الفصل الأول: تحليل الدوال

التهيئة

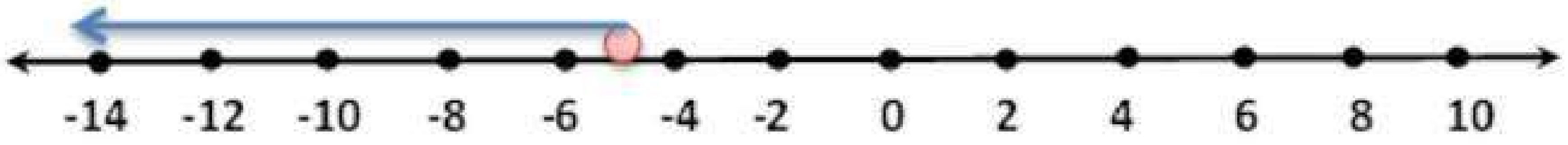
للفصل (1)

مثل كلاً من المتباينات الآتية على خط الاعداد: -

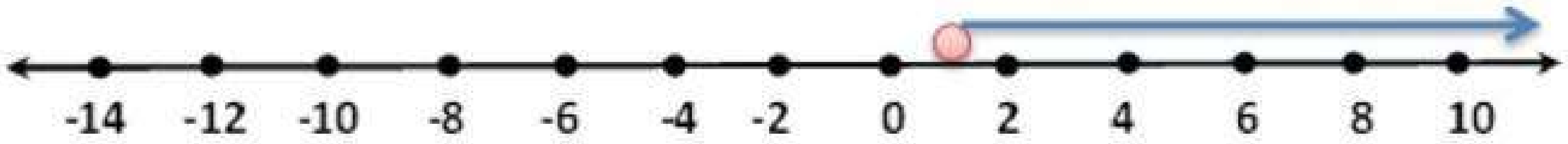
(1) $x > -3$

(2) $x \leq -2$

(3) $x \leq -5$



(4) $x \geq 1$



(5) $x \leq 7$

(6) $x > -4$

حل كلاً من المعادلات الآتية بالنسبة إلى y :-

(7) $y - 3x = 2$

$y = 2 + 3x$

(8) $y + 4x = -5$

$y = -5 - 4x$

(9) $2x - y^2 = 7$

(10) $y^2 + 5 = -3x$

$$y^2 = 2x - 7$$
$$y = \pm\sqrt{2x-7}$$

(11) $9 + y^3 = -x$

$$y^3 = -x - 9$$
$$y = \sqrt[3]{-x-9}$$

$$y^2 = -3x - 5$$
$$y = \pm\sqrt{-3x-5}$$

(12) $y^3 - 9 = 11x$

$$y^3 = 11x + 9$$
$$x = \sqrt[3]{11x+9}$$

---

(12) حلوى:

$$12D = n$$
$$D = \frac{n}{12}$$

$$n = 312$$
$$\therefore D = \frac{n}{12} = \frac{312}{12} = 26$$

عدد العبوات الكرتونية = 26 عبوة

أوجد قيمة كل من العبارات الآتية عند القيمة المعطاة للمتغير بجانبها:-

(14) $3y - 4 @ = 2$

$$3 \times 2 - 4 = 6 - 4$$
$$= 2$$

(15) $2b + 7 @ = -3$

$$2 \times -3 + 7 = -6 + 7$$
$$= 1$$

(16) $x^2 + 2x - 3 @ = -4a$

$$(-4a)^2 + 2 \times (-4a) - 3$$
$$16a^2 - 4a - 3$$

(17) $5z - 2z^2 + 1 @ = 5x$

$$5 \times (5x) - 2(5x)^2 + 1 =$$
$$25x - 50x^2 + 1$$

(18) $-4c^4+7, c=7a^2$

$$-4\left(7a^2\right)^2+7$$
$$=-196a^4+7$$

(19) $2+3p^2, p=-5+2n$

$$2+3\left(-5+2n\right)^2$$
$$=2+3\left(25-20n+4n^2\right)$$
$$=2+75-60n+12n^2$$
$$=77-60n+12n^2$$

(20) درجة الحرارة:

$$c=\frac{5}{9}\left(F-32\right)$$
$$F=73^{\circ}f$$
$$c=\frac{5}{9}\left(73-32\right)$$
$$c=22.8^{\circ}c$$

(1 – 1) الدوال

تحقق من فهمك

(1A) $\{1,2,3,4,5,.........\}$

$$\{x\,|\,x\geq 1, x\in N\}$$

(1B) $X\leq -3$

$$\{x\,|\,x\leq -3, x\in R\}$$

(1C) $-1 \le X \le 5$

$$\{X \mid -1 \le X \le 5, X \in R\}$$

(2A) $-4 \le y < -1$

$$[-4, -1]$$

(2B) $a \ge -3$

$$[-3, \infty)$$

(3c) $x < -2, x > 9$

$$(-\infty, -2) \cup (9, \infty)$$

(3A) دالـــــــــة: لأن كل قيمة لــ x بقيمة واحدة لــ y ؛ إذ لا يمكن للاستهلاك الشهري الحصول على قيميتين مختلفتين في شهر واحد لذا فإن y تمثل دالـــــة في x

(3B) ليـــــست دالـــــــة: لأنه يوجد x مرتبطة بقيمتين من y وعليه فإن y لا تمثل دالـــــة في x

(3C) دالــــــــة: لأن أي خط رأسي يقطع التمثيل البياني في نقطة واحدة فقط

(3D) دالـــــــــة: لأنه عند حل المعادلة بالنسبة لــ y نجد ان كل قيمة لــ x ترتبط بقيمة واحدة لــ y

$$f\left(x\right)=\frac{2x+3}{x^2-2x+1}$$ **(4A)**

$$f\left(12\right)=\frac{2\times\left(12\right)+3}{\left(12\right)^2-2\times\left(12\right)+1}$$
$$=\frac{24+3}{144-24+1}=\frac{27}{121}$$

$$f\left(x\right)=\frac{2x+3}{x^2-2x+1}$$ **(4B)**

$$f\left(6x\right)=\frac{2\times\left(6x\right)+3}{\left(6x\right)^2-2\times\left(6x\right)+1}$$
$$=\frac{12x+3}{36x^2-12x+1}$$

$$f\left(x\right)=\frac{2x+3}{x^2-2x+1}$$ **(4c)**

$$f\left(-3a+8\right)=\frac{2\left(-3a+8\right)+3}{\left(-3a+8\right)^2-2\left(-3a+8\right)+1}$$
$$=\frac{-6a+16+3}{9a^2-48a+64+6a-16+1}$$
$$=\frac{-6a+19}{9a^2-42a-49}$$

$$f\left(x\right)=\frac{5x-2}{x^2+7x+12}$$ **(5A)**

$$\left\{x\,\middle|\,x\neq-3, x\neq-4, x\in R\right\}$$

$$h(a)=\sqrt{a^2-4}$$ (5B)

$$(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$$

$$g(x)=\frac{8x}{\sqrt{2x+6}}$$ (5c)

$$(-3,\infty)$$

---

(6) سرعة

$$v(t)=\begin{cases} 4t & , 0\le t\le 15 \\ 60 & , 15<t<240 \\ -6t+1500 & , 240\le t\le 250 \end{cases}$$

(6A)

$$v(t)=4t$$
$$\therefore v(5)=4\times 5=20\,mi/h$$

(6B)

$$v(t)=4t$$
$$\therefore v(15)=4\times 15=60\,mi/h$$

(6c)

$$\begin{aligned} v(t) &= -6t+1500 \\ \therefore v(245) &= -6\times 245+1500 \\ &= -1470+1500 \\ &= 60\,mi/h \end{aligned}$$

تدرب وحل المسائل

(1) $x > 50$

$$= \{x \mid x > 50, x \in R\}$$
$$= [50, \infty)$$

---

(2) $x < -13$

$$= \{x \mid x < -13, x \in R\}$$
$$= (-\infty, -13)$$

---

(3) $x \leq -4$

$$= \{x \mid x \leq -4, x \in R\}$$
$$= (-\infty, -4]$$

---

(4) $\{-4, -3, -2, -1, \ldots\ldots\}$

$$= \{x \mid -4 \leq x, x \in Z\}$$

---

(5) $-31 < x \leq 64$

$$= \{x \mid -31 < x \leq 64, x \in R\}$$
$$= (-31, 64]$$

---

(6) $x > 21 \quad x \quad$ أو < 19

$$= \left\{ x \,\middle|\, x < -19 \quad R \quad > 21 , \quad \in \; x x \right\}$$
$$= (-\infty, -19) \cup (21, \infty)$$

(7) $x \geq 67 \quad x \quad$ أو ≤ 61

$$= \left\{ x \,\middle|\, x \leq 61 \quad R \quad \geq 67 , \quad \in \; x x \right\}$$
$$= (\infty, 61] \cup [67, \infty)$$

(8) $x > 86 \quad x \quad$ أو ≤ 45

$$= \left\{ x \,\middle|\, x \leq -45 \quad R \quad > 86, \quad \in \; x x \right\}$$
$$= (-\infty, -45] \cup (86, \infty)$$

(9) المضاعفات الموجبة للعدد 5

$$\left\{ x \,\middle|\, x = 5n, n \in N \right\}$$

(10) $x \geq 32$

$$= \left\{ x \,\middle|\, x \geq 32, x \in R \right\}$$
$$= [32, \infty)$$

(11) دالـــــــــــــــة لأن كل قيمة لـــ x بقيمة واحدة لـــ y ؛حيث أن ارقام الحسابات لايمكن أن تتشابة

(12) ليـــــست دالـــــــــة: لانه يوجد x مرتبطة بقيمتين من y وعليه فإن y لا تمثل دالـــــة في x

(13) دالـــــــــــــــة لأن كل قيمة لـــ x بقيمة واحدة لـــ y

(14) دالـــــــــــــــة لأن كل قيمة لـــ x بقيمة واحدة لـــ y

(15) دالـــــــــــــــة لأن كل قيمة لـــ x بقيمة واحدة لـــ y

(16) ليست دالـــــــة لأن كل قيمة لـــ x لها قيمتين من y

(17) ليست دالـــــــة لأن أي خط رأسي يقطع التمثيل البياني في نقطتين؛ أى يوجد لبعض قيم x قيمتين لــــ y

(18) دالـــــــة لأن أي خط رأسي يقطع التمثيل البياني في نقطة واحدة فقط

---

(19) $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$

(a)
$$\begin{aligned} g(9) &= 2(9)^2 + 18\times 9 - 14 \\ &= 2\times 81 + 162 - 14 \\ &= 162 + 162 - 14 \\ &= 310 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} g(3x) &= 2(3x)^2 + 18\times 3x - 14 \\ &= 2\times 9x^2 + 54x - 14 \\ &= 18x^2 + 54x - 14 \end{aligned}$$

$$g(1+5m)=2(1+5m)^2+18\times(1+5\mathrm{m})-14 \qquad (c)$$
$$=2\times(1+10m+25m^2)+18+90m-14$$
$$=2+20m+50m^2+18+90m-14$$
$$=50m^2+110m+6$$

$$h(\mathrm{y})=-3\mathrm{y}^3-6y+9 \qquad \textbf{(20)}$$

$$h(4)=-3(4)^3-6\times4+9 \qquad (a)$$
$$=-3\times64-24+9$$
$$=-192-24+9$$
$$=-207$$

$$h(-2y)=-3(-2y)^3-6\times(-2\mathrm{y})+9 \qquad (b)$$
$$=-3\times(-8\mathrm{y}^3)+12y+9$$
$$=24y^3+12y+9$$

$$h(5b+3)=-3(5b+3)^3-6\times(5b+3)+9 \qquad (c)$$
$$=-3(125\mathrm{b}^3+225\mathrm{b}^2+135\mathrm{b}+27)-30\mathrm{b}-18+9$$
$$=-375\mathrm{b}^3-675\mathrm{b}^2-405\mathrm{b}-81-30b-18+9$$
$$=-375\mathrm{b}^3-675\mathrm{b}^2-435b-90$$

$$f(t)=\frac{4t+11}{3t^2+5t+1} \qquad \textbf{(21)}$$

$$f(-6)=\frac{4\times(-6)+11}{3(-6)^2+5\times(-6)+1} \qquad \text{(a)}$$
$$=\frac{-24+11}{3\times36-30+1}=\frac{-13}{79}$$

$$f(4t) = \frac{4\times 4t + 11}{3(4t)^2 + 5(4t) + 1} \qquad \text{(b)}$$

$$= \frac{16t + 11}{48t^2 + 20t + 1}$$

$$f(3-2a) = \frac{4(3-2a)+11}{3(3-2a)^2 + 5(3-2a)+1} \qquad \text{(c)}$$

$$= \frac{12-8a+11}{3(9-12a+4a^2)+15-10a+1}$$

$$= \frac{23-8a}{18-36a+12a^2+16-10a} = \frac{23-8a}{12a^2-46a+34}$$

$$g(x) = \frac{3x^3}{x^2+x-4} \qquad \textbf{(22)}$$

$$g(-2) = \frac{3(-2)^3}{(-2)^2+(-2)-4} \qquad \text{(a)}$$

$$= \frac{3\times -8}{4-2-4} = \frac{-24}{-2} = 12$$

$$g(5x) = \frac{3(5x)^3}{(5x)^2+5x-4} \qquad \text{(b)}$$

$$= \frac{375x^3}{25x^2+5x-4}$$

$$g(8-4b)=\frac{3(8-4b)^3}{(8-4b)^2+(8-4b)-4}$$ (c)

$$=\frac{3(512-768b+384b^2-64b^3)}{(64-64b+16b^2)+4-4b}$$

$$=\frac{1536-2304b+1152b^2-192b^3}{68-68b+16b^2}$$

$$g(m)=3+\sqrt{m^2-4}$$ **(23)**

$$g(-2)=3+\sqrt{(-2)^2-4}$$ (a)

$$=3+\sqrt{4-4}=3$$

$$g(3m)=3+\sqrt{(3m)^2-4}$$ (b)

$$=3+\sqrt{9m^2-4}$$

$$g(4m-2)=3+\sqrt{(4m-2)^2-4}$$ (c)

$$=3+\sqrt{(16m^2-16m+4)-4}$$

$$=3+\sqrt{16m^2-16m}$$

$$=3+4\sqrt{m^2-m}$$

$$t(x)=5\sqrt{6x^2}$$ **(24)**

$$t(-4)=5\sqrt{6(-4)^2}=5\sqrt{6\times 16}$$ (a)

$$=20\sqrt{6}$$

$$t(2x) = 5\sqrt{6(2x)^2} \qquad \text{(b)}$$
$$= 5\sqrt{6 \times 4x^2}$$
$$= 10|x|\sqrt{6}$$

$$t(7+n) = 5\sqrt{6(7+n)^2} \qquad \text{(c)}$$
$$= 5|7+n|\sqrt{6}$$

---

(25) مبيعات:

$$f(t) = 24t^2 - 93t + 78 \qquad (a)$$

$$f(1) = 24 \times (1)^2 - 93 \times (1) + 78$$

= 9 ملايين

$$f(t) = 24t^2 - 93t + 78 \qquad (b)$$

$$f(5) = 24 \times (5)^2 - 93(5) + 78$$

= 213ملايين

(c) اعتقد ان القاعدة $f(t)$ أكثر دقة في السنوات الأخيرة والتي حققت أعلى مبيعات، حيث ان 213 قريبة 2Ä من 219 ، بينما أكبر 800Ä من 1

حدد مجال كل دالة مما يأتي:

(26) $$f(x) = \frac{8x+12}{x^2+5x+4}$$

$$(-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (-1, \infty)$$

---

(27) $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x - 40}$

$(-\infty, -5) \cup (-5, 8) \cup (8, \infty)$

(28) $g(a) = \sqrt{1 + a^2}$

$(-\infty, \infty)$

(29) $h(x) = \sqrt{6 - x^2}$

$\left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)$

---

(30) $f(a) = \dfrac{5a}{\sqrt{4a - 1}}$

$(0.25, \infty)$

---

(31) $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x+1}$

$(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$

---

(32) **فيزياء:**

T دالة في ℓ: لأن الطول لا يكون سالب مطلقاً

مجال الدالة $[0, \infty)$

أوجد $f(-5)$ و $f(12)$ لكل من الدالتين الاتيتين:

(33)

$$f(x) = -4x + 3$$

$$f(-5) = -4 \times (-5) + 3$$
$$= 20 + 3 = 23$$

$$f(x) = 3x^2 + 1$$

$$f(12) = 3(12)^2 + 1$$
$$= 3 \times 144 + 1$$
$$= 432 + 1 = 433$$

(34)

$$f(x) = \sqrt{x+6}$$

$$f(-5) = \sqrt{-5+6}$$
$$= \sqrt{1} = 1$$

$$f(x) = \frac{2}{x} + 8$$

$$f(12) = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{12}_{6}} + 8$$
$$= 8\frac{1}{6}$$

(35) عمل:

$$T(\mathrm{x}) = 2.1x$$
$$T(7000) = 2.1 \times 7000$$
$$= 14700$$

$$T(x) = 5000 + 2.4x$$
$$T(10000) = 5000 + 2.4 \times 10000$$
$$= 29000$$
$$T(x) = 8000 + 3x$$
$$T(50000) = 8000 + 3 \times 50000$$
$$= 158000$$

---

(36) دالة: لأن الخط الرأسي لا يقطع المنحنى في أكثر من مرة.

(37) لــيست دالـــة: لأن الخط الرأسي (محور y) يقطع التمثيل البياني في $(0,0)$ و $(0,-4)$

---

(38) رياضة:

(a)
$$D(t) = \begin{cases} 4t & , 0 \le t \le 0.6 \\ 20t & , 0.6 < t \le 6.2 \\ 6t & , 6.2 < t \le 10.7 \end{cases}$$

(b) مجال الدالة: $[0, 10.7]$

---

(39) هندسة:

(*a*)

$$r = \frac{c}{2\pi}$$

$$A = \cancel{\pi} \times \frac{c^2}{4\cancel{\pi^2}_{\pi}} = \frac{c^2}{4\pi}$$

$$A = \frac{c^2}{4\pi}$$

(*b*)

$$A(4) = \frac{4^2}{4\pi} = 1.27$$

$$A(0.5) = \frac{(0.5)^2}{4\pi} = 0.2$$

(c) كلما زاد المحيط زادت المساحة

(40) حسابات

$$\upsilon(\mathrm{t}) = 1800 - 30\mathrm{t}$$

مجال الدالة هو $D = \left\{t \mid 0 \le t \le 60, t \in N\right\}$

أوجد $f(\mathrm{a}), \mathrm{f(a+h)}, \frac{\mathrm{f(a+h)} + f(\mathrm{a})}{h}$ حيث $h \neq 0$ لكل مما يأتي:

(41) $f(\mathrm{x}) = -5$

$$f(\mathrm{a}) = -5$$

$$f(\mathrm{a+h}) = -5$$

$$\frac{f(\mathrm{a+h}) - f(\mathrm{a})}{h} = \frac{-5-(-5)}{h} = 0$$

$f(\mathrm{x}) = \sqrt{x}$ **(42)**

$$f(a) = \sqrt{a}$$

$$f(a+h) = \sqrt{a+h}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x+4}$ **(43)**

$$f(a) = \frac{1}{a+4}$$

$$f(a+h) = \frac{1}{a+h+4}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\dfrac{1}{a+h+4} - \dfrac{1}{a+4}}{h}$$

$$= \frac{a+4-a-h-4}{(a+h+4)(a+4)} \times \frac{1}{h}$$

$$= \frac{-\cancel{h}}{(a+h+4)(a+4)} \times \frac{1}{\cancel{h}}$$

$$= \frac{-1}{(a+h+4)(a+4)}$$

$f(x) = x^2 - 6x + 8$ **(44)**

$$f(a) = a^2 - 6a + 8$$

$$f(a+h) = (a+h)^2 - 6(a+h) + 8$$

$$= a^2 + 2ah + h^2 - 6a - 6h + 8$$

$$= a^2 + h^2 + 2ah - 6a - 6h + 8$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\cancel{a^2} + h^2 + 2ah \cancel{-6a} - 6h \cancel{+8} \cancel{-a^2} \cancel{+6a} \cancel{-8}}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(h + 2a - 6)}{\cancel{h}} = h + 2a - 6$$

$f(x) = -14x + 6$ **(45)**

$$f(a) = -14a + 6$$

$$f(a+h) = -14(a+h) + 6$$

$$= -14a - 14h + 6$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\cancel{-14a} - 14h \cancel{+6} \cancel{+14a} \cancel{-6}}{h}$$

$$= -14$$

$f(x) = x^3 + 9$ **(46)**

$$f(a) = a^3 + 9$$

$$f(a+h) = (a+h)^3 + 9$$

$$= a^3 + h^3 + 3ah^2 + 3ha^2 + 9$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\cancel{a^3} + h^3 + 3ah^2 + 3ha^2 \cancel{+9} \cancel{-a^3} \cancel{-9}}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(h^2 + 3ah + 3a^2)}{\cancel{h}} = h^2 + 3ah + 3a^2$$

$f(\mathrm{x}) = 5x^2$ **(47)**

$$f(a) = 5a^2$$

$$f(a+h) = 5(a+h)^2 = 5(a^2 + h^2 + 2ah)$$

$$= 5a^2 + 5h^2 + 10ah$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\cancel{5a^2} + 5h^2 + 10ah - \cancel{5a^2}}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(5h + 10a)}{\cancel{h}} = 5h + 10a$$

$f(\mathrm{x}) = x^3$ **(48)**

$$f(a) = a^3$$

$$f(a+h) = (a+h)^3$$

$$= a^3 + h^3 + 3ah^2 + 3ha^2$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\cancel{a^3} + h^3 + 3ah^2 + 3ha^2 - \cancel{a^3}}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(h^2 + 3ah + 3a^2)}{\cancel{h}} = h^2 + 3ah + 3a^2$$

---

(49) صناعة:

(a $A(\mathrm{L}) = \frac{L^2}{1.8}$

مجال الدالة هو: $[5, 11.5]$

(b $A(h) = 2.1h^2$

مجال الدالة هو: $[2.4, 5.5]$

(c $A = 52.9 \ \ in^2$

حدد ما إذا كانت y دالة في x أم لا.

