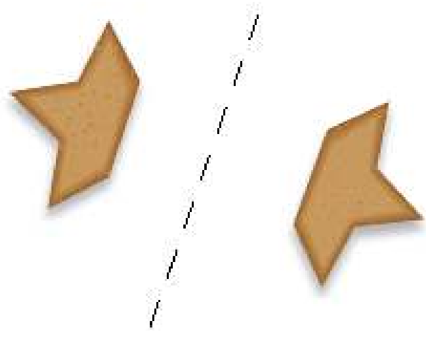
12) المثلث XYZ الذي إحداثيات رؤوسه:
$X(-1, 1), Y(-1, -2), Z(3, -3)$ ؛ الانعكاس حول المحور y .



13) الشكل الرباعي $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$Q(-4, -1), R(-1, 2), S(2, 2), T(0, -4)$ ؛
بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

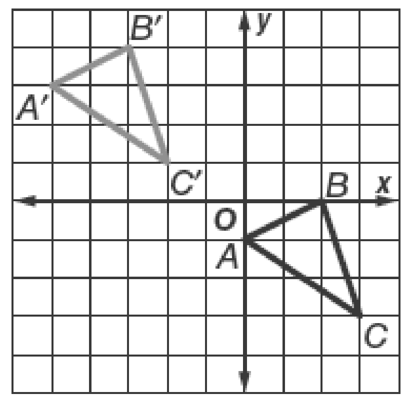


14) **فن:** يصنع عامر منحوتتين ليضعهما على جانبَي ممرٍّ في حديقة منزله، بحيث تكون إحداهما انعكاسًا للأخرى حول المستقيم الذي يقسم هذا الممر طوليًّا إلى نصفين. انسخ الشكل في دفترك، وارسم محور الانعكاس.

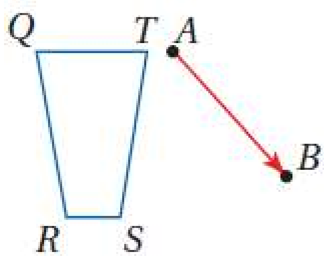


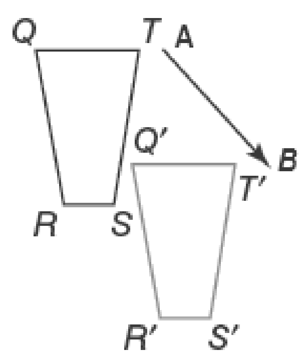
7-2 الإزاحة (الانسحاب)

15) مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$A(0, -1), B(2, 0), C(3, -3)$، وارسم صورته الناتجة عن إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

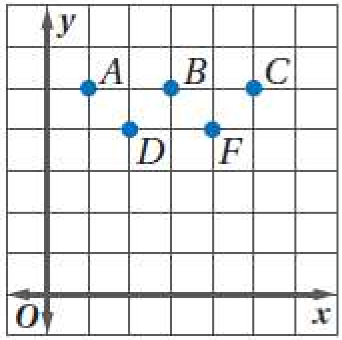


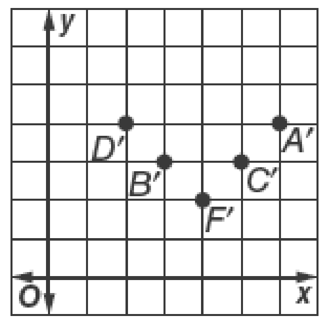
16) انقل إلى دفترك الشكل المجاور ثم ارسم صورة الشكل $QRST$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل A إلى B .





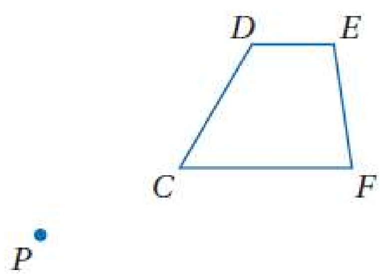
17) يمثل الشكل المجاور مواقع 5 لاعبين في ملعبٍ، تحرك كل من اللاعبين B, F, C وحدتين إلى أسفل، في حين تحرك اللاعب A خمس وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل. ارسم المواقع النهائية للاعبين .

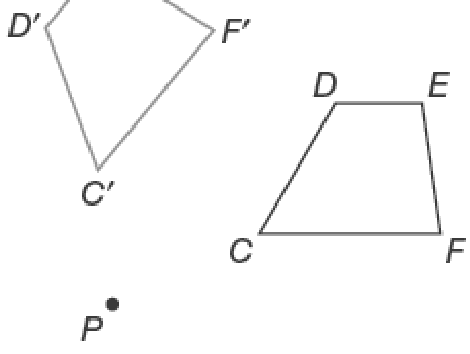




7-3 الدوران

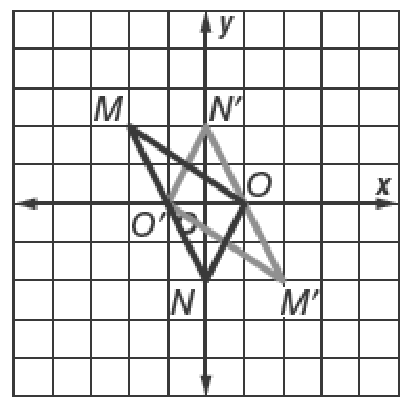
18) استعمل منقلةً ومسطرةً لرسم صورة $CDEF$ الناتجة عن دوران بزاوية $50°$ حول النقطة P.



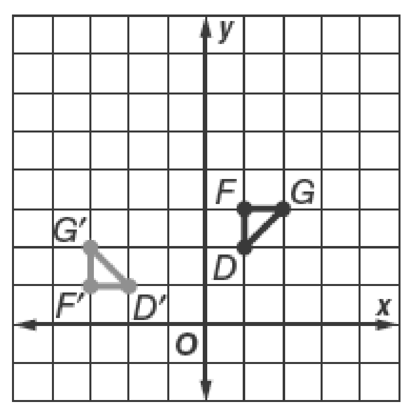


مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران بالزاوية المحددة حول نقطة الأصل في كلٍّ ممَّا يأتي:

19) $\triangle MNO$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$M(-2, 2), N(0, -2), O(1, 0)$؛ $180°$



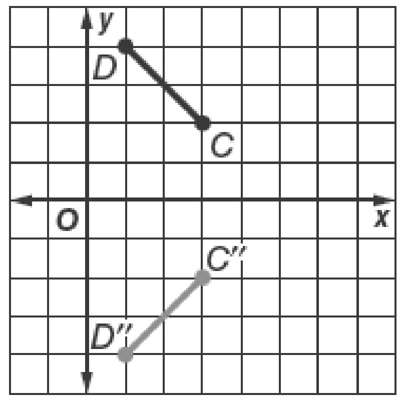
20) $\triangle DGF$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(1, 2), G(2, 3), F(1, 3)$؛ $90°$



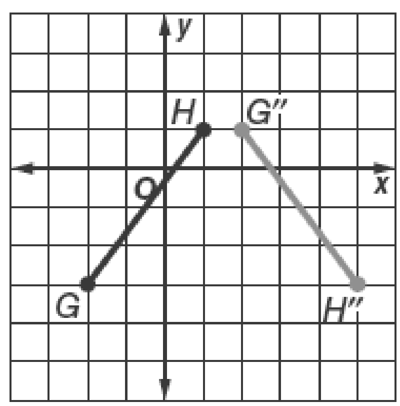
7-4 تركيب التحويلات الهندسية

مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد في كلٍّ ممَّا يأتي:

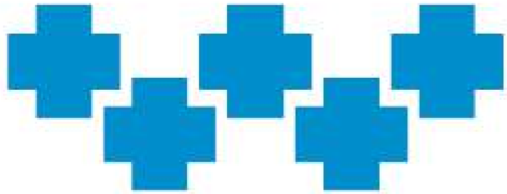
21) $\overline{CD}$ ، حيث $C(3, 2), D(1, 4)$ ، انعكاس حول المستقيم $y = x$، ثم دوران $270°$ حول نقطة الأصل.



22) $\overline{GH}$ ، حيث $G(-2, -3), H(1, 1)$ ، إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى اليمين ووحدتان إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x .



23) **أنماط:** كوّن عبد السلام النمط الآتي لإطار لوحة، صِف تركيب التحويلات الهندسية الذي استعمله لتكوين هذا النمط.

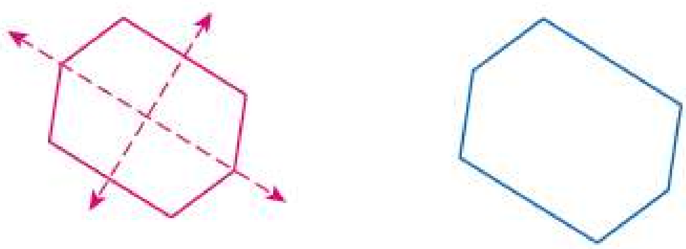


إزاحة إلى اليمين وإلى الاسفل ثم إزاحة للشكل الناتج إلى اليمين وإلى الأعلى.

7-5 التماثل

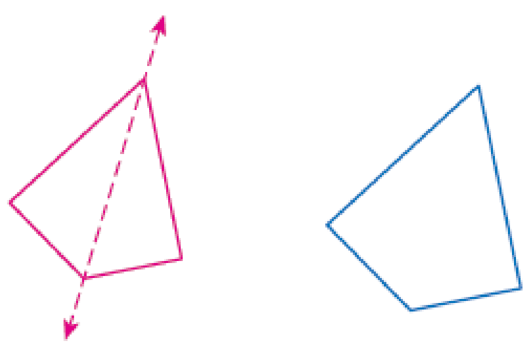
بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها.

(24



نعم، 2

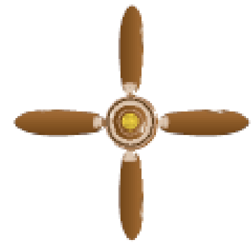
(25

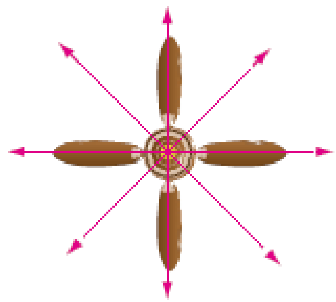


نعم، 1

بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيِّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ ممَّا يأتي:

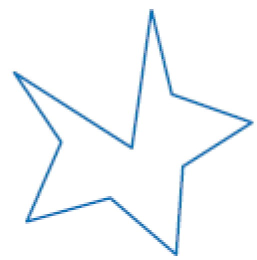
(26





نعم، 90° , 4

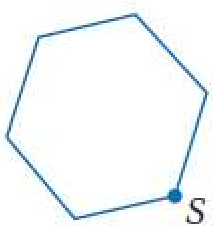
(27

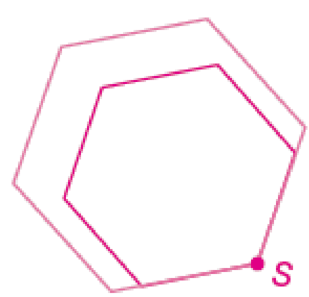


لا

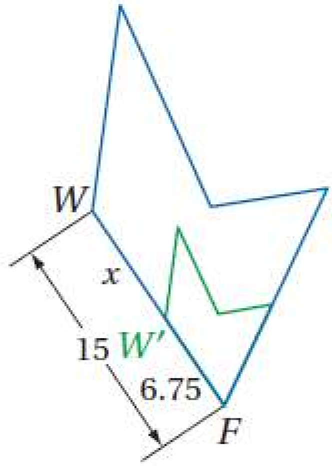
7-6 التمدد

28) استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه S ومعامله $k = 1.25$.





29) حدد ما إذا كان التمدد من الشكل W إلى W' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامل مقياس التمدد وقيمة x.



تصغير، 0.45 , 8.25

30) **نوادٍ علمية:** استعمل أعضاء نادي الرياضيات جهاز العرض لرسم لوحة على الجدار، إذا كان عرض اللوحة الأصلية 6 in ، وعرض صورتها على الجدار 4 ft ، فما معامل التكبير؟

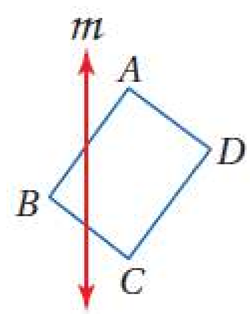
4 ft. = 48 in.

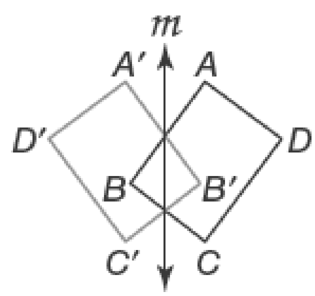
معامل التكبير $= \frac{48}{6} = 8$

* اختبار الفصل

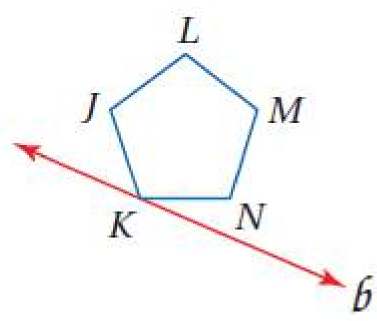
ارسم صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين بالانعكاس حول المستقيم المُعطى:

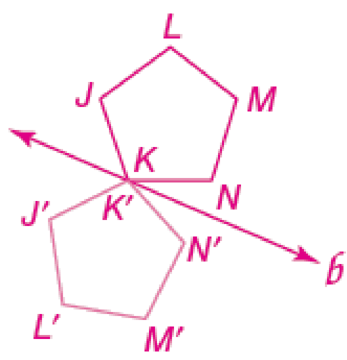
1)



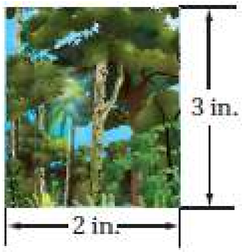


2)





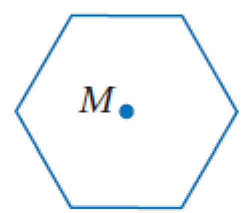
3) **حدائق:** يريد فؤاد أن يكبّر الصورة الآتية للحديقة؛ لتصبح أبعادها 4 in في 6 in ، مستعملاً آلة نسخ تكبر الصورة حتى 150% فقط وبنسب على شكل أعداد كلية، أوجد نسبتين على شكل عددين كليين يمكن استعمالهما لتكبير الصورة، بحيث تصبح أبعادها أقرب ما يمكن إلى 4 in في 6 in ، ولا تزيد عن ذلك.

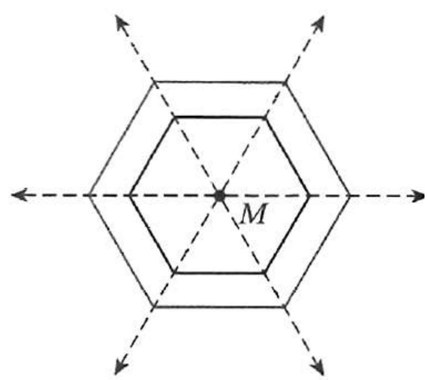


133% , 150%

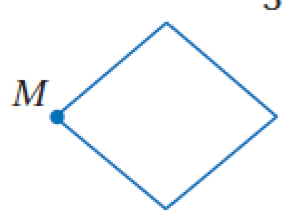
استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه M ومعامله k المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

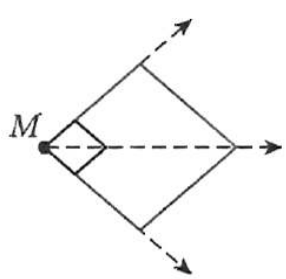
4) $k = 1.5$





5) $k = \frac{1}{3}$





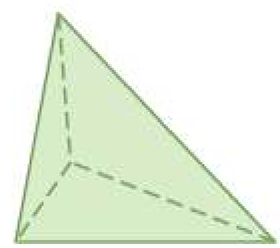
6) **مدينة الألعاب:** يركب أحمد في إحدى الألعاب التي تدور عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول مركزها 60° كل ثانيتين، فبعد كم ثانية يعود أحمد إلى النقطة التي انطلق منها؟

$$\frac{360}{6} = 6$$

$$2 \times 6 = 12$$ ثانية

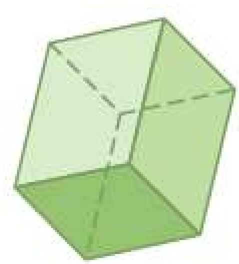
بيِّن ما إذا كان كلٌّ من الشكلين الآتيين متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك.

7)



غير ذلك

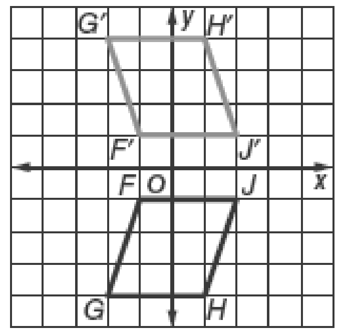
8)



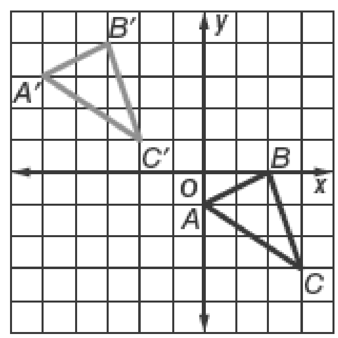
كلاهما

مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المحدّد في كلٍّ ممّا يأتي

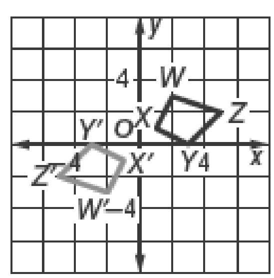
9) $\square FGHJ$ ، حيث: $F(-1, 4), G(4, 4), H(3, 1), J(-2, 1)$ ؛ انعكاس حول المحور x .



10) $\triangle ABC$ ، حيث: $A(0, -1), B(2, 0), C(3, -3)$ ؛ إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

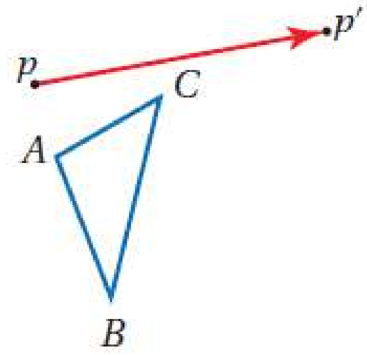


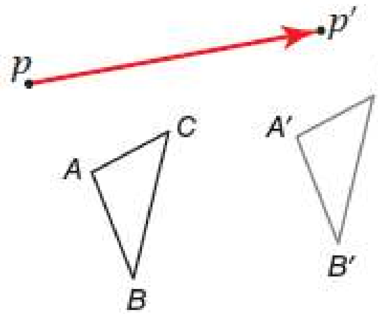
11) الشكل الرباعي $WXYZ$ ، حيث: $W(2,3), X(1,1), Y(3,0), Z(5,2)$ ؛ دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.



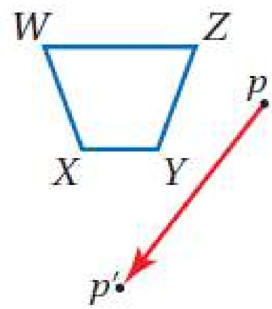
ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل P إلى P' في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

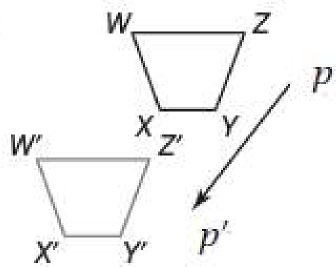
12)



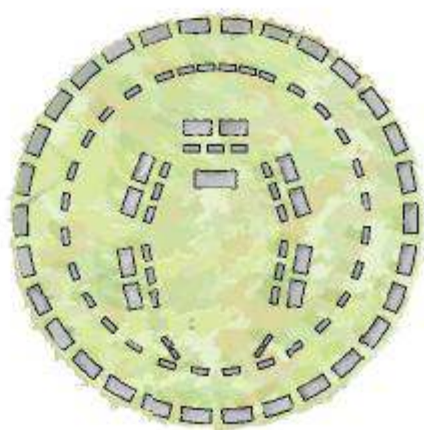


13)



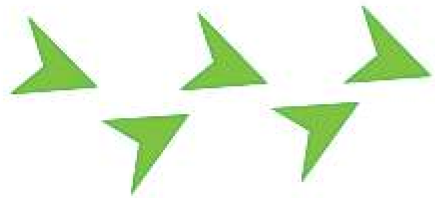


14) **آثار:** يبيّن الشكل الآتي مخطط موقع أثري، فما رتبة تماثل الحلقة الخارجية؟ وما مقداره؟



30 , 12

15) **اختيار من متعدد:** ما التحويل الهندسي أو تركيب التحويلات الهندسية الذي يمثِّله الشكل الآتي؟



A تمدد

B إزاحة ثم انعكاس

C دوران

D إزاحة

اختيار من متعدد: B إزاحة ثم انعكاس

الإعداد للاختبارات *

تمارين ومسائل

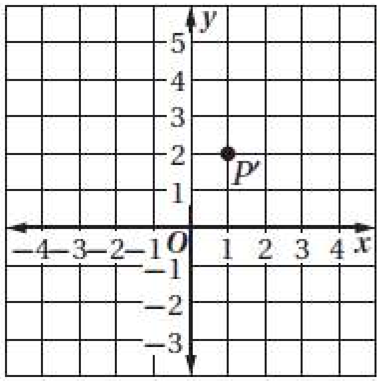
حُلّ كلًّا من المسائل الآتية، وبيّن خطوات الحل، وستصحح الإجابات وتحدد الدرجة المُستحقة باستعمال سُلَّم تقدير الإجابة القصيرة الوارد في الصفحة السابقة.

1) حطّت حشرة طائرة على شبكة إحداثية ثم قفزت عبر المحور x، ثم قفزت عبر المحور y على هيئة انعكاسين متعاقبين، ثم سارت 9 وحدات إلى اليمين و 4 وحدات إلى أسفل، فكان موقعها النهائي عند النقطة $(4, -1)$، فما إحداثيات النقطة التي حطّت عليها الحشرة في البداية؟

أبدأ من النتيجة النهائية، و اتبع الخطوات بترتيب عكسي

النهاية عند النقطة $(4, -1)$ ، تحرك 4 وحدات صعودا و 9 وحدات يساراً الى النقطة $(-5, 3)$. انعكاس النقطة $(-5, 3)$ حول المحور الصادي هو $(5, 3)$. ثم انعكاسا للنقطة $(5, -3)$. ولذلك، فإن الحشرة حطت في البداية على $(5, -3)$

2) في الشبكة الإحداثية الآتية تظهر الصورة النهائية لنقطةٍ تم تدويرها بزاوية 90° في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، ثم نُفّذ عليها تمدد معامله 2، ثم أُزيحت 7 وحدات إلى اليمين. ماذا كانت إحداثيات الموقع الأصلي لهذه النقطة؟



أبدأ من النتيجة النهائية، و اتبع الخطوات بترتيب عكسي

إحداثيات النقطة 'P هي $(1, 2)$.

تحرك 7 وحدات إلى اليسار، الإحداثيات هي $(-6, 2)$. تمدد بمعمل مقياسه $\frac{1}{2}$ ، الإحداثيات ه ي $(-3, 1)$. دوران النقطة $(-3, 1)$ 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل للحصول على الموقع الاول. لتدوير نقطة 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، بضرب الاحداثي الصادي في -1 ثم مبادلة الاحداثيات السيني و الصادي. ولذلك، فإن وضع البداية هو $(-1, -3)$

3) إذا كانت $B''(-5, -4), A''(2, -2)$ إحداثيات طرفي $\overline{A''B''}$ تمثل الصورة النهائية لِـ $\overline{AB}$، بعد إجراء انعكاس لها حول المحور x، ثم إزاحة وفقًا للقاعدة: $(x, y) \rightarrow (x - 1, y + 2)$
فأيٌّ ممّا يأتي يمثل إحداثيَّي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

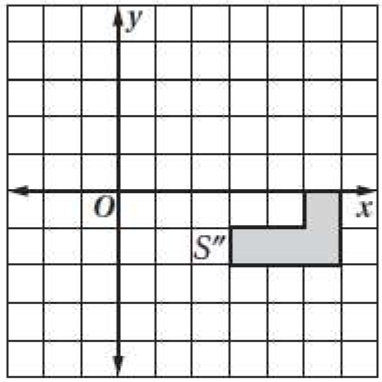
A $\left(\frac{-3}{2}, -3\right)$ C $\left(-\frac{1}{2}, -5\right)$

B $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$ D $(-1, 0)$

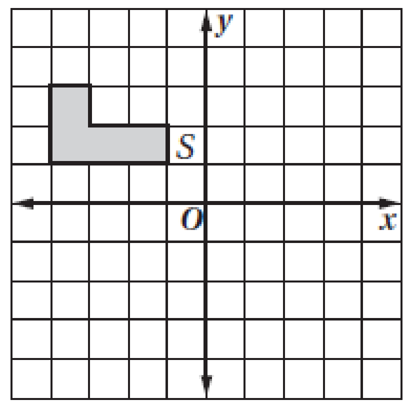
أبدأ من النتيجة النهائية، و اتبع الخطوات بترتيب عكسي

الإجابة الصحيحة: B $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$

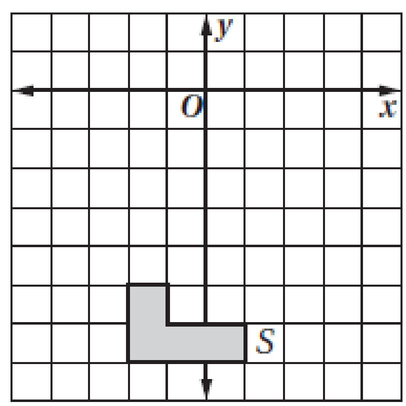
4) الشكل S'' يمثل الصورة النهائية الناتجة للشكل S، بعد إجراء التحويلات الهندسية التالية عليه: انعكاس حول المحور y، ثم انسحاب 3 وحدات إلى أسفل ووحدتين إلى اليمين.