(50) $x = |y|$

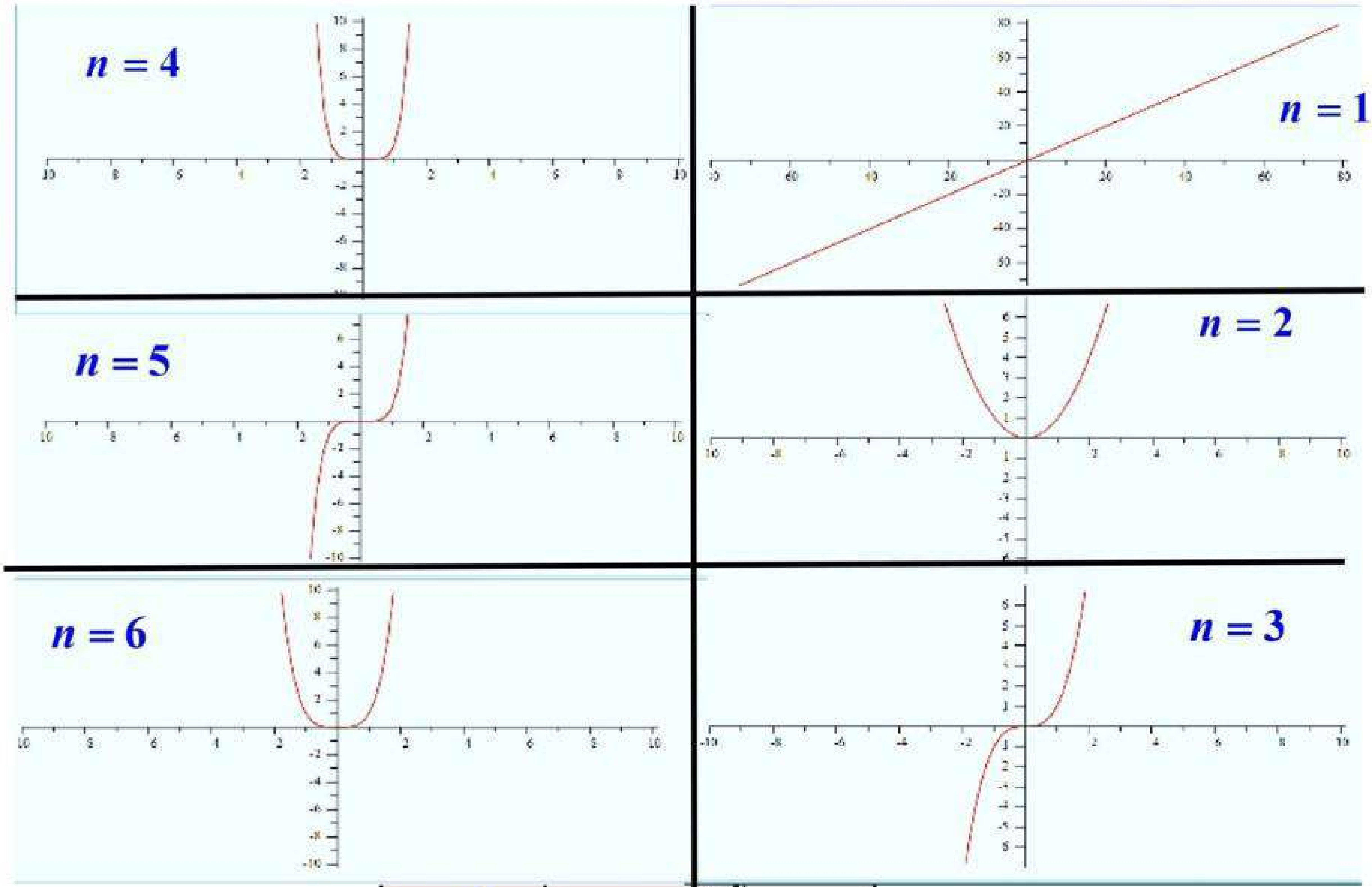
ليست دالة، لأن لكل قيمة x في المجال يوجد قيمتان y في المدى وعليه فإن y لا تمثل دالـــة في x

(51) $x = y^3$

دالة، لأن لكل قيمة x في المجال يوجد قيمة واحدة y في المدى وعليه فإن y تمثل دالـــــة في x

---

(a) (52)



n	المدى
1	$(-\infty,\infty)$
2	$[0,\infty)$
3	$(-\infty,\infty)$
4	$[0,\infty)$
5	$(-\infty,\infty)$
6	$[0,\infty)$

(c) **لفظياً**: يكون المدى $[0,\infty)$ إذا كانت n زوجية.

(d) لفظياً: يكون المدى $(-\infty, \infty)$ إذا كانت n فردية.

مسائل مهارات التفكير العليا:

(53) إكتشف الخطأ:

سليمان، المجال هو $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$ أو $\{x|x \neq -2, x \neq 2x \in R\}$

(54) المجال هو باستخدام رمز الفترة: $(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,5)\cup(5,\infty)$

المجال هو باستخدام طريقة الصفة المميزة: $\{x|x \neq -3, x \neq -1, x \neq 5, x \in R\}$

* افضل طريقة الصفة المميزة للمجموعة لأنه بدلاً من كتابة أربع فترات تقع ضمنها x تُكتب ثلاث قيم غير ممكنة لـ x، والمجموعة التي يمكن أخذ منها (x) ، أي أنه عند تحديد قيمة ما على فترات متعددة تكون الصفة المميزة للمجموعة أكثر فاعلية.

(55) تحد:

$$G\left(\cancel{x}^{5}+1\right)=\frac{G(x-2)G(x-1)+1}{G(x)}$$

$$G(6)=\frac{G(7)G(4)+1}{G(6)}$$

$$=\frac{4}{7}$$

تبرير:

(56) خطأ، ليس بالضرورة إرتباط كل عنصر من y بعنصر من x.

(57) خطأ، يمكن لعنصرين أو اكثر من x الارتباط بالعنصر نفسه من y.

(58) صحيحة.

اكتب:

(59) تكون العلاقة دالة إذا ارتبطت كل قيمة x من المجال (مدخلة)بقيمة y واحدة فقط من المدى (مخرجة).

(60) إذا ارتبط كل عنصر من المجال (إحداثى x) في مجموعة الازواج المرتبة بعنصر واحد من المدى (إحداثى y) تكون العلاقة دالة.

(61) إذا ارتبطت كل قيمة لـ x في الجدول بقيمة واحدة مختلفة لــ y تكون العلاقة دالــــة.

(62) إذا رسم خط رأسي عند أي قيمة x على التمثيل البياني وقطعه في نقطة واحدة تكون العلاقة دالة بأختبار الخط الرأسي.

(63) تربط بين الاحداثين y , x لكل زوج من الازواج المرتبة.

بسط كلاً مما يأتي:

(64) $\frac{2r-4}{r-2}$

$$\frac{2\cancel{(r-2)}}{\cancel{r-2}} = 2$$

---

(65) $\frac{r^2-7r-30}{r^2-5r-24}$

$$\frac{(r-10)\cancel{(r+3)}}{(r-8)\cancel{(r+3)}} = \frac{r-10}{r-8}$$

(66) $\frac{y}{4} - \frac{4y}{3x} + \frac{3y}{4x}$

$$\frac{3xy-16y+9y}{12x}=\frac{y(3x-16+9)}{12x}=\frac{y(3x-7)}{12x}$$

---

(67) $$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{16}}$$

$$\frac{\frac{4-a}{4a}}{\frac{16-a^2}{16a^2}}=\frac{4-a}{4a}\div\frac{(4-a)(4+a)}{16a^2}$$

$$=\frac{\cancel{4-a}^{\,1}}{\cancel{4a}_{\,1}}\times\frac{\cancel{16a^2}^{\,4a}}{\cancel{(4-a)}(4+a)}$$

$$=\frac{4a}{4+a}$$

---

(68) $$\frac{6x^2-11x+4}{6x^2+x-2}\cdot\frac{12x^2+11x+2}{8x^2+14x+3}$$

$$\frac{\cancel{(2x-1)}(3x-4)}{\cancel{(2x-1)}\cancel{(3x+2)}}\cdot\frac{\cancel{(4x+1)}\cancel{(3x+2)}}{\cancel{(4x+1)}(2x+3)}=\frac{3x-4}{2x+3}$$

حل كل من المعادلتين:

$$\frac{8}{x}=1+\frac{2}{x-2} \quad (69)$$

$$\frac{8}{x}=\frac{x-2+2}{x-2}$$

$$\therefore \frac{8}{x}=\frac{x}{x-2} \quad \rightarrow \quad \therefore x^2=8x-16$$

$$\therefore x^2-8x+16=0$$

وهي أولية ∴ مجموعة الحل = $x=4$, $x=-4$ =

$$x-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \quad (70)$$

$$x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$\frac{x+1}{x-3}-1\leq 2 \quad (71)$$

$$\frac{x+1}{x-3}\leq 2+1$$

$$\frac{x+1}{x-3}\leq 3 \rightarrow \therefore x+1\leq 3x-9$$

$$\therefore 1+9\leq 3x-x$$

$$\therefore 10\leq 2x \quad \rightarrow \quad \therefore 5\leq x$$

$$\frac{6}{x}+2\geq 0 \quad (72)$$

$$\frac{6}{x}\geq -2 \qquad \therefore 6\geq -2x$$

$$\therefore x\geq -3$$

تدريب على الاختبار

(73) c) كل دالة تمثل علاقة

(74) c) $x \geq \frac{3}{2}\ ,\ x \neq 5$

(1-2) تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

تحقق من فهمك

(1A)
$$\upsilon(10) = 0.002(10)^4 - 0.11(10)^3 + 1.77(10)^2 - 8.6 \times 10 + 31$$
$$= 20 - 110 + 177 - 86 + 31 = 32$$

= 32 مليون ريال

(1B) في بداية متابعة المستثمر (اليوم 0) وفي اليومين 9 , 15 .

تحقق من فهمك

(2A) المجـــــــــــال: $[-2,6)$

المـــــــــدى : $[0,4]$

(2B) المجـــــــــــال: $(-4,2) \cup (2,\infty)$

المـــــــــدى : $(-\infty,2) \cup \{6\}$

تحقق من فهمك

(3A) $f(0) = 0^3 + 0^2 - 6 \times 0 + 4 = 4$

(3B) $f(0) = \sqrt{0^2 + 6} = \sqrt{6}$

تحقق من فهمك

(4A) $f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 8x$

$$f(x) = 0$$

$$\therefore 3x^3 - 10x^2 + 8x = 0$$

$$\therefore x(3x^2 - 10x + 8) = 0$$

$$\therefore x(3x - 4)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ , } x = \frac{4}{3} \text{ or } x = 2$$

أي أن اصفار الدالة f هي $2 \text{ , } \frac{4}{3} \text{ , } 0$

(4B) $f(x) = \sqrt{4t + 1}$

$$f(x)=0$$
$$\therefore \sqrt{4t+1}=0$$
$$\therefore 4t+1=0$$
$$\therefore 4t=-1$$
$$\therefore t=\frac{-1}{4}$$

أي أن اصفار الدالة f هي $-\frac{1}{4}$

تحقق من فهمك

(5A) التحقق بيانياً: المنحنى متماثل حول محور y ، لأن لكل نقطة (x,y) على المنحنى يوجد

نقطة $(-x,y)$ على نفس المنحنى.

التحقق عددياً:

x	2	-2	3	-3
y	2	2	-3	3
(x,y)	$(2,2)$	$(-2,2)$	$(3,-3)$	$(-3,3)$

التحقق جبرياً:

$$f(x)=-x^2+6$$
$$f(-x)=-(-x)^2+6$$
$$=-x^2+6=f(x)$$

لـ $f(x)=f(-x)$ ∴ المنحنى متماثل حول محور y

(5B) التحقق بيانياً: المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لأن لكل نقطة (x,y) على المنحنى يوجد

نقطة $(-x,-y)$ على نفس المنحنى.

← المنحنى متماثل حول محور x ، لأن لكل نقطة (x,y) على المنحنى يوجد نقطة $(x,-y)$ على نفس المنحنى.

← المنحنى متماثل حول محور y ، لأن لكل نقطة (x,y) على المنحنى يوجد نقطة $(-x,y)$ على نفس المنحنى.

التحقق عددياً:

x	3	-3	4	-4
y	$4\pm$	$4\pm$	$3\pm$	$3\pm$
(x,y)	$(3,4)$ $(3,-4)$	$(-3,4)$ $(-3,-4)$	$(4,3)$ $(4,-3)$	$(-4,3)$ $(-4,-3)$

التحقق جبرياً:

$$x^2+y^2=25$$
$$f(-x,-y)=(-x)^2+(-y)^2=x^2+y^2$$
$$=f(x)$$

لـ $f(-x,-y)=f(x,y)$ ∴ المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

$$x^2+y^2=25$$
$$f(x,-y)=x^2+(-y)^2=x^2+y^2$$
$$=f(x)$$

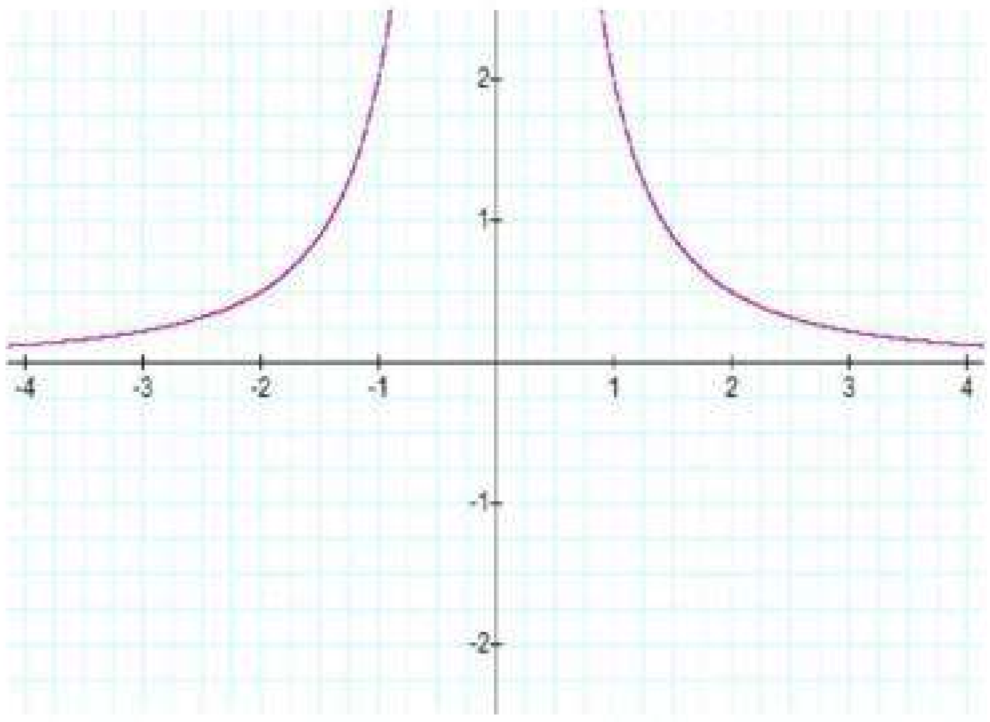
لـ $f(x,-y)=\mathrm{f}(x,y)$ ∴ المنحنى متماثل حول محور x

$$x^2+y^2=25$$

$$f(-x,y)=(-x)^2+y^2=x^2+y^2$$
$$=f(x)$$

لـ $f(-x,y)=f(x,y)$ ∴ المنحنى متماثل حول محور y

تحقق من فهمك

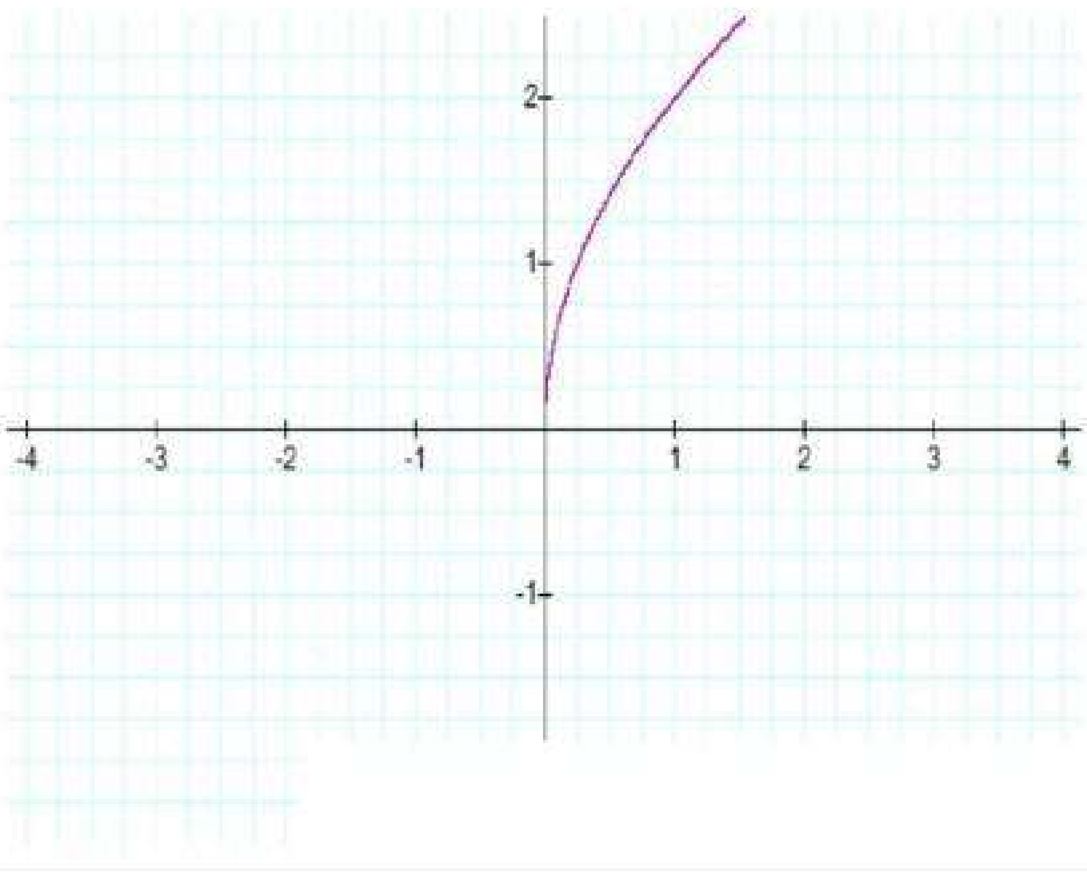


(6A) $f(x)=\frac{2}{x^2}$

من التمثيل البياني يتضح أن الدالة زوجية لأنها متماثلة حول المحور y

التحقق جبرياً:

$$f(-x)=\frac{2}{(-x)^2}=\frac{2}{x^2}=f(x)$$



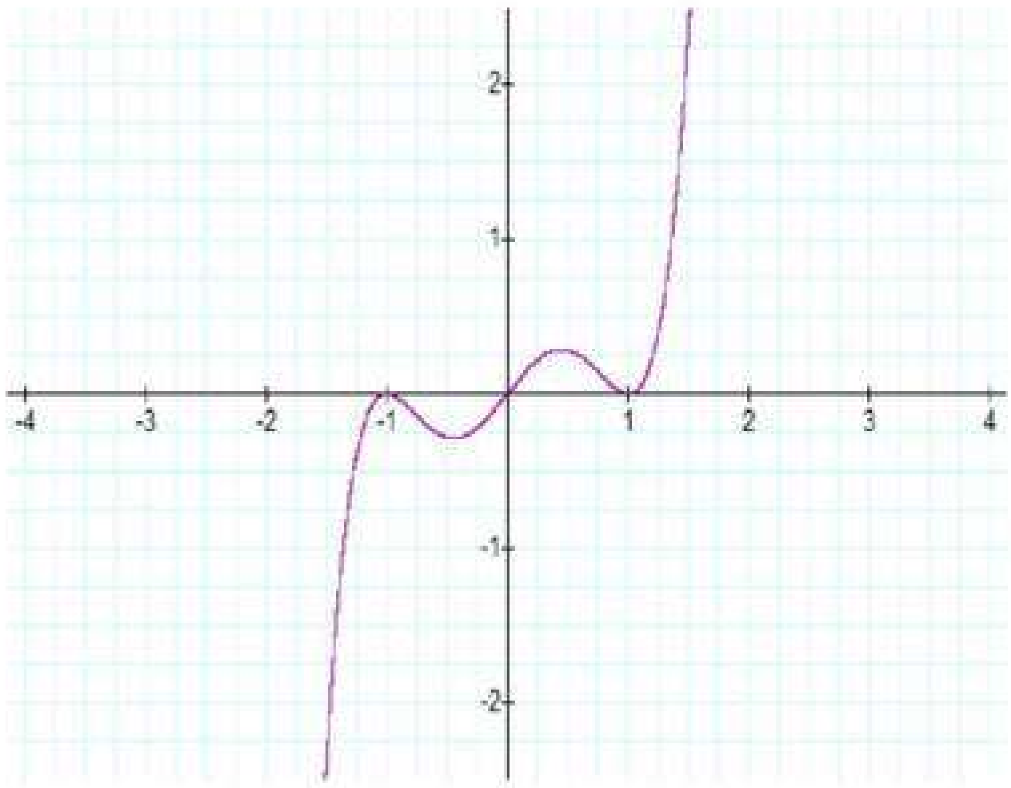
(6B) $g(x)=4\sqrt{x}$

من التمثيل البياني يتضح أن الدالة ليست زوجية وليست فردية

<u>التحقق جبرياً:</u>

$$f(-x) = 4\sqrt{-x} \neq f(x)$$

(6C $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$



من التمثيل البياني يتضح أن الدالة فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل