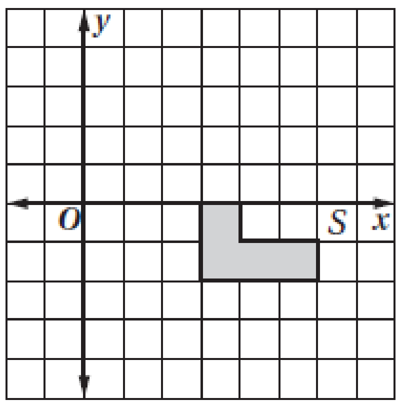
A



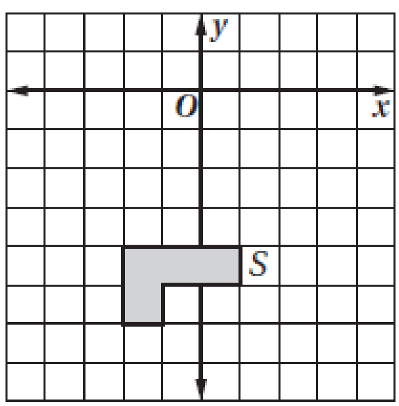
B



C



D



* اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

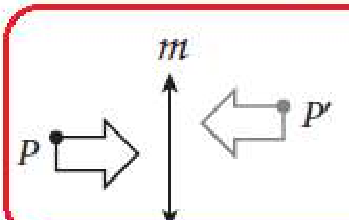
اقرأ كل سؤالٍ ممّا يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصائبة:

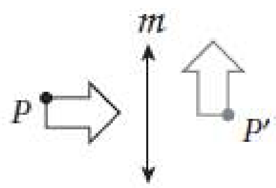
1) إحداثيات النقطة N هي $(4, -3)$، ما إحداثيات صورتها الناتجة عن الانعكاس حول المحور y ؟

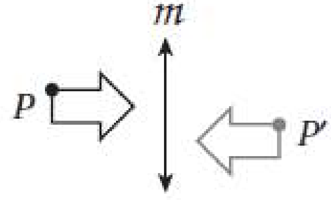
A $N'(-3, 4)$ C $N'(4, 3)$

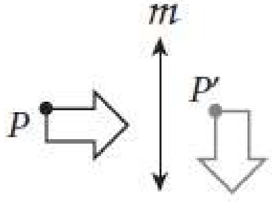
B $N'(-4, 3)$ D $N'(-4, -3)$

2) أيُّ الأشكال الآتية يبيّن نتيجة انعكاس الشكل p حول المستقيم m ثم إزاحة إلى أعلى؟

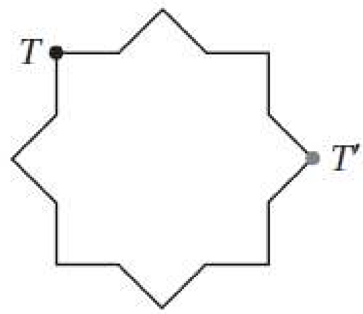
A 

C 

B 

D 

3) ما الزاوية التي تم تدوير الشكل الآتي بها حول مركز تماثله حتى تنتقل النقطة T إلى النقطة T' ؟



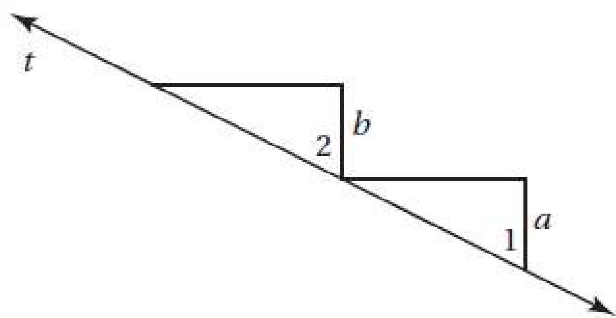
A $90°$

B $120°$

C $135°$

D $225°$

4) المعطيات: $a \parallel b$



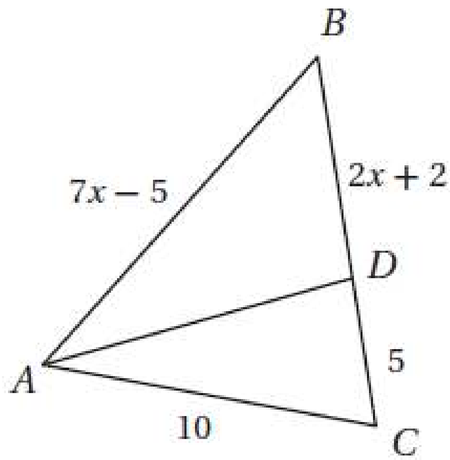
أيُّ العبارات الآتية تبرّر استنتاج أن $\angle 2 \cong \angle 1$؟

A إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t ، فإن الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا متطابقتان .

B إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t ، فإن الزاويتين المتبادلتين داخليًّا متطابقتان.

C إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t ، فإن الزوايتين المتناظرتين متطابقتان .

D إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t ، فإن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان .



5) في $\triangle ABC$ ، $\overline{AD}$ تنصف $\angle CAB$.

ماقيمة x ؟

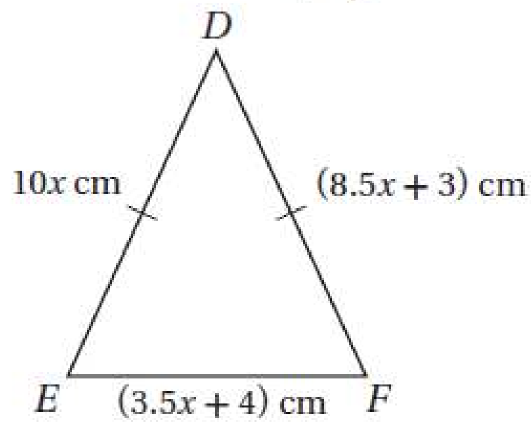
A 1.5

B 5

C 1.4

D 3

6) أيٌّ ممّا يأتي هو طول ضلع في المثلث المتطابق الضلعين DEF؟



A 2 cm

B 8 cm

C 9 cm

D 11 cm

7) أي المضلعات الآتية فيه زوجان فقط من الأضلاع المتتالية المتطابقة؟

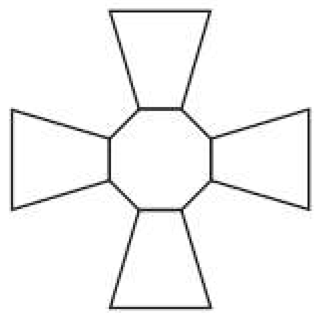
A شكل الطائرة الورقية C المعين

B متوازي الأضلاع D شبه المنحرف

أسئلة ذات إجابات قصيرة

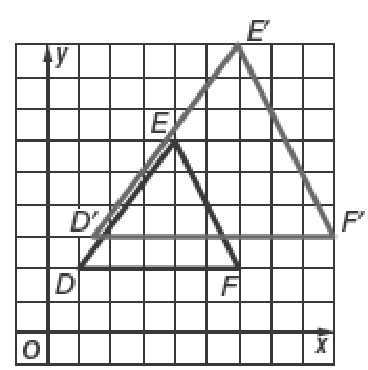
اكتب إجابتك في ورقة الإجابة.

8) بيّن ما إذا كان للشكل الآتي تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل وحدد رتبته ومقداره .



نعم، الرتبة 4، المقدار 90

9) مثّل بيانيًّا الصورة الناتجة عن عمل تمدد للشكل الآتي مركزه نقطة الأصل ومعامله 1.5



10) أكمل العبارة الآتية:

"بحسب نظرية منصف الزاوية، إذا وقعت نقطة على منصف زاوية، فإنها ....

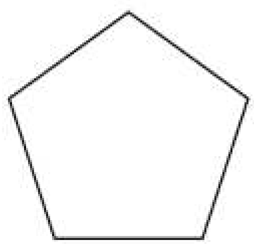
تكون على بعدين متساويين عن ضلعي الزاوية.

11) ما صورة النقطة $A(-4, 3)$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل $B(-1, -2)$ إلى $B'(4, -3)$ ؟

$$(x,\ y) \to (x+5,\ y-1)$$

$$A'(1\ ,\ 2)$$

12) ما قياس الزاوية الداخلية للمضلع الخماسي المنتظم؟



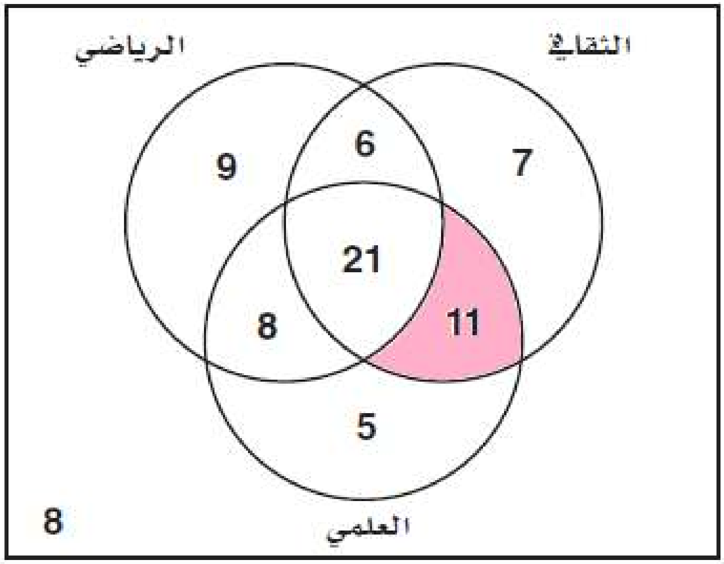
$$\frac{(n-2)\times 180}{n}$$

$$\frac{(5-2)\times 180}{5}$$

$$\frac{3\times \cancel{180}^{36}}{\cancel{5}}$$

قياس الزاوية $= 108^\circ$

13) سُئل 57 طالبًا عن النشاطات المدرسية التي يشاركون فيها، ومُثِّلت النتائج بشكل ڤـن الآتي:



ما عدد الطلاب الذين يشاركون في النشاطين (الثقافي والعلمي)، ولا يشاركون في النشاط الرياضي؟

11 طالب

أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

14) يدرس أحمد الهندسة المعمارية، وقد رسم مخططًا لمتنزه رؤوسه: $Q(2, 2), R(-2, 4), S(-3, -3), T(3, -4)$، ولكنه لاحظ أن اتجاه رسمه غير صحيح، حيث ظهر الشمال في أسفل الرسم بدلًا من أن يكون في أعلى الرسم.

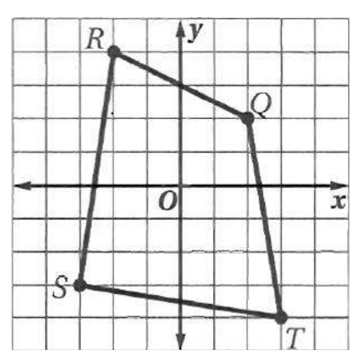
a) ما التحويل الذي يستطيع أحمد تطبيقه على مخططه ليجعل الشمال في أعلى الرسم؟

على أحمد أن يقوم بتدوير الشكل QRST بزاوية قياسها 180° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة ليصبح الشمال في الأعلى والمحافظة على اتجاه النقاط.

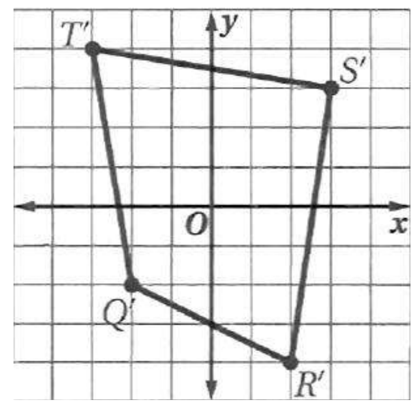
b) هل هذا هو التحويل الوحيد الذي يجعل الشمال في أعلى الرسم؟ وضح إجابتك.

سيضع الانعكاس الشمال أعلى الرسم لكنه سيغير اتجاه النقاط، لذا لا يصلح إلى الدوران.

c) ارسم الشكل الرباعي $QRST$، واكتب إحداثيات رؤوسه.



d) ارسم الصورة $Q'R'S'T'$ بعد التحويل، واكتب إحداثيات رؤوسها.



e) فسّر كيف يمكن لأحمد أن يعرف إحداثيات رؤوس الصورة من دون استعمال المستوى الإحداثي.

لإيجاد إحداثي كل نقطة بعد دوران 180° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، يمكن استعمال القاعدة التالية:

$(x, y) \to (-x, -y)$، لذا، فالنقطة $Q(2, 2)$ تصبح $Q'(-2, -2)$، والنقطة $R(-2, 4)$ تصبح $R'(2, -4)$، والنقطة $S(-3, -3)$ تصبح $S'(3, 3)$، والنقطة $T(3, -4)$ تصبح $T'(-3, 4)$.

8

الدائرة

* التهيئة

أوجد النسبة المئوية من العدد المعطى في كلّ ممّا يأتي:

1) 26% من 500

26% من 500 = 0.26× 500 = 130

2) 79% من 623

79% من 623 = 0.79 × 623 = 492.17

3) 19% من 82

19 % من 82 = 0.19 × 82 = 15.58

4) 10% من 180

10 % من 180 = 0.10 × 180 = 18

5) 92% من 90

92 % من 90 = 0.92 × 90 = 82.8

6) 65% من 360

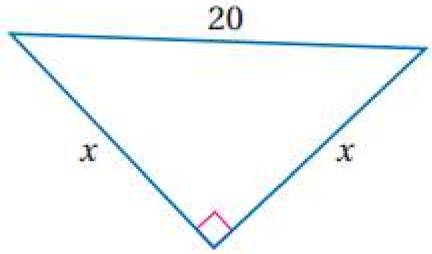
65 % من 360 = 0.65 × 360 = 234

7) **مطاعم:** يُضيف مطعمٌ رسم توصيل قدره 5% على كل طلبٍ. ما رسم خدمة توصيل وجبة غداء سعرها 65 ريالًا؟

رسم خدمة توصيل وجبة غداء = 65 × 5%

= 3.25 ريال

8) أوجد قيمة x، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشر.



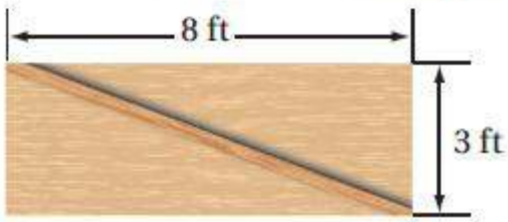
من قاعدة فيثاغورث:

$$x^2 + x^2 = 20^2$$

$$2x^2 = 400$$

$$x = 14.1$$

9) **نجارة:** أراد أحمد أن يضع دعامة على لوح من الخشب، كما في الشكل أدناه ما طول هذه الدعامة؟



من فيثاغورث

$3^2 + 8^2 =$ (طول الدعامة)^2

طول الدعامة = 8.5 ft

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام مقربًّا إجابتك إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك.

10) $5x^2 + 4x - 20 = 0$

$$5x^2 + 4x - 20 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 5 \times -20}}{10}$$

$$x = 2.4 \quad \text{or} \quad 1.6$$

(11 $x^2 = x + 12$

$$x^2 = x + 12$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times -12}}{2}$$

$$x = 4 \quad \text{or} \quad -3$$

(12 ألعاب نارية: أطلقت ألعاب نارية في الهواء احتفاءً باليوم الوطني، ولم تنفجر إحدى هذه الألعاب، فارتدت إلى الأرض، إذا كان ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية يُعطى بالمعادلة $d = 80t - 16t^2$، فبعد كم ثانية وصلت سطح الأرض؟

تبعد الطلقة النارية عن الأرض = 5 ثوان

$$d = 80t - 16t^2$$

$$0 = 80t - 16t^2$$

$$80t = 16t^2$$

$$t = 5$$

8-1 الدائرة ومحيطها

لماذا؟

المسافة التي تقطعها في الدورة الواحدة = محيط الدائرة

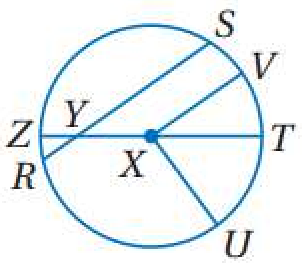
$= 2\pi r$

$= 44 \times 3.14 \times 2$

$= 276.32$ ft

تحقق

1) سمِّ الدائرة، ونصف قطر، ووترًا، وقطرًا فيها.



بما أن مركز الدائرة هو x تسمى الدائرة x

نصف القطر بها هو: xv ، xt، xu ، xz

الوتر: rs ، tz

القطر: zt

2A) إذا كان $TU = 14$ ft، فأوجد نصف قطر $\odot Q$؟

$$r = \frac{1}{2} d$$

$$r = \frac{1}{2} \times 14 = 7\text{ft}$$

2B) إذا كان $QT = 11$ m، فأوجد QU.

$QU = QT$ أنصاف أقطار في الدائرة

$QU = 11\text{m}$

3) استعمل الشكل أعلاه لإيجاد RC .

قطر الدائرة r يساوي 20

$$rd = 10$$

$$rc + cd = rd$$

$$rc + 6 = 10$$

$$rc = 4$$

أوجد محيط كلٍّ من الدائرتين الآتيتين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من مئة.

4A) نصف القطر يساوي $2.5\,cm$

$$C = 2\pi r$$

$$C = 2\pi(2.5)$$

$$C = 15.71cm$$

4B) القطر يساوي $16\,ft$

$$C = \pi d$$

$$C = \pi(16)$$

$$C = 50.27ft$$

5) إذا كان محيط دائرة يساوي $77.8\,cm$، فأوجد قطر الدائرة ونصف قطرها مقرّبين إلى أقرب جزء من مئة.

$$C = \pi d$$

$$77.8 = \pi d$$

$$d = 24.76cm$$

$$C = 2\pi r$$

$$77.8 = 2\pi(r)$$

$$C = 12.38cm$$

أوجد القيمة الدقيقة لمحيط الدائرة في كلٍّ ممَّا يأتي:

6A) إذا كانت تحيط بمثلثٍ قائم الزاوية طولا ساقيه $7\,m, 3\,m$

ارسم شكل توضيحي أولا نجد أن وتر المثلث هو القطر

$a^2 + b^2 = d^2$ نظرية فيثاغورس

$3^2 + 7^2 = d^2$ بالتعويض

$d = 7.6m$ بالتبسيط و أخذ الجذر التربيعي

$C = d\pi$

$C = 7.6\pi$

6B) إذا كانت مُحاطَة بمربعٍ طول ضلعه $10\,ft$

ارسم شكل توضيحي أولا نجد أن القطر هو قطر المربع

$a^2 + b^2 = d^2$ نظرية فيثاغورس

$10^2 + 10^2 = d^2$ بالتعويض

$10^2 + 10^2 = d^2$ بالتبسيط و أخذ الجذر التربيعي

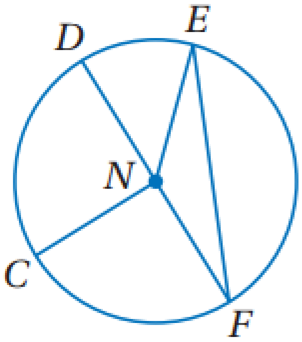
$d = 10\sqrt{2}$

$C = d\pi$

$C = 10\sqrt{2}\pi$

تأكد:

استعمل الدائرة في الشكل المجاور؛ للإجابة عن الأسئلة الآتية:



1) سمِّ هذه الدائرة.

بما أن مركزها n تسمي الدائرة □ n

2) عيّن كلًّا ممّا يأتي:

a) وترًا

وتر: ef ، df

b) قطرًا

قطر: df

c) نصف قطر

نصف قطر: nf، nd، nc، ne

3) إذا كان $CN = 8$ cm ، فأوجد DN .

CN = DN أنصاف أقطار

DN = 8 cm

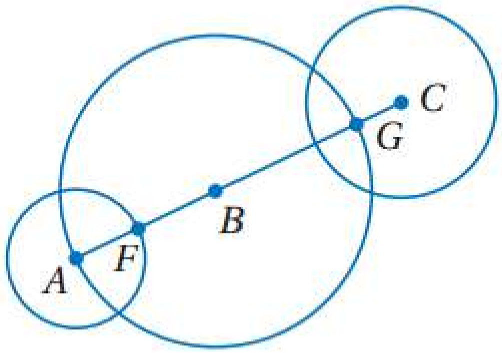
4) إذا كان $EN = 13$ ft ، فما قطر الدائرة؟

d = 2 r

D = 2(13)

D = 26 ft

قطر كل من $\odot C, \odot B, \odot A$ يساوي $8\,cm, 18\,cm, 11\,cm$ على الترتيب. أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:



5) FG

$$AG = AF + FG$$
$$18 = 4 + FG$$
$$FG = 14cm$$

6) FB

$$AB = AF + FB$$
$$9 = 4 + FB$$
$$FB = 9 - 4$$
$$FB = 5cm$$

7) **عجلة دوارة:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. ما قطر هذه العجلة الدوارة؟ وما محيطها؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.

$$D = 2r$$
$$D = 2(44)$$
$$D = 88ft$$
$$C = \pi d$$
$$C = \pi(88) = 88 \times 3.14$$
$$C = 276.46ft$$

8) **بركة سباحة:** محيط بركة السباحة الدائرية في الشكل المجاور يساوي 56.5 ft تقريبًا، ما قطر هذه البركة؟ وما نصف قطرها؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

$C = \pi d$

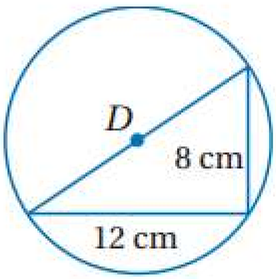
$56.5 = \pi d$

$d = 17.99ft$

$d = 2r$

$r = 8.99ft$

9) **إجابة قصيرة:** المثلث القائم الزاوية في الشكل المجاور مُحاط بالدائرة D، أوجد القيمة الدقيقة لمحيط $\odot D$.



$a^2 + b^2 = d^2$

$12^2 + 8^2 = d^2$

$d = \sqrt{208} = 4\sqrt{13} = 14.42cm$

طول القطر = 14.42 cm

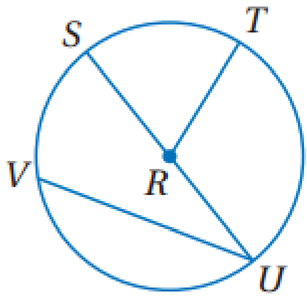
$C = \pi d$

محيط الدائرة= 45.3cm

تدرب وحل المسائل:

عُد إلى $\odot R$ في الشكل المجاور؛ للإجابة عن الأسئلة الآتية.

10) ما مركز الدائرة؟



مركز الدائرة : R

11) عيّن وترًا يكون قطرًا.

وتر يكون قطر: SU

12) هل $\overline{VU}$ نصف قطر؟ برِّر إجابتك.

ليس نصف قطر لان نصف القطر أحد طرفيه عند مركز الدائرة والطرف الآخر على الدائرة

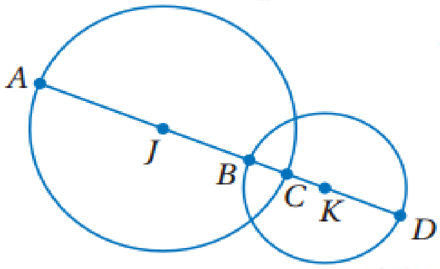
13) إذا كان $SU = 16.2\,\text{cm}$، فأوجد RT؟

$$d = 2\,r$$

$$16.2 = 2\,r$$

$$r = 8.1\ \text{cm}$$

إذا كان نصف قطر $\odot J$ يساوي 10 وحداتٍ، ونصف قطر $\odot K$ يساوي 8 وحداتٍ و BC يساوي 5.4 وحداتٍ، فأوجد كل قياسٍ ممّا يأتي:



14) CK

$KB = CK + CB$

$8 = CK + 5.4$

$CK = 2.6$

15) AB

$AC = AB + BC$

$20 = AB + 5.4$

$AB = 14.6$

16) JK

$JK = JC + CK$

$JK = 10 + 2.6$

$JK = 12.6$

17) AD

$AD = AB + BD$

$AD = 14.6 + 16$

$AD = 30.6$

18) **بيتزا:** أوجد نصف قطر قرص البيتزا ومحيطها في الشكل المجاور، مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

$$r = \frac{1}{2}d$$

$$r = \frac{14}{2}$$

$$r = 7\text{in}$$

$$C = \pi d$$

$$C = \pi(14)$$

$$C = 43.96\text{in}$$

19) **دراجات:** قطر إطار دراجة يساوي 26 in ، أوجد نصف قطر الإطار ومحيطه، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

$$r = \frac{1}{2}d$$

$$r = 13\text{in}$$

$$C = \pi d$$

$$C = \pi(26)$$

$$C = 81.68\text{in}$$

أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها إذا عُلِم محيطها في كلٍّ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

(20 $C = 18$ in

$$C = \pi d$$

$$d = \frac{18}{3.14} = 5.73\text{in}$$

$$r = \frac{1}{2}d$$

$$r = 2.86\text{in}$$

(21 $C = 124$ ft

$$C = 2\pi r$$

$$124 = 2\pi r$$

$$r = \frac{124}{2\pi} = 19.74\text{ft}$$

$$d = 2r$$

$$d = 39.49\text{ft}$$

(22 $C = 375.3$ cm

$$C = 2\pi r$$

$$375.3 = 2\pi r$$

$$r = \frac{124}{2\pi} = 59.76\text{cm}$$

$$d = 2r$$

$$d = 119.52\text{cm}$$

$C = 2608.25$ m (23

$$C = 2\pi r$$

$$2608.25 = 2\pi r$$

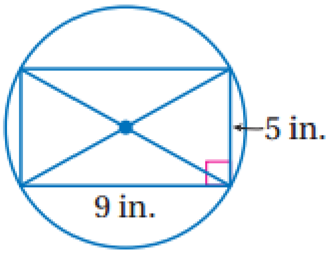
$$r = \frac{2608.25}{2\pi} = 415.3m$$

$$d = 2r$$

$$d = 830.65m$$

أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كلٍّ من الدوائر الآتية باستعمال المضلّع الذي تحيط به أو الذي يُحيط بها.

(24



لإيجاد طول القطر من فيثاغورث

$$a^2 + b^2 = d^2$$

$$5^2 + 9^2 = d^2$$

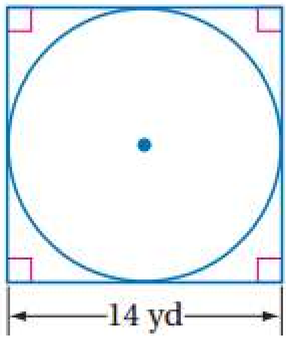
$$d = 10.29in$$

لإيجاد المحيط

$$C = \pi d$$

$$C = 10.3\pi in$$

(25

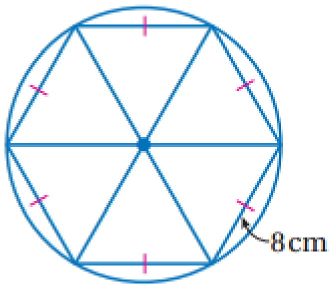


طول القطر = طول ضلع المربع المحيط بالدائرة = 14yd

$C = \pi d$

$C = 14\pi yd$

(26



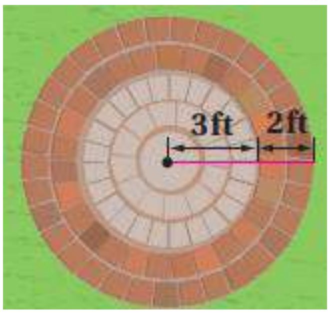
$C = 2r\pi$

$C = 2 \times 8\pi$

$C = 16\pi$

(27 **فناء:** أراد مصطفى أن يرصف فناءً، دائري الشكل، كما في الشكل المجاور.

a) ما المحيط التقريبي لهذا الفناء؟



$C = 2\pi r$

$C = 2\pi(5)$

$C = 31.4ft$

b) إذا غيّر مصطفى خطة إنشاء هذا الفناء، بحيث يصبح محيط الدائرة الداخلية 25 ft تقريبًا، فكم يكون نصف قطر الدائرة مقرّبًا إلى أقرب قدمٍ؟

$$C = 2\pi r$$

$$25 = 2\pi r$$

$$r = 3.98\text{ft}$$

في كلٍّ من الأسئلة 31–28، عُلِم نصف قطر أو قطر أو محيط دائرة. أوجد القياسين المجهولين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

28) $d = 8\frac{1}{2}\text{ in}, r = \underline{?}, C = \underline{?}$

$$C = \pi d$$

$$C = 8\frac{1}{2}\pi$$

$$C = 26.69\text{in}$$

$$r = \frac{1}{2}d$$

$$r = \frac{8.5}{2}$$

$$r = 4.25$$

29) $r = 11\frac{2}{5}\text{ ft}, d = \underline{?}, C = \underline{?}$

$$C = 2\pi r$$

$$C = 2\pi \times 11\frac{2}{5}$$

$$C = 71.6\text{in}$$

$$d = 2r$$

$$d = 2 \times 11\frac{2}{5}$$

$$d = 22.8$$

$C = 35x\,\text{cm}, d = \underline{\ ?\ }, r = \underline{\ ?\ }$ (30

$C = 2\pi r$

$35x = 2\pi \times r$

$r = 5.57x$

$d = 2r$

$d = 11.14$

$r = \frac{x}{8}, d = \underline{\ ?\ }, C = \underline{\ ?\ }$ (31

c = 0.79x ، d= 0.25 x

$C = 2\pi r$

$C = 2\pi \times \frac{x}{8}$

$r = \frac{1}{4}\pi x$

$d = 2r$

$d = 2 \times \frac{1}{4}\pi x$

$d = \frac{1}{2}\pi x$

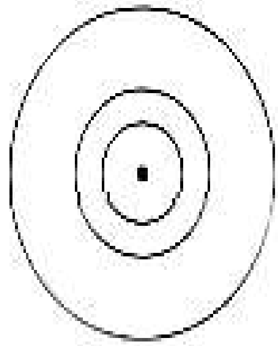
32) **حدائق:** يُراد إنشاء رصيف عرضه 4 m حول بركة دائرية الشكل محيطها 68 m، فما محيط الرصيف؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

$C = 2\pi r$

C = 93.13 ft

(33 **تمثيلات متعدّدة:** في هذا السؤال ستستكشف أثر تغيير الأبعاد في الدائرة.

a) **هندسيّا:** مستعملاً الفرجار ارسم ثلاث دوائر متحدة المركز، بحيث تكون نسبة طول نصف قطر كل دائرة إلى طول نصف قطر الدائرة الأكبر منها تساوي $\frac{1}{2}$



b) **جدوليّا:** احسب محيط كل من الدوائر السابقة مقربًا إلى أقرب جزء من مئة، وسجّل في جدول نصف القطر والمحيط لكلٍّ منها.

الدائرة	نصف القطر	المحيط
الأولي	0.5	3.14
الثانية	1	6.28
الثالثة	2	12.57

c) **لفظيًّا:** فسّر لماذا تكون الدوائر الثلاث متشابهة هندسيًّا.

لأن لها الشكل الدائري نفسه، إلا أنها تختلف في المقاس.

d) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول النسبة بين محيطَي الدائرتين، عندما تكون النسبة بين نصفَي قطريهما تساوي 2 .

النسبة بين محيطي الدائرتين هو 2 أيضا

e) **تحليليًّا:** معامل التشابه من $\odot A$ إلى $\odot B$ يساوي $\frac{b}{a}$. اكتب معادلة تربط محيط $\odot A$ (C_A) بمحيط $\odot B$ (C_B)

النسبة بين محيطي الدائرتين تساوي نفس نسبة التمدد $C_B = \frac{b}{a}(C_A)$

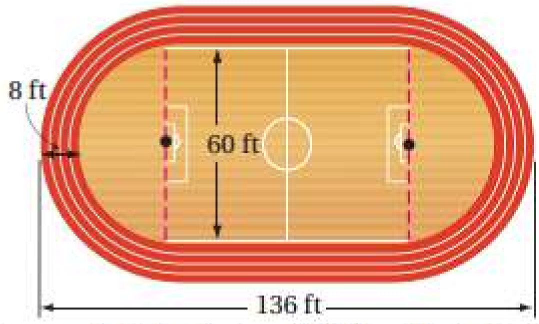
f) **عدديًا:** إذا كان معامل التشابه من $\odot A$ إلى $\odot B$ يساوي $\frac{1}{3}$، ومحيط $\odot A$ يساوي 12 in، فما محيط $\odot B$؟

$$\frac{1}{3} = \frac{12}{\odot B}$$

$$\odot B = \frac{12 \times 3}{1} = 36in$$

محيط الدائرة b = 36 in

34) **رياضة:** يظهر في الصورة أدناه مضمار جري.



a) كم تزيد المسافة التي يقطعها شخص يركض دورة واحدة على المسار الخارجي للمضمار، عن المسافة التي يقطعها شخص يركض دورة واحدة على المسار الداخلي؟

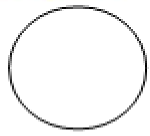
المسافة = 50.27 ft

b) كم دورة تقريبًا يجب أن يركض شخص على المسار الخارجي للمضمار؛ ليقطع ميلًا واحدًا؟

عدد الدورات = 15دورة

مسائل مهارات التفكير العليا:

35) **مسألة مفتوحة :** ارسم دائرة يكون محيطها بين 8 cm و 12 cm، ما نصف قطر هذه الدائرة؟



$$C = 2\pi r$$

$$10 = 2\pi r$$

$$r = \frac{10}{2\pi}$$

$$r = 1.59$$

نصف قطرها = 1.59سم

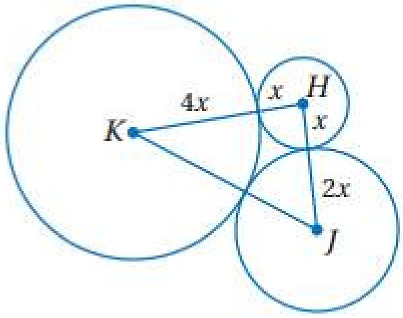
36) **اكتشف الخطأ :** رسم كلّ من حمود وسلمان شكلًا يُمثّل مجموعة النقاط التي تبعد 4 cm عن النقطة J، فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ برِّر إجابتك.

كلاهما إجابته صحيحة

مجموعة النقاط التي عينها سلمان تبعد 4 cm عن j ولكنها واقعه في مستوى ثنائي الأبعاد

وأما النقاط التي عينها خليل فهي تبعد 4 cm عن j ولكنها في فضاء ثلاثي الأبعاد

37) **تحدٍّ:** مجموع محيطات الدوائر H, J, K التي تظهر في الشكل المجاور يساوي 56π. أوجد KJ

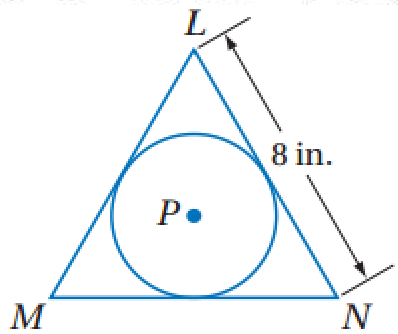


$$C_K + C_H + C_J = 56\pi$$
$$8x\pi + 2x\pi + 4x\pi = 56\pi$$
$$14\pi(x) = 56\pi$$
$$x = 4$$
$$KJ = 4x + 2x$$
$$KJ = 24$$

38) **تبرير:** هل المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة داخلها أقل من نصف قطرها دائمًا أو أحيانًا أو لا تكون كذلك أبدًا؟ فسّر إجابتك.

دائما المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة داخلها أصغر من نصف القطر
لأن نصف القطر أكبر مسافة من مركز الدائرة لأي نقطة علي مستوى الدائرة

39) **تحدٍّ:** $\odot P$ مُحاطة بالمثلث المتطابق الأضلاع LMN، كما في الشكل أدناه، ما محيط $\odot P$ مقربًا إجابتك إلى أقرب جزءٍ من عشرة؟



ارسم متوسطات المثلث وارمز للمتوسط بالرمز L
وباستخدام فيثاغورث:

$$(L)^2 = 8^2 - 4^2 = 48$$

$$L = \sqrt{48}$$

$$r = \frac{1}{3}L$$

$$r = 2.3$$

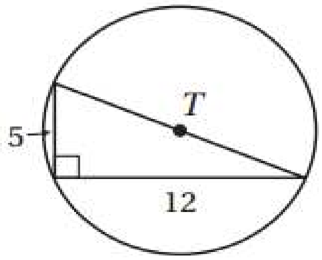
المحيط $= 2\pi r = 2.3 \times 3.14 \times 2 = 14.5$

$$\frac{8\pi}{\sqrt{3}} = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$$

40) **اكتب:** بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الدوائر المتطابقة والدوائر المتحدة في المركز.

من حيث	الدوائر المتطابقة	الدوائر متحدة المركز
نقطة المركز	لكل دائرة مركز	لها مركز واحد
نصف القطر	متساوي	مختلف
المحيط	متساوي	مختلف

41) ما محيط $\odot T$؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عُشر.



لإيجاد طول القطر من فيثاغورث

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$5^2 + 12^2 = c^2$$

$$c = 13$$

لإيجاد المحيط

$$C = \pi d$$
$$C = 13 \times 3.14$$
$$C = 40.82cm$$

42) **جبر:** أحاط إبراهيم حديقته الدائرية الشكل بسياج. إذا كان طول السياج 50 m فما نصف قطر الحديقة؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عددٍ صحيحٍ.

A 10	C 8
B 9	D 7

طول السياج = محيطه = 50m

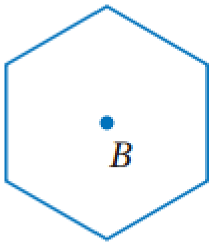
$$C = 2\pi r$$
$$50 = 2 \times 3.14 \times r$$
$$r = 7.96 \approx 8$$

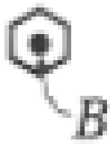
نصف قطر الحديقة = C : 8

مراجعة تراكمية

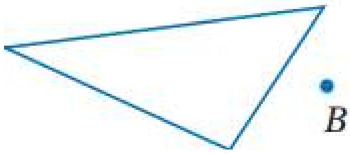
استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدّد مركزه B ومعامله k المحدّد في كل من الأسئلة الآتية.

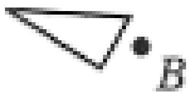
(43 $k = \frac{1}{5}$



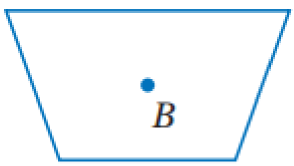


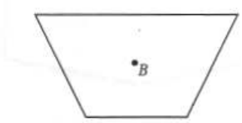
(44 $k = \frac{2}{5}$



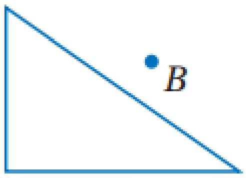


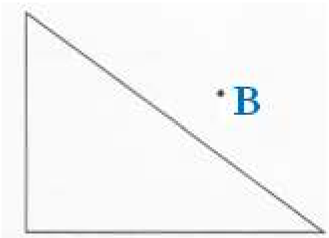
(45 $k = 2$





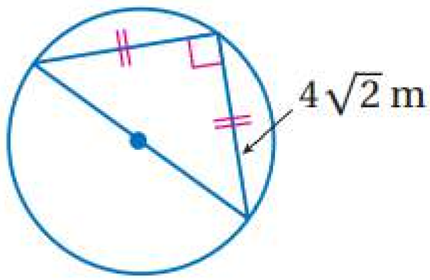
$k = 3$ (46





أوجد القيمة الدقيقة لمحيط كل دائرة ممّا يأتي: (الدرس 1-8)

(47



لإيجاد طول القطر من فيثاغورث

$$a^2 + b^2 = d^2$$

$$\left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 = d^2$$

$$d = 8$$

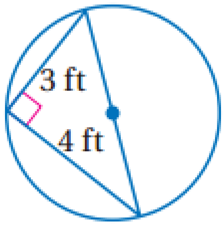
لإيجاد المحيط

$$C = \pi d$$

$$C = 3.14 \times 8$$

$$C = 25.1$$

48)



لإيجاد طول القطر من فيثاغورث

$$a^2 + b^2 = d^2$$

$$C = 5ft$$

لإيجاد المحيط

$$C = \pi d$$

$$C = 3.14 \times 5$$

$$C = 15.7$$

حدّد ما إذا كان يبدو لصورة كلٍّ من الأشكال الآتية تماثل دوراني أم لا؟ وإذا كان كذلك فانسخ الشكل في دفترك، وحدّد عليه مركز التماثل، واذكر رتبته ومقداره.

49)

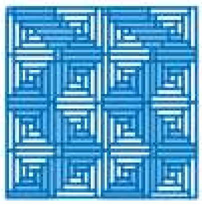
ليس له تماثل دوراني

50)

نعم له تماثل دوراني

مقداره = 4.90

51)



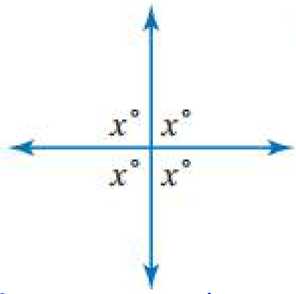
ليس له تماثل دوراني

(52

ليس له تماثل دوراني

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

(53



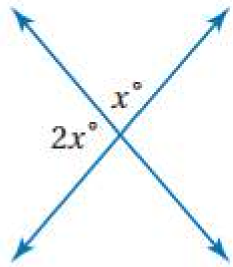
مجموع الأربع زوايا = 360° — مجموع الزوايا المتجمعة حول نقطة

$x + x + x + x = 360$ — اجمع

$4x = 360$ — اقسم على 4

$x = 90^\circ$

(54

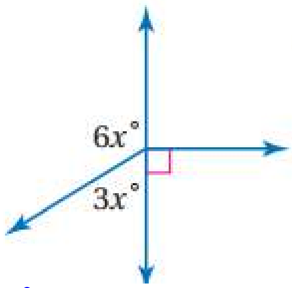


مجموع الزاويتين = 180° — زاوية مستقيمة

$2x + x = 180$ — اجمع

$x = 60^\circ$ — اقسم

(55



مجموع الزاويتين = 180°

$3x + 6x = 180$

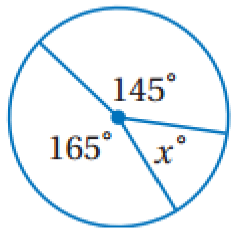
$9x = 180$

$x = 20^\circ$

8-2 قياس الزوايا والأقواس

تحقق

(1A

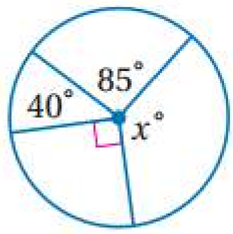


$$360^\circ = \text{مجموع الزوايا المركزية}$$

$$360^\circ = x + 165 + 145$$

$$x = 50$$

(1B

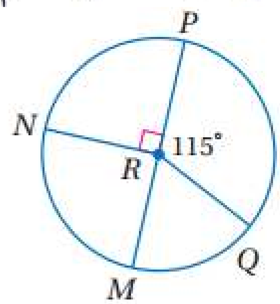


$$360^\circ = \text{مجموع الزوايا المركزية}$$

$$360^\circ = x + 86 + 40 + 90$$

$$x = 145^\circ$$

$\overline{PM}$ قطر في $\odot R$، حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأقواس الآتية قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.



2A) $\widehat{MQ}$

$\angle MRQ = \overset{\frown}{MQ}$

$\overset{\frown}{MQ}$ قوس أصغر وقياسه $= 180^\circ - 115 = 65^\circ$

2B) $\widehat{MNP}$

$\overset{\frown}{MNP}$ نصف دائرة، إذا قياسه 180°

2C) $\widehat{MNQ}$

$\overset{\frown}{MNQ}$ قوس أكبر مشترك مع القوس $\overset{\frown}{MQ}$ في نقطتين

قياسه $= 360^\circ - 65 = 295^\circ$

3A) $m\widehat{EF}$

$m\overset{\frown}{EF}$ هو قوس أصغر في الدائرة

ويمثل Ä4 من الدائرة

$\angle ESF = 0.14 \times 360^\circ = 50.4^\circ$

3B) $m\widehat{FA}$

$m\overset{\frown}{FA}$ هو قوس أصغر في الدائرة

ويمثل 14% من الدائرة

$\angle FSA = 0.14 \times 360^\circ = 50.4^\circ$

(4A $m\widehat{CE}$

$m\widehat{CE}$ يساوي مجموع القوسين المتجاورين

$$\angle CDE = m\angle DFE + m\angle CFD$$

$$\angle CDE = 90 + (90 - 63) = 117^\circ$$

(4B $m\widehat{ABD}$

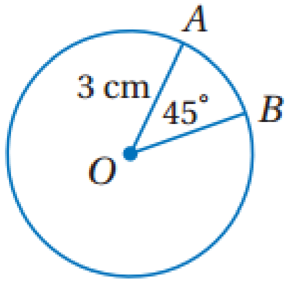
$m\widehat{ABD}$ يساوي مجموع ثلاث أقواس متجاورة

$$\angle ABD = m\angle AFB + m\angle BFC + m\angle CFD$$

$$\angle ABD = 27 + 180 = 207^\circ$$

أوجد طول $\widehat{AB}$ في كلٍّ ممّا يأتي مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من مئة:

(5A

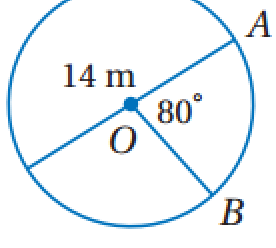


صيغة طول القوس $$L = \frac{X^\circ}{360^\circ}.2\pi r$$

$$L = \frac{45^\circ}{360^\circ}.2\pi \times 3$$

$$L = 2.35\text{cm}$$

(5B

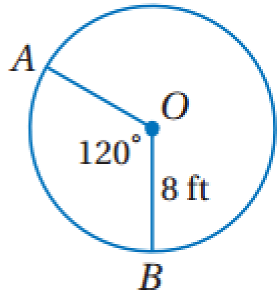


صيغة طول القوس $$L = \frac{X^\circ}{360^\circ}.2\pi r$$

$$L = \frac{80^\circ}{360^\circ}.2\pi \times 7$$

$$L = 9.8\text{cm}$$

(5C



$$L = \frac{X^\circ}{360^\circ} . 2\pi r$$ صيغة طول القوس

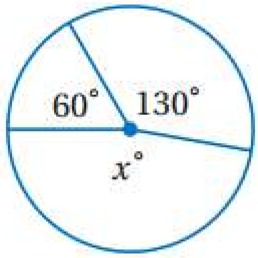
$$L = \frac{120^\circ}{360^\circ} . 2\pi \times 8$$

$$L = 16.74 ft$$

تأكد:

أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين:

(1

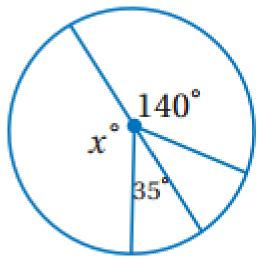


مجموع النقاط حول مركز الدائرة $= 360^\circ$

$$x = 360 - (130 + 60)$$

$$x = 170^\circ$$

(2

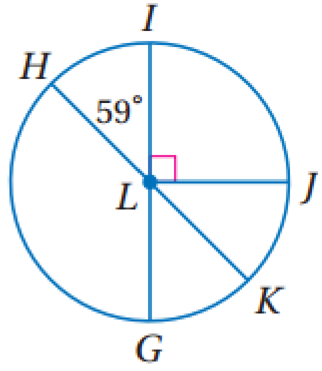


مجموع النقاط حول مركز الدائرة $= 360^\circ$

$$x = 360 - (140 + 35 + 35)$$

$$x = 150^\circ$$

$\overline{IG}$, $\overline{HK}$ قطران في $\odot L$، حدّد ما إذا كان كلّ قوس فيما يأتي قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.



3) $\widehat{IHJ}$

HHJ قوس نصف دائرة، وقياسة = 180°

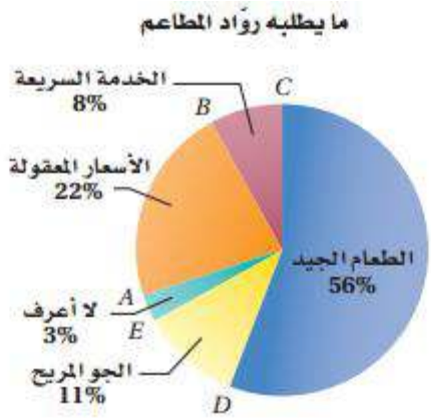
4) $\widehat{HI}$

HJ قوس أصغر وقياسه 59°

5) $\widehat{HGK}$

HGK قوس نصف دائرة وقياسه = 180°

6) **مطاعم:** يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاع حول ما يطلبه روّاد المطاعم.



يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاع حول ما يطلبه رواد المطاعم

a) أوجد $m\widehat{AB}$.

m AB يمثل Ä22 من الدائرة

وقياسه $= 0.22 \times 360 = 79.2^{\circ}$

b) أوجد $m\widehat{BC}$.

$m\widehat{BC}$ يمثل 8% من الدائرة

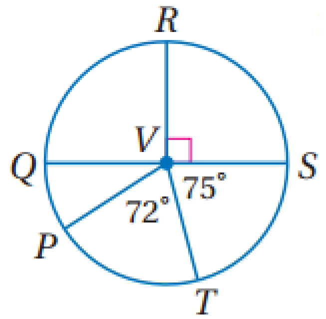
وقياسه $= 360 \times 0.08 = 28.8^\circ$

c) صف نوع قوس قطاع الطعام الجيد.

قوس قطاع الطعام الجيد هو قوس أكبر

قياسه $= 360 \times 0.56 = 201.6^\circ$

$\overline{QS}$ قطر في $\odot V$، أوجد كلًّا من القياسات الآتية:



7) $m\widehat{STP}$

$m\widehat{STP}$ يساوي الزاوية المركزيه المقابلة له

$\angle STP = \angle TVS + \angle PVT$

$m\widehat{STP} = 147^\circ$

8) $m\widehat{QRT}$

$m\widehat{QRT} = \angle SVT + \angle QVS$

$180 + 75 = 255^\circ$

9) $m\widehat{PQR}$

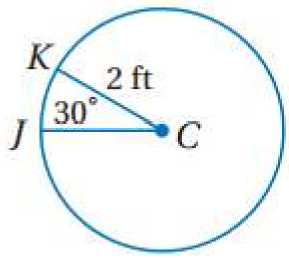
$m\widehat{PQR} = \angle PVQ + \angle QVR$

$m\widehat{PQR} = 33^\circ + 90^\circ$

$m\widehat{PQR} = 123^\circ$

أوجد طول $\widehat{JK}$ مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(10

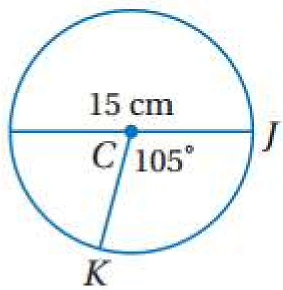


$$L = \frac{X^\circ}{360^\circ}.2\pi r$$ صيغة طول القوس

$$L = \frac{30}{360^\circ}.2\pi \times 2$$

$$L = 1.04\text{ft}$$

(11



$$L = \frac{X^\circ}{360^\circ}.2\pi r$$ صيغة طول القوس

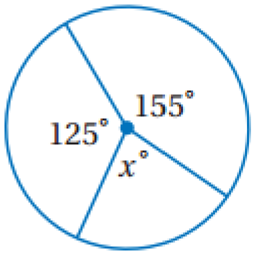
$$L = \frac{105}{360^\circ}.2\pi \times \frac{15}{2}$$

$$L = 13.73\text{cm}$$

تدرب وحل المسائل:

أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي:

(12



مجموع قياسات الزوايا المركزية = 360°

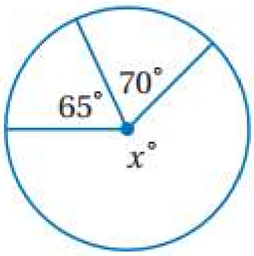
$$x + 155 + 125 = 360$$

$$x = 360 - (125 + 155)$$

$$x = 360 - 280$$

$$x = 80$$

(13



مجموع قياسات الزوايا المركزية = 360°

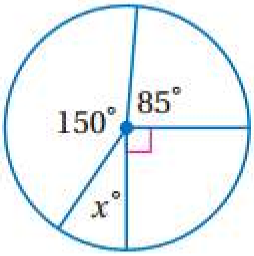
$$x + 65 + 70 = 360$$

$$x = 360 - (65 + 70)$$

$$x = 360 - 135$$

$$x = 225^{\circ}$$

(14



مجموع قياسات الزوايا المركزية $= 360^{\circ}$

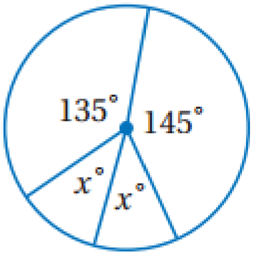
$$x + 150 + 85 + 90 = 360$$

$$x = 360 - (150 + 85 + 90)$$

$$x = 360 - 325$$

$$x = 35$$

(15



مجموع قياسات الزوايا المركزية $= 360^{\circ}$

$$x + x + 145 + 135 = 360$$

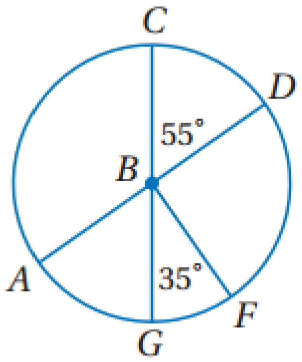
$$2x = 360 - (145 + 135)$$

$$2x = 360 - 280$$

$$2x = 80$$

$$x = 40^{\circ}$$

$\overline{CG}$, $\overline{AD}$ قطران في $\odot B$، حدّد ما إذا كان كلّ قوسٍ ممّا يأتي قوسًا أكبر أو أصغر أو نصف دائرة، ثم أوجد قياسه.