<u>التحقق جبرياً:</u>

$$f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x)$$
$$= -(x^5 - 2x^3 + x) = -f(x)$$

تدرب وحل المسائل

■ استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير القيم المطلوبة ثم تحقق من إجابتك جبرياً وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مائة إذا لزم ذلك:

(1) $g(x) = -5\sqrt{x} + 50$

$$g(6) = -5\sqrt{6} + 50 = 37.75 \qquad (a$$

$$g(12) = -5\sqrt{12} + 50 = 32.86 \qquad (b$$

$$g(19) = -5\sqrt{19} + 50 = 28.21 \qquad (c$$

$$g(x) = |x| + 2 \quad (2)$$

$$g(-8) = |-8| + 2 = 10 \qquad (a$$

$$g(-3) = |-3| + 2 = 5 \qquad (b$$

$$g(0) = |0| + 2 = 2 \qquad (c$$

$$p(t) = \begin{cases} -3 & ,t < 2 \\ t - 1 & ,t \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$p(-6) = -3 \qquad (a$$

$$p(2) = 2 - 1 = 1 \qquad (b$$

$$p(9) = 9 - 1 = 8 \qquad (c$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \quad (4)$$

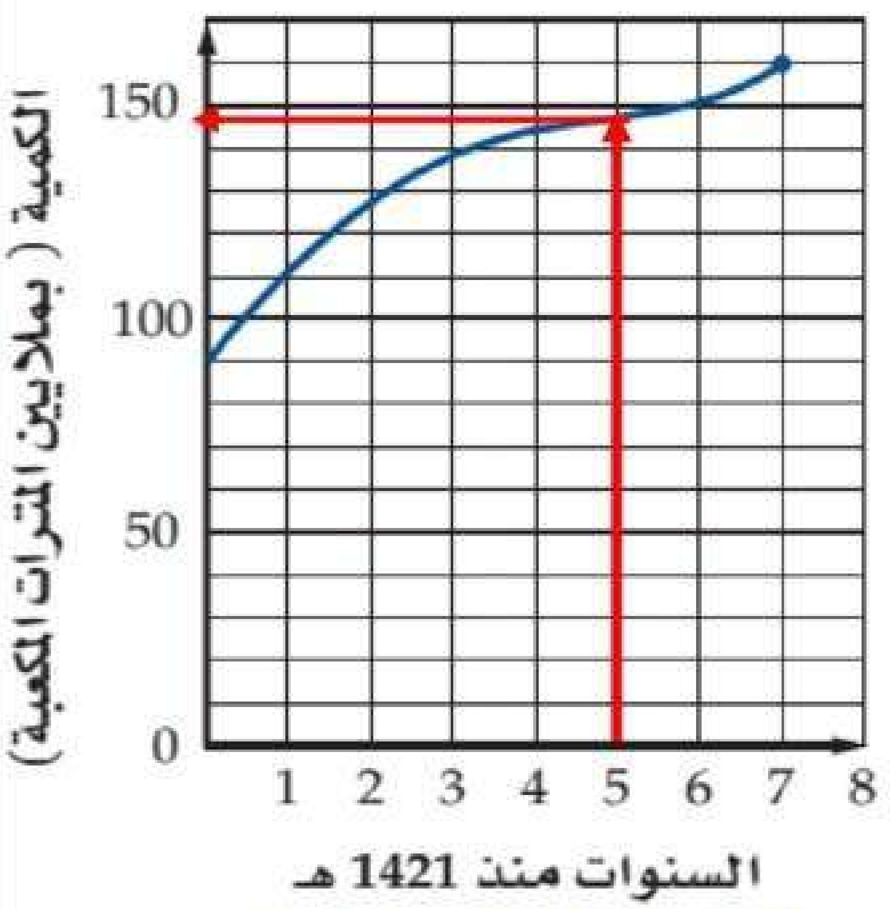
(a $$f(-3)=\frac{-3-1}{-3}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

(b $$f(0.5)=\frac{0.5-1}{0.5}=\frac{-0.5}{0.5}=-1$$

(c $$f(0)=\frac{0-1}{0}=\frac{-1}{0}$$ غير معروفة

---

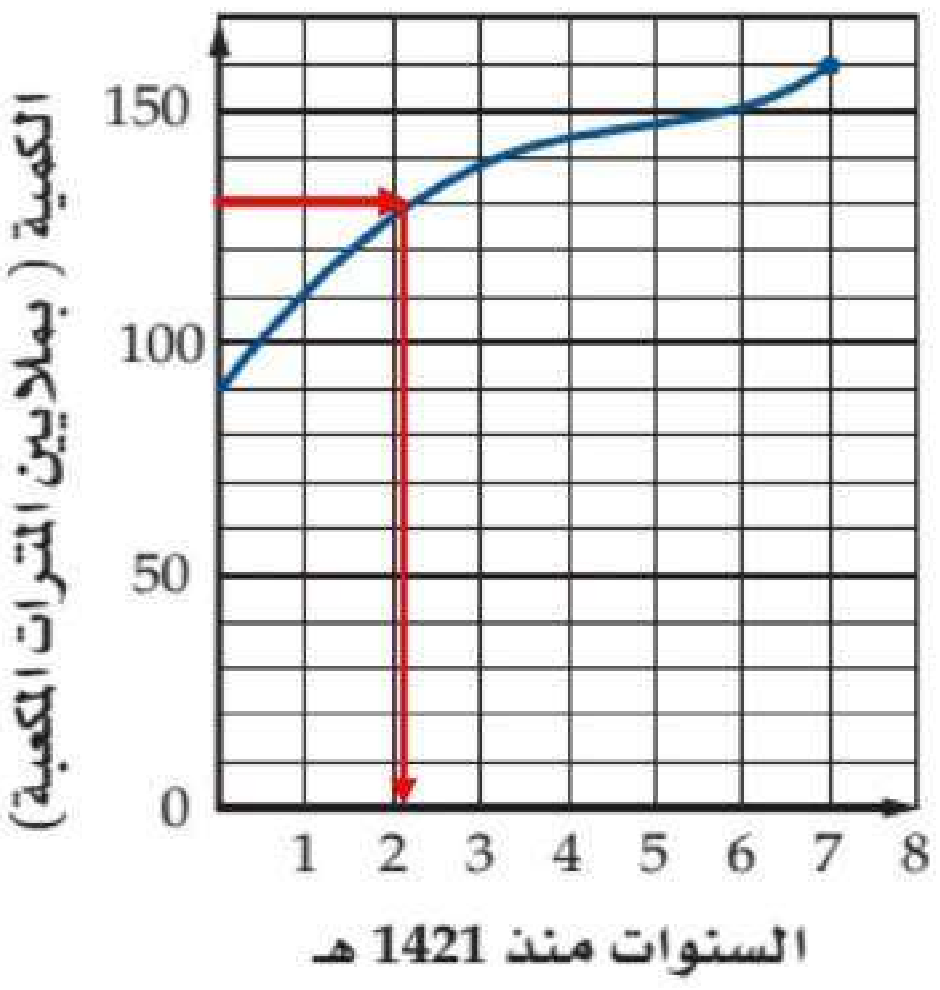
(5) مياه:



(a) 149 مليون متر مكعـــب

(b)

$$f(5)=0.0509(5)^4-0.3395(5)^3-2.2(5)^2+25.35\times 5+88.27$$
$$=149.395 \approx 149.4$$ مليون متر مكعب



(c) 1422 هـ

التحقق جبريا

$$f(2) = 0.0509(2)^4 - 0.3395(2)^3 - 2.2(2)^2 + 25.35 \times 2 + 88.27$$
$$= 128.2684 \approx 130$$

استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلاً مما يأتي لإيجاد كلاً من مجال الدالة ومداها:

(6) المجال = $\{x \mid x \in R\}$

المدى = $[-3, \infty)$

---

(7) المجال = $(-4, 4]$

المدى = $[-1, 6]$

---

(8) المجال = $[-5, \infty)$

المدى = $[-2, \infty)$

---

(9) المجال = $(-\infty, 7]$

المدى = $\{-1\} \cup (1, \infty)$

---

(10) هندسة:

a) النحاس: المجال = $\{x|-150 \le x \le 150, x \in R\}$

المدى = $\{y|y = 175\}$

الألومنيوم: المجال = $\{x|-150 \le x \le 150, x \in R\}$

المدى = $\{y|0.6 \le y \le 1.5, y \in R\}$

الزنك: المجال = $\{x|-150 \le x \le 150, x \in R\}$

المدى = $\{y|0.5 \le y \le 1.25, y \in R\}$

الفولاذ: المجال = $\{x|-150 \le x \le 150, x \in R\}$

المدى = $\{y|0.2 \le y \le 1.75, y \in R\}$

b) الطاقة عند الصفر السيليزي

النحاس: 1.75 جول

الألومنيوم: 1.2 جول

الزنك: 0.5 جول

الفولاذ: 1.5 جول

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لإيجاد مقطع المحور y وأصفار الدالة، ثم أوجد هذة القيم جبريا:

(11) $f(x)=\sqrt{x-1}$

لإيجاد مقطع y $f(0)=\sqrt{0-1}=\sqrt{-1}\notin R$

∴ لايوجد مقطع y

لإيجاد مقطع x $f(x)=\sqrt{x-1}=0$

$\therefore x-1=0 \quad \therefore x=1$

أصفار الدالة هي 1

---

(12) $f(x)=2x^3-x^2-3x$

لإيجاد مقطع y $f(0)=2(0)^3-(0)^2-3(0)=0$

مقطع y هو 0

$f(x)=2x^3-x^2-3x=0$

لإيجاد مقطع x $\therefore x(2x^2-x-3)=0 \quad \therefore x(2x-3)(x+1)=0$

$\therefore x=0 \;,\; x=\dfrac{3}{2} \;\; or \;\; x=-1$

أصفار الدالة هي -1 , $\dfrac{3}{2}$, 0.

---

(13) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

لإيجاد مقطع y $\quad f(0)=\sqrt[3]{0}=0$

مقطع y هو 0

لإيجاد مقطع x

$$f(x)=\sqrt[3]{x}=0$$
$$\therefore x=0$$

أصفار الدالة هي 0

---

(14) $f(x)=6x^2-x-2$

لإيجاد مقطع y $\quad f(0)=6(0)^2-(0)-2=-2$

مقطع y هو -2

لإيجاد مقطع x

$$f(x)=6x^2-x-2=0$$
$$\therefore (3x-2)(2x+1)=0$$
$$x=\frac{2}{3} \;\; or \;\; x=-\frac{1}{2}$$

أصفار الدالة هي. $\frac{2}{3}\ ,\ -\frac{1}{2}$

---

(15) $f(x)=x^3-3x+2$

لإيجاد مقطع y $f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$

مقطع y هو 2.

يتضح من التمثيل البياني أن أصفار الدالة هو 1 و 2−

الحل جبريا:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 + x - x$$
$$(x^3 - 4x) + x + 2$$
$$x(x^2 - 4) + (x + 2)$$
$$x(x - 2)(x + 2) + (x + 2)$$
$$(x + 2)\{x(x - 2) + 1|\}$$
$$(x + 2)(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$x + 2 = 0$ إذن $x = -2$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x - 1)(x - 1)$$

$x - 1 = 0$ إذن $x = 1$

أي صفري الدالة هما 1 و 2−

---

(16) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

$$f(0) = (0)^2 + 5(0) + 6 = 6$$ لإيجاد مقطع y

مقطع y هو 6

لإيجاد مقطع x

$$f(x) = x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$\therefore (x+2)(x+3) = 0$$
$$x = -2 \quad or \quad x = -3$$

أصفار الدالة هي -3 , -2.

استعمل التمثيل البياني لكل معادلة مما يأتي لإختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل

عزز إجابتك عدديا، ثم تحقق منها جبريا.

(17) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل

(18) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x

(19) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

(20) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل

(21) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

(22) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

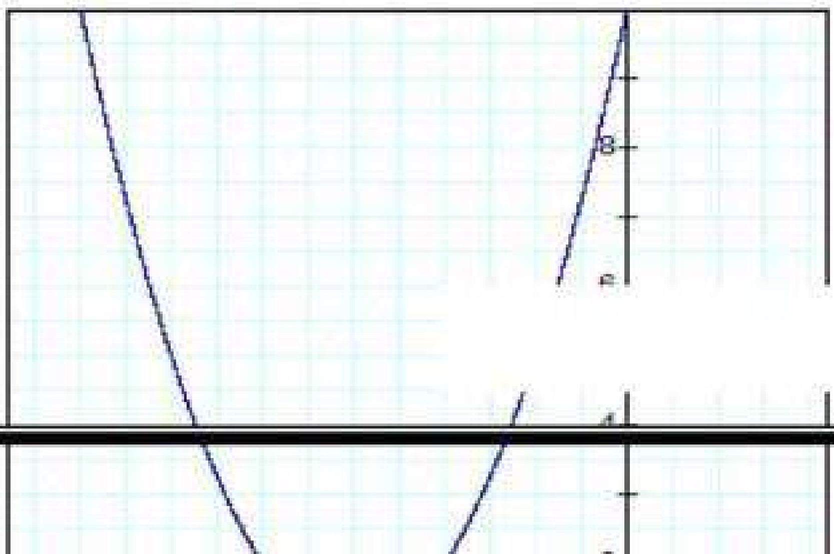
(23) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور y