16) $\widehat{CD}$

$m\,\widehat{CD}$ قوس أصغر قياسه = قياس الزاوية المقابلة = 55°

17) $\widehat{AC}$

$m\,\widehat{AC}$ قوس أصغر وقياسه = $m\angle ABC = 125^\circ$

$m\angle ABC = 180 - 55 = 125^\circ$

18) $\widehat{CG}$

$m\,\widehat{CG}$ نصف دائرة وقياسها = 180°

19) $\widehat{CGD}$

$m\,\widehat{CGD}$ قوس أكبر وقياسه $= 360^\circ - 55^\circ = 305^\circ$

20) $\widehat{GCF}$

$m\,\widehat{GCF}$ قوس أكبر وقياسه $= 360^\circ - 35^\circ = 325^\circ$

21) $\widehat{ACF}$

$m\,\widehat{ACF}$ قوس أكبر وقياسه $= 360^\circ - \left(35^\circ + 55^\circ\right) = 270^\circ$

22) **تسوّق:** يعرض الشكل المجاور نتائج استطلاعٍ حول المكان المفضل لشراء الملابس، شمل مجموعة من الشباب.

أفضل الأماكن لشراء الملابس

a) ما قياس القوس المقابل لفئة التسوق في كلٍّ من المجمعات التجارية والمحلات المتخصصة؟

قياس قوس المجمعات التجارية = $360 \times 0.76 = 273.6$

قياس قوس المحلات المتخصصة = $360 \times 0.76 = 14.4$

b) صِفْ نوع القوس المقابل لفئة المجمعات التجارية وفئة الأسواق الشعبية.

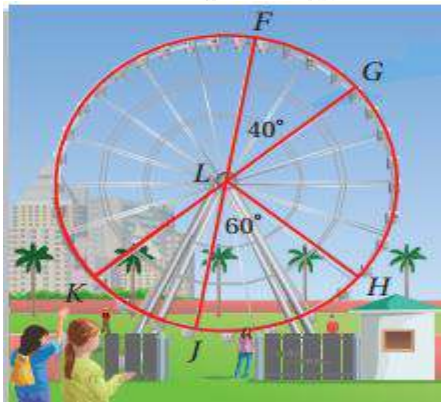
القوس المقابل للمجمعات التجارية قوس أكير

القوس المقابل للأسواق الشعبية هو قوس أصغر

c) هل توجد أقواس متطابقة في هذا الشكل؟ وضّح إجابتك.

نعم، القوسين المقابلين للفئتين عبر الانترنت وغير هذه الأماكن لهما القياس نفسه؛ لأن كل من هاتين الفئتين لهما نفس النسبة المئوية 9 % نفسها في الدائرة

تسلية: استعمل العجلة الدوارة في الشكل المجاور، لإيجاد كلٍّ من القياسات الآتية:



23) $m\widehat{FG}$

$m\widehat{FG}$ قوس أصغر = قياس الزاوية المركزية المقابلة له $= 40^\circ$

24) $m\widehat{JH}$

$m\widehat{JH}$ قوس أصغر= قياس الزاوية المركزية المقابلة له $= 60^\circ$

25) $m\widehat{JKF}$

$m\widehat{JKF}$ هو نصف دائرة قياسه $= 180^\circ$

26) $m\widehat{JFH}$

$m\widehat{JFH}$ هو قوس أكبر قياسه $= 360 - 60 = 300^\circ$

27) $m\widehat{GHF}$

$m\widehat{GHF}$ هو قوس أكبر قياسه $= 360 - 40 = 320^\circ$

28) $m\widehat{GHK}$

$m\widehat{GHK}$ هو نصف دائرة قياسه $= 180^\circ$

29) $m\widehat{HK}$

$m\widehat{HK}$ هوقوس أصغر= قياس الزاوية المركزية المقابلة له

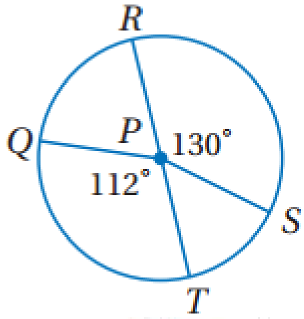
$= 40 + 60 = 100^\circ$

30) $m\widehat{JKG}$

$m\widehat{JKG}$ هو قوس أكبر قياسه $= 360 - (\angle GLH + \angle JLH)$

$360 - (80 + 60) = 220^\circ$

$\overline{RT}$ قطر في $\odot P$ ، أوجد طول كل قوس ممّا يأتي مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.



31) $\widehat{RS}$ ، إذا كان نصف القطر يساوي $2\,\text{in}$.

$$L = \frac{X^\circ}{360^\circ} . 2\pi r$$

$$L = \frac{130}{360^\circ} . 2\pi \times 2$$

$$L = 4.54\text{in}$$

32) $\widehat{QT}$ ، إذا كان القطر يساوي $9\,\text{cm}$.

$$L = \frac{X^\circ}{360^\circ} . 2\pi r$$

$$L = \frac{112}{360^\circ} . 2\pi \times \frac{9}{2}$$

$$L = 8.79\text{cm}$$

33) $\widehat{QR}$ ، إذا كان $PS = 4\text{ mm}$

$$L = \frac{X^\circ}{360^\circ} . 2\pi r$$

$$L = \frac{180 - 112}{360^\circ} . 2\pi \times 4$$

$$L = 4.74\text{mm}$$

34) $\overset{\frown}{QRS}$ ، إذا كان $RT = 11$ ft .

$$L = \frac{X^\circ}{360^\circ} . 2\pi r$$

$$L = \frac{360 - (112 + 50)}{360^\circ} . 2\pi \times \frac{11}{2}$$

$$L = 19.01 ft$$

ساعات: يعرض الشكل المجاور الساعة التي وردت في فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس.

35) ما قياس الزاوية المركزية الصغرى المحصورة بين عقربَي الساعات والدقائق؟

فسّر الطريقة التي توصَّلت بها إلى إجابتك.

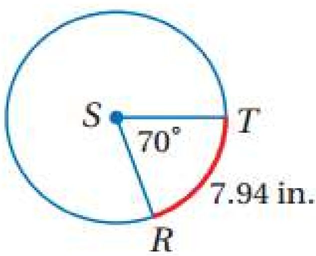
قياس الزاوية بين كل رقمين في الساعة تساوي 30° ؛ إذا قياس الزاوية المركزية المحصورة بين العقربين $= 60^\circ$

36) إذا تضاعف قطر الدائرة، فما تأثير ذلك في طول القوس الأصغر بين الرقم 1 والرقم 12؟

يتضاعف طول القوس

أوجد قياس كلّ ممّا يأتي مقرّبًا الأطوال إلى أقرب جزء من مئة وقياسات الأقواس إلى أقرب درجة.

37) محيط $\odot S$



$$L = \frac{X^\circ}{360^\circ} . 2\pi r$$

$$7.94 = \frac{70}{360^\circ} . 2\pi \times r$$

$$r = 6.50$$

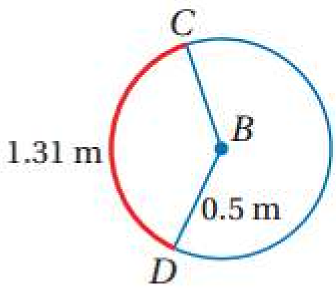
محيط الدائرة S =

$$C = 2\pi r$$

$$C = 2\pi \times 6.50$$

$$C = 40.82$$

38) $m\,\overset{\frown}{CD}$



$$L = \frac{X^\circ}{360^\circ} . 2\pi r$$

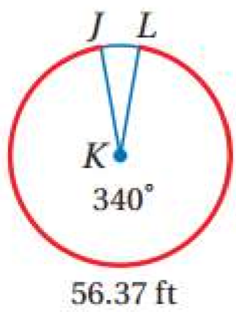
$$1.31 = \frac{X^\circ}{360^\circ} . 2\pi \times 0.5$$

$$1.31 \times 360 = 3.14X$$

$$X = 150.2^\circ$$

طول $m\,\overset{\frown}{CD} = 150^\circ$ لأنه يساوي الزاوية المركزية المقابلة له وهي $\angle CBD$

39) نصف قطر $\odot K$

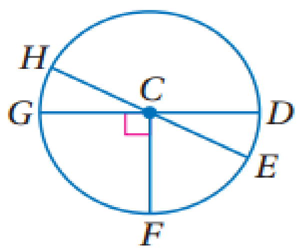


$$L = \frac{X^{\circ}}{360^{\circ}} . 2\pi r$$

$$56.37 = \frac{340}{360^{\circ}} . 2\pi \times r$$

$$r = 9.5ft$$

جبر: في $\odot C$، إذا كان $m\angle HCD = (6x + 28)^{\circ}$ ، $m\angle HCG = (2x)^{\circ}$، فأوجد قياس كلٍّ ممّا يأتي:



40) $\widehat{EF}$

$$\angle HCD + \angle HCG = 180^{\circ}$$

$$2x + 6x + 28 = 180$$

$$8x + 28 = 180$$

$$8x = 180 - 28$$

$$x = 19$$

$$\angle HCG = 2x = 38$$

$\angle DCE = \angle HCG = 38^{\circ}$ بالتبادل بالرأس

$$\angle FCE = 90 - 38 = 52^{\circ}$$

$\widehat{EF}$ = قياسالزاوية المركزية المقابله له = 52°

41) $\widehat{HD}$

$\overset{\frown}{HD}$ قياسه = قياس الزاوية المركزية المقابلة له وهي $\angle HCD$

$$\angle HCD = 6x + 28 = 6 \times 19 + 28$$

$$\angle HCD = 142^{\circ}$$

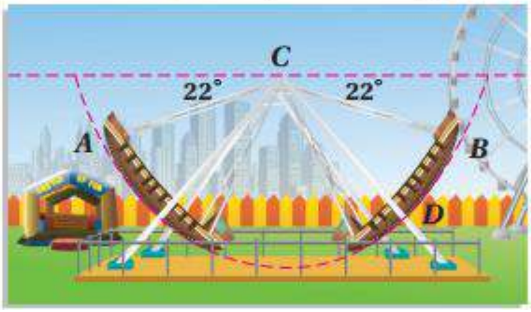
42) $\widehat{HGF}$

$$\angle GCF + \angle HCG = \overset{\frown}{HGF}$$

$$90 + 38 = \overset{\frown}{HGF}$$

$$128^{\circ} = \overset{\frown}{HGF}$$

43) **ألعاب:** يأخذ مسار لعبة السفينة في مدينة ألعاب شكل نصف دائرة كما في الشكل المجاور.



a) أوجد $m\widehat{AB}$

$$\overset{\frown}{AB} = 180 - (22 + 22)$$

$$\overset{\frown}{AB} = 136^{\circ}$$

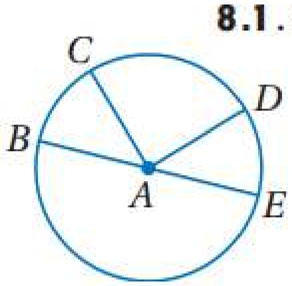
b) إذا كان $CD = 62$ ft، فما طول $\widehat{AB}$؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

$$L = \frac{X^{\circ}}{360^{\circ}} . 2\pi r$$

$$L = \frac{136}{360^{\circ}} . 2\pi \times 62$$

$$r = 147.17 ft$$

44) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية **8.1**.



المعطيات: $\angle BAC \cong \angle DAE$

المطلوب: $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{DE}$

$\angle BAC \cong \angle DAE$ (معطيات)

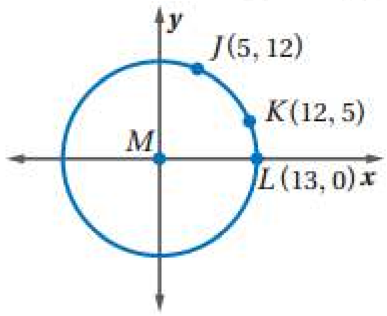
$m\angle BAC = m\angle DAE$ (تعريف تطابق الزوايا)

$m\angle BAC = m\overset{\frown}{BC}$, $m\angle DAE = m\overset{\frown}{DE}$ (تعريف قياس القوس)

$m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{DE}$ (بالتعويض)

$\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{DE}$ (تعريف تطابق الأقواس)

45) **هندسة إحداثية:** تُمثّل النقطة M نقطة الأصل في الشكل المجاور.
أوجد كلًّا مما يأتي في $\odot M$، مقرّبًا الأطوال إلى أقرب جزء من مئة،
وقياسات الأقواس إلى أقرب عُشر درجة.



a) $m\overset{\frown}{JL}$

قياسه $m\overset{\frown}{JL} = 67.4^\circ$

b) $m\overset{\frown}{KL}$

$m\overset{\frown}{KL} = 22.6^\circ$

c) $m\overset{\frown}{JK}$

قياسه $= 44.8^\circ$

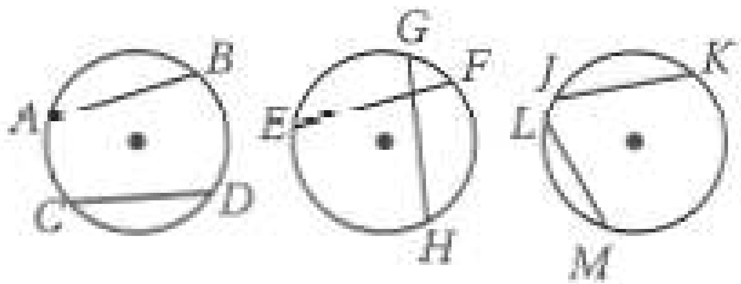
d) طول $\overset{\frown}{JL}$

طوله $= 15.29$ وحدة

e) طول $\widehat{JK}$
طوله = 10.16وحدة

46) تمثيلات متعددة: في هذا السؤال ستستقصي العلاقة بين الأقواس والأوتار.

a) **هندسيًا:** ارسم دائرة فيها وتران متطابقان مثل $\overline{AB}$, $\overline{CD}$، حدّد مركز هذه الدائرة. كرّر العملية مع دائرتين أخريين ووترين متطابقين في كلٍّ منهما، على أن تكون أطوال الأوتار في الدوائر الثلاث مختلفة.



b) **حسيًا:** قُصّ ثلاث قطع من الورق الشفّاف أكبر من كلٍّ من الدوائر الثلاث، ثم ثبّت ورقة شفافة من منتصفها مستعملا دبّوسًا عند مركز كل دائرة، ارسم القوس المقابل لأحد الوترين في كل دائرة على الورقة الشفافة، ثم قم بتدوير قطعة الورق الشفّاف حول الدبّوس؛ لمقارنة طول القوس الذي رسمته بطول القوس المقابل للوتر الآخر.

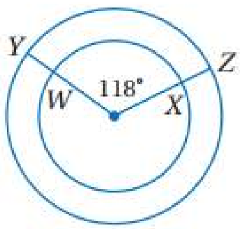
متروك للطالب

c) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول العلاقة بين الأقواس التي تقابل أوتارًا متطابقةً في الدائرة.

عندما يكون الوتران في الدائرة متطابقين فإن القوسين المحدودين بهاتين الوترين يكونان متطابقين

مسائل مهارات التفكير العليا:

47) **اكتشف الخطأ:** يقول إبراهيم: إن $\widehat{WX}$, $\widehat{YZ}$ متطابقان؛ لأن زاويتَيهما المركزيتين متطابقتان، بينما يقول سالم: إنهما غير متطابقين. هل أيٌّ منهما على صواب؟ برِّر إجابتك.



سالم على صواب، لأن الدائرتين غير متطابقتين لأن نصفي قطريهما غير متطابقان فإن القوسين غير متطابقين

تبرير: حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارات الآتية صحيحة دائمًا أو أحياناً أو ليست صحيحة أبدًا. برّر إجابتك.

48) قياس القوس الأصغر أقل من $180°$.

صحيحة دائما؛ لأن تعريف القوس الأصغر هو القوس الذي قياسه أقل من $180°$

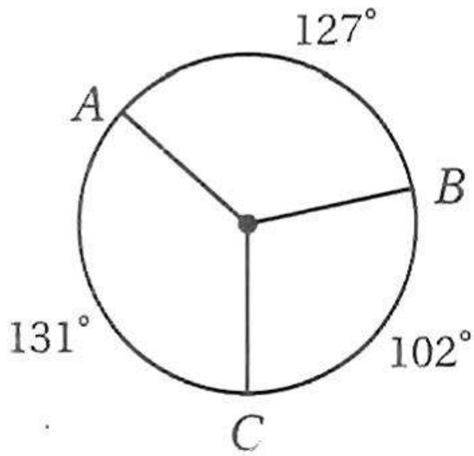
49) إذا كانت الزاوية المركزية منفرجة، فإن القوس المقابل لها قوس أكبر.

غير صحيحة أبدا؛ لأن الزاوية المنفرجة تحدد قوسا قياسه بين $90°$ ، $180°$

50) يعتمد مجموع قياسَي قوسين متجاورين في دائرةٍ، على قياس نصف قطر تلك الدائرة.

غير صحيحة أبدا؛ لأنه يعتمد مجموع قوسين متجاورين على قياس كل منهما

51) **مسألة مفتوحة:** ارسم دائرةً وعيّن عليها ثلاث نقاط، قدّر قياس الأقواس الثلاثة الناتجة وغير المتداخلة، ثم استعمل المنقلة لإيجاد قياس كلٍّ منها، واكتب على كل قوس قياسه.



52) **تحدٍّ:** تشير عقارب ساعة إلى 8:10، ما قياس الزاوية المقابلة للقوس الأصغر بين عقربَي الساعة؟

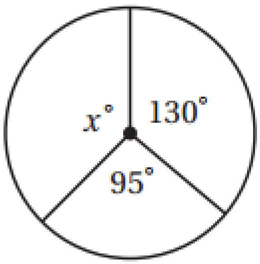
قياس الزاوية = 175°

53) **اكتب:** صِفِ الأنواع الثلاثة للأقواس في الدائرة، وطريقة إيجاد قياس كلٍّ منها.

القوس الأصغر؛ قياسه يساوي قياس الزاوية المركزية المناظرة له
القوس الأكبر؛ قياسه يساوي 360 مطروح منها قياس القوس الأصغر المشترك معه في الطرفان
نصف الدائرة وقياسه يساوي 180°

تدريب على اختبار

54) أوجد قيمة x؟

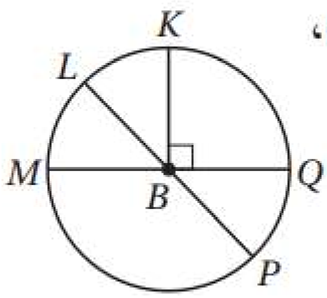


A 120	**C** 145
B 135	**D** 160

$$x = 360 - (130 + 95)$$

قيمة $x = 135^\circ$

55) في $\odot B$، إذا كان: $m\angle LBM = (3x)^\circ$، $m\angle LBQ = (4x + 61)^\circ$، فما قياس $\angle PBQ$؟



$$m\angle LBM + m\angle LBQ = 180$$

$$3x + 4x + 61 = 180$$

$$7x + 61 = 180$$

$$7x = 180 - 61$$

$$x = 17$$

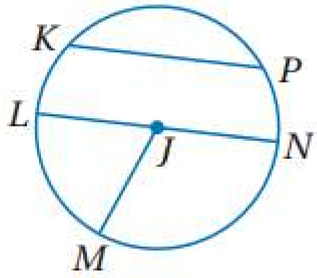
$$m\angle LBM = 3x$$

$$m\angle LBM = 3 \times 17 = 51^\circ$$

$$m\angle PBQ = 51^\circ$$

مراجعة تراكمية

عُد إلى $\odot J$ في الشكل المجاور للإجابة عن كلٍّ من الأسئلة الآتية: (الدرس 1-8)



56) سمِّ مركز الدائرة.

اسم الدائرة: j

57) عيِّن وترًا يكون قطرًا أيضًا.

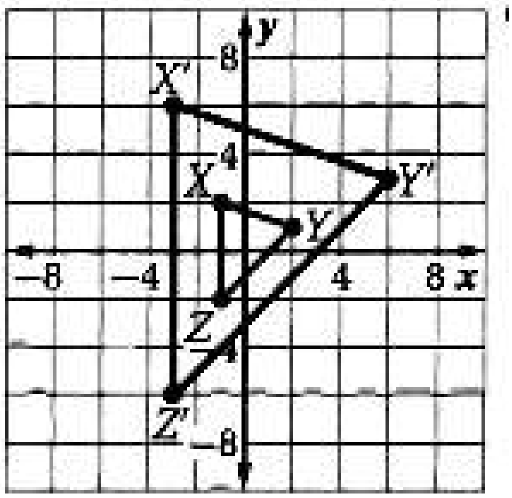
وترا يكون قطرا: LN

58) إذا كان $LN = 12.4$ ، فأوجد JM؟

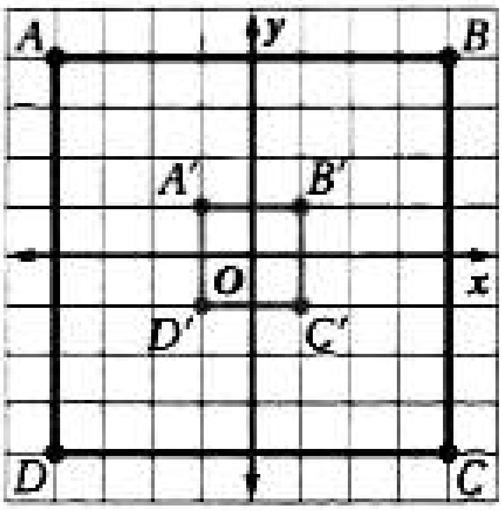
$$\mathbf{JM = LJ = JN = \frac{12.4}{2} = 6.2}$$

مثّل بيانيًّا المضلع المعطاه إحداثيات رؤوسه، ثم مثّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل ومعامله k المُعطى في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 6-7)

59) $X(-1, 2)$, $Y(2, 1)$, $Z(-1, -2)$ ؛ $k = 3$



$k = 0.25$ ؛ $A(-4, 4)$, $B(4, 4)$, $C(4, -4)$, $D(-4, -4)$ **(60**



استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كلٍ ممّا يأتي:

$24^2 + x^2 = 26^2$ **(61**

$x^2 = 26^2 - 24^2$

$x^2 = 26^2 - 24^2$

$x^2 = 100$

$x = \pm 10$

$x^2 + 5^2 = 13^2$ **(62**

$x^2 = 13^2 - 5^2$

$x^2 = 144$

$x = \sqrt{144}$

$x = \pm 12$

$30^2 + 35^2 = x^2$ **(63**

$$x^2 = 35^2 + 30^2$$

$$x = 5\sqrt{85}$$

$$x = \pm 46.09$$

8-3 الأقواس والأوتار

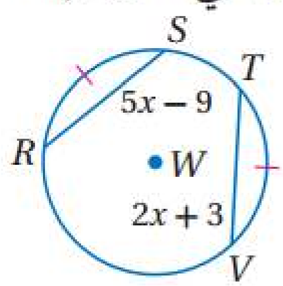
تحقق

1) إذا كان $m\widehat{AB} = 78^\circ$ في الشكل أعلاه، فأوجد $m\widehat{CD}$.

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ وتران متطابقان إذن القوسان المقابلان لهما $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ متطابقان

أي أن $m\widehat{CD} = m\widehat{AB} = 78^\circ$

2) في $\odot W$ ، إذا كان $\widehat{TV} \cong \widehat{RS}$، فأوجد RS.



بما أن القوسين متطابقين؛ إذا الوترين متطابقين

$RS = TV$ تعريف القطع المتطابقة

$2x + 3 = 5x - 9$ بالتعويض

$$2x + 3 = 5x - 9$$

$$5x - 2x = 3 + 9$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

$$RS = 5x - 9$$

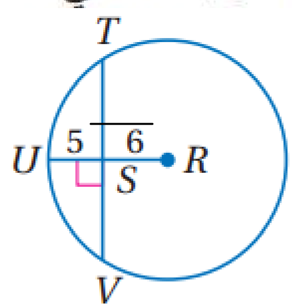
$$RS = 5 \times 4 - 9 = 11$$

3) أوجد PR في $\odot S$.

بما أن SQ عمودي وينصف الوتر PR بحسب النظرية 8.3

إذا $PR = 6 + 6 = 12$

4) أوجد TV في $\odot R$ مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.