(24) لا يوجد تماثل

---

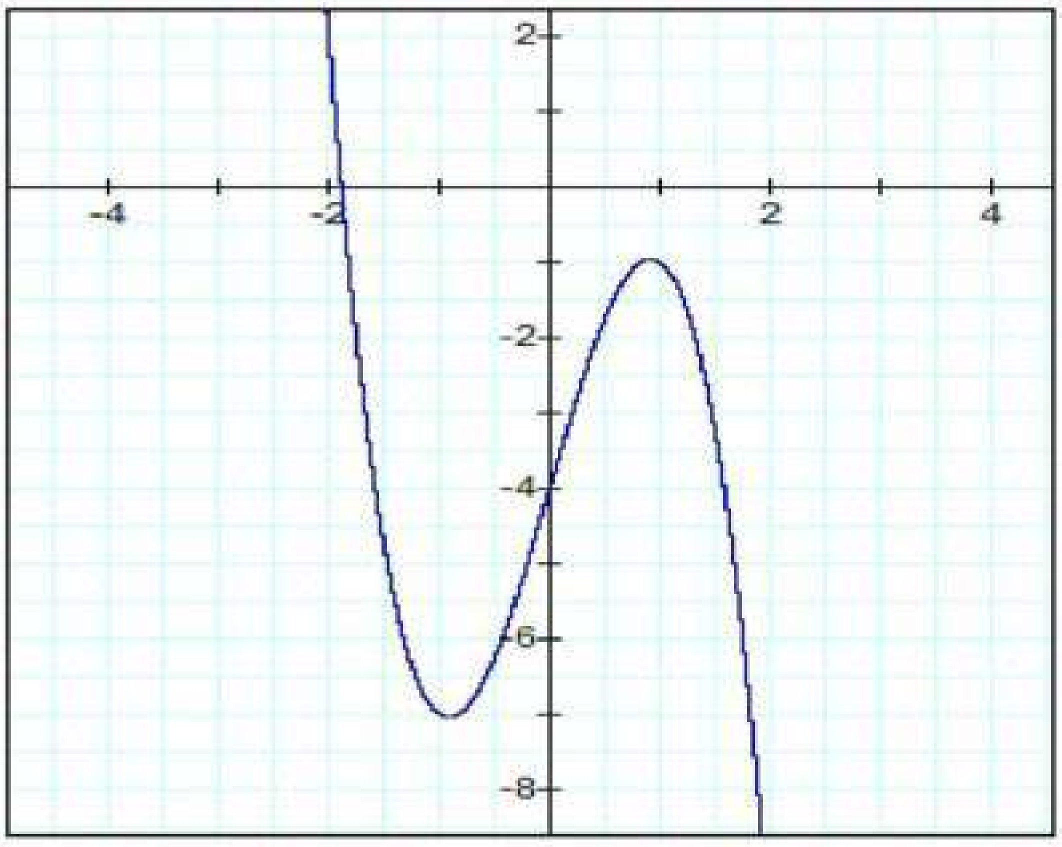
(25) $f(x) = x^2 + 6x + 10$

ليست فردية وليست زوجية



التحقق جبريا $f\left(-x\right)=x^2-6x+10\neq f\left(x\right)$

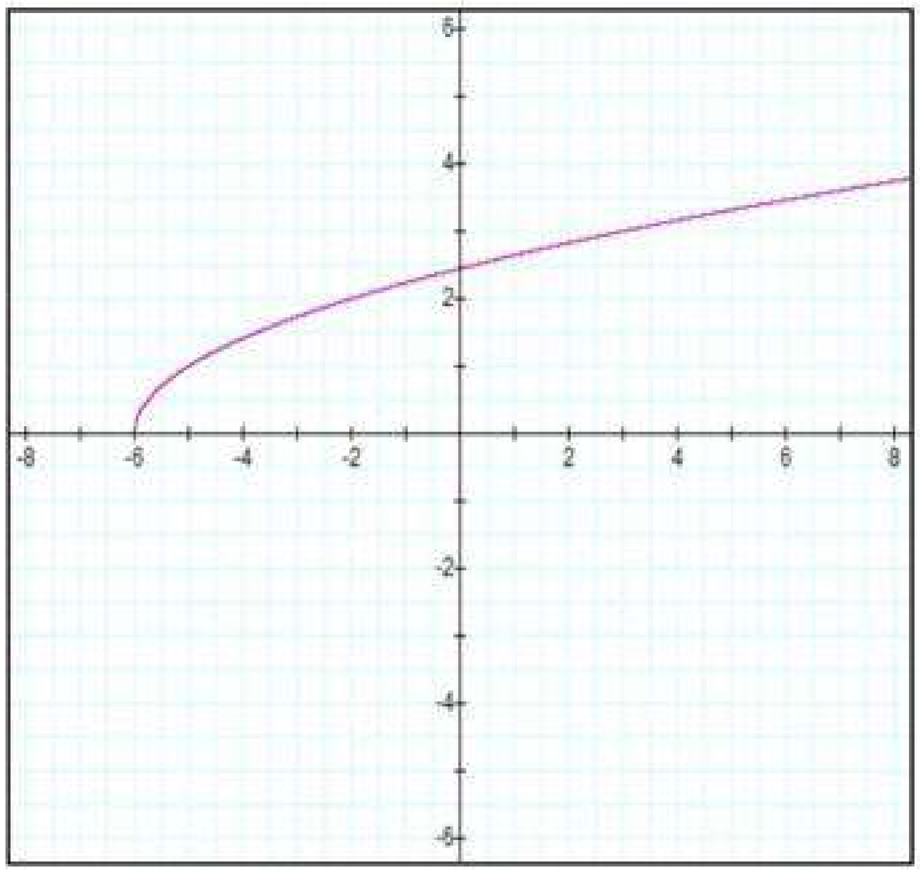
(26) $f\left(x\right)=-2x^3+5x-4$



ليست فردية وليست زوجية

التحقق جبريا $f\left(-x\right)=2x^3-5x-4\neq f\left(x\right)$

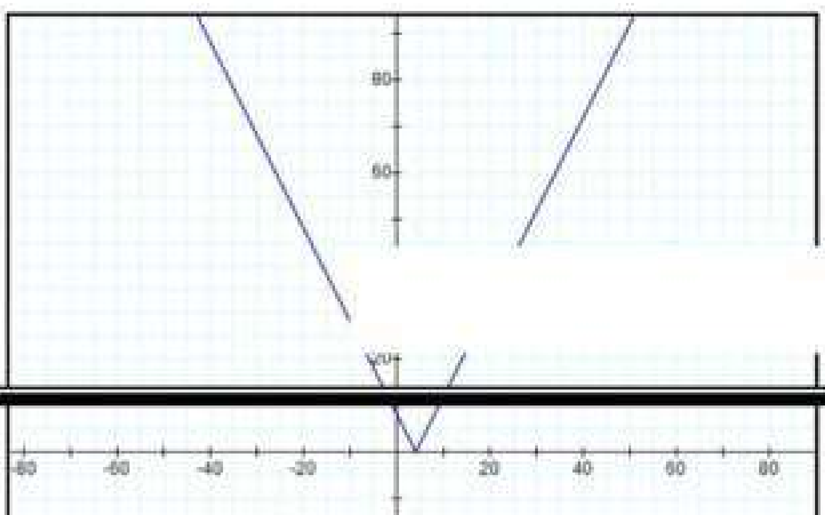
(27) $g\left(x\right)=\sqrt{x+6}$



ليست فردية وليست زوجية

التحقق جبرياً $g\left(-x\right)=\sqrt{-x+6}\neq g\left(x\right)$

(28) $h\left(x\right)=\left|8-2x\right|$

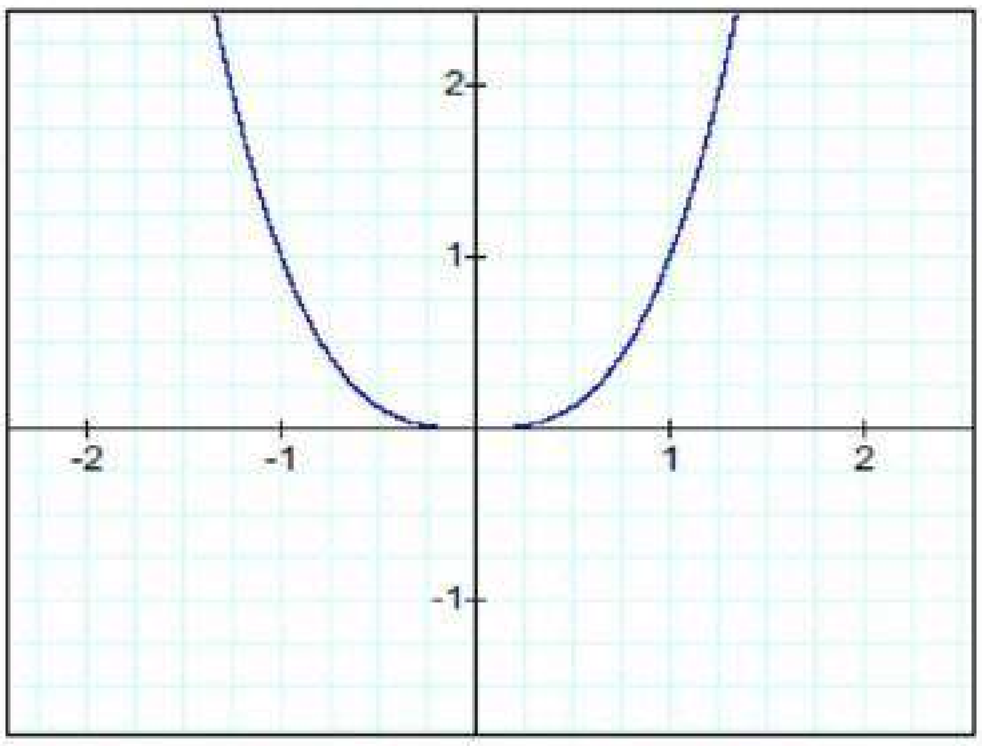


ليست فردية وليست زوجية

التحقق جبريا $h(-x)=|8+2x| \neq h(x)$

---

(29) $f(x)=|x^3|$

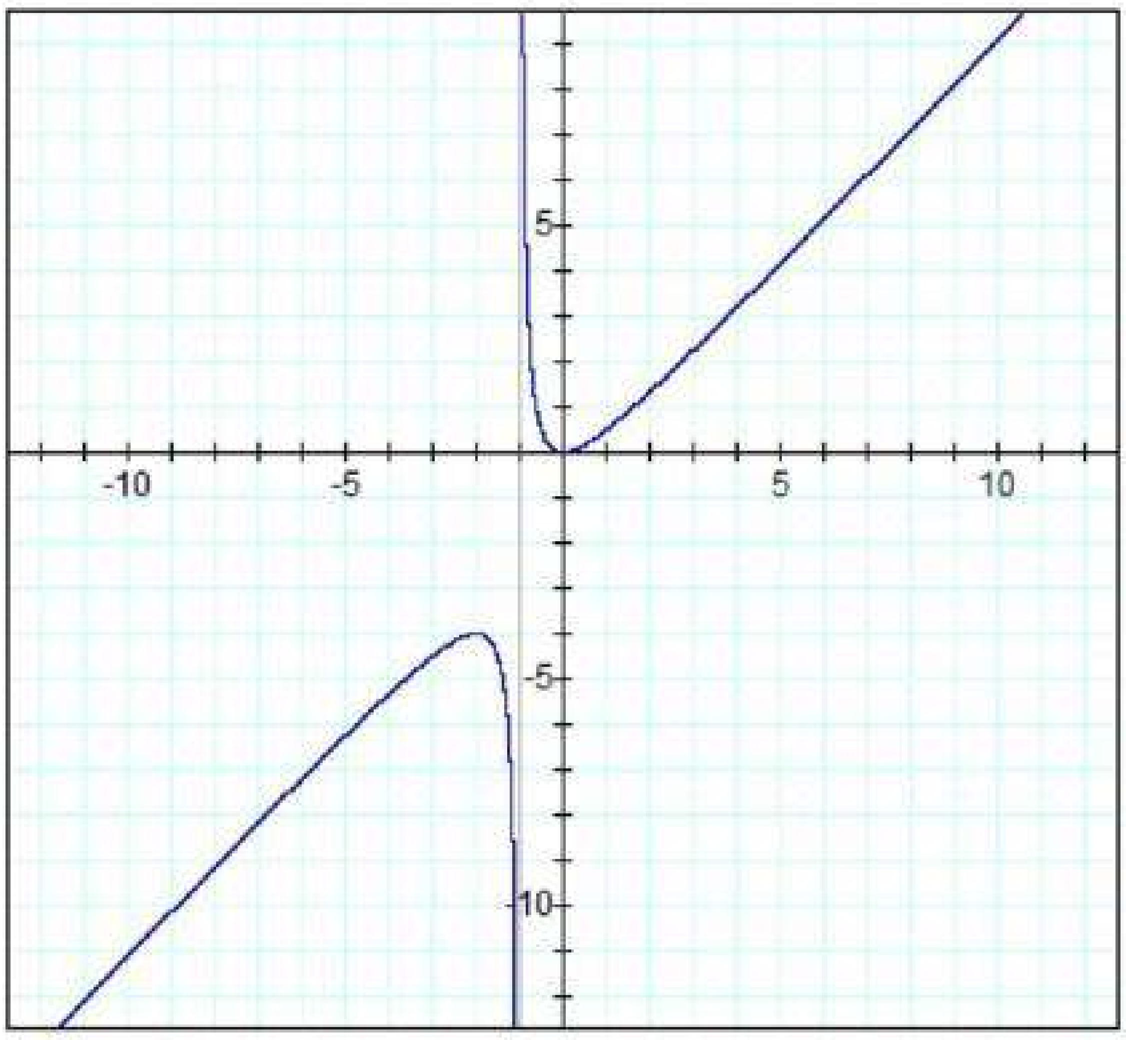


دالة زوجية لتماثلها حول المحور y

التحقق جبريا $f(-x)=|(-x)^3|=|x^3|=f(x)$

---

(30) $g(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$



ليست فردية وليست زوجية

التحقق جبريا $g(-x)=\dfrac{x^2}{-x+1} \neq g(x)$

(31)

(a $f(-2) = -2$

(b $f(-6) =$ غير معرفة

(c $f(0) =$ غير معرفة

---

(32) مبيعات

a) المجال = $\{x \mid 0 \le x \le 4, x \in W\}$

المدي = $\{y \mid 1200 \le y \le 11200, y \in R\}$

b) حوالي 4200 جهاز

التحقق جبرياً $h(2) = 0.5(2)^2 + 0.5 \times 2 + 1.2 = 4.2 \times 1000 = 4200$

c) 1200 ، ويمثل المقطع y عدد الأجهزة المبيعة منه 1422 هـ

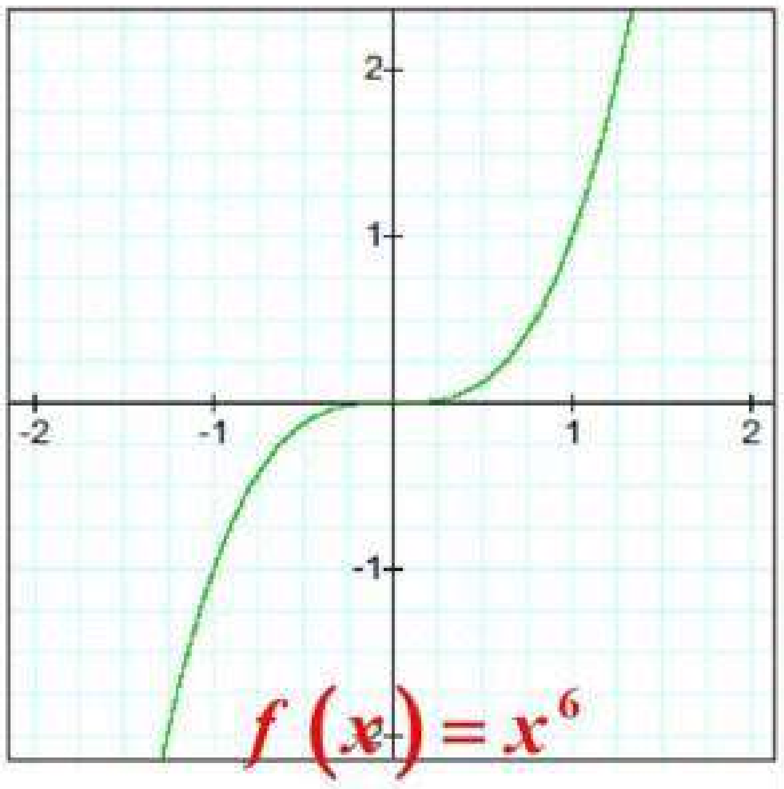
جبريا $h(0) = 0.5(0)^2 + 0.5 \times 0 + 1.2 = 1.2 \times 1000 = 1200$

d) لا يوجد لهذه الدالة اصفار، لأنه لكل سنة من سنوات المجال يوجد عدد من الأجهزة المبيعة

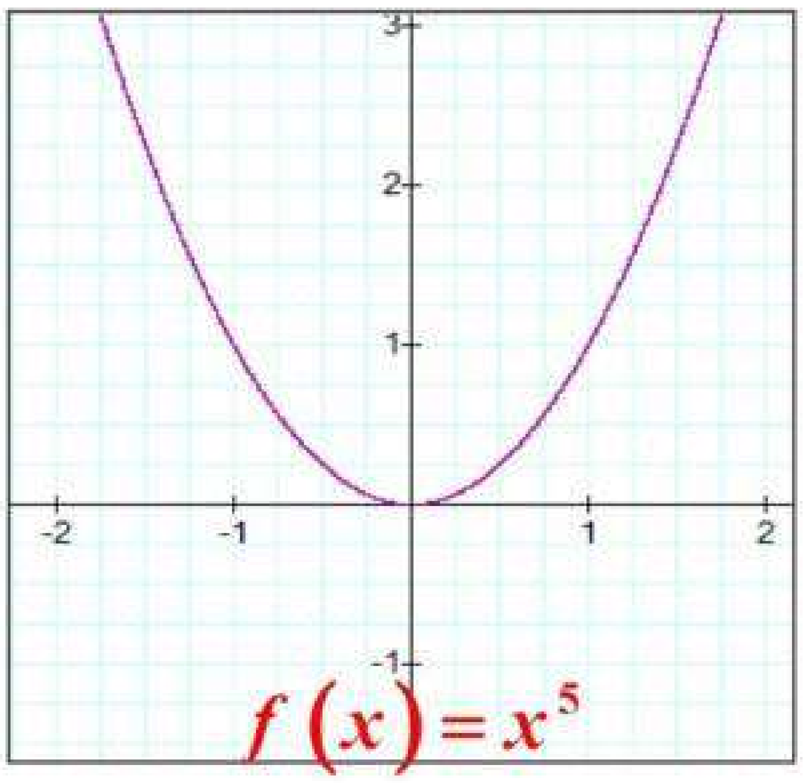
---

(33)

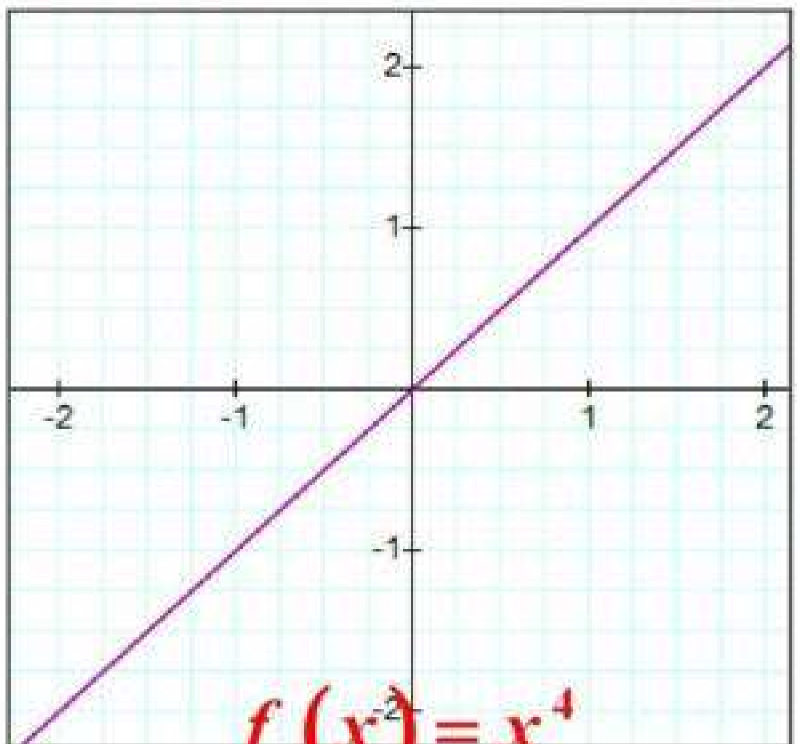
(a $f(x) = x^3$



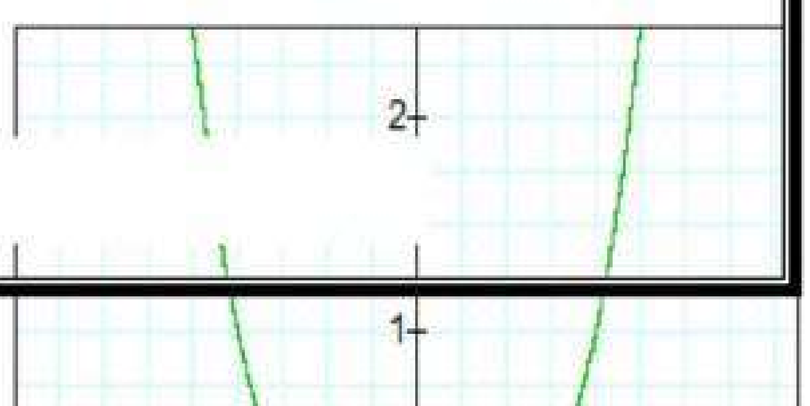
$f(x) = x^2$



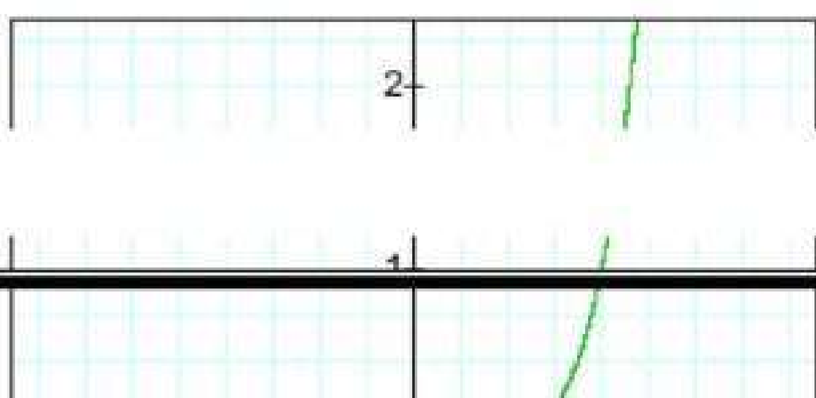
$f(x) = x$



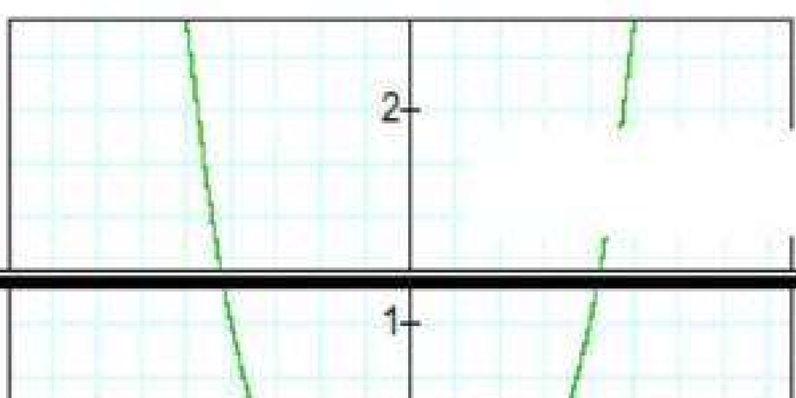
$f(x) = x^6$



$f(x) = x^5$



$f(x) = x^4$



b) $f(x)=x$ المجال = $\{x \mid x \in R\}$

المدى = $\{y \mid y \in R\}$

$f(x)=x^2$ المجال = $\{x \mid x \in R\}$

المدى = $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

$f(x)=x^3$ المجال = $\{x \mid x \in R\}$

المدى = $\{y \mid y \in R\}$

$f(x)=x^4$ المجال = $\{x \mid x \in R\}$

المدى = $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

$f(x)=x^5$ المجال = $\{x \mid x \in R\}$

المدى = $\{y \mid y \in R\}$

$f(x)=x^6$ المجال = $\{x \mid x \in R\}$

المدى = $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

c) $f(x)=x$ متماثلة حول نقطة الأصل

$f(x) = x^3$ متماثلة حول نقطة الأصل

$f(x) = x^5$ متماثلة حول نقطة الأصل

$f(x) = x^2$ متماثلة حول المحور y

$f(x) = x^4$ متماثلة حول المحور y

$f(x) = x^6$ متماثلة حول المحور y

---

d)