ارسم RV أولا، بما أن RU = RV كأنصاف أقطار

$$RV = 6 + 5 = 11$$

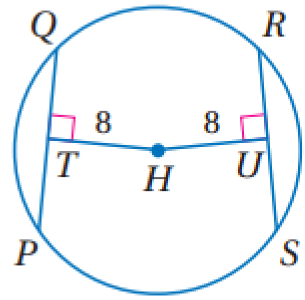
$$(VS)^2 + (SR)^2 = (VR)^2$$

$$VS = 9.22$$

بما أن UR عمودي وينصف الوتر TV بحسب النظرية 8.3

إذا $TV = 9.22 + 9.22 = 18.44$

5) في $\odot H$ إذا كان: $RS = 14$, $PQ = 3x - 4$ ، فأوجد قيمة x



بما أن HT = HU

إذا PQ = RS

$$3x - 4 = 14$$

$$3x = 14 + 4$$

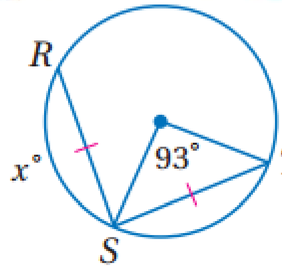
$$3x = 18$$

$$x = 6$$

تأكد:

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي:

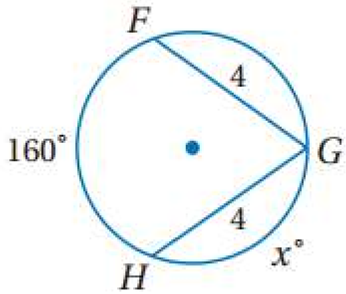
(1



بما أن $ST = SR$ وتران متطابقان إذا أطوال الأقواس المتقابلة متطابقة

$$x = 93^\circ$$

(2

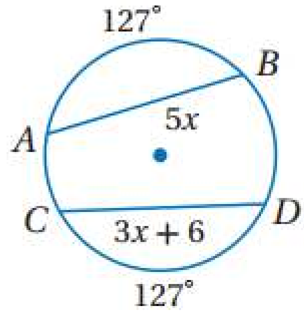


القوس الأكبر قياسه $360^\circ - 160^\circ = 200^\circ$

$$x = \frac{200}{2}$$

$$x = 100^\circ$$

(3



إذا كانت الأقواس المقابلة للأوتار متطابقة إذا الأوتار متطابقة

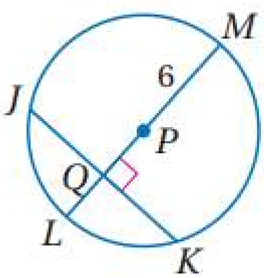
$$5x = 3x + 6$$

$$5x - 3x = 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

في $\odot P$ ، إذا كان: $m\widehat{JLK} = 134°$ ، $JK = 10$ ، فأوجد القياسات الآتية، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك.



(4 $m\widehat{JL}$

$$m\widehat{JLK} = 134$$

$$m\widehat{JL} = \frac{134}{2} = 67°$$

(5 PQ

ارسم $\overline{JP} = 6$ و $\overline{JQ} = \frac{10}{2} = 5$

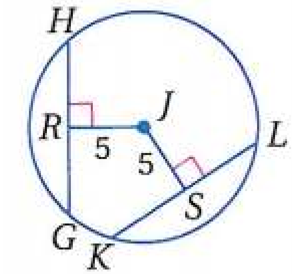
وبتطبيق نظرية فيثاغورث

$$(JP)^2 = (JQ)^2 + (QP)^2$$

$$(6)^2 = (5)^2 + (QP)^2$$

$$QP = \sqrt{11} = 3.3$$

6) في $\odot J$ ، إذا كان $GH = 9, KL = 4x + 1$ ، فأوجد قيمة x .



$\because$ **RJ = JS**

$\therefore$ **KL = GH**

4x + 1 = 9

4x = 9 − 1

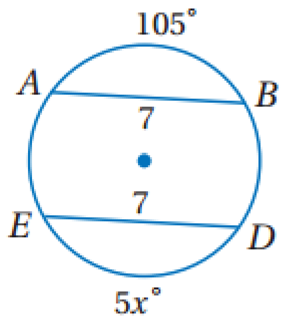
4x = 8

x = 2

تدرب وحل المسائل:

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ ممَّا يأتي:

(7

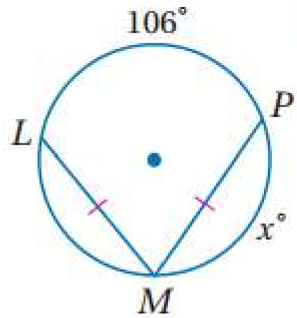


بما أن الأوتار متطابقة إذا الأقواس المقابلة لها متطابقة

$$5x = 105$$

$$x = \frac{105}{5} = 21$$

(8



$$m\overset{\frown}{LP} = 360 - 106$$

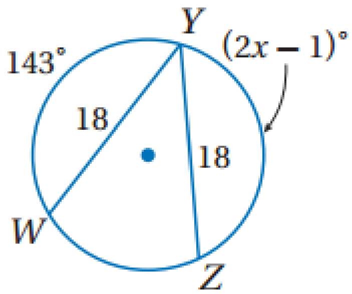
$$m\overset{\frown}{LP} = 254^\circ$$

$$\because LM = MP$$

$$\therefore \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MP}$$

$$\overset{\frown}{MP} = \frac{254}{2} = 127^\circ$$

(9



بما أن الأوتار متطابقة إذا الأقواس المقابلة لها متطابقة

$\because \overline{YZ} = \overline{WY}$

$\therefore \overset{\frown}{YZ} = \overset{\frown}{WY}$

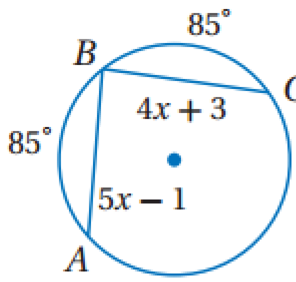
$2x - 1 = 143$

$2x = 143 + 1$

$2x = 144$

$x = 72$

(10



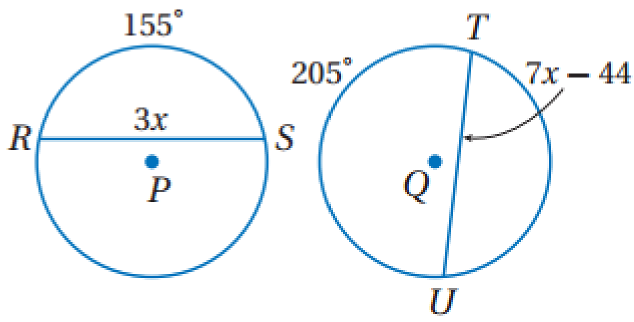
$\overline{BA} = \overline{BC}$

$4x + 3 = 5x - 1$

$5x - 4x = 3 + 1$

$x = 4$

$\odot P \cong \odot Q$ (11



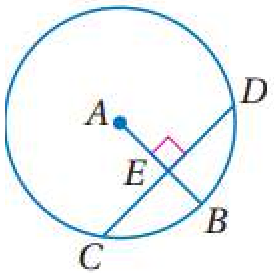
$\overline{UT} = \overline{RS}$

$7x - 44 = 3x$

$7x - 3x = 44$

$4x = 44$

$x = 11$



إذا كان طول نصف قطر $\odot A$ يساوي 14 و $CD = 22$ فأوجد القياسين الآتيين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم ذلك.

CE (12

بما أن $\overline{AB}$ عمودي على الوتر $\overline{CD}$ إذا فهو ينصفه

$$CE = \frac{CD}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

EB (13

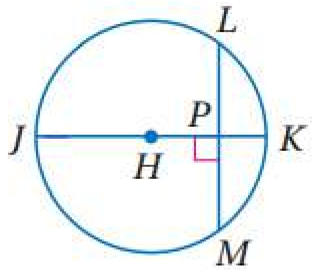
$(AC)^2 = (AE)^2 + (EC)^2$

$(14)^2 = (AE)^2 + (11)^2$

$AE = 8.66$

$EB = 14 - 8.66$

$EB = 5.34$



إذا كان طول قطر $\odot H$ يساوي 18 و $LM = 12$ و $m\widehat{LM} = 84°$،
فأوجد القياسين الآتيين مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة، إذا
لزم ذلك.

14) $m\widehat{LK}$

بما أن $\overline{JK}$ عمودي على الوتر $\overline{LM}$ إذا فهو ينصفه

$$m\widehat{LK} = \frac{84}{2} = 42^{\circ}$$

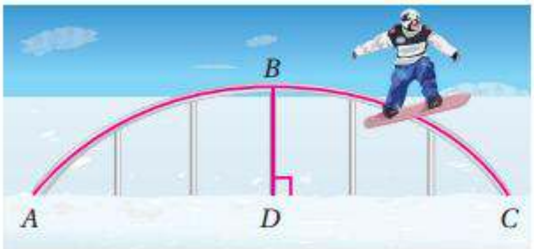
15) HP

ارسم HM وبتطبيق نظرية فيثاغورث:

$$(HM)^2 = (MP)^2 + (HP)^2$$

$$\left(\frac{18}{2}\right)^2 = \left(\frac{12}{2}\right)^2 + (HP)^2$$

$$HP = \sqrt{45} = 6.7$$

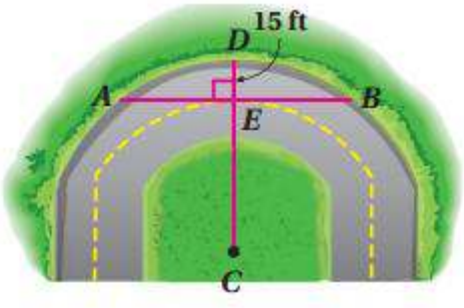


16) **تزلج:** سكة التزلّج في الشكل المجاور تأخذ شكل قوس من دائرة، حيث $\overline{BD}$ جزء من قطرها. إذا كان قياس $\widehat{ABC}$ يساوي 32% من الدائرة الكاملة، فأوجد $m\widehat{AB}$؟

$$\widehat{ABC} = 0.32 \times 360 = 115.2$$

$$\widehat{AB} = \frac{115.2}{2} = 57.6$$

17) **طُرق:** الحافة الخارجية للطريق المنحنية المبيّنة في الشكل المجاور جزء من $\odot C$ التي نصف قطرها 88 ft. أوجد AB مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشرٍ.



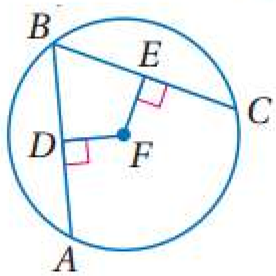
ارسم $\overline{CB}$ نصف قطر

$$\overline{EC} = \overline{CD} - \overline{DE}$$
$$\overline{EC} = 88 - 15 = 73$$

وبتطبيق فيثاغورث:

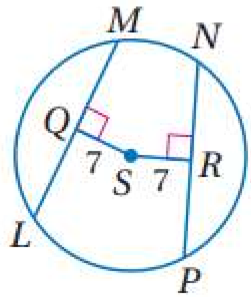
$$(CB)^2 = (EC)^2 + (EB)^2$$
$$(88)^2 = (73)^2 + (EB)^2$$
$$EB = 49.14$$
$$AB = 2 \times 49.14$$
$$AB = 98.28ft$$

18) **جبر:** في $\odot F$، إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، $DF = 3x - 7, FE = x + 9$، فأوجد قيمة x.



$$\because \overline{AB} \cong \overline{BC}$$
$$\therefore EF = FD$$
$$x + 9 = 3x - 7$$
$$3x - x = 9 + 7$$
$$2x = 16$$
$$x = 8$$

19) جبر: في $\odot S$ ، إذا كان: $LM = 16 , PN = 4x$، فأوجد قيمة x.



بما أن $SR = SQ$

$$4x = 16$$

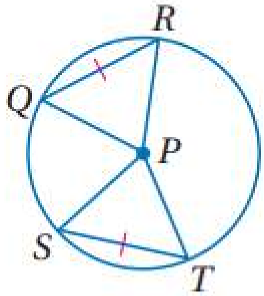
$$x = 4$$

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

20) برهان حرّ للجزء الثاني من النظرية 8.2 ،

المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{ST}$ في $\odot P$.

المطلوب: $\overset{\frown}{QR} \cong \overset{\frown}{ST}$



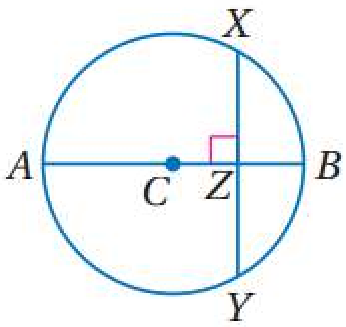
بما أن أنصاف أقطار الدائرة متطابقة فإن $\overline{QP} \cong \overline{PR} \cong \overline{SP} \cong \overline{PT}$ ، ومن المعطيات نعلم أن $\overline{QR} \cong \overline{ST}$ ، إذن $\Delta PQR \cong \Delta PST$ حسب SSS إذن، $\angle QPR \cong \angle SPT$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة.

ولأن للزوايا المركزية القياس نفسه فإن للأقواس المقابلة لها القياس نفسه أيضا ومن ثم فهي متطابقة ولذلك فإن $\overset{\frown}{QR} \cong \overset{\frown}{ST}$

21) برهان ذو عمودين للنظرية 8.3 ،

المعطيات: $\overline{AB} \perp \overline{XY}$ في $\odot C$.

المطلوب: $\widehat{XB} \cong \widehat{YB}$, $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$



البرهان:

$\overline{AB} \perp \overline{XY}$ (معطى)

$90^\circ = \angle XZB = \angle BZY$ (تعريف العمود الساقط)

إذا $\widehat{XB} \cong \widehat{BY}$ (بحسب نظرية 8.1)

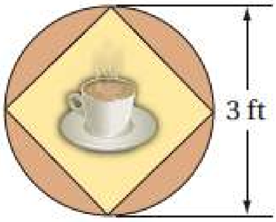
$\overline{CX} \cong \overline{CY}$ (تعريف أنصاف أقطار)

$\overline{CZ} \cong \overline{CZ}$ (خاصية الإنعكاس)

$90^\circ = \angle XZB = \angle BZY$ (قائمتان)

$\Delta XCZ \cong \Delta YCZ$

$\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$



22) **تصميم:** صمّم زيد شعارًا لمقهىً كما في الشكل المجاور. إذا كانت أطوال الأوتار جميعها متساوية، فما قياس كل قوس؟ وما طول كل وتر؟

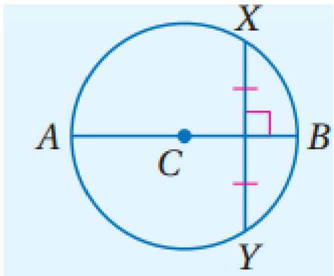
قياس كل قوس = 90° لأن الزاوية المقبلة لكل قوس = 90°

طول كل وتر = 2.12 ft

$$(1.5)^2 + (1.5)^2 = (L)^2$$

$$L = 2.12\text{ft}$$

23) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 8.4



البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{AB}$ عمود منصف لـ $\overline{XY}$ (معطيات)

2) تقع C على بعدين متساويين عن A, B (جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة)

3) تقع C على العمود المنصف لـ $\overline{XY}$ (عكس نظرية العمود المنصف)

4) $\overline{AB}$ قطر للدائرة للدائرة C □

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين للجزء المُشار إليه من النظرية 8.5 في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

24) إذا تساوَى بُعدا وترين في دائرةٍ عن مركزها، فإن هذين الوترين متطابقان.

البرهان: العبارات والمبررات

1) $\overline{LH} \cong \overline{LG}$ (أنصاف أقطار الدائرة متطابقة)

2) $\overline{LY} \cong \overline{LX}$, $\overline{LH} \perp \overline{LY}$, $\overline{FG} \perp \overline{LX}$ (معطيات)

3) $\angle LYH$, $\angle LXG$ قائمتان (تعريف المستقيمات المتعامدة)

4) $\Delta YHL \cong \Delta XGL$ (HL)

5) $\overline{YH} \cong \overline{XG}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

6) $\overline{YH} = \overline{XG}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

7) $2(YH) = 2(XG)$ (خاصية الضرب)

8) $\overline{LX}$ ينصف $\overline{FG}$ $\overline{LY}$ ينصف $\overline{JH}$ (نصف القطر العمودي على الوتر ينصفه)

9) $JH = 2(YH)$, $FG = 2(XG)$ (تعريف منصف القطع المستقيمة)

10) $FG = JH$ (بالتعويض)

11) $\overline{FG} \cong \overline{JH}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

25) إذا تطابق وتران في دائرةٍ، فإن بعدَيهما عن مركزها متساويان.

البرهان:

1) $\overline{JH} \cong \overline{FG}, \overline{LH}, \overline{LG}$ (أنصاف أقطار) ،
$\overline{JH} \perp \overline{LY}, \overline{FG} \perp \overline{LX}$ (معطيات)

2) $\overline{LX}$ ينصف $\overline{FG}$ ، $\overline{LY}$ ينصف $\overline{JH}$ ($\overline{LX}$ ، $\overline{LY}$) محتواتان في نصفي قطرين ونصف القطر العمودي على الوتر ينصف هذا الوتر)

3) $JH = \frac{1}{2}YH$ ، $XG = \frac{1}{2}FG$ (تعريف العمود المنصف)

4) $JH = FG$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

5) $\frac{1}{2}JH = \frac{1}{2}FG$ (خاصية الضرب)

6) $YH = XG$ (بالتعويض)

7) $YH \cong XG$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

8) $\overline{LH} = \overline{LG}$ (جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة)

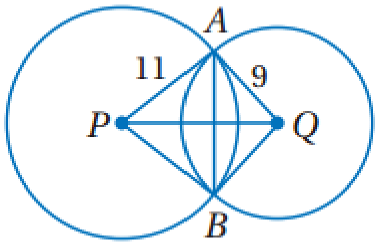
9) $\angle HYL, \angle GXL$ (قائمتان)

10) $\Delta YLH \cong \Delta XLG\ (HL)$

11) $\overline{LY} \cong \overline{LX}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

مسائل مهارات التفكير العليا:

26) **تحدٍّ:** الوتر $\overline{AB}$ المشترك بين $\odot Q$, $\odot P$ يعامد القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي هاتين الدائرتين، إذا كان $AB = 10$، فما طول $\overline{PQ}$؟ وضّح ذلك.



Q , P تبعدان مسافات متساوية عن نقطتي طرفي $\overline{AB}$ ، إذن كلاهما واقعة على العمود المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$، لذلك نجد أن $\overline{PQ}$ هي العمود المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$، لذا فإن طول كل جزء من القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ يساوي 5. بما أن $\overline{PC}$ عمودي على الوتر $\overline{AB}$، حيث C نقطة تقاطع $\overline{AB}$ ، $\overline{PQ}$ فإن $\angle PCA$ قائمة. إذن ΔPCA قائم الزاوية. وبتطبيق فيثاغورث

$$(AQ)^2 = (AC)^2 + (CQ)^2$$

$$(9)^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + (CQ)^2$$

$$CQ = \sqrt{56} = 7.48$$

$$(AP)^2 = (AC)^2 + (CP)^2$$

$$(11)^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + (CP)^2$$

$$CP = \sqrt{96} = 9.79$$

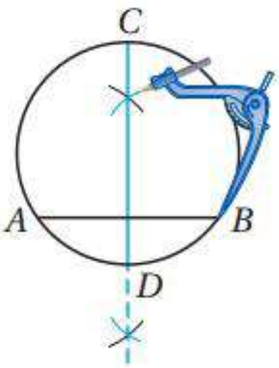
$$PQ = CP + CQ$$

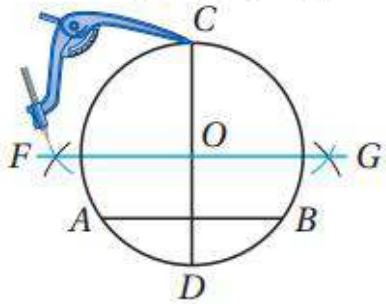
$$\overline{PQ} = 17.27$$

27) **تبرير:** $\overline{AB}$ قطر في الدائرة و $\overline{HG}$ وتر يتقاطع مع $\overline{AB}$ في النقطة X، فهل العبارة $HX = GX$ صحيحة دائمًا، أم أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟

صحيحة أحيانا؛ إذا كان القطر عموديا على الوتر فإنه ينصفه

28) **تحدٍّ:** الإنشاء الهندسي أدناه يوضح طريقة تعيين مركز دائرة معطاة.

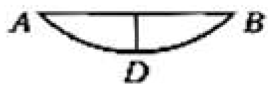




الخطوة 1: ارسم الوتر $\overline{AB}$، وأنشئ العمود المنصف للوتر $\overline{AB}$ وسمّه $\overline{CD}$.

الخطوة 2: أنشئ العمود المنصّف للوتر $\overline{CD}$ وسمّه $\overline{FG}$. سمِّ نقطة تقاطع العمودين O.

a) استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن $\overline{CD}$ يمرّ بمركز الدائرة، مفترضًا أن مركز الدائرة لا يقع على $\overline{CD}$.



أفرض أن X لا تقع على $\overline{CD}$. ارسم $\overline{XE}$ وأنصاف الأقطار $\overline{XA}, \overline{XB}$
بما أن $\overline{CD}$ هو العمود المنصف لـ $\overline{AB}$ و E نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ ، وكذلك $\overline{XB} \cong \overline{XA}$ ، لأن جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة.
$\overline{XE} \cong \overline{XE}$ حسب خاصية الانعكاس. لذا $\Delta AXE \cong \Delta BXE$
ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة فإن $\angle XEA \cong \angle XEB$.
وبما أن $\angle XEA, \angle XEB$ متجاورتان متطابقتان تكونان $\angle AEB$
فإن $\overline{AB} \perp \overline{XE}$ لذا $\overline{XE}$ عمود منصف لـ $\overline{AB}$ ، لكن $\overline{CD}$ هو العمود المنصف للقطعة المستقيمة وحيدا، لذا فالفرض خطأ. والمركز X يجب أن يقع على $\overline{CD}$

b) أثبت أن O هي مركز الدائرة.

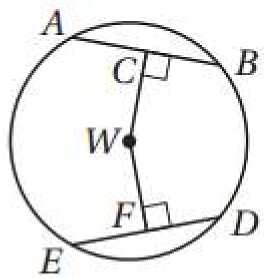
بما أن النقطة X تقع على $\overline{CD}$، C , D تقعان على X ، فإن $\overline{CD}$ قطر للدائرة X .وبما أن $\overline{FG}$ ينصف $\overline{CD}$ عند O فإن O نقطة منتصف $\overline{CD}$ وبما أن نقطة منتصف القطر هي مركز الدائرة، فأن O هي مركز الدائرة. لذلك فالنقطة O هي النقطة X

29) **اكتب:** إذا أصبح قياس قوس في دائرة ثلاثة أمثال قياسه الأصلي، فهل يصبح طول الوتر المقابل لهذا القوس الجديد ثلاثة أمثال طول الوتر المقابل للقوس الأصلي؟ ارسم شكلًا يؤيِّد استنتاجك.

لا، لأن في دائرة نصف قطرها 12 القوس الذي قياسه 60° يقابل وترا طوله 12، إذا أصبح قياس القوس ثلاثة أمثال قياس القوس الأصلي؛ أي أصبح 180°، فإن طول الوتر يساوي 24 لأنه أصبح قطرا، وهذا لا يساوي ثلاثة أمثال 12.

تدريب على اختبار

30) إذا كان: $ED = 30$ ، $CW = WF$، فأوجد DF؟



A 60

B 45

C 30

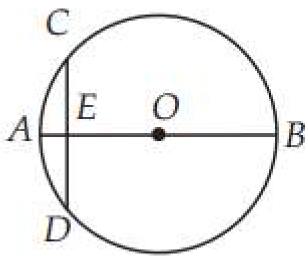
D 15

بما أن CW =WF وعموديان على كلا من AB , ED
إذا CW ,WF ينصفان AB , ED

$$ED = \frac{30}{2} = 15$$

الاختيار : D 15

31) في $\odot O$، $\overline{AB}$ قطر عمودي على الوتر $\overline{CD}$، ويقطعه في النقطة E، إذا كان: $OB = 10$، $AE = 2$، فما طول $\overline{CD}$ ؟



A 4

B 6

C 8

D 12

$$AE = 2$$

$$EO = AO - AE$$

$$EO = 10 - 2 = 8$$

$$(DO)^2 = (ED)^2 + (EO)^2$$

$$(10)^2 = (ED)^2 + (8)^2$$

$$ED = 6$$

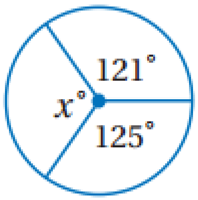
$$CD = 2 \times 6 = 12$$

طول CD = 12

مراجعة تراكمية

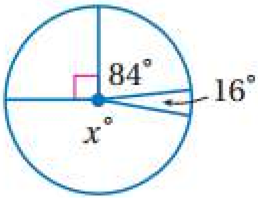
أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 2-8)

32)



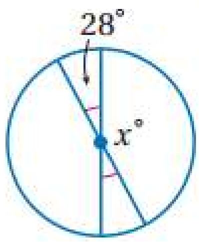
$$x + 121 + 125 = 360$$
$$x = 360 - (121 + 125)$$
$$x = 114^\circ$$

33)



$$x + 84 + 16 + 90 = 360$$
$$x = 360 - (84 + 16 + 90)$$
$$x = 170^\circ$$

34)



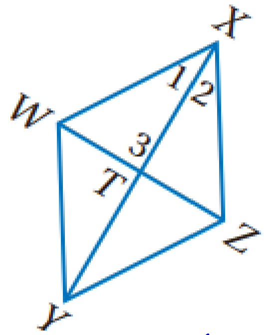
$$x + 28 + 28 + x = 360$$
$$2x = 360 - (28 + 28)$$
$$2x = 304$$
$$x = 152^\circ$$

35) **حِرف يدوية:** صمّمت شيماء مخططًا لتطريز 10 ورداتٍ على قطعة قماش، فرسمت 10 أشكال خماسية منتظمة طول ضلع كلٍّ منها 3.5 in ، ثم رسمت نصف دائرة على كل ضلع فتشكّلت 10 ورداتٍ لكلٍّ منها خمس بتلاتٍ، فكم بوصةً طول الشريط الذهبي الذي تحتاجه لتزيين حواف جميع الوردات؟ قرّب إجابتك إلى أقرب بوصةٍ.

طول الشريط = 275 in

جبر: أجب عن السؤالين الآتيين مستعينًا بالمعين *WXZY* :

36) إذا كان: $m\angle 3 = (y^2 - 31)^\circ$ ، فأوجد y .