$f(x) = x^{35}$

المجال = $\{x \mid x \in R\}$

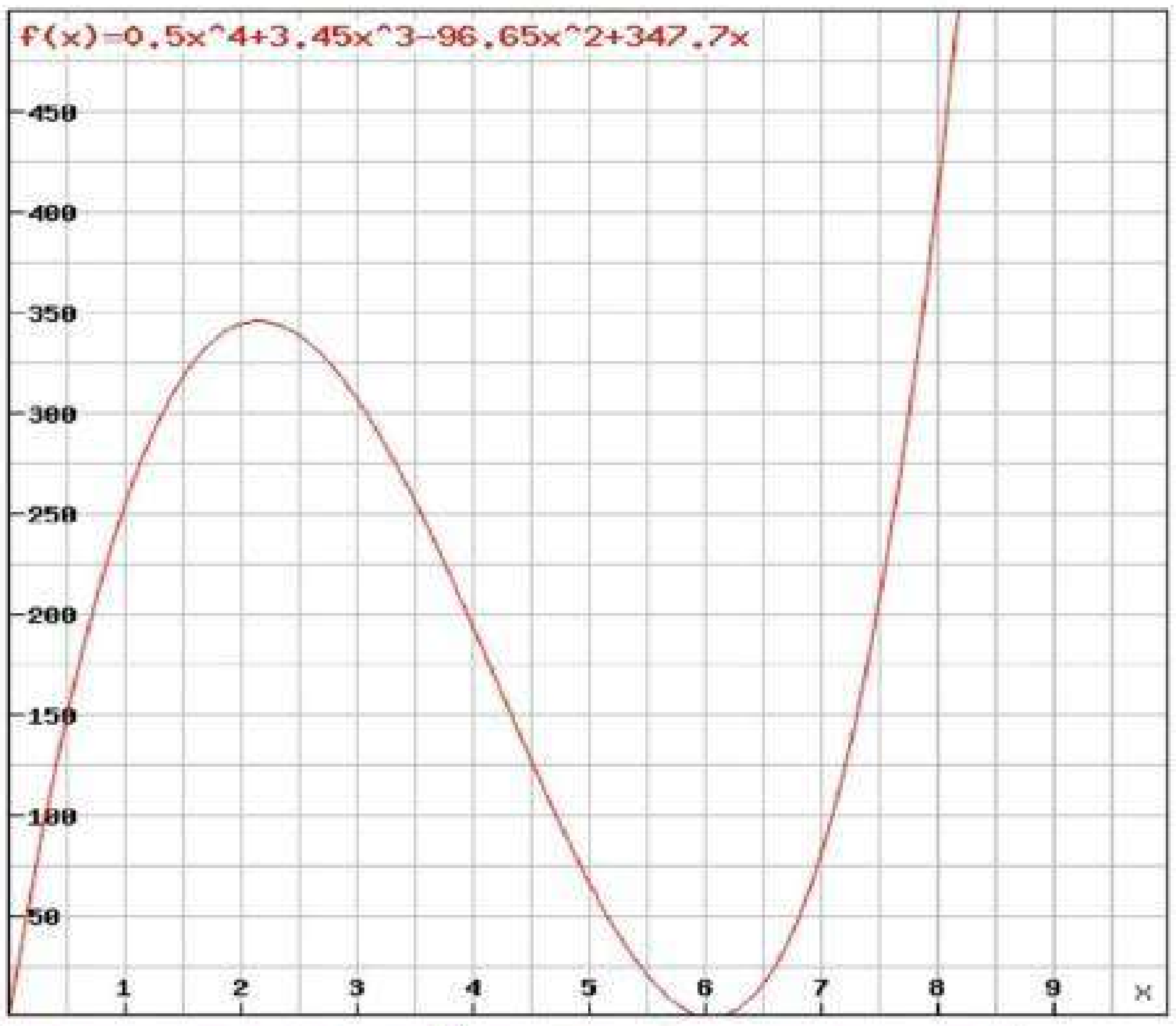
المدى = $\{y \mid y \in R\}$

الدالة فردية ∴ فهي متماثلة حول نقطة الأصل

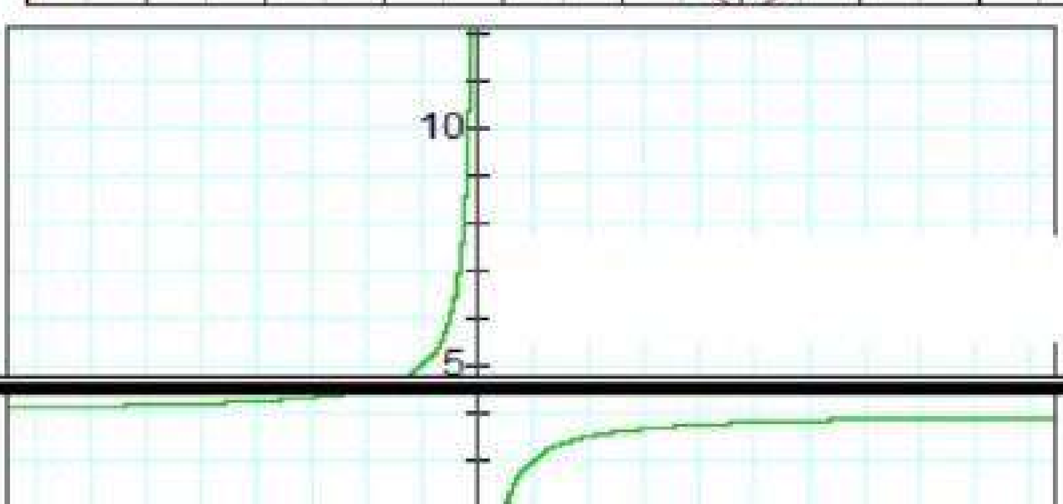
---

(34) صيدلة

$$0.5x^4 + 3.45x^3 - 96.65x^2 + 347.7x$$



الحاسبة البيانية:



$f(x) = \dfrac{4x-1}{x}$ (35)

$x = 0.25$

جبرياً :

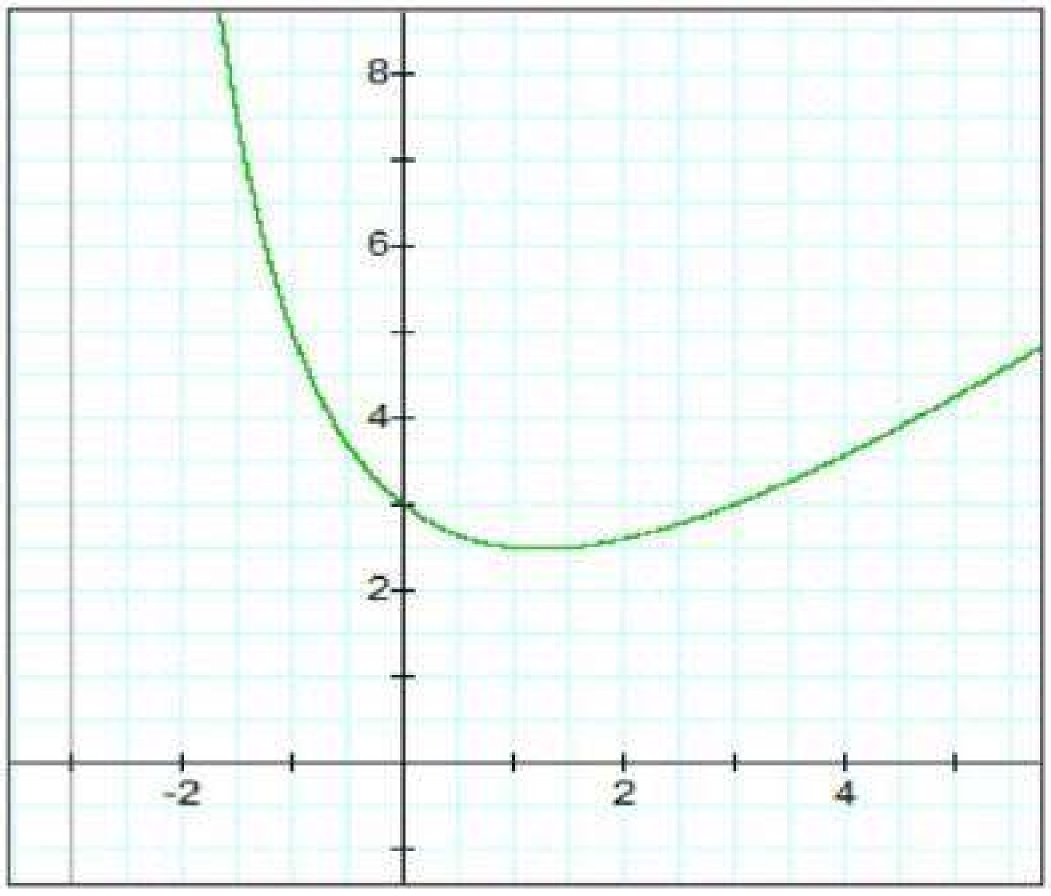
$$f(x) = \frac{4x-1}{x} = 0$$

$$\therefore 4x - 1 = 0$$

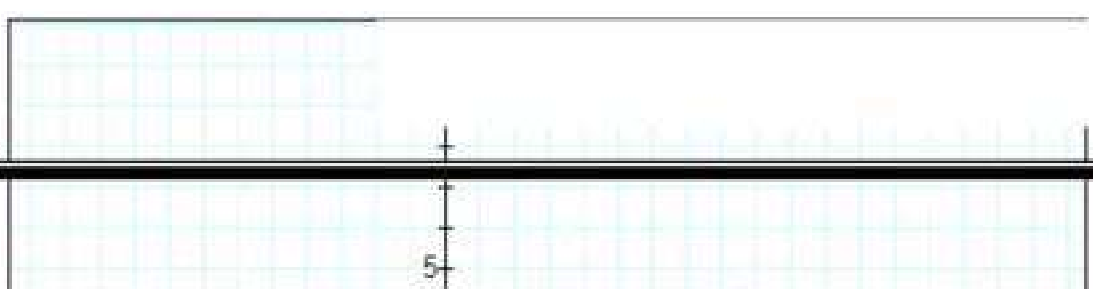
$$\therefore 4x = 1 \qquad \therefore x = \frac{1}{4}$$

$f(x) = \dfrac{x^2+9}{x+3}$ (36)

لا يوجد أصفار للدالة



$h(x) = 2\sqrt{x+12} - 8$ (37)



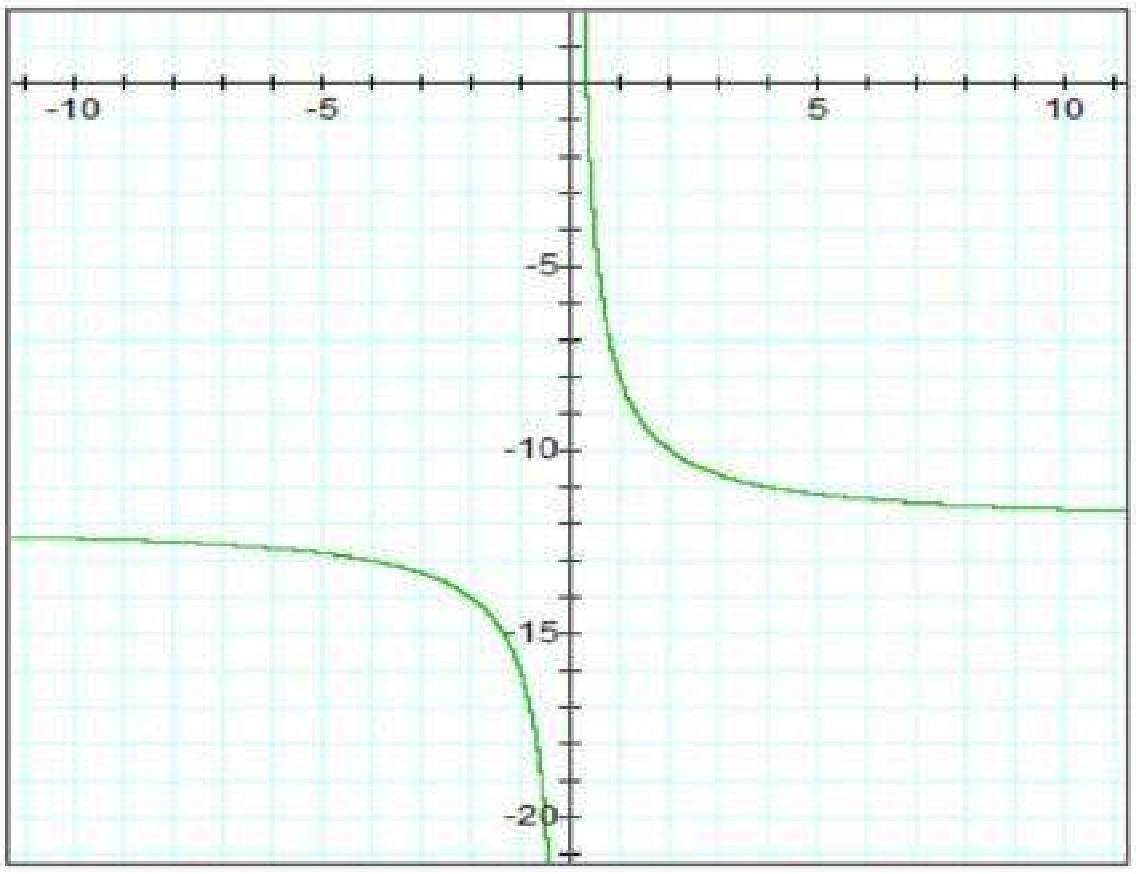
$x = 4$

جبريا:

$$h(x) = 2\sqrt{x+12} - 8 = 0$$

$$\therefore \sqrt{x+12} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore x + 12 = 16 \quad \therefore x = 16 - 12 = 4$$



(38) $g(x) = -12 + \frac{4}{x}$

$x = 0.33$

جبريا:

$$g(x) = -12 + \frac{4}{x} = 0$$

$$\therefore \frac{4}{x} = 12 \qquad \therefore 12x = 4$$

$$\therefore x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

استخدم التمثيل البياني f للدالة لتحديد مجالها ومداها

(39) المجال $= (-8,-4] \cup (-2,\infty)$

المدى $= (-6,\infty)$

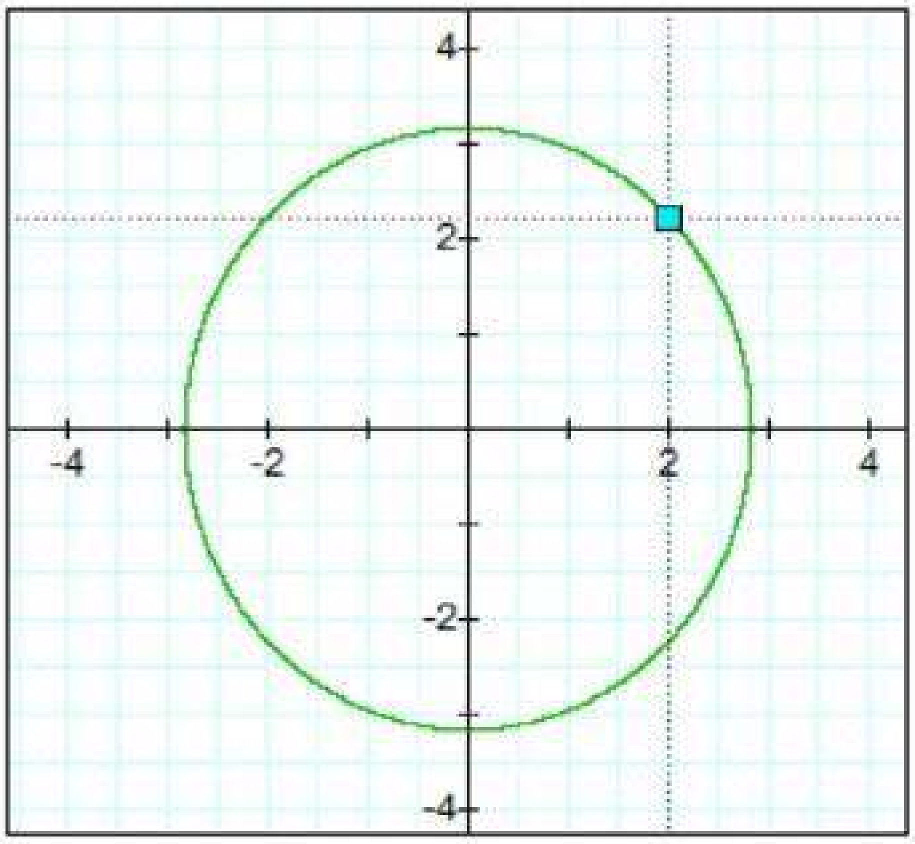
---

(40) المجال $= (-\infty,-6] \cup (0,5) \cup (8,10)$

المدى = $(-\infty, 8) \cup \{10\}$

(41) فيزياء:

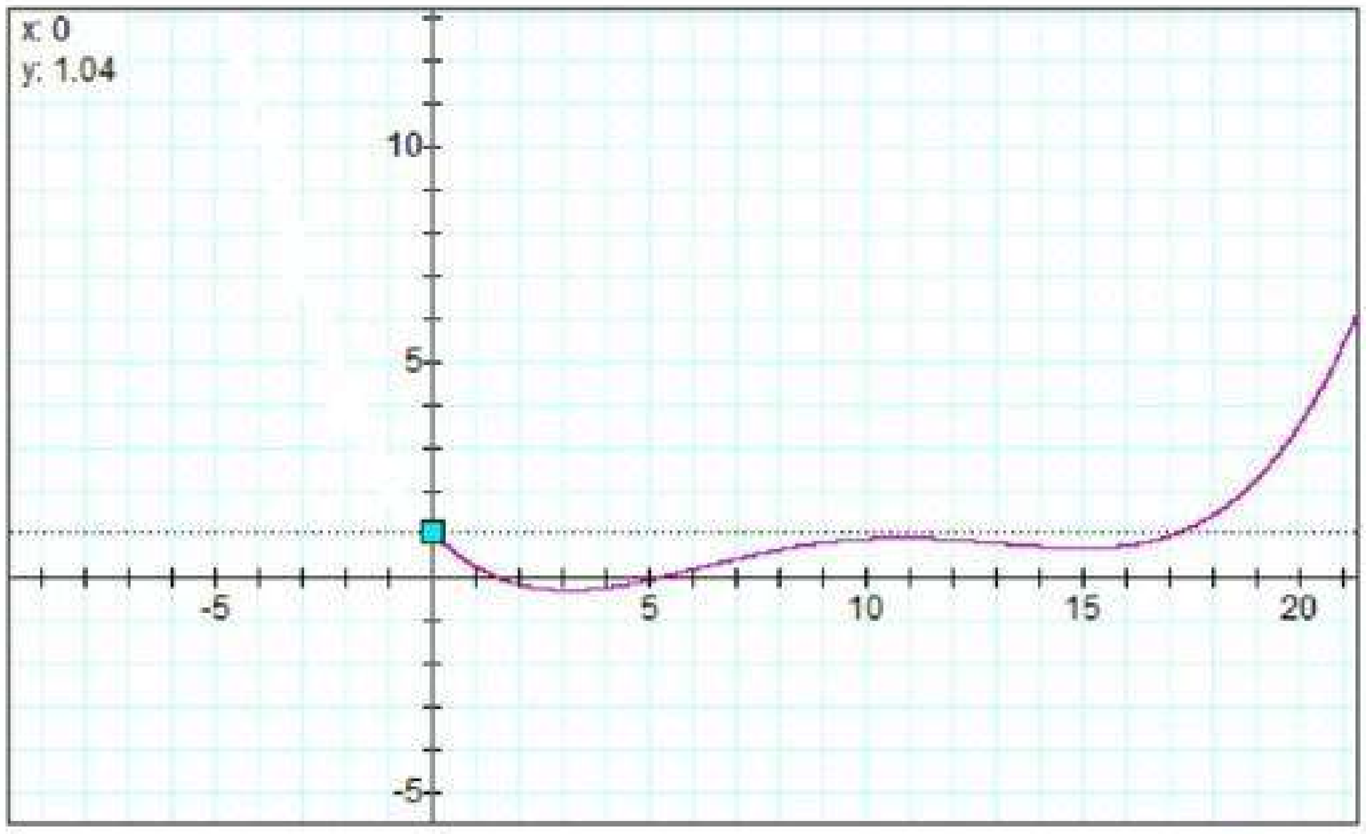
a) المنحنى متماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل



(b

(c $\left(2,-\sqrt{5}\right), (-2, \sqrt{5}), (-2, -\sqrt{5})$

(42) أسهم:



(a

b) المجال = $\{x \mid 0 \le x \le 11, x \in W\}$

المدى = $\{y \mid -0.5 \le y \le 1, y \in R\}$

---

c) قيمة المقطع $y = 1.04$ ويمثل نسبة التغير المئوية الإبتدائية في الأسعار

---

d) أصفار الدالة 5.2 , 1.5 وتمثل خط الأساس أو الوقت الذي يكون فية نسبة التغير صفر

(43) تمثيلات متعددة:

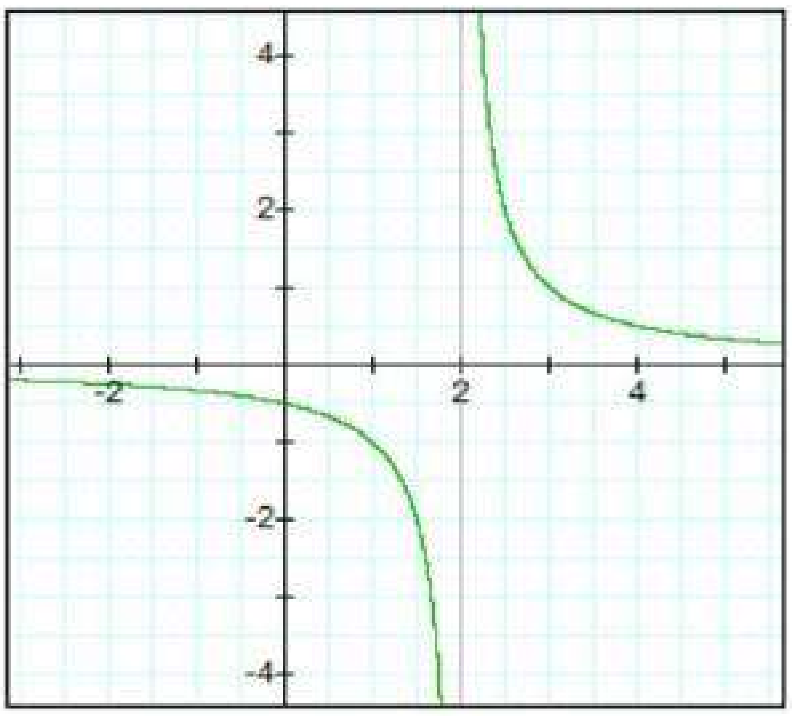
x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
(x)			غير		

a) جدوليا

b)تحليليا:

عندما تقترب x من 2 من اليسار تقترب الدالة من $-\infty$

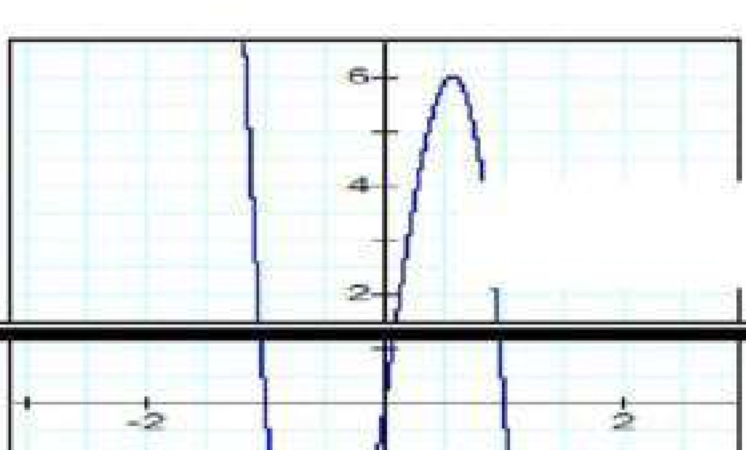
عندما تقترب x من 2 من اليمين تقترب الدالة من ∞



c) عندما تقترب الدالة من 2 من جهة اليسار تتناقص قيم الدالة بلا حدود، وعندما تقترب الدالة من 2 من جهة اليمين تتزايد قيم الدالة بلا حدود.

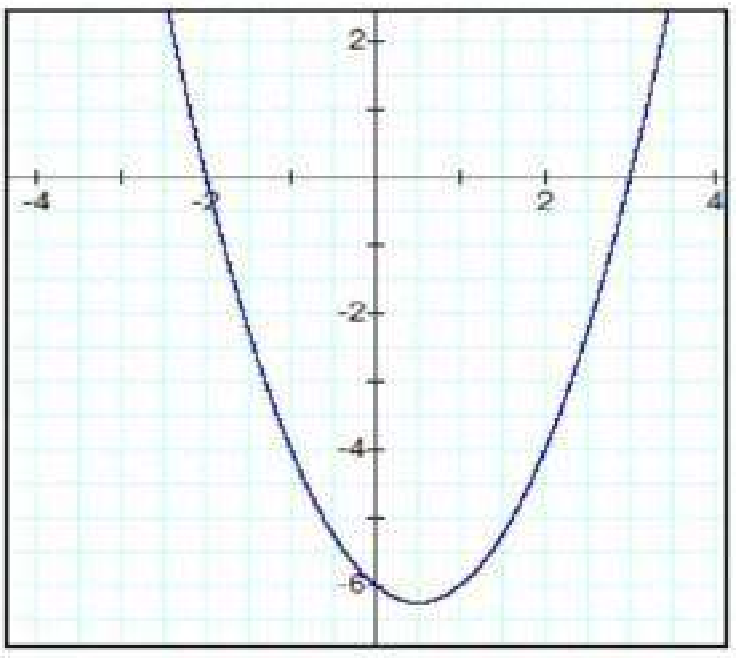
c) عندما تتزايد x بشكل كبير وتكون $x > 3$ يتزايد مقام الكسر بشكل كبير وهذا يؤدي إلى تناقص قيمة الكسر لكنة لا يصل الي الصفر وعلية لا يقطع المنحني المحور x.

الحاسبة البيانية:



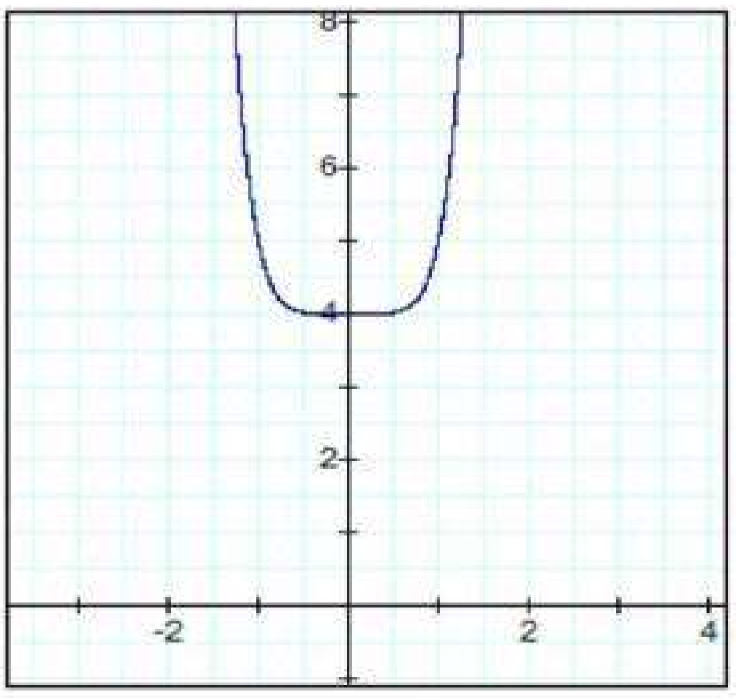
$h(x) = x^5 - 17x^3 + 16x$ **(44)**

الدالة فردية لتماثلها حول نقطة الأصل



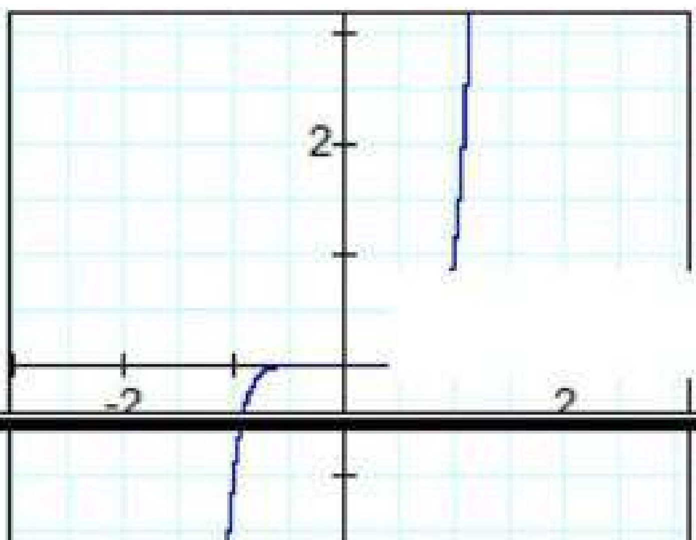
$f(x) = x^2 - x - 6$ **(45)**

الدالة ليست زوجية وليست فردية



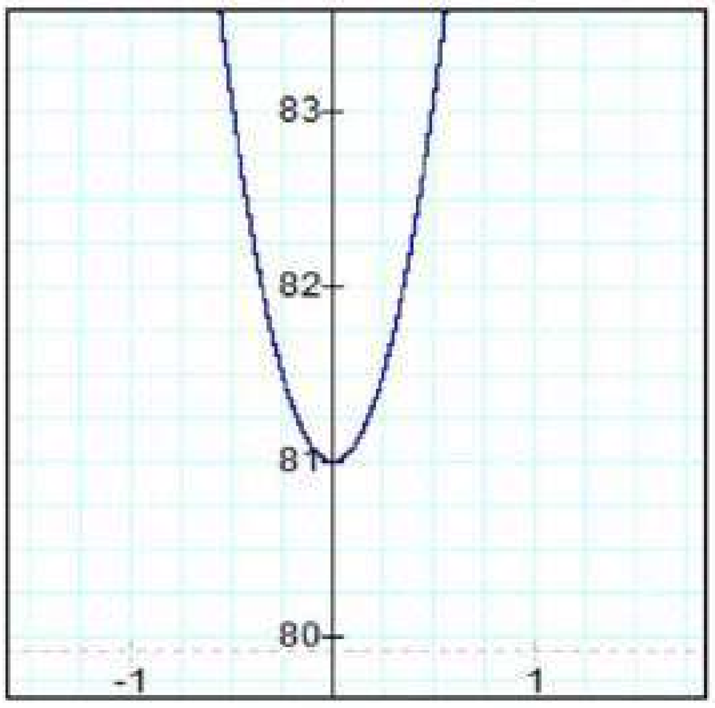
$h(x) = x^6 + 4$**(46)**

الدالة زوجية لتماثلها حول المحور y



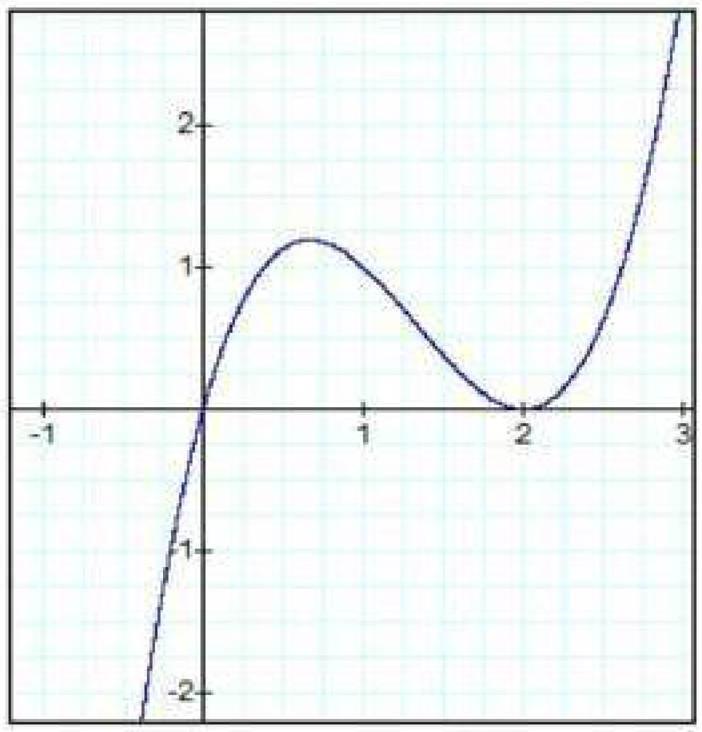
$f(g) = g^9$ **(47)**

الدالة فردية لتماثلها حول نقطة الأصل



(48) $g(x) = x^4 + 8x^2 + 81$

الدالة زوجية لتماثلها حول المحور y



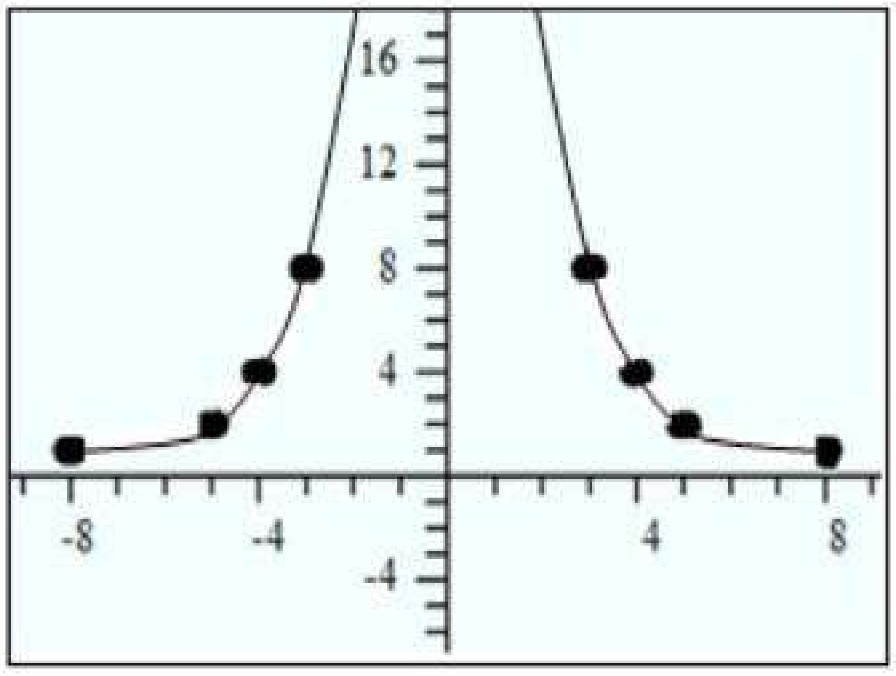
(49) $f(z) = z^3 - 4z^2 + 4z$

الدالة ليست زوجية وليست فردية

مسائل مهارات التفكير العليا

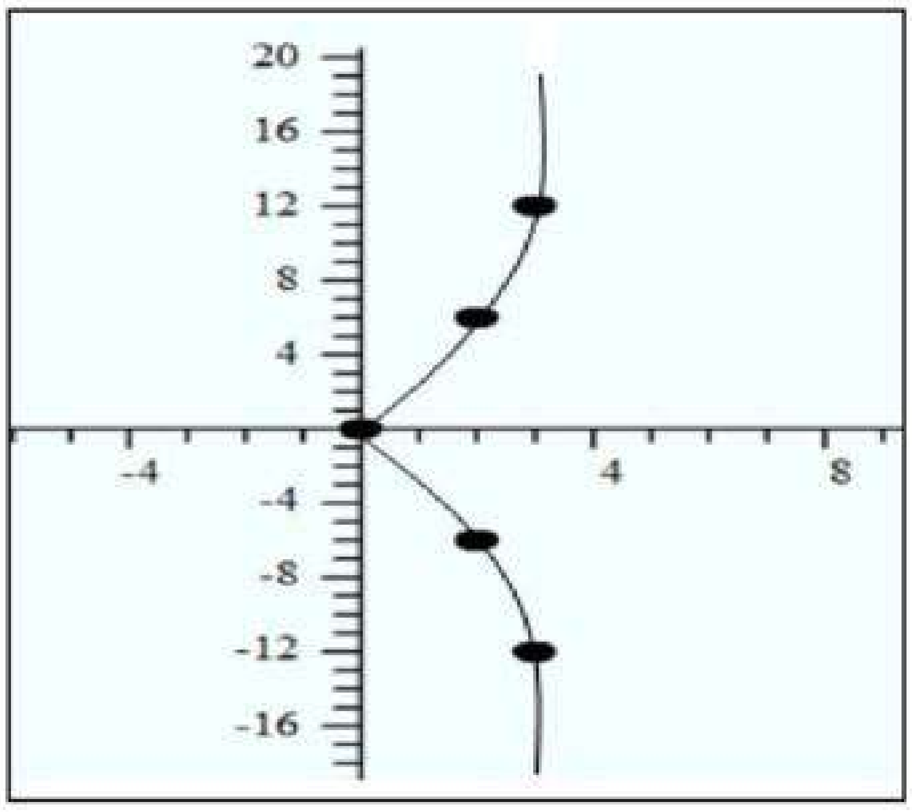
مسائل مفتوحة:

(50)



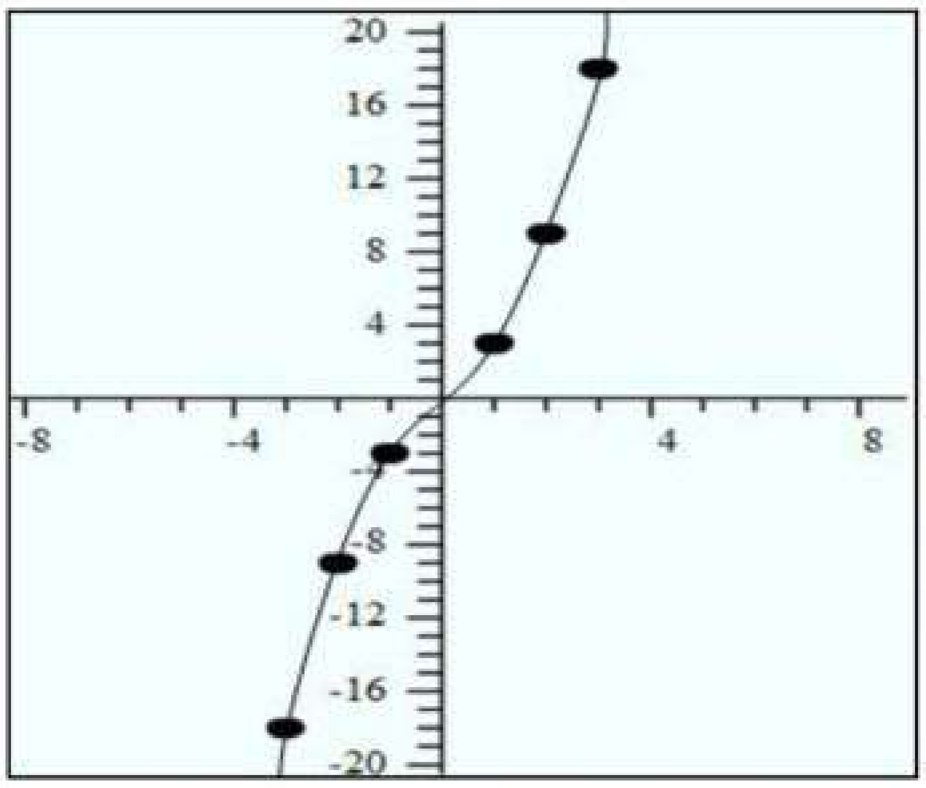
---

(51)