بما أن قطرا المعين متعامدان إذا:

$$y^2 - 31 = 90$$

$$y^2 = 90 + 31$$

$$y^2 = 121$$

$$y = \pm 11$$

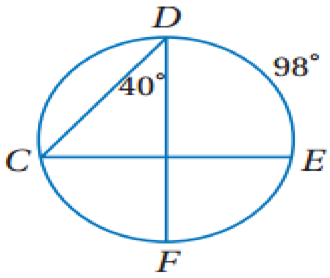
37) إذا كان: $m\angle XZY = 56^\circ$ ، فأوجد $m\angle YWZ$.

$$28^\circ = \frac{56}{2} = m\angle YWZ$$

8-4 الزوايا المحيطية

تحقق

أوجد القياسات الآتية مستعملًا الشكل المجاور:



1A) $m\widehat{CF}$

$\angle CDF$ زاوية محيطة لأن رأسها تقع على الدائرة وضلعاها وترين في الدائرة

$$\angle CDF = \frac{1}{2}\widehat{CF}$$

$$\widehat{CF} = 2\times 40 = 80^{\circ}$$

1B) $m\angle C$

$\angle DCE$ زاوية محيطة وبحسب النظرية 8.6:

$$\angle DCE = \frac{1}{2}\widehat{DE}$$

$$\angle DCE = \frac{1}{2}\times 98$$

$$\angle DCE = 49^{\circ}$$

2) إذا كان: $m\angle V = (x+16)^\circ$, $m\angle S = (3x)^\circ$ ، فأوجد $m\angle S$ مستعملًا الشكل أعلاه.

$m\angle V = m\angle S$ $\angle S , \angle V$ كلاهما تقابلان $\overset{\frown}{TU}$

$x + 16 = 3x$

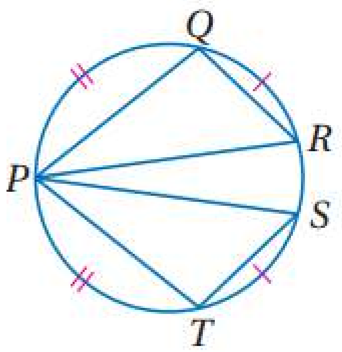
$3x - x = 16$

$2x = 16$

$x = 8$

$\angle S = 3x$

$\angle S = 24^\circ$



3) اكتب برهانًا ذا عمودين:

المعطيات: $\widehat{QR} \cong \widehat{ST}$, $\widehat{PQ} \cong \widehat{PT}$

المطلوب: $\triangle PQR \cong \triangle PTS$

البرهان: العبارات والمبررات

$\overset{\frown}{QR} \cong \overset{\frown}{ST}$, $\overset{\frown}{PQ} \cong \overset{\frown}{PT}$ (معطيات)

$m\overset{\frown}{QR} = m\overset{\frown}{ST}$, $m\overset{\frown}{PQ} = m\overset{\frown}{PT}$ (تعريف تطابق الأقواس)

$\frac{1}{2}m\overset{\frown}{QR} = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{ST}$, $\frac{1}{2}m\overset{\frown}{PQ} = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{PT}$ (خاصية الضرب)

$m\angle QPR = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{QR}$, $m\angle TPS = \frac{1}{2}m\angle\overset{\frown}{ST}$

$m\angle QRP = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{PQ}$, $m\angle TSP = \frac{1}{2}m\angle\overset{\frown}{PT}$ (نظرية الزاوية المحيطة)

$m\angle QPR = m\angle TPS$, $m\angle QRP = m\angle TSP$ (بالتعويض)

$m\angle QPR \cong m\angle TPS$, $m\angle QRP \cong m\angle TSP$ (تعريف تطابق القطع الزوايا)

$\overset{\frown}{QR} \cong \overset{\frown}{ST}$ (الأقواس المتطابقة تحددها أوتار متطابقة)

$\Delta PQR \cong \Delta PTS$ (AAS)

4) إذا كان $m\angle H = (17x - 8)^\circ$, $m\angle F = (7x + 2)^\circ$ ، فأوجد قيمة x مستعملاً الشكل أعلاه.

$\angle H + \angle F = 90$

$17x - 8 + 7x + 2 = 90$

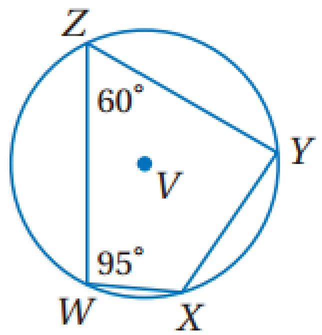
$24x - 6 = 90$

$24x = 90 + 6$

$24x = 96$

$x = 4$

5) المضلع $WXYZ$ شكل رباعي محاط بِـ $\odot V$ ، أوجد $m\angle X, m\angle Y$.



المضلع الرباعي المحاط بالدائرة كل زاويتين فيه متقابلين متكاملين

$\angle Y + \angle W = 180$

$\angle Y + 95 = 180$

$\angle Y = 180 - 95$

$\angle Y = 85^\circ$

$\angle X + \angle Z = 180$

$\angle X + 60 = 180$

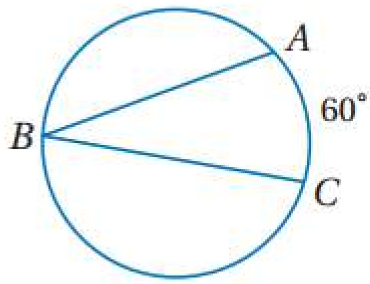
$\angle X = 180 - 60$

$\angle X = 120^\circ$

تأكد :

أوجد كل قياس ممّا يأتي:

1) $m\angle B$



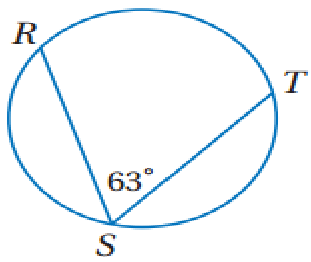
$\angle ABC$ زاوية محيطة لأن رأسها تقع على الدائرة وضلعاها وترين في الدائرة

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\times 60$$

$$\angle ABC = 30^\circ$$

2) $m\overset{\frown}{RT}$



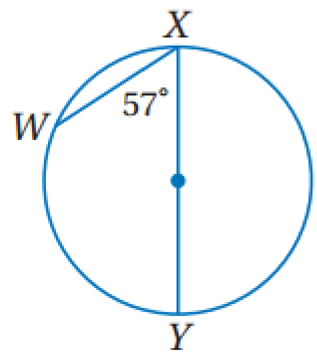
$$\angle RST = \frac{1}{2}\overset{\frown}{RT}$$

$$63 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{RT}$$

$$\overset{\frown}{RT} = 2\times 63$$

$$\overset{\frown}{RT} = 126^\circ$$

3) $m\widehat{WX}$



ارسم $\overline{WY}$ و $\angle XWY = 90°$ لأنها زاوية محيطية تقابل نصف دائرة

$\angle WYX = 180 - (90 + 57) = 33°$

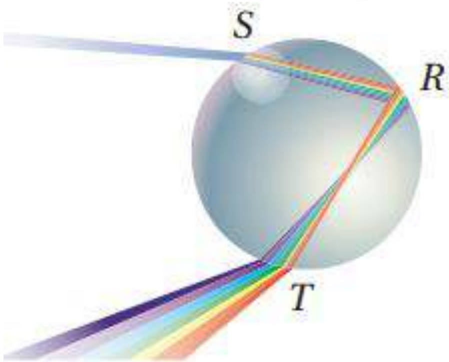
$$\angle WYX = \frac{1}{2}\widehat{WX}$$

$$33 = \frac{1}{2}\widehat{WX}$$

$$\widehat{WX} = 2 \times 33$$

$$\widehat{WX} = 66°$$

4) **علوم:** يُبيّن الشكل المجاور انكسار أشعة الضوء في قطرة مطر لإنتاج ألوان الطيف، فإذا كان $m\widehat{ST} = 144°$ ، فأوجد $m\angle R$؟



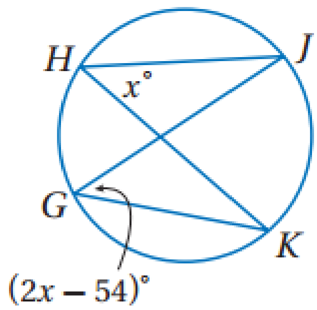
$$\angle R = \frac{1}{2}ST$$

$$\angle R = \frac{1}{2} \times 144$$

$$\angle R = 72°$$

جبر: أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

5) $m\angle H$



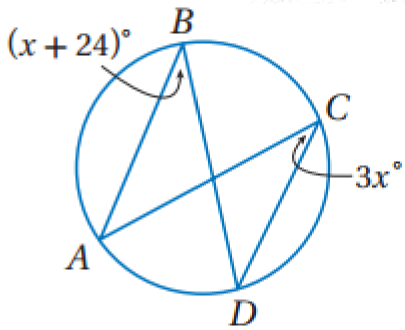
الزاويتين المحيطتين المشتركين في نفس القوس متطابقين

$$x = 2x - 54$$

$$2x - x = 54$$

$$x = 54$$

6) $m\angle B$



$$\angle B = \angle C$$

$$x + 24 = 3x$$

$$3x - x = 24$$

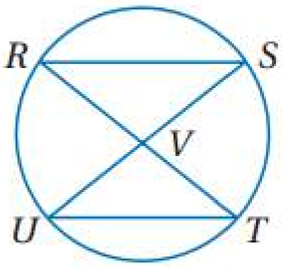
$$2x = 24$$

$$x = 12$$

$$\angle B = x + 24$$

$$\angle B = 36^{\circ}$$

7) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{RT}$ تُنصِّف $\overline{SU}$.

المطلوب: $\triangle RVS \cong \triangle UVT$

البرهان:

$\overline{RT}$ ينصف $\overline{SU}$. (معطيات)

$\overline{SV} \cong \overline{VU}$ (تعريف منصف القطعة المستقيمة)

$\angle SRT$ تقابل $\overset{\frown}{ST}$.

$\angle SUT$ تقابل $\overset{\frown}{ST}$. (تعريف القوس المقابل)

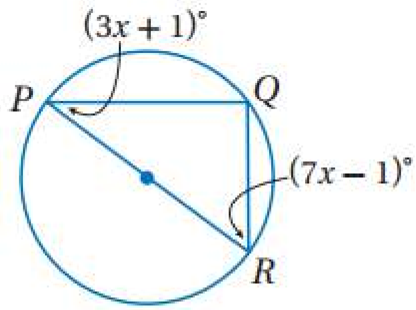
$\angle SRT \cong \angle SUT$ (الزوايا المحيطية المرسومة على القوس نفسه متطابقة)

$\angle RVS \cong \angle UVT$ (الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة)

$\Delta RVS \cong \Delta UVT$ (AAS)

جبر: أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

8) $m\angle R$



بما أن $\angle Q$ زاوية محيطية تقابل نصف دائرة إذا قياسها = $90°$

$\angle R + \angle P = 90$

$3x + 1 + 7x - 1 = 90$

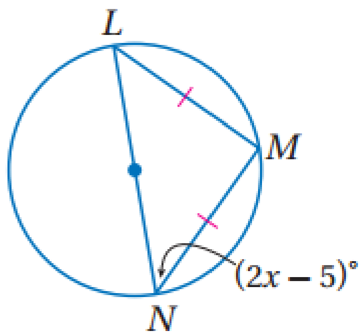
$10x = 90$

$x = 9$

$\angle R = 3x + 1$

$\angle R = 28°$

x (9



مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\angle M + \angle L + \angle N = 180$

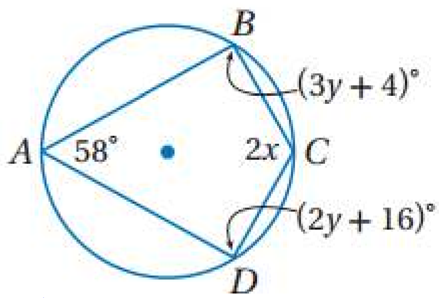
$2x - 5 + 2x - 5 + 90 = 180$

$4x - 10 = 90$

$4x = 100$

$x = 25$

$m\angle C, m\angle D$ (10



كل زاويتين متقابلين متكاملين في المضلع المحاط بدائرة

$3y + 4 + 2y + 16 = 180$

$5y + 20 = 180$

$5y = 180 - 20$

$5y = 160$

$y = 32$

$m\angle D = 2y + 16$

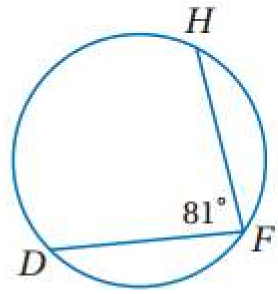
$m\angle D = 80^\circ$

$$2x + 58 = 180$$
$$2x = 180 - 58$$
$$2x = 122$$
$$x = 61$$
$$\angle C = 2x$$
$$\angle C = 122^\circ$$

تدرب وحل المسائل:

أوجد كل قياس ممّا يأتي:

$m\widehat{DH}$ (11



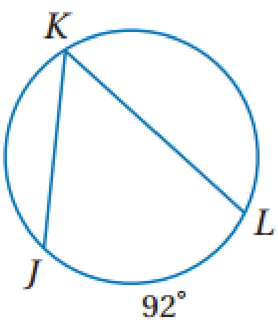
$$\angle F = \frac{1}{2}\overset{\frown}{HD}$$

$$81 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{HD}$$

$$\overset{\frown}{HD} = 2 \times 81$$

$$\overset{\frown}{HD} = 162^\circ$$

$m\angle K$ (12

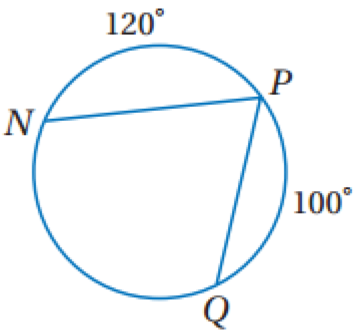


$$\angle K = \frac{1}{2}\overset{\frown}{JL}$$

$$\angle K = \frac{1}{2} \times 92$$

$$\angle K = 46^\circ$$

$m\angle P$ (13



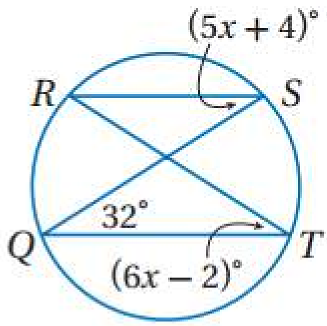
$$m\overset{\frown}{NQ} = 360 - (120 + 100)$$

$$m\overset{\frown}{NQ} = 140^\circ$$

$$\angle P = \frac{1}{2}\overset{\frown}{NQ}$$

$$\angle P = \frac{140}{2} = 70^\circ$$

جبر: أوجد كل قياسٍ ممّا يأتي:



$m\angle R$ (14

$m\angle R = 32^\circ$ لأن الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس متطابقة

$m\angle S$ (15

$\angle S = \angle T$

$5x + 4 = 6x - 2$

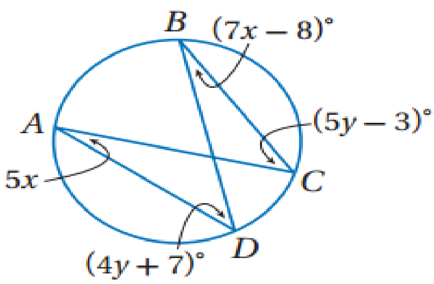
$6x - 5x = 4 + 2$

$x = 6$

$\angle S = 5x + 4$

$\angle S = 34^\circ$

$m\angle A$ (16



$\angle A = \angle B$

$5x = 7x - 8$

$7x - 5x = 8$

$2x = 8$

$x = 4$

$\angle A = 5x$

$\angle A = 20^\circ$

$m\angle C$ (17

$\angle C = \angle D$

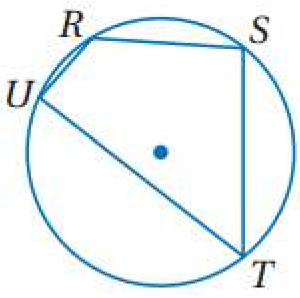
$5y - 3 = 4y + 7$

$5y - 4y = 7 + 3$

$y = 10$

$\angle C = 5y - 3$

$\angle C = 47^\circ$



18) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $m\angle T = \frac{1}{2} m\angle S$

المطلوب: $m\widehat{TUR} = 2m\widehat{US}$

البرهان: العبارات والمبررات

1) $m\angle T = \frac{1}{2} m\angle S$ (معطيات)

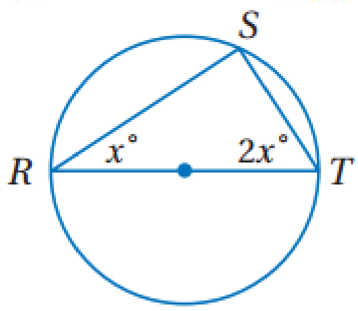
2) $m\angle S = 2m\angle T$ (خاصية الضرب)

3) $m\angle S = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{TUR}, \; m\angle T = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{URS}$ (قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل)

4) $\frac{1}{2} m\overset{\frown}{TUR} = 2\left(\frac{1}{2} m\overset{\frown}{URS}\right)$ (بالتعويض)

5) $m\overset{\frown}{TUR} = 2m\overset{\frown}{URS}$ (خاصية الضرب)

جبر: أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:



19) x

مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180، وزاوية S تقابل نصف دائرة إذا قياسها = 90°

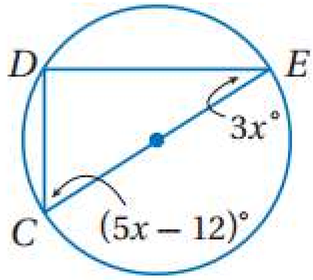
$x + 2x + 90 = 180$

$3x = 180 - 90$

$3x = 90$

$x = 30^\circ$

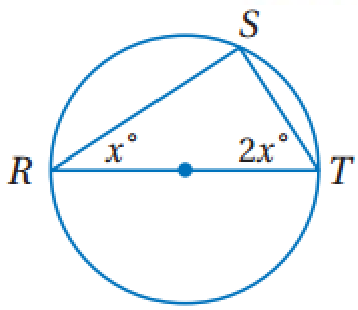
20) x



مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180، وزاوية D تقابل نصف دائرة إذا قياسها $= 90^\circ$

$$5x - 12 + 3x + 90 = 180$$
$$8x - 12 = 90$$
$$8x = 102$$
$$x = 12.75^\circ$$

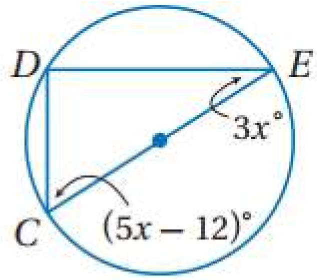
21) $m\angle T$



مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180، وزاوية S تقابل نصف دائرة إذا قياسها $= 90^\circ$

$$x + 2x + 90 = 180$$
$$3x = 180 - 90$$
$$3x = 90$$
$$x = 30^\circ$$
$$\angle T = 2x$$
$$\angle T = 60^\circ$$

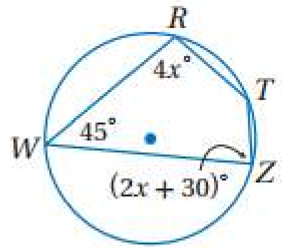
$m\angle C$ (22



$$m\angle C = 5x - 12 + 3x + 90 = 180$$
$$8x - 12 = 90$$
$$8x = 102$$
$$x = 12.75$$
$$m\angle C = 5x - 12$$
$$m\angle C = 51.75$$

جبر: أوجد كلّ قياسٍ ممّا يأتي:

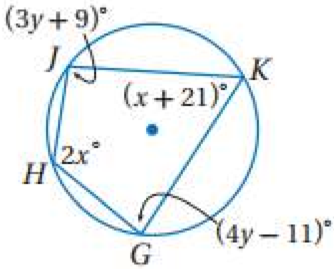
$m\angle T$ (23



كل زاويتين متقابلين متكاملين في المضلع الرباعي

$$m\angle T + \angle W = 180$$
$$m\angle T + 45 = 180$$
$$m\angle T = 180 - 45$$
$$m\angle T = 135^\circ$$

$m\angle H$ (24



كل زاويتين متقابلين متكاملين في المضلع الرباعي

$\angle K + \angle H = 180$

$x + 21 + 2x = 180$

$3x = 180 - 21$

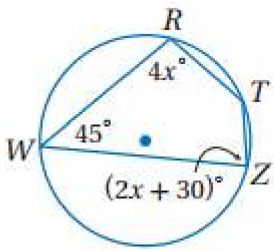
$3x = 159$

$x = 53$

$\angle H = 2x$

$\angle H = 106^\circ$

$m\angle Z$ (25



$2x + 30 + 4x = 180$

$6x = 180 - 30$

$6x = 150$

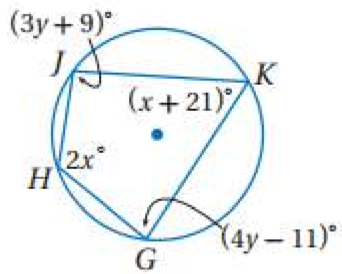
$x = 25$

$\angle Z = 2x + 30$

$\angle Z = 50 + 30$

$\angle Z = 80^\circ$

(26 $m\angle G$



$\angle G + \angle J = 180$

$4y - 11 + 3y + 9 = 180$

$7y - 2 = 180$

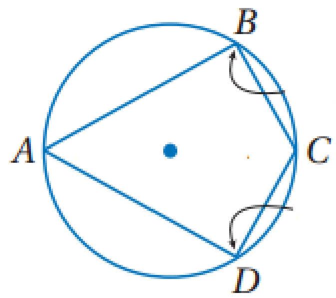
$7y = 182$

$y = 26$

$\angle G = 4y - 11$

$\angle G = 93^\circ$

(27 **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 8.9 .



البرهان:

بتطبيق مسلمة جمع الأقواس وتعريف قياس القوس ومجموع الزوايا المركزية، يكون $m\widehat{DCB} + m\widehat{DAB} = 360^\circ$.

وبما أن $m\angle C = \frac{1}{2} m\widehat{DAB}$, $m\angle A = \frac{1}{2} m\widehat{DCB}$

فإن $m\angle C + m\angle A = \frac{1}{2}\left(m\widehat{DCB} + m\widehat{DAB}\right)$

ولكن $m\widehat{DCB} + m\widehat{DAB} = 360^\circ$

إذن $m\angle C + m\angle A = \frac{1}{2}\left(360^\circ\right) = 180^\circ$ وهذا يثبت أن $m\angle C$, $m\angle A$ متكاملتان. ولأن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي.

يساوي 360° فإن $m\angle A + m\angle C + m\angle B + m\angle D = 360^\circ$
ولكن $m\angle A + m\angle C = 180^\circ$، إذن $m\angle B + m\angle D = 180^\circ$ وهذا يثبت أن هاتين الزاويتين متكاملتين أيضا.

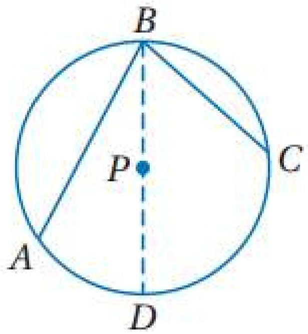
برهان: برهن النظرية 8.6 لحالتَي الزاوية المحيطية في الدائرة فيما يأتي:

28) الحالة الثانية:

المعطيات: يقع المركز P داخل $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ قطر للدائرة.

المطلوب: $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$



البرهان: العبارات والمبررات

1) $m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$ (مسلمة جمع الزوايا)

2) $m\overset{\frown}{ADC} = m\overset{\frown}{AD} + m\overset{\frown}{DC}$ (مسلمة جمع الأقواس)

3) $\frac{1}{2} m\overset{\frown}{ADC} = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2} m\overset{\frown}{DC}$ (خاصية الضرب)

4) $m\angle ABD = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{AD}$, $m\angle DBC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{DC}$ (قياس الزاوية المحيطية التي يكون أحد ضلعيها قطرا في الدائرة يساوي نصف قياس القوس المقابل (الحالة1).

5) $\frac{1}{2} m\overset{\frown}{ADC} = m\angle ABD + m\angle DBC$ (بالتعويض الخطوتان 3,4)

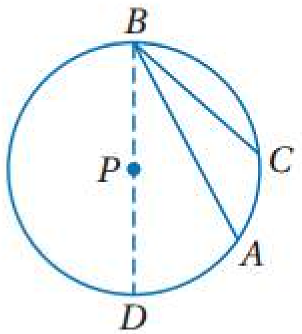
6) $\frac{1}{2} m\overset{\frown}{ADC} = m\angle ABC$ (بالتعويض الخطوتان 5,1)

29) الحالة الثالثة:

المعطيات: يقع المركز P خارج $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ قطر للدائرة.

المطلوب: $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$



1) $m\angle ABC = m\angle DBC - m\angle DBA$ (مسلمة جمع الزوايا)

2) $m\widehat{AC} = m\widehat{DC} - m\widehat{DA}$ (مسلمة جمع الأقواس.خاصية الطرح)

3) $\frac{1}{2} m\widehat{AC} = \frac{1}{2} m\widehat{DC} - \frac{1}{2} m\widehat{DA}$ (خاصية الضرب)

4) $m\angle DBA = \frac{1}{2} m\widehat{DA},\ m\angle DBC = \frac{1}{2} m\widehat{DC}$

(قياسات الزاوية المحيطية التي يكون أحد ضلعيها قطرا في الدائرة يساوي نصف قياس القوس المقابل لها (الحالة1))

5) $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{DC} - \frac{1}{2} \widehat{DA}$ (بالتعويض الخطوتان 1,4)

6) $m\angle ABC = \frac{1}{2}\left(m\widehat{DC} - \widehat{DA}\right)$ (خاصية التوزيع)

7) $m\angle ABC = \frac{1}{2} \widehat{AC}$ (بالتعويض (الخطوتان 6,3))

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد لكلٍ من النظريتين الآتيتين:

30) النظرية 8.7 ، برهانًا ذا عمودين.

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\angle CBD , \angle FAE$ محيطيتان، $\widehat{FE} \cong \widehat{DC}$ (معطيات)

2) $m\angle FAE = \frac{1}{2} m\widehat{FE} , m\angle CBD = \frac{1}{2} m\widehat{DC}$

(قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها)

3) $m\widehat{FE} = m\widehat{DC}$ (تعريف تطابق الأقواس)

4) $\frac{1}{2} m\widehat{FE} = \frac{1}{2} m\widehat{DC}$ (خاصية الضرب)

5) $m\angle FAE = m\angle CBD$ (بالتعويض)

6) $\angle FAE \cong \angle CBD$ (تعريف تطابق الزوايا)

31) النظرية 8.8 ، برهانًا حرًّا.

البرهان: ADC نصف دائرة، $m\widehat{ADC} = 180^\circ$، $\angle ABC$ محيطية

$m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{ADC} = 90^\circ$

وهذا يعني أن $\angle ABC$ قائمة.

الجزء2:

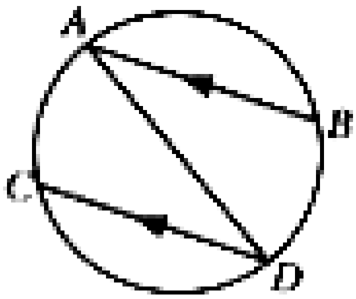
المعطيات: $\angle ABC$ قائمة

المطلوب: $\widehat{ADC}$ نصف دائرة.

البرهان: بما أن $m\angle ABC = 90^\circ$ فإن قياس القوس المقابل لها يساوي 180°. وبما أن قياس القوس المقابل يساوي 180°، فهو نصف دائرة

(32 **تمثيلات متعددة:** في هذا السؤال ستستقصي العلاقة بين القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

a) **هندسيًا:** ارسم دائرة تحوي وترين متوازيين هما $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ مستعملًا الفرجار، ثم صِلْ A, D برسم $\overline{AD}$.



b) **عدديًا:** أوجد $m\angle A$, $m\angle D$ مستعملًا المنقلة، ثم حدّد $m\widehat{AC}$, $m\widehat{BD}$، ما العلاقة بين هذين القوسين؟ فسّر إجابتك.

$$m\angle A = 30^\circ, m\angle D = 30^\circ$$

$$m\widehat{AC} = 60^\circ, m\widehat{BD} = 60^\circ$$

القوسان متطابقان، لأن قياسيهما متساويان

c) **لفظيًا:** ارسم دائرةً أخرى وكرّر الخطوتين **a**, **b**، ثم ضع تخمينًا حول القوسين المحصورين بين وترين متوازيين في الدائرة.

يحصر الوتران المتوازيان في الدائرة قوسين متطابقين

مسائل مهارات التفكير العليا:

تبرير: حدِّد ما إذا كان يمكن إحاطة كلٍّ من الأشكال الرباعية الآتية بدائرة دائمًا أو أحيانًا أو لا يمكن أبدًا. برّر إجابتك.

33) المربع

صحيحة دائما؛ جميع زوايا المربع قائمة إذن زواياه المتقابلة سوف تكون محيطية مرسومة في الدائرة

34) المستطيل

صحيحة دائما؛ جميه زوايا المستطيل قائمة إذن زواياه المتقابلة سوف تكون محيطية مرسومة في الدائرة

35) المعين

صحيحة أحيانا؛ يمكن أن يكون المعين محاطا بالدائرة إذا كان مربع، بما أن الزوايا المتقابلة في المعين الذي لا يكون فيه مربعا ليست متكاملة ، إذا لا يمكن أن يحيط بالمعين دائرة.

36) شكل الطائرة الورقية

صحيحة أحيانا؛ في حالة كل زاويتين متقابلتين متكاملتين.

37) **تحدٍّ:** إذا كان مربع ما محاطًا بدائرة، فما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟

نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع $= \frac{\Pi}{2}$

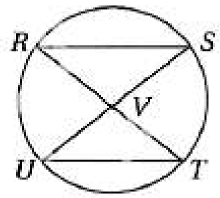
38) **اكتب:** إذا كان مثلث قائم زواياه $90°-45°-45°$ محاطًا بدائرة، وأُعطيت نصف قطر الدائرة، فاشرح طريقة لإيجاد طولَي ساقَي هذا المثلث.

المثلث الذي زواياه 90-45-45 يمكن أن يحاط بدائرة يكون فيها قوسان أصغران متساويين، كل منهما يساوي 90، تقابل الزوايا المحيطية في مثلث قطرا أو نصف دائرة إذا وفقط إذا كانت قائمة إذا وتر المثلث القائم الزاوية يسمي قطر الدائرة وباستعمال المثلثات فإن طول ساق المثلث يساوي

$$\sin 45^\circ . 2r = \sqrt{2}r$$

39) مسألة مفتوحة: أوجد شعارًا من واقع الحياة يحوي مضلعًا محاطًا بدائرة، وارسمه.

شكل عجلة الدراجة

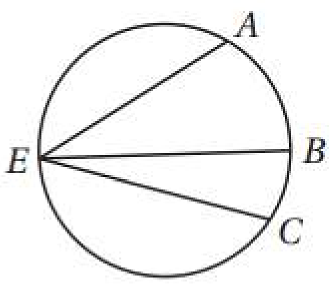


40) اكتب: بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطية في الدائرة، وإذا كانت هاتان الزاويتان تقابلان القوس نفسه، فما العلاقة بينهما؟

الزاوية المحيطية يقع رأسها على الدائرة، أما الزاوية المركزية فيقع رأسها عند مركز الدائرة وأذا كانت الزاوية المحيطية والزاوية المركزية تقابلان القوس نفسه فإن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية.

تدريب على اختبار

41) إذا كان: $m\widehat{AC} = 160°$، $m\angle BEC = 38°$، فأوجد قيمة $m\angle AEB$ مستعملًا الدائرة المجاورة:



A 42° **B** 61° **C** 80° **D** 84°

$$\angle AEC = \frac{1}{2}\widehat{AC}$$

$$\angle AEC = \frac{1}{2} \times 160$$

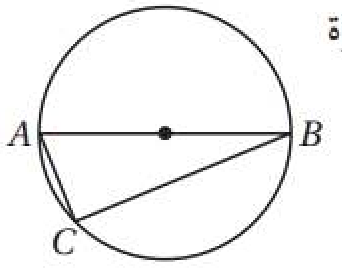
$$\angle AEC = 80^\circ$$

$$\angle AEB = \angle AEC - \angle AEC$$

$$\angle AEB = 80 - 38$$

$$\angle AEB = 42^\circ$$

42) **إجابة قصيرة:** $\overline{AB}$ قطر في الدائرة المجاورة، وAC يساوي $8\,in$ ، و BC يساوي $15\,in$ ، أوجد قطر الدائرة ونصف قطرها ومحيطها.



$\angle ACB = 90$ زاوية قائمة

بتطبيق فيثاغورث:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2$$

$$(AB)^2 = (8)^2 + (15)^2$$

$$AB = 17in$$

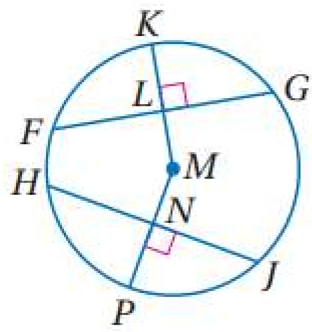
نصف القطر: $\frac{17}{2} = 8.5in$

محيط الدائرة:

$$2\pi r = 2 \times 3.14 \times 8.5 = 53.4in$$

مراجعة تراكمية

إذا كان: $m\widehat{HP} = 65°$, $HJ = 48\,in$, $FL = 24\,in$، فأوجد كلَّ قياسٍ ممَّا يأتي مستعملاً $\odot M$:



43) FG

$\overline{KM}$ نصف قطر وعمودي على $\overline{FG}$ وينصفه

$$\overline{FG} = 2\overline{FL} = 2 \times 24$$

$$\overline{FG} = 48$$

44) $m\widehat{PJ}$

$$m\widehat{HP} = m\widehat{PJ} = 65^\circ$$

45) NJ

$$\overline{NJ} = \frac{48}{2} = 24$$

46) $m\widehat{HJ}$

$$m\widehat{HJ} = 2\times 65 = 130^\circ$$

استعد للدرس اللاحق

جبر: افترض أن B نقطة منتصف $\overline{AC}$، استعمل المعلومات المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي لإيجاد القياسات المجهولة:

47) $AB = 4x - 5, BC = 11 + 2x, AC = ?$

$$AB = BC$$
$$4x - 5 = 11 + 2x$$
$$4x - 2x = 11 + 5$$
$$2x = 16$$
$$x = 8$$
$$AC = AB + BC$$
$$AC = 4x - 5 + 11 + 2x$$
$$AC = 6x + 6$$
$$AC = 54$$

$AB = 10s + 2$, $AC = 49 + 5s$, $BC = ?$ (48

$$AB + BC = AC$$

$$10s + 2 + BC = 49 + 5s$$

$$BC = 49 + 5s - 10s - 2$$

$$BC = 47 - 5s$$

$$AB = BC = 10s + 2$$

$$10s + 2 = 47 - 5s$$

$$10s + 5s = 47 - 2$$

$$15s = 45$$

$$s = 3$$

$$BC = 10s + 2$$

$$BC = 30 + 2 = 32$$

اختبار منتصف الفصل

أجب عن الأسئلة 3–1، مستعينًا بالدائرة أدناه. (الدرس 1-8)

1) اسم الدائرة $\odot A$

2) قطر : CE

3) وتر: ED

4) دراجة هوائية:

a) $c = 2\pi r$

$c = 75.4$ in

b) 100 دورة $= c \times 100$

$= 7540$ in

أوجد قطر ونصف قطر الدائرة المعطى محيطها في كل من السؤالين الآتيين، مقربا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة:

5) $c = 2\pi r$

$R = 3.7$ cm

$D = 2r$

$D = 7.3$ cm

6) $c = 2\pi r$

$R = 12.4$ ft

$D = 2r$

$D = 24.8$ ft

7)

طول $\overset{\frown}{BC} = 2.20$ CM

8) أفلام:

a) $m\overset{\frown}{ADC} = 240^\circ$

30.4 in = طوله (b

$2x = 360 - (110 + 110)$ (9

$x = 70$

$BD = 4.29$ (10

$3X - 7 = 2X + 9$ (11

$X = 16$

طول الوتر = 41

أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

$m\widehat{TU} = 46$ (12

$m\angle A = 85^\circ$ (13

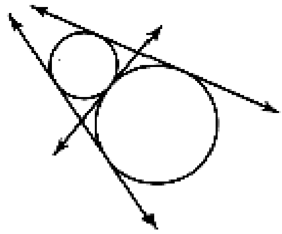
$X = 5$ (14

$D = 14\sqrt{2}$ cm (15

8-5 المماسات

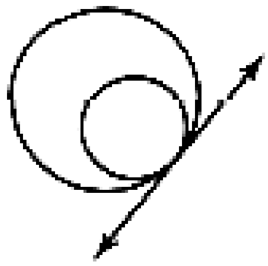
تحقق

ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كل مما يأتي:



(1A

يوجد ثلاث مماسات مشتركة



(1B

يوجد مماس واحد مشترك

(2 $8^2 + 6^2 = 12^2$

$100 \neq 144$

إذا ليس مماسا

أوجد قيمة X في كل من الشكلين الآتيين مفترضا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسا للدائرة هي مماس فعلا:

(3A

$X^2 + 14^2 = 17^2$

$X = 9.94$

(3B

$X^2 + 4^2 = (2+X)^2$

$X = 3$

جبر: أوجد قيمة X في كل من الشكلين الآتيين، مفترضا أن القطعة المستقيمة التي تبدو مماسا للدائرة هي مماسا فعلا:

(4A

$3X + 8 = 26$

$X = 6$

(4B

$2X + 9 = 3X + 6$

$X = 3$

(5

$4X + 12 = 18$

$X = 1.5$

تأكد:

حدد ما لاإذا كانت FG في كل من الشكلين الآتيين مماسا للدائرة Eأم لا وبرر

إجابتك:

1) لا يوجد مماس مشترك للدائرتين المجاورتين

2) $10^2 + 6^2 = 12^2$

$136 \neq 144$

إذا ليس مماس

3) $36^2 + 15^2 = 39^2$

$1521 = 1521$

مماس

أوجد قيمة X في كل مما يـأتي مفترضا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلا:

4) $16^2 + 12^2 = X^2$

$X = 20$

5) $30^2 + X^2 = (18 + X)^2$

$X = 16$

6) $5X - 8 = 3X$

$X = 4$

7) هندسة الحدائق:

$X + 250 = 4X - 500$

$X = 250$

$500 + Y = 775$

$Y = 275$

8) *جبر:* يحيط المثلث JKL بالدائرة R

a) $x + 3 = 4x - 9$

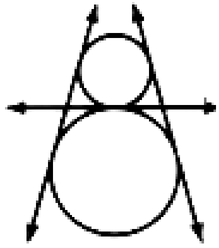
$x = 4$

b) محيط المثلث = 52 وحدة

تدرب وحل المسائل:

ارسم المماسات المشتركة للدائرتين في كل مما يأتي وإذا لم يوجد مماس مشترك فاكتب لا يوجد مماس مشترك:

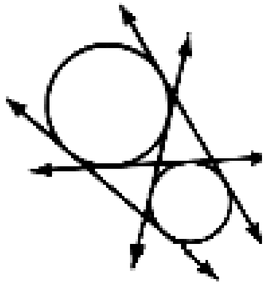
(9



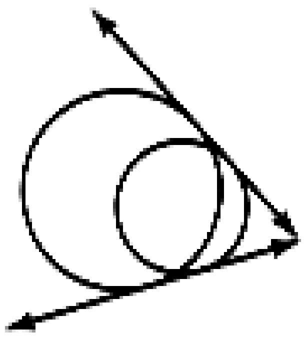
يوجد مماسان مشتركان

(10 لا يوجد مماس مشترك

(11



(12



حدد ما إذا كانت XY مماسا للدائرة المعطاه في كل من السؤالين الآتيين أم لا وبرر إجابتك:

13) $8^2 + 5^2 = 8^2$

$89 \neq 64$

14) $8^2 + 6^2 = 10^2$

$100 = 100$

إذا مماس

أوجد قيمة X لكل من الأسئلة الآتية مفترضا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات الدائرة هي مماسات فعلا:

15) $24^2 + 10^2 = X^2$

$X = 26$

16) $X^2 + 12^2 = (X + 6)^2$

$X = 9$

17) $5X - 9 = X + 7$

$X = 4$

أوجد قيمة X ثم أوجد محيط المضلع في كل من السؤالين الآتيين:

18) $2X = 14$

$X = 7$ in

$C = 24 + 27 + 31$

$C = 82$ in

19) $x = 8$

$C = 52$ cm

أوجد قيمة x *في كل من السؤالين الآتيين* مفترضا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات الدائرة هي مماسات فعلا:

20) $x + 10 = 3x - 8$

$X = 9$

21) $RS^2 + 4^2 = 9^2$

$RS = 8.06$

$X = 8.06$

اكتب برهانا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين:

22)

العبارات (المبررات)

1) $\overline{AC}$ مماس للدائرة H عند C، $\overline{AB}$ مماس للدائرة H عند B.
(معطيات)

2) ارسم $\overline{CH}, \overline{BH}, \overline{AH}$. (أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد)

3) $\overline{AC} \perp \overline{CH}, \overline{AB} \perp \overline{BH}$ (مماس الدائرة عمودي على نصف القطر عند نقطة التماس)

4) $\angle ACH, \angle ABH$ قائمتان. (تعريف تعامد المستقيمات)

5) $\overline{CH} \cong \overline{BH}$ (جميع أنصاف أقطار الدائرة متطابقة)

6) $\overline{AH} \cong \overline{AH}$ (خاصية الانعكاس)

7) $\triangle ACH \cong \triangle ABH$ (HL)

8) $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

23) أقمار صناعية:

$$EC^2 + BC^2 = BE^2$$

BC = 3110.76 km

Bc = BA

BA = 3110.76 km

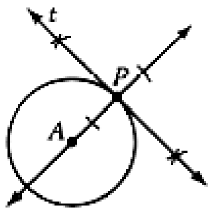
24) برهان:

البرهان: افترض أن ℓ ليس عموديًا على $\overline{ST}$. إذا لم يكن ℓ عموديًا على $\overline{ST}$، فإنه يوجد قطعة مستقيمة $\overline{SQ}$ أخرى تكون عمودية على ℓ. وأيضًا يوجد نقطة R على $\overrightarrow{TR}$ كما يظهر في الشكل أدناه بحيث إن $\overline{QT} \cong \overline{QR}$. $\angle SQR$, $\angle SQT$ قائمتان من تعريف التعامد، ولذلك $\angle SQT \cong \angle SQR$, $\overline{SQ} \cong \overline{SQ}$. إذن $\triangle SQT \cong \triangle SQR$ حسب SAS، لذا فإن $\overline{ST} \cong \overline{SR}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. وبناءً عليه فإن كلًّ من R , T تقع على $\odot S$. لكن وجود نقطتين تقعان على ℓ وأيضًا تقعان على $\odot S$ أمرٌ يناقض الحقيقة المعطاة بأن ℓ مماس للدائرة $\odot S$ عند النقطة T. إذن $\overline{ST} \perp \ell$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.

25) برهان:

افترض أن L ليس مماسا S عند T لذا يجب أن يقطع الدائرة في نقطة أخرى ولتكن Q إذا ST = SQ

ولكن إذا كان L عمودي على ST يجب أن تكون أقصر قطعة مستقيمة من S إلى L بما أن Q ، T نقطتان مختلفتان واقعتان على L فإن هذا تناقض لذا L مماسا للدائرة.



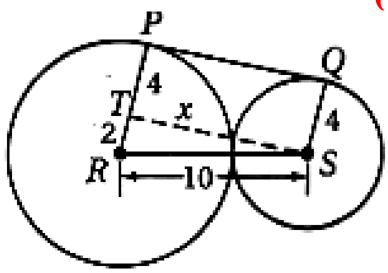
26)إنشاءات هندسية:

a) ارسم $\overleftrightarrow{AP}$ وحدد نقطتين يمر بهما هذا المستقيم

b) أنشئ عمودا على المستقيم عند النقطة P بما أن المماس عمودي على نصف القطر عند نقطة التماس

مسائل مهارات التفكير العليا:

(27



من فيثاغورث

$2^2 + X^2 = 10^2$

$X = 9.8$

بما أن TQPS مستطيل

$PQ = X = 9.8$

(28

مثلث يحيط بدائرة

مثلث مُحاط بدائرة

29)تبرير:

بما أن مماسا الدائرة المرسومان من نقطة واحدة خارجها متطابقان

لذا فإن $XY = XZ$

وكذلك $XZ = XW$

إذا $XY = XZ = XW$

30) اكتب:
يمكن رسم مماسين من نقطة خارج الدائرة في حين يمكن رسم مماس واحد فقط من نقطة علي الدائرة بينما لا يمكن رسم أي مماس من نقطة داخل الدائرة لأن المستقيم المار بداخل الدائرة يقطعها في نقطتين.
تدرب على الاختبار المعياري:
31) طول $EF = 16$ cm
32) محيط المثلث = 36 cm

مراجعة تراكمية

أوجد كل قياس مما يأتي:

33) $m\overset{\frown}{JK} = 56$

34) $m\angle B = 61^\circ$

35) $m\overset{\frown}{VX} = 152^\circ$

في $\odot F$ إذا كان $m\overset{\frown}{JHK} = 142^\circ$، $GK = 14$، فأوجد كلا من القياسات الآتية مقربا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة:

36) $m\overset{\frown}{GH} = 71^\circ$

37) $JK = 7$

38) $m\overset{\frown}{KM} = 109^\circ$

استعد للدرس اللاحق:

حل كلا من المعادلات الآتية:

39) $X = 110$

40) $X = 18$

41) $X = 58$

8-6 القاطع والمماس وقياسات الزوايا

تحقق

(1A $X = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{LK} + \overset{\frown}{HJ}\right)$ — النظرية 8.12

$X = \frac{1}{2}(116 + 47)$ — بالتعويض

$X = 81.5^\circ$ — بالجمع و التبسيط

(1B $m\angle NXQ = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{NQ} + \overset{\frown}{MP}\right)$

$m\angle NXQ = 65$

$X = 115^\circ$

(1C $110 = \frac{1}{2}(154 + X)$

$X = 102^\circ$

(2A $m\overset{\frown}{JKL} = 2m\angle KJH$

$m\overset{\frown}{JKL} = 232^\circ$

(2B $m\angle RQS = 180 - 119 = 61^\circ$

النظرية 8.14 $$m\angle S = \frac{1}{2}\left(m\overset{\frown}{RU} - m\overset{\frown}{RT}\right)$$ (3A

بالتعويض $$m\angle S = \frac{1}{2}(179 - 71)$$

بالتبسيط $$m\angle S = 54^{\circ}$$

نفس الحل السابق $$m\overset{\frown}{XZ} = 88^{\circ}$$ (3B

$$25 = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{XZ} - X)$$ (4

$$X = 60^{\circ}$$

تأكد:

أوجد كلا من القياسات الآتية مفترضا القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلا:

1) $m\angle 1 = \frac{1}{2}(134 + 86) = 110^\circ$

2) $m\,\widehat{TS}$

$126 = \frac{1}{2}(108 + m\widehat{TS})$

$m\widehat{TS} = 144^\circ$

3) $m\angle 2 = \frac{1}{2} \times 146 = 73^\circ$

4) $m\angle H = \frac{1}{2}(88 - 26) = 31^\circ$

5) $m\,\widehat{QTS} = 248^\circ$

6) $36 = \frac{1}{2}(\widehat{LP} - 78)$

$m\widehat{LP} = 150^\circ$

7) **ألعاب بهلوانية:**

قياس الزاوية = 15°

تدرب وحل المسائل:

أوجد كلا من القياسات الآتية مفترضا القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلا:

8) $m\angle 3 = \frac{1}{2}(74 + 90) = 82^\circ$

9) $m\angle JMK = 180 - 78 = 102^\circ$

10) $m\angle K = \frac{1}{2} \times 194 = 97^\circ$

11) $m\widehat{PM} = 72 \times 2 = 144^\circ$

12) $m\,\widehat{DAB} = 180 - 55 = 125^\circ$

13) $m\,\widehat{GJF} = 98 \times 2 = 196^\circ$

14) رياضة:

a) $m\angle ACE = 100^\circ$

b) $m\angle ADC = 20^\circ$

أوجد كلا من القياسات الآتية:

15) $m\angle A = 81^\circ$

16) $m\,\widehat{XY} = 185^\circ$

17) $m\,\widehat{SU} = 22^\circ$

18) مجوهرات:

$Y = 80^\circ$

19) تصوير:

a) قياس القوس = 145°

b) قياس زاوية الرؤية = 30°

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

20) $4x = \frac{1}{2}(-35 + 9x + 26)$

$8X = 9X - 9$

$X = 9^\circ$

21) $3 = \frac{1}{2}(5X - 6 - 4X - 8)$

$6 = X - 14$

$X = 20^\circ$

22) $2X = \frac{1}{2}(9X - 1 - 94)$

$4X = 9X - 95$

$X = 19^\circ$

23) فضاء:

قياس القوس المرئي من الأرض = 168°

اكتب برهانا ذا عمودين لكل حاله من حالات النظرية:

24)حالة 1:

1) $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ قاطعان للدائرة. (معطيات)

2) $m\angle DCE = \frac{1}{2} m\widehat{DE}$,
$m\angle ADC = \frac{1}{2} m\widehat{BC}$

(قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي تقابله)

3) $m\angle DCE = m\angle ADC + m\angle A$ (نظرية الزاوية الخارجية للمثلث)

4) $\frac{1}{2} m\widehat{DE} = \frac{1}{2} m\widehat{BC} + m\angle A$ (بالتعويض)

5) $\frac{1}{2} m\widehat{DE} - \frac{1}{2} m\widehat{BC} = m\angle A$ (خاصية الطرح)

6) $\frac{1}{2} (m\widehat{DE} - m\widehat{BC}) = m\angle A$

(خاصية التوزيع)

25)حالة2:

1) $\overline{FM}$ مماس للدائرة

و $\overrightarrow{FL}$ قاطع لها. (معطيات)

2) $m\angle FLH = \frac{1}{2} m\,\widehat{HG},\ m\angle LHM = \frac{1}{2} m\,\widehat{LH}$

(قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها)

3) $m\angle LHM = m\angle FLH + m\angle F$

(نظرية الزاوية الخارجية للمثلث)

4) $\frac{1}{2} m\,\widehat{LH} = \frac{1}{2} m\,\widehat{HG} + m\angle F$

(بالتعويض)

5) $\frac{1}{2} m\,\widehat{LH} - \frac{1}{2} m\,\widehat{HG} = m\angle F$

(خاصية الطرح)

6) $\frac{1}{2}(m\,\widehat{LH} - m\,\widehat{HG}) = m\angle F$

(خاصية التوزيع)

26) حالة3 :

1) $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{RV}$ مماسان للدائرة. (معطيات)

2) $m\angle STV = \frac{1}{2} m\,\widehat{SWT}$,
$m\angle RST = \frac{1}{2} m\,\widehat{ST}$
(قياس الزاوية بين المماس والقاطع عند نقطة التماس يساوي نصف قياس القوس المقابل)

3) $m\angle STV = m\angle RST + m\angle R$ (نظرية الزاوية الخارجية للمثلث)

4) $\frac{1}{2} m\,\widehat{SWT} = \frac{1}{2} m\,\widehat{ST} + m\angle R$

(بالتعويض)

5) $\frac{1}{2} m\,\widehat{SWT} - \frac{1}{2} m\,\widehat{ST} = m\angle R$

(خاصية الطرح)

6) $\frac{1}{2}(m\,\widehat{SWT} - m\,\widehat{ST}) = m\angle R$

(خاصية التوزيع)

27) برهان:

$\angle CAB$ ، $\angle CAE$ زاويتان متجاورتان على مستقيم ولذلك $m\angle CAB + m\angle CAE = 180^\circ$.

وبما أن $\angle CAB$ منفرجة، فإن $\angle CAE$ حادة. ولذلك تنطبق عليها الحالة الأخرى للنظرية، أي أن $m\angle CAE = \frac{1}{2} m\widehat{CA}$

لكن $m\widehat{CA} + m\widehat{CDA} = 360^\circ$ ،

وبالتعويض فإن: $\frac{1}{2} m\widehat{CA} + \frac{1}{2} m\widehat{CDA} = 180^\circ$ بحسب خاصية الضرب.