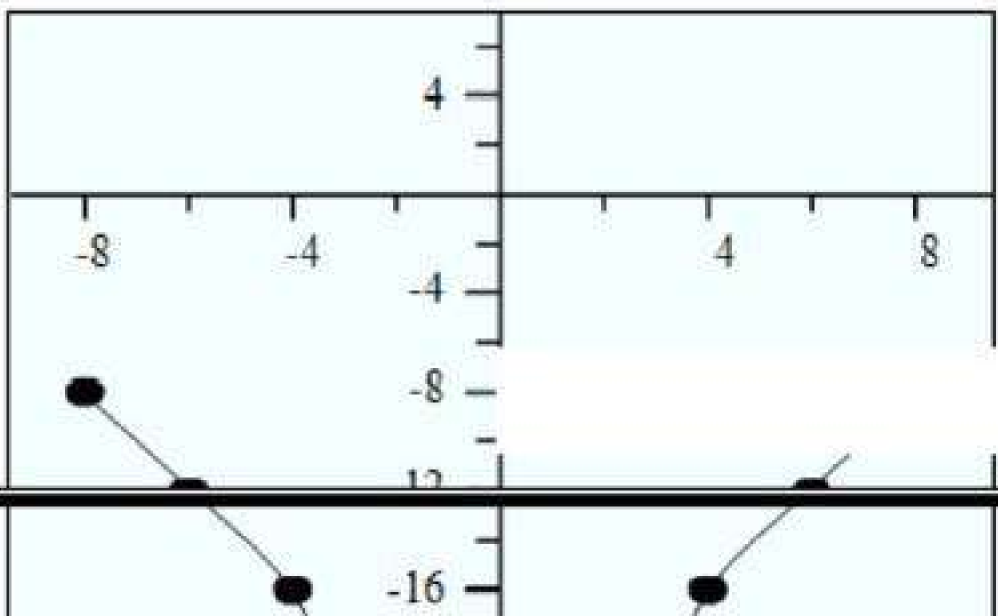


---

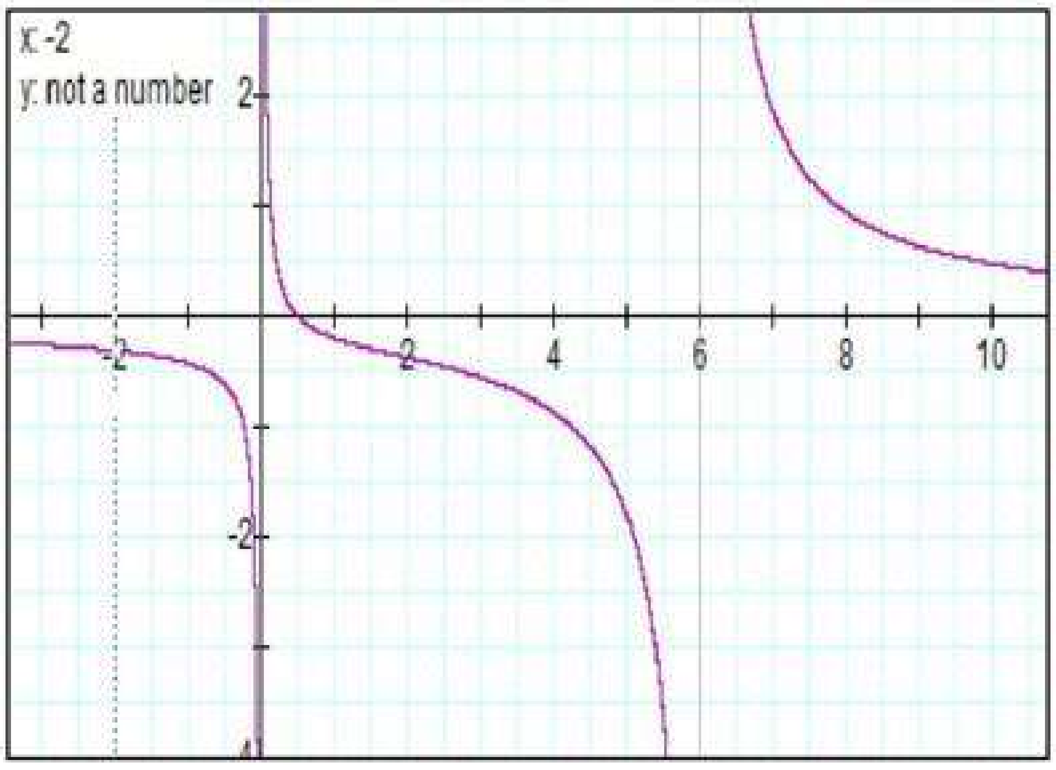
(52)



(53)



(54) يمكن أن تقطع الدالة محور x أكثر من مقطع لأن قيمة x لا تعتمد علي قيمة y في حين قيمة y تعتمد على قيمة x ،ويجب أن ترتبط كل قيمة لــــ x بقيمة واحدة فقط لـــــ y ، إذا قطعت العلاقة المحور y أكثر من مقطع فإنها لا تحقق إختبار الخط الرأسي، وبالتالي لا تكون دالة.



(55) تحدّ: $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x^3-4x^2-12x}$

المجال: $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,6)\cup(6,\infty)$

المدى: $\{y \mid y\in R\}$

<u>تبرير</u>

(56) $f(x)=nx^2$

خطأ: هذا المدي يكون صحيح فقط عندما $n>0$ ولكن عندما $n=0$ فإن $f(x)=0$

وكذلك عندما $n<0$ فإن $f(x)<0$

---

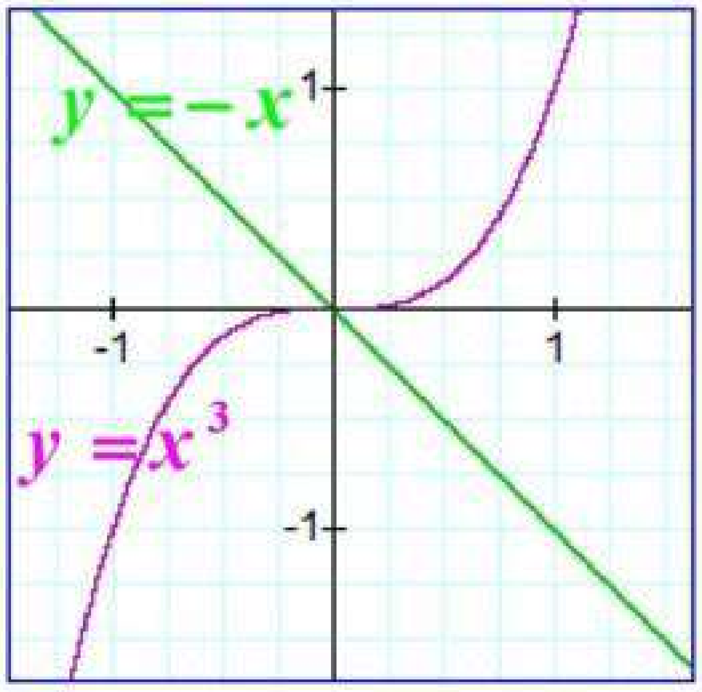
(57) صحيح: إذا كانت $n=0$ يكون المدى $\{y \mid y=0\}$ وإذا كانت n سالبة تكون الدالة

معرفة في المجال $\{x \mid x\le 0, x\in R\}$ ويكون المدى $\{y \mid y\ge 0, y\in R\}$ وإذا كانت n

موجبة معرفة في المجال $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$ ويكون المدى $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

---

(58) خطأ، حيث في الدالة $y = x^3$ (وهي دالة فردية)، صورة النقطة $(2, 8)$

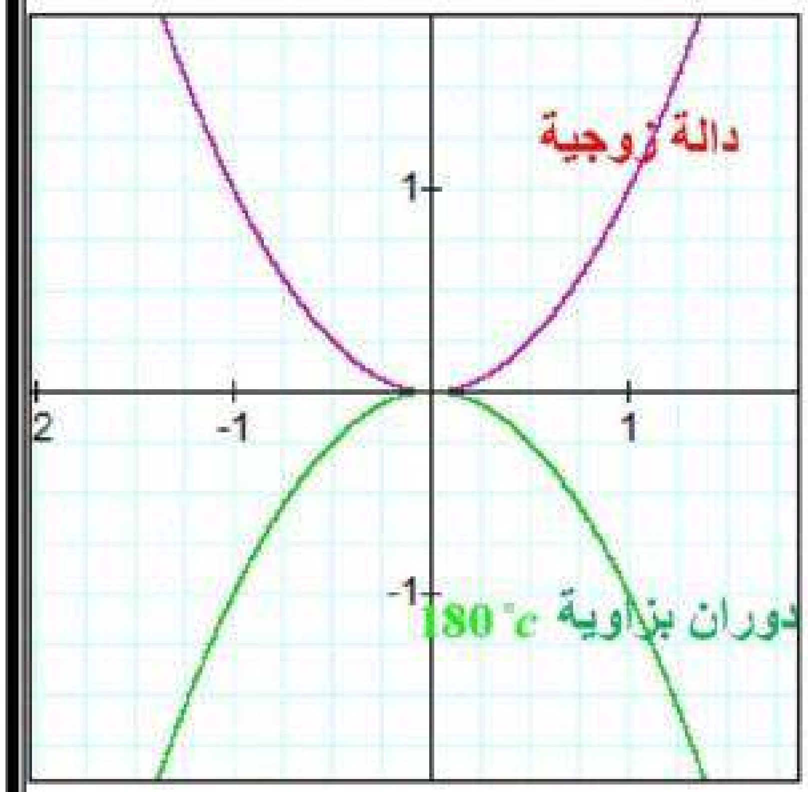


بإنعكاس في المستقيم $y = -x$ هي النقطة $(-8, -2)$

وليست النقطة $(-2, -8)$

---

(59) صحيح، إذا كانت n عدداً زوجياً فإن الدالة تدور مضاعفات $360^\circ c$ وهذا يعيد الدالة إلى موقعها الأصلي وإذا كانت n عدداً فردياً فإن الدالة تدور مضاعفات $180^\circ c$ حول نقطة الأصل وهو دوران مكافىء لإنعكاس حول المحور x الذي يعمل على عكس إشارات y والذي يبقي على الدالة زوجية.



تبرير

(60) $b(x) = a(-x)$

دالة فردية، حيث $b(x)$ إنعكاس للدالة $a(x)$ في المحور y وهي متماثلة حول نقطة الأصل، وعليه فإن الدالة $b(x)$ فردية.

---

(61) $b(x) = -a(x)$

دالة فردية، حيث $b(x)$ إنعكاس للدالة $a(x)$ في المحور y وهي متماثلة حول نقطة الأصل، وعليه فإن الدالة $b(x)$ فردية.

---

(62) $b(x) = [a(-x)]^2$

دالة زوجية. حيث $b(-x) = [a(x)]^2 = [-a(-x)]^2 = [a(-x)]^2 = b(x)$

---

(63) $b(x) = a(|x|)$

دالة زوجية. حيث $b(-x) = a(|-x|) = a(|x|) = b(x)$

---

(64) $b(x) = [a(x)]^3$

دالة فردية. حيث $b(-x) = [a(-x)]^3 = [-a(x)]^3 = -[a(x)]^3 = -b(x)$

تبرير

(65) أحيانا يمثل دالة، منحنى العلاقة المتماثل حول المحور y يمثل دالة أحياناً ومثله منحنى العلاقة المتماثل حول المستقيم $x = 4$ ، لأن المستقيم $x = 4$ هو ازاحة للمحور y بمقدار 4 وحدات إلى اليمين.

(66) لا يمثل دالة. منحنى العلاقة المتماثل حول المحور x لا يمثل دالة ومثله المنحنى المتماثل حول المستقيم $y = 2$، لأن المستقيم $y = 2$ هو انسحاب للمحور x بمقدار وحدتين إلى اعلى.

(67) لا يمثل دالة. منحنى العلاقة المتماثل حول محور x لا يمثل دالة.

اكتب

(68) إذا كانت العلاقة متماثلة حول محور x فإنه يوجد نقطتان على خط رأسي واحد وعلى بعدين متساويين من المحور x. وهذا يعني ان عنصر من المجال الدالة ارتبط بعنصرين من المدى وهذا يخالف تعريف الدالة.

مراجعة تراكمية

أوجد القيم المطلوبة لكل دالة مما يأتى:

(69) $g(x) = x^2 - 10x + 3$

(a)
$$g(2) = 2^2 - 10(2) + 3$$
$$= 4 - 20 + 3 = -13$$

(b)
$$g(-4x) = (-4x)^2 - 10(-4x) + 3$$
$$= 16x^2 + 40x + 3$$

(c)
$$g(1+3n) = (1+3n)^2 - 10(1+3n) + 3$$
$$= 1 + 9n^2 + 6n - 10 - 30n + 3$$
$$= 9n^2 - 24n - 6$$

---

(70) $$p(x) = \frac{2x^3+2}{x^2-2}$$

(a
$$p(3) = \frac{2(3)^3+2}{(3)^2-2}$$
$$= \frac{56}{7} = 8$$

(b
$$p(x^2) = \frac{2(x^2)^3+2}{(x^2)^2-2}$$
$$= \frac{2x^6+2}{x^4-2}$$

(c
$$p(x+1) = \frac{2(x+1)^3+2}{(x+1)^2-2}$$
$$= \frac{2(x^3+3x^2+3x+1)+2}{x^2+2x+1-2}$$
$$= \frac{2x^3+6x^2+6x+4}{x^2+2x-1}$$

---

(71) $h(x) = 2x^2 + 4x - 7$

a)

$$h(-9) = 2(-9)^2 + 4(-9) - 7$$
$$= 2 \times 81 - 36 - 7$$
$$= 162 - 43 = 119$$

b)

$$h(3x) = 2(3x)^2 + 4(3x) - 7$$
$$= 18x^2 + 12x - 7$$

---

c)

$$h(2+m) = 2(2+m)^2 + 4(2+m) - 7$$
$$= 2(4 + 4m + m^2) + 8 + 4m - 7$$
$$= 8 + 8m + 2m^2 + 8 + 4m - 7$$
$$= 2m^2 + 12m + 9$$

حدد مجال كل دالة من الدوال الآتية:

(72) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$

المجال: $\{x \mid x \in R\}$

---

(73) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 16}$

المجال: $\{x \mid x \neq \pm 4 \, , \, x \in R\}$

---

(74) $f(x) = \sqrt{3x + 18}$

المجال: $\{x \mid x \geq -6 \, , \, x \in R\}$

بسط كلاً مما يأتي:

(75) $27^{\frac{1}{3}} = \left(3^{\cancel{3}}\right)^{\frac{1}{\cancel{3}}} = 3$

(76) $64^{\frac{5}{6}} = \left(2^{\cancel{6}}\right)^{\frac{5}{\cancel{6}}} = 2^{5} = 32$

(77) $49^{-\frac{1}{2}} = \left(7^{\cancel{2}}\right)^{-\frac{1}{\cancel{2}}} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$

---

(78) $16^{-\frac{3}{4}} = \left(2^{\cancel{4}}\right)^{-\frac{3}{\cancel{4}}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

(79) $25^{\frac{3}{2}} = \left(5^{\cancel{2}}\right)^{\frac{3}{\cancel{2}}} = 5^{3} = 125$

(80) $36^{-\frac{3}{2}} = \left(6^{\cancel{2}}\right)^{-\frac{3}{\cancel{2}}} = 6^{-3} = \frac{1}{216}$

تدريب على اختبار

(81) (B $x = \sqrt{n-1}$

(82) (D $1 < f(x) < 10$

(1-3) الاتصال والنهايات

تحقق من فهمك

(1A) $f(x)=x^3$

* $f(0)=0^3=0$ أي ان الدالة معرّفة عند $x=0$

*

x	-0.999	-0.99	-0.9	0	0.9	0.99	0.999
$f(x)$	-0.997	-0.970	-0.729	0	0.729	0.970	0.997

يُبين الجدول ان $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

* تُقدر قيمة $\lim\limits_{x\to 0}(x^3)$ بالعدد 0 وبما أن $f(0)=0$ ، نستنتج أن $f(x)$ متصلة عند $x=0$

(1B) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & ,x<0\\ x & ,x\geq 0\end{cases}$

* $f(0)=x=0$، أي أن الدالة معرّفة عند $x=0$

*

x	-0.999	-0.99	-0.9	0	0.9	0.99	0.999
$f(x)$	-1.001	-1.010	-1.11	0	0.9	0.99	0.999

يُبين الجدول ان $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

* تُقدر قيمة $\lim\limits_{x\to 0}\begin{cases}\dfrac{1}{x} \\ x \\ x\end{cases}$ بالعدد 0 وبما ان $f(0)=0$ ، نستنتج ان $f(x)$ متصلة عند $x=0$

تحقق من فهمك

$(\ 2A\ )$ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ عندما $x=0$

(1) $f(0)$ غير موجودة

(2)

x	-0.999	-0.99	-0.9	0	0.9	0.99	0.999
$f(x)$	1.002	1.020	1.245		1.245	1.020	1.002

* يتبين من الجدول أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ □ 1.245

(3) $f(x)$ غير متصلة عند $x=0$ لإن $f(0)$ غير موجودة وبما أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجودة

فإن عدم الإتصال يكون قابل للإزالة عند $x=0$

$(2B) \quad f(x) = \begin{cases} 5x+4 & , x>2 \\ 2-x & , x \le 2 \end{cases}$ عندما $x = 2$

(1) $f(2) = 2 - 2 = 0$

(2)

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0	14.005	14.05	14.5

* يتبين من الجدول أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة

(3) بما أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ $f(x)$ غير متصلة عدم اتصال غير قابل للإزالة $x = 2$

تحقق من فهمك

أعد تعرف الدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ لتصبح متصلة عند $x = 1$

1) $f(1) = \dfrac{0}{0}$

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 1

x	-2	-1	.999	1	1.001	3	4
$f(x)$	-1	0	1.999		2001	4	5

يظهر في الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 2 عندما تقترب x من 1 من الجهتين أي أن

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

$f(x)$ غير متصلة عند $x = 1$ لأن $f(1)$ غير موجودة وبما أن $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ موجودة فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 1$

(3

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$$

تحقق من فهمك

($4A$) $f(x)=x^3+2x^2-8x+3$ في الفترة $[-6,4]$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-93	-32	3	18	19	12	3	-2	3	24	67

بما أن $f(-5)$ سالبة و $f(-4)$ موجبة $\therefore$ يوجد صفر للدالة $f(x)$ في الفترة $[-5,-4]$

وكذلك يوجد صفر للدالة $f(x)$ في الفترة $[0,1]$ والفترة $[1,2]$

($4B$) $f(x)=\dfrac{x^2-6}{x+4}$ في الفترة $[-3,4]$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	-1	-1.67	-1.5	-1	-0.33	0.43	1.25

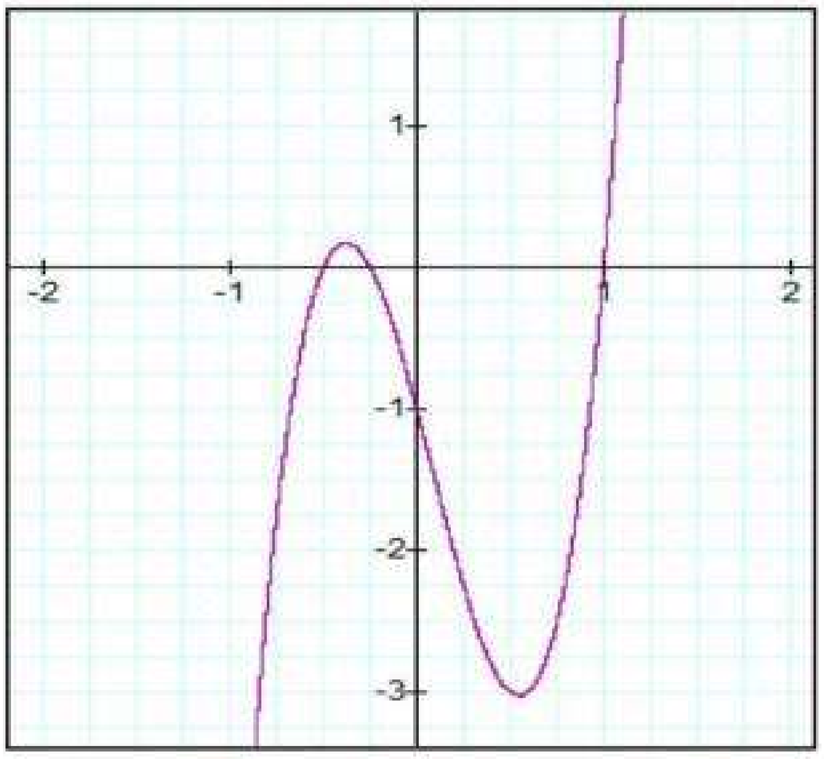
بما أن $f(-3)$ موجبة و $f(-2)$ سالبة $\therefore$ يوجد صفر للدالة $f(x)$ في الفترة $[-3,-2]$