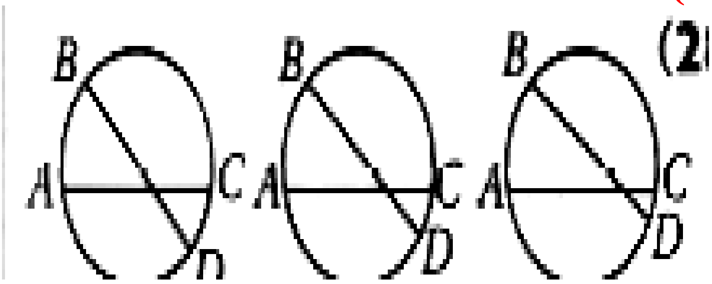
إذن، $m\angle CAE + \frac{1}{2} m\widehat{CDA} = 180^\circ$. وبحسب خاصية التعدي ينتج أن:

$$m\angle CAB + m\angle CAE = m\angle CAE + \frac{1}{2} m\widehat{CDA}$$

وبحسب خاصية الطرح ينتج أن $m\angle CAB = \frac{1}{2} m\widehat{CDA}$.

28)تمثيلات متعددة:

a)هندسيا:



b)جدوليا:

القوس	الدائرة 1	الدائرة 2	الدائرة 3
CD	25	15	5
AB	50	50	50
X	37.5	32.5	27.5

c) لفظيا:

عندما يقترب قياس $\widehat{CD}$ من الصفر فإن قياس X يصبح نصف قياس $\widehat{AB}$ والزاوية AEB تصبح محيطية.

d) تحليليا:

$$x = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$$

$$x = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + 0);$$

$$x = \frac{1}{2} m\widehat{AB}$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

29) اكتب:

يساوي نصف الفرق بين القوسين المحصورين بينهما

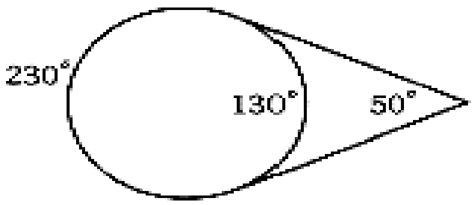
30)

$$X = \frac{1}{2}(118 - 54) = 32^{\circ}$$

31) تبرير:

$m\angle BAC = m\angle BCA$ لأن المثلث
متطابق الضلعين؛ إذن
$m\angle QAB = m\angle RCB$ ؛ لأن الزوايا
المكملة لزوايا متطابقة تكون متطابقة.
وبما أن $m\angle QAB = m\angle RCB$ ،
فإن $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$.

32)



بتطبيق النظرية 8.13 ، يكون
$m\angle 1 = \frac{1}{2}(x - y)$.
إذن $50^{\circ} = \frac{1}{2}[(360 - x) - x]$ ،
إذن، (القوس الأصغر) $x = 130$ ،
(القوس الأكبر) $y = 360^{\circ} - 130^{\circ}$
أو 230°.

33) اكتب:

$$60^\circ = \frac{1}{2}((360 - x) - x)$$

وبحل المعادلة نجد أن قياس
القوس الأول °120؛ وبتكرار
هذه العملية بالنسبة للزاوية °50
نجد أن قياس القوس الثاني
°130. ويمكن إيجاد قياس
القوس الثالث بجمع
120+130 وطرح الناتج من
360 فيكون قياس القوس
الثالث °110.

تدرب على الاختبار المعياري:

34) $X = 64^\circ$

35) $m\angle BAC = 35^\circ$

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة X في كل مما يأتي مفترضا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلا:

36) $X^2 + 4^2 = 5^2$

$X = 3$

37) $2X + 1 = 3X - 7$

$X = 8$

38) $15^2 + 5^2 = X^2$

$X = 15.81$

39)

العبارات (المبررات)

1) $\overset{\frown}{MHT}$ نصف دائرة؛ $\overline{TM} \perp \overline{RH}$. (معطيات)

2) $\angle THM$ قائمة. (الزاوية المحيطية التي تقابل نصف دائرة تكون قائمة)

3) $\angle TRH$ قائمة (تعريف تعامد مستقيمين)

4) $\angle TRH \cong \angle THM$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)

5) $\angle T \cong \angle T$ (خاصية الانعكاس)

6) $\triangle THM \sim \triangle TRH$ (مسلمة التشابه AA)

7) $\dfrac{TH}{HM} = \dfrac{TR}{RH}$ (تعريف تشابه المثلثات)

استعد للدرس اللاحق:

حل كلا من المعادلات الآتية:

40) $x^2 + 13x = -36$

$(x + 4)(x + 9) = 0$

$X = -4 \quad , \quad X = -9$

41) $x^2 + 6x = -9$

$(x - 3)(x - 3) = 0$

$X = 3$

42) $x^2 + 5x = -\frac{25}{4}$

$(x + \frac{5}{2})(x + \frac{5}{2}) = 0$

$x = -\frac{5}{2}$

8-7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

تحقق

1a) $QP \times PS = RP \times PT$ — النظرية 8.15

$6x = 4 \times 15$ — بالتعويض

$X = 10$ — بالضرب ثم القسمة على 6

1b) $x(x + 12) = (x + 2)(x + 6)$

$X = 3$

2) الاسترودوم:

المسافة بين طرفي القوس = 646 ft

3a) $4(4 + 5) = x(x + 9)$

$X = 3$

3b) $6(6 + x) = 7(7 + 12)$

$X = 16.17$

4) $10^2 = x(x + x + 4)$

$2x^2 + 4x - 100 = 0$

غير قابل للتحلل، استعمل القانون

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x = 6.1$

تأكد:

أوجد قيمة x في كل من الأشكال الآتية مفترضا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة مماسات فعلا:

١) $8x = 4 \times 4$

$X = 2$

2) $x(x + 9) = (x + 3)(x + 4)$

$X = 6$

3) $6^2 = 4(4 + x)$

$X = 5$

4) $5(5 + x) = 7.5(7.5 + 4.5)$

$X = 13$

5) علم الآثار:

$10 \times 10 = 6 \times sp$

$Sp = 16.67$

$D = 16.67 + 6 = 22.67$

$C = \pi d$

$C = 71.17cm$

تدرب وحل المسائل:

أوجد قيمة x في كل من الأشكال الآتية مفترضا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة مماسات فعلا:

6) $6x = 5 \times 12$

$X = 10$

7) $x(x + 4) = (x - 1)(x - 5)$

$X = 0.5$

8) $x(x + 6) = 2(2 + 12)$

$X = 3.1$

9) $5(5 + x) = 9^2$

$X = 11.2$

10) $12^2 = x(x + 12)$

$X = 7.4$

11) كعك:

$6 \times 6 = 9b$

$B = 4$ in

$D = 4 + 9 = 13$ in

أوجد قيم المتغيرات في كل من الأشكال الآتية مفترضا أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلا:

12) $174 = x(3x + 5)$

$X = 6$

13) $10^2 = 4(4 + a + 6)$

$A = 15$

$15 \times 6 = 8b$

$B = 11.3$

14) $15^2 = q(q + 16 + 2)$

$Q = 9$

$R(r + 18.5) = 2(2 + 16 + 9)$

$R = 1.8$

برهان:اكتب برهانا من النوع المحدد لكل من النظريات الآتية:

15) برهان النظرية 8.15

العبارات، (المبررات)

1) $\overline{DE}$، $\overline{AC}$ وتران يتقاطعان في B.
(معطيات)

2) $\angle A \cong \angle D, \angle E \cong \angle C$
(الزوايا المحيطية التي تقابل القوس نفسه تكون متطابقة)

3) $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ (مسلمة التشابه AA)

4) $\frac{AB}{BD} = \frac{EB}{BC}$
(تعريف تشابه المثلثات)

5) $AB \cdot BC = EB \cdot BD$ (الضرب التبادلي)

16) برهان النظرية 8.16

$\overline{AE}$, $\overline{AC}$ قاطعان للدائرة.
بتطبيق خاصية الأنعكاس ،
$\angle DAB \cong \angle BAD$. وبما أن
الزوايا المحيطية التي تقابل
القوس نفسه تكون متطابقة،
فإن $\angle AEB \cong \angle ACD$. إذن
$\triangle ACD \sim \triangle AEB$ بحسب مسلمة
التشابه AA، ومن تعريف تشابه
المثلثات ينتج أن:
$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD}$. وبما أن نواتج الضرب
التبادلي في التناسب تكون متساوية
فإن $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

17) برهان النظرية 10.17

العبارات: (المبررات)

1) $\overline{JK}$ مماس و $\overline{JM}$ قاطع (معطيات)

2) $m\angle KML = \frac{1}{2} m\widehat{KL}$ (قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها)

3) $m\angle JKL = \frac{1}{2} m\widehat{KL}$ (قياس الزاوية المتكونة من القاطع والمماس يساوي نصف قياس القوس المقابل لها)

4) $m\angle KML = m\angle JKL$ (بالتعويض)

5) $\angle KML \cong \angle JKL$ (تعريف تطابق الزوايا)

6) $\angle J \cong \angle J$ (خاصية الانعكاس)

7) $\triangle JMK \sim \triangle JKL$ (مسلمة التشابه AA)

8) $\frac{JK}{JL} = \frac{JM}{JK}$ (تعريف تشابه المثلثات)

9) $JK^2 = JL \cdot JM$ (الضرب التبادلي)

مسائل مهارات التفكير العليا:

18)
معادلة عبد العزيز هي الصحيحة، يتقاطع قاطعان خارج الدائرة ولذا فإن المعادلة الصحيحة تتضمن ناتج ضرب طول القاطع كاملا في طول القطعة الخارجه منه

19) تبرير:
تكون متساوية أحيانا تتساوي قياسات الأقواس عندما يكون الوتران متعامدين

20) اكتب:
حاصل ضرب طولي جزئي أحد الوترين المتقاطعين يساوي حاصل ضرب طولي جزئي الوتر الآخر

تدرب على الاختبار المعياري:

21) $x = 5.7$

22) إجابة مطولة:

a) $x + y = 360^\circ$

$y - x = 140^\circ$

b) $x = 110^\circ$

$y = 250^\circ$

مراجعة تراكمية:

23) نسيج:

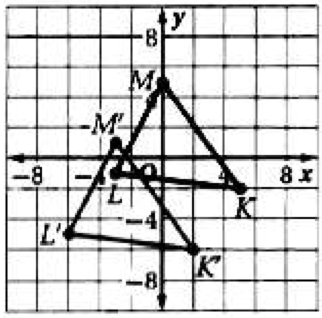
$38^\circ = (116 - \widehat{GD})$

$78^\circ = \widehat{GD}$

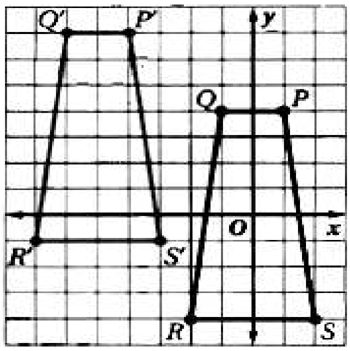
الزاويه GCD = الزاوية BCH

$m\widehat{BH} = 141^\circ$

هندسة إحداثية:



(24



(25

استعد للدرس اللاحق:

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي علم ميله ومقطع Y له في كل مما يأتي:

(26 $Y = 3X - 4$

(27 $Y = 2X + 8$

(28 $Y = \frac{5}{8}X - 6$

(29 $Y = \frac{2}{9}X + \frac{1}{3}$

(30 $Y = -X - 3$

(31 $Y = -\frac{1}{12}X + 1$

8-8 استكشاف: معمل الحاسبة البيانية: معادلة الدائرة

تحليل النتائج:

١) العددان المضافان أو المطروحان إلى أو من X,Y يتغيران في المعادلة مع تغيير موقع مركز الدائرة

٢) يتغير العدد المربع الذي يقع وحده في أحد طرفي المعادلة كلما تغير نصف القطر

3) $X^2 + Y^2 = 16$
لقد تحرك مركز الدائرة إلي نقطة الأصل وتغير نصف قطرها إلى 4 سم

4) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
في المعادلة يتم طرح قيمة الإحداثي x من x وقيمة الإحداثي y من y والعدد المربع في هذه الصيغة يمثل نصف قطر الدائرة

8-8 معادلة الدائرة

تحقق

(1A $(X - h)^2 + (Y - k)^2 = r^2$ — معادلة الدائرة

$(X - 0)^2 + (Y - 0)^2 = r^2$ — $(h,k) = (0,0)$, $r = \sqrt{10}$

$X^2 + Y^2 = 10$ — بالتبسيط

(1B $(X - h)^2 + (Y - k)^2 = r^2$ — معادلة الدائرة

$(X - 4)^2 + (Y + 1)^2 = r^2$ — $(h,k) = (4,-1)$, $r = 4$

$(X - 4)^2 + (Y + 1)^2 = 16$ — بالتبسيط

(2A $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$R = 8$

$(X-5)^2 + (Y-4)^2 = 64$

(2B $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$R = 5.83$

$(X + 3)^2 + (Y + 5)^2 = 34$

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاه معادلتها في كل مما يأتي:

3A) $R = 2$

مركز الدائرة عند النقطة (0,0)

3B) $R = 5$

مركز الدائرة عند النقطة (-4,7)

4) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$

تأكد:

اكتب معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

1) $(x - 9)^2 + y^2 = 25$

2) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 49$

3) $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$R = 2.83$

$X^2 + y^2 = 8$

4) $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$R = 9.22$

$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 85$

5) $r = 2$

مركز الدائرة عند النقطة(2,1)

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$

6) $r = 3.61$

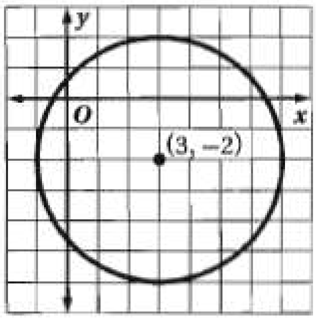
مركز الدائرة عند النقطة(3,-4)

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 13$

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كل مما يأتي ثم مثلها بيانيا:

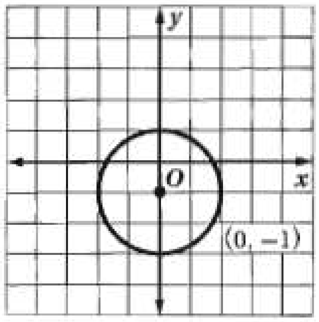
7) $r = 4$

مركز الدائرة عند النقطة (3,-2)



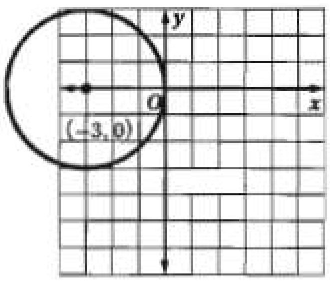
8) $r = 2$

مركز الدائرة عند النقطة (0,-1)



9) $r = 3$

مركز الدائرة عند النقطة (-3,0)



10) اتصالات:

موقع البرج الآخر عند النقطة (3,4)

معادلة الدائرة هي $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

تدرب وحل المسائل:

اكتب معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

11) $x^2 + y^2 = 16$

12) $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 49$

13) $(x + 2)^2 + y^2 = 64$

14) $(x - 8)^2 + (y + 9)^2 = 11$

15) $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$R = 3$

$(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 9$

16) $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$R = 5$

$(x - 3)^2 + y^2 = 25$

17) $r = 3$

مركز الدائرة عند النقطة $(-5,-1)$

$(x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 9$

18) $r = 4.2$

مركز الدائرة عند النقطة $(3,3)$

$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 18$

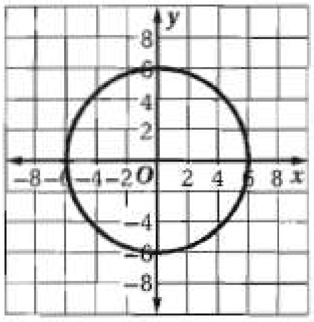
19) طقس:

معادلة الحلقة الثالثة هي $x^2 + y^2 = 2025$

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كل مما يأتي:

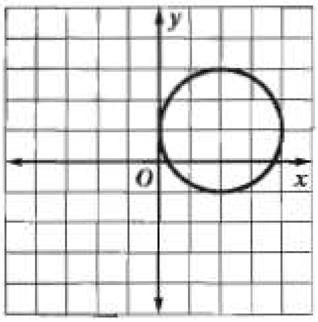
20) $r = 6$

مركزها $(0,0)$



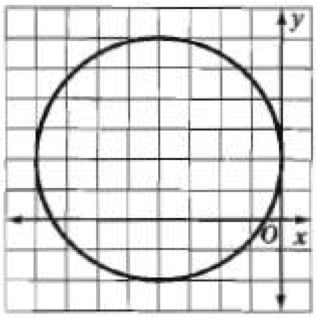
21) $r = 2$

مركزها $(2,1)$



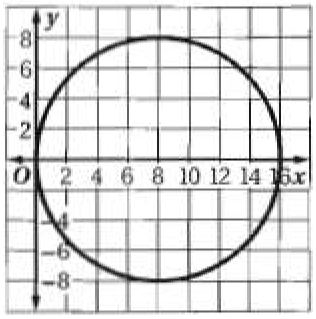
22) $r = 4$

مركزها $(-4,2)$



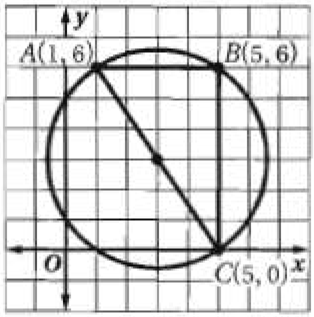
$r = 8$ (23

مركزه ا $(8,0)$

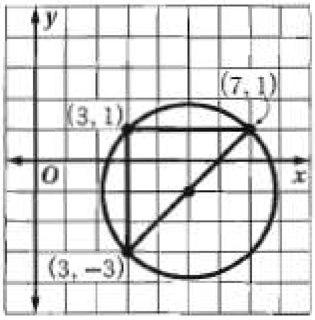


اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط المعطاة في كل من السؤالين الآتيين:

$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 13$ (24



$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 8$ (25



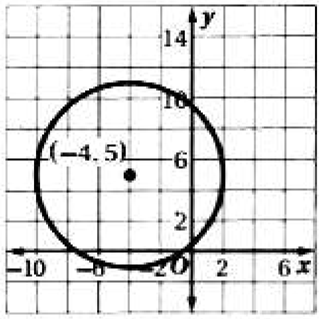
26) صواريخ:

$X^2 + y^2 = 810000$ (a

$r = 3000$ ft (b

27) خدمة التوصيل:

a) $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 36$



b) تمثل الدائرة حدود منطقة خدمة التوصيل المجاني تحصل المنازل الواقعة ضمن هذه الدائرة على خدمة التوصيل المجاني بما أن منزل خالد الواقع عند (0,0) يقع خارج هذه الدائرة فلن يستفيد خالد من خدمة التوصيل المجاني

28) $r = 5$

مركزها $(-3,1)$

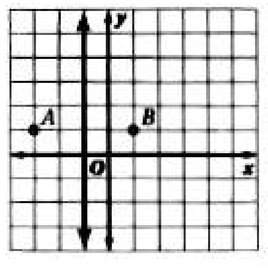
29) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 36$

30) تمثيلات متعددة:

a) جدوليا:

x	y
-1	-3
-1	-1
-1	0
-1	2
-1	4

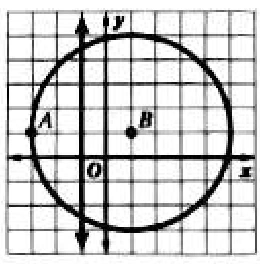
b) بيانيا:



c) لفظيا:

مستقيم، وهو المنصف للقطعة الواصلة بين هاتين النقطتين

d) بيانيا:



e) لفظيا:

المحل الهندسي للنقاط في المستوى التي تبعد مسافات متساوية عن نقطة معلومة هو دائرة والمحل الهندسي للنقاط التي تبعد مسافات متساوية من النقطتينA,B وتبعد مسافةAB عن B هو تقاطع المحل الهندسي للنقاط التي تبعد مسافات متساوية عن A,B والمحل الهندسي للنقاط التي تبعد مسافة AB عن B ويمثل المحل الهندسي المركب بيانيا بنقطتين

مسائل مهارات التفكير العليا:

(31

العبارات	(المبررات)
1) $\frac{y-r}{x}$	ميل $\overline{AC}$
2) $\frac{y-(-r)}{x}=\frac{y+r}{x}$	ميل $\overline{CB}$
3) $\frac{y-r}{x}\cdot\frac{y+r}{x}=\frac{y^2-r^2}{x^2}$	بالضرب
4) $=\frac{y^2-(x^2+y^2)}{x^2}$	$r^2=x^2+y^2$
5) $=\frac{y^2-x^2-y^2}{x^2}$	$-(x^2+y^2)=-x^2-y^2$
6) $\frac{-x^2}{x^2}=-1$	بالتبسيط

بما أن حاصل ضرب ميلي $\overline{AC}$ و $\overline{CB}$ يساوي -1، فإن $\overline{AC}\perp\overline{CB}$ و $\angle ACB$ قائمة .

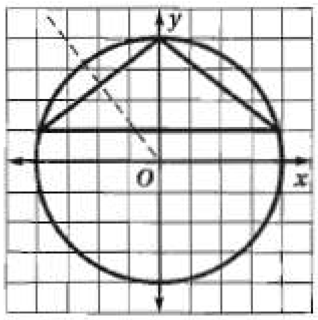
32) تبرير:

$(X - 8)^2 + (Y- 2)^2 = 16$

الدائرة الأولى يقع مركزها عند (5,-7) إذا ازحنا الدائرة 3 وحدات إلى اليمين و 9 وحدات إلي الأعلى سيكون المركز الجديد للدائرة (8,2) وتصبح معادلتها

$(X - 8)^2 + (Y - 2)^2 = 16$

(33



34)اكتب:

الدائرة هي المحل الهندسي لكل النقاط في المستوي الإحداثي التي تبعد مسافات متساوية (نصف القطر) عن نقطة معطاه(المركز) ويمكن اشتقاق معادلة الدائرة من صيغة المسافة بين نقطتين باستخدام النقطة المعطاة ونصف القطر المعطى أيضا

تدرب على الاختبار المعياري:

35) $(X - 6)^2 + (Y- 5)^2 = 5^2$

36) النقطة التي تقع على الدائرة (-4,4)

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة X في كل مما يأتي:

37) $8X = 4 \times 6$

$X = 3$

38) $6X = 3 \times 12$

$X = 6$

39) $9X = 4(X + 7)$

$X = 5.6$

دليل الدراسة والمراجعة

*

اختبار المفردات:

بين ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، إذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه، لتجعل الجملة صحيحة:

١) خطأ، وتر

٢) صحيحة

٣) صحيحة

٤) خطأ، القوس الأصغر

٥) صحيحة

٦) خطأ، نقطة التماس

٧) خطأ، نقطتين

٨) خطأ متطابقتين

8-1 الدائرة ومحيطها

عد إلى $D \odot$ في الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة 9-11 :

٩) $\odot D$

١٠) DM أو DP

١١) LN

أوجد القطر ونصف القطر للدائرة المعطى محيطها في كل مما يأتي، مقرباً إجابتك إلى أقرب جزء من مئة:

١٢) 13.69 cm , 6.84 cm

١٣) 8.5 yd , 4.25 yd

١٤) 34.54 ft , 17.27 ft

١٥) 71.9 mm , 35.95 mm

8-2 قياس الزوايا والأقواس

أوجد قيمة x° في كل من السؤالين الآتيين:

١٦) 163°

١٧) 130°

١٨) كتب:

a) 100.8

b) 18°

c) قوس أصغر

8-3 الأقواس والأوتار

١٩) 8

أوجد كل قياس مما يأتي مقرباً إجابتك إلى أقرب جزء من مئة:

٢٠) 131°

٢١) 8.94

٢٢) بستنه: 50.4°

8-4 الزوايا المحيطية

اوجد كلا من القياسين الآتيين:

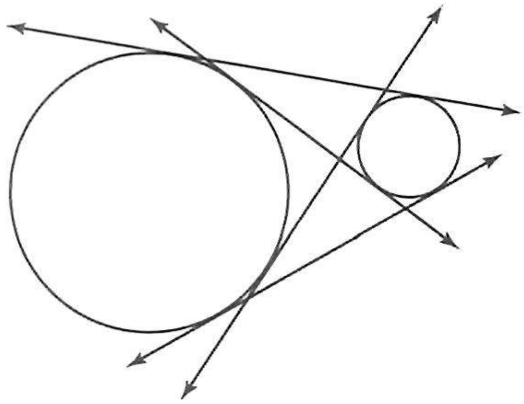
٢٣) 109°

٢٤) 56°

٢٥) شعارات: 42°

8-5 المماسات

٢٦) خيال علمي:



٢٧) $x= 10$, $y = 12.6$

8-6 القاطع والمماس وقياسات الزوايا

أوجد القياسين الآتيين، مفترضاً أن القطع المستقيمة التي تبدو مماسات للدائرة هي مماسات فعلاً:

٢٨) 97°

٢٩) 56°

٣٠) تصوير: 140°

8-7 قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

اوجد قيمة x في كل من السؤالين الآتيين:

٣١) 9

٣٢) 4

٣٣) علم الآثار: 19.1 in

8-8 معادلة الدائرة

اكتب معادلة الدائرة في كل مما يأتي:

٣٤) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$

٣٥) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 49$

٣٦) أخشاب: نصف قطر الدائرة يساوي 15 + 19 ويساوي 34 in، ومركزها (h,k)

هو (0 , 0).

إذن معادلة الدائرة هي $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 34^2$ أو $x^2 + y^2 = 34^2$.

* اختبار الفصل

١) برك سباحة: 79 ft

٢) 32Π

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

٣) 23°

٤) 95°

٥) 4.1 in

٦) 3

٧) B

٨) 9

٩) A

١٠) لا، لأن EFG ليس مثلثاً قائم الزاوية، إذن الزاوية G ليست قائمة ولا يمكن أن يكون FG مماساً للدائرة.

١١) A

١٢) 58

أوجد كلا من القياسات الآتية:

١٣) 77°

١٤) $\frac{1}{2}$

١٥) أزهار: $x^2 + y^2 = 9$

* الإعداد للاختبارات المعيارية

تمارين ومسائل

١) D

٢) G

* اختبار معياري

أسئلة الاختيار من متعدد:

أقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على نموذج الإجابة:

١) B

٢) B

٣) C

٤) C

٥) B

٦) A

أسئلة ذات إجابات قصيرة:

اكتب إجابتك على نموذج الإجابة:

٧) نعم، الرتبة 2

٨) 22.2 cm

٩) 8

١٠) 3

١١) 7.5

١٢) 11

أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك على نموذج الإجابة مبيناً خطوات الحل

١٣) .

١٤) (1 , -3)

١٥) 3 وحدات

١٦) $(y - 1)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$