وكذلك يوجد صفر للدالة $f(x)$ في الفترة $[2,3]$

تحقق من فهمك

(5A) $f(x)=8x^3-2x^2-5x-1$ في الفترة $[-5,5]$

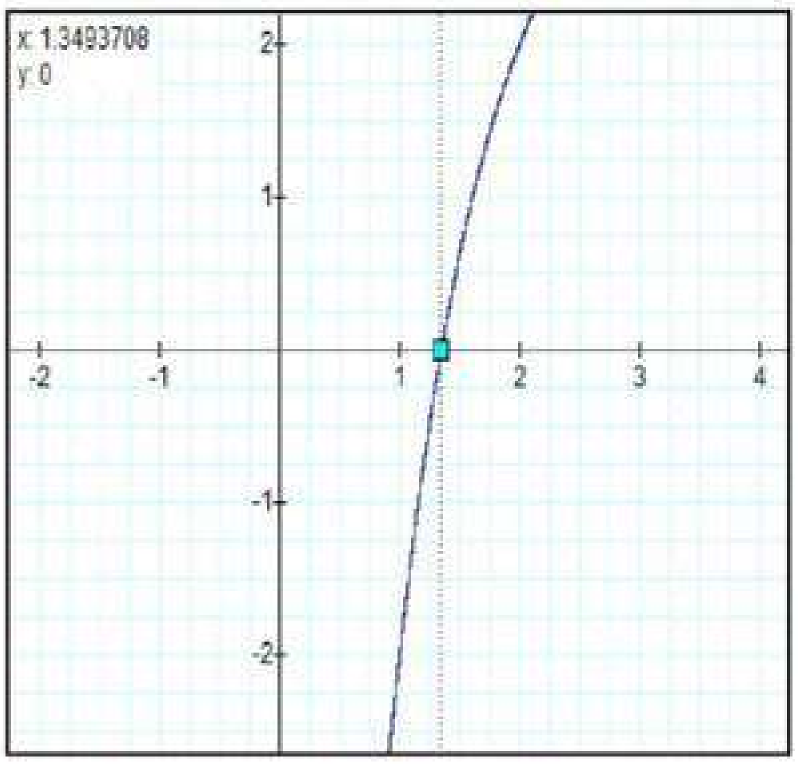
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1026	-525	-220	-63	-6	-1	0	45	182	459	924



* من الرسم يتضح وجود صفرين حقيقيين للدالة في الفترة

$[-1,0]$ وكذلك يوجد صفر للدالة عند $x=1$

(5B) $f(x)=x^3-7x^2+18x-14$ في الفترة $[0,4]$

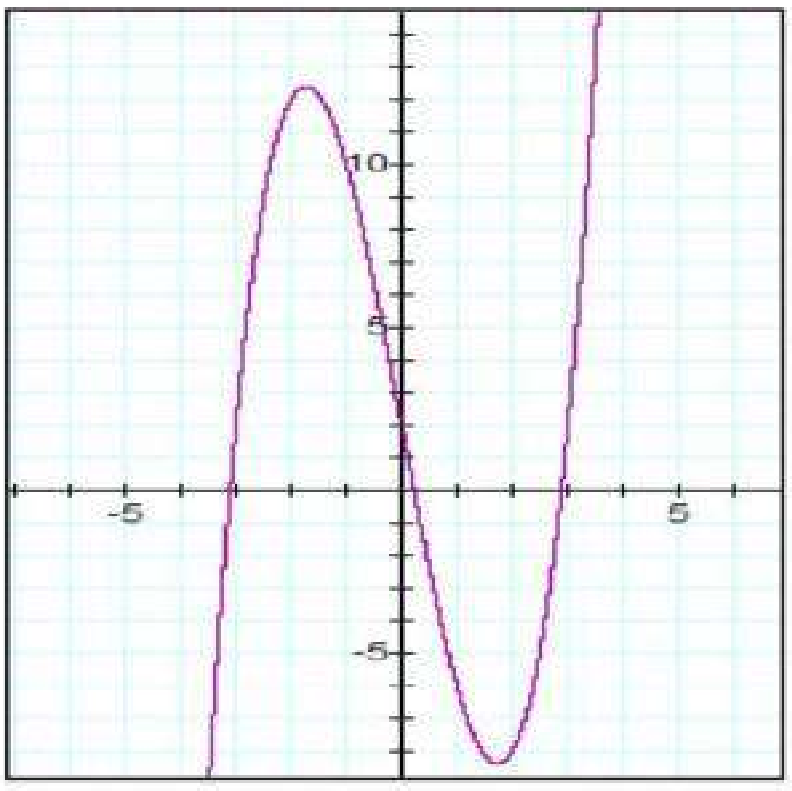


x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-14	-2	2	4	10

بما أن $f(1)$ سالبة و $f(2)$ موجبة

$\therefore$ يوجد صفر للدالة $f(x)$ في الفترة $[1,2]$

تحقق من فهمك



$g(x) = x^3 - 9x + 2$ (6A)

التحليل البياني:

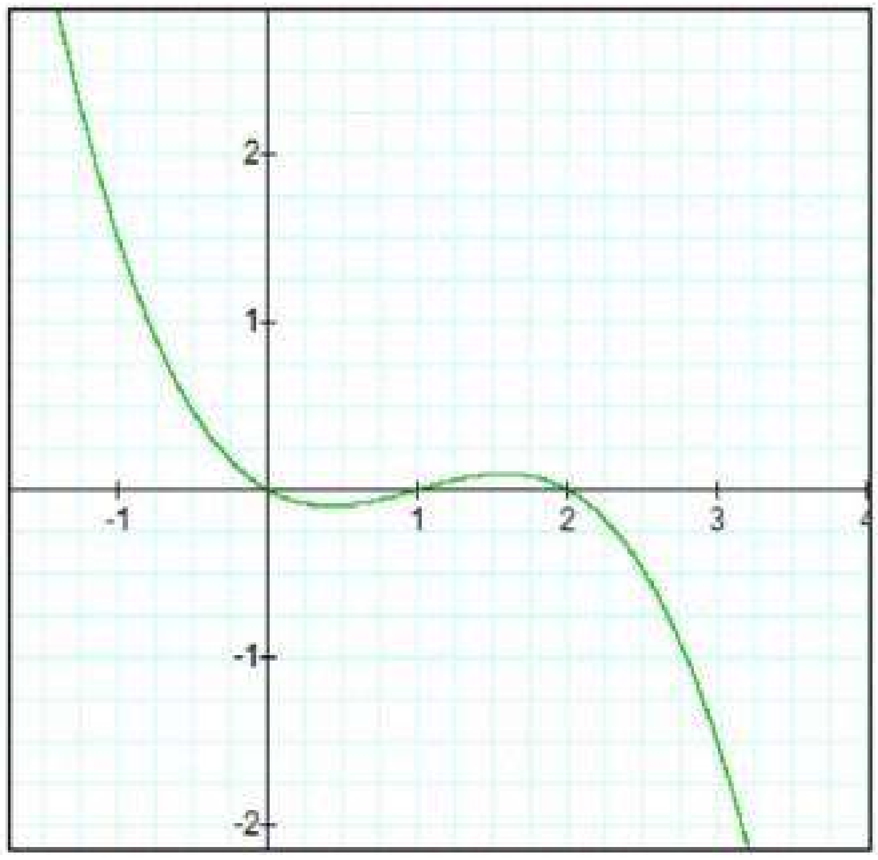
يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$

وأن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

التعزيز العددي:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$g(x)$	$-1\cdot10^{12}$	$-1\cdot10^{9}$	$-1\cdot10^{6}$	2	$1\cdot10^{6}$	$1\cdot10^{9}$	$1\cdot10^{12}$

لاحظ أنه عندما $x \to \infty$ فإن $g(x) \to \infty$ وبالمثل عندما $x \to -\infty$ فإن $g(x) \to -\infty$



$f(x) = \dfrac{-x^3}{4} + \dfrac{3x^2}{4} - \dfrac{x}{2}$ (6B)

التحليل البياني:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

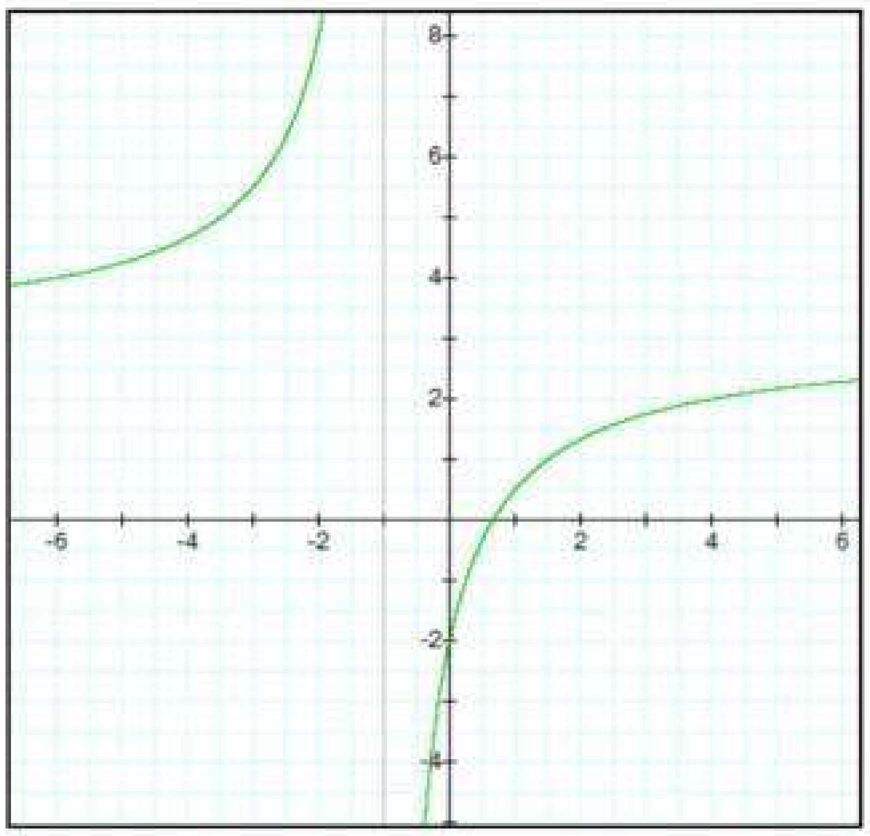
وأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

التعزيز العددي:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$g(x)$	$2\cdot10^{11}$	$2\cdot10^{8}$	$3\cdot10^{5}$	0	$-2\cdot10^{5}$	$-2\cdot10^{8}$	$-2\cdot10^{11}$

لاحظ أنه عندما $x\to\infty$ فإن $f(x)\to-\infty$ وبالمثل عندما $x\to-\infty$ فإن $g(x)\to\infty$

تحقق من فهمك



7A) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$

التحليل البياني:

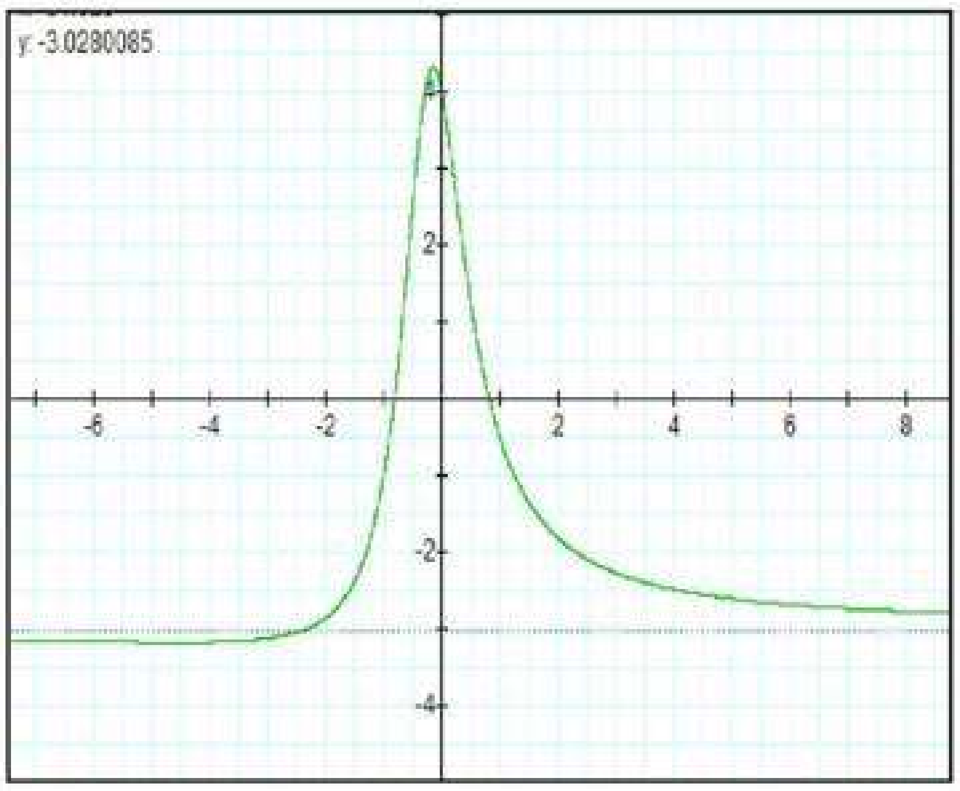
يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$

وأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

التعزيز العددي:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$g(x)$	3.0005	3.005	3.5	-2	2.95	2.99	2.9995

لاحظ أنه عندما $x\to\infty$ فإن $f(x)\to3$ وبالمثل عندما $x\to-\infty$ فإن $f(x)\to3$



(7B) $f(x)=\dfrac{-6x^2+4}{2x^2+x+1}$

التحليل البياني:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-3$

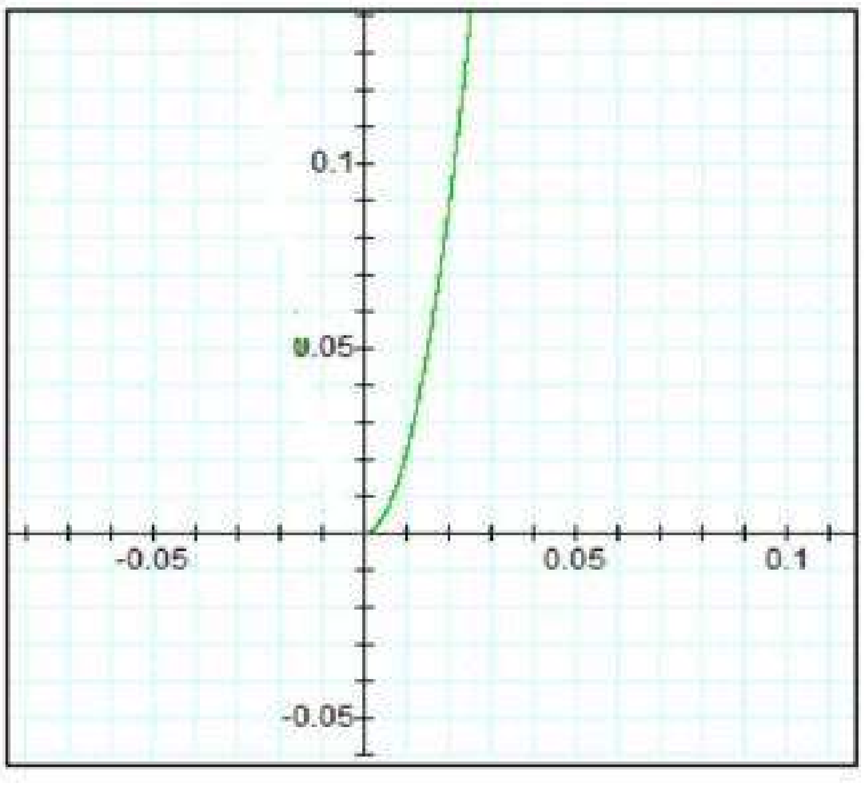
وأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$

التعزيز العددي:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$g(x)$	-3.0001	-3.001	-3.1	4	-2.98	-2.99	-2.9998

لاحظ أنه عندما $x\to\infty$ فإن $f(x)\to-3$ وبالمثل عندما $x\to-\infty$ فإن $f(x)\to-3$

تحقق من فهمك



(8) فيزياء:

$q(v)=\dfrac{\rho v^2}{2}$

حيث أن ρ ثابت يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $v\to\infty$ فإن $q(v)\to\infty$ وعندما

$v=0$ فإن $q(v)=0$

تدرب وحل المسائل

حدد ما إذا كانت كل دالة ما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة وبرر إجابتك بإستعمال اختبار الاتصال إذا كانت الدالة غير متصلة فحدد نوع عدم الاتصال: لا نهائي، قفزي، قابل للازالة

(1) الدالة معرّفة عند $x = -5$ ، وتؤول قيم الدالة إلى 3.61 عندما تقترب x من 8 من الجهتين، $f(8) = 3.61$ ، والدالة متصلة عند 8

(2) الدالة معرّفة عند $x = 8$ ، وتؤول قيم الدالة إلى 3.61 عندما تقترب x من 8 من الجهتين، $f(8) = 3.61$ ، والدالة متصلة عند 8

(3) الدالة غير متصلة اتصال قابل للازالة عند $x = -b$، الدالة معرّفة عند $x = b$ تقترب قيم الدالة إلى 0 عندما تقترب x من 0 من الجهتين، $h(6) = 0$ الدالة متصلة عند $x = 6$

(4) الدالة غير متصلة إتصال لا نهائي عند $x = 1$

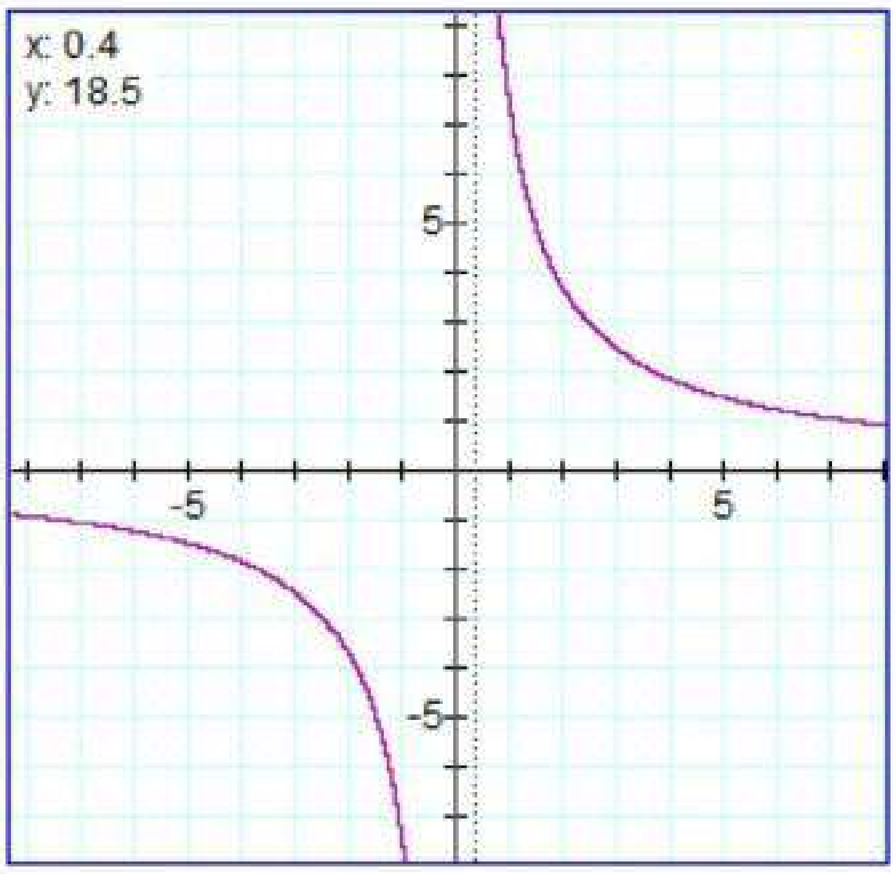
(5) الدالة غير متصلة إتصال قابل للازالة عند $x = 4$، والدالة غير متصلة إتصال لا نهائي عند $x = 1$، وقيم الدالة تقترب من $\frac{1}{3}$ عند $x \to 4$ من الجهتين

(6) الدالة غير متصلة إتصال لا نهائي عند $x = 0$، والدالة معرّفة عند $x = 6$، وقيم الدالة تقترب من 0 عند $x \to 6$ من الجهتين، $h(6) = 0$، الدالة متصلة عند $x = 6$

(7) الدالة غير متصلة اتصال قفزي عند $x = -6$، حيث $f(x) = 6$ تقترب من -25 عندما تقترب x من -6 من جهة اليسار وتقترب من 8 عندما تقترب $x \to -6$ من جهة اليمين

فيزياء:

(8) $f\left(\omega\right)=\dfrac{7.4}{\omega}$



(a) الدالة متصلة

التبرير (1) $f\left(0.4\right)=18.5$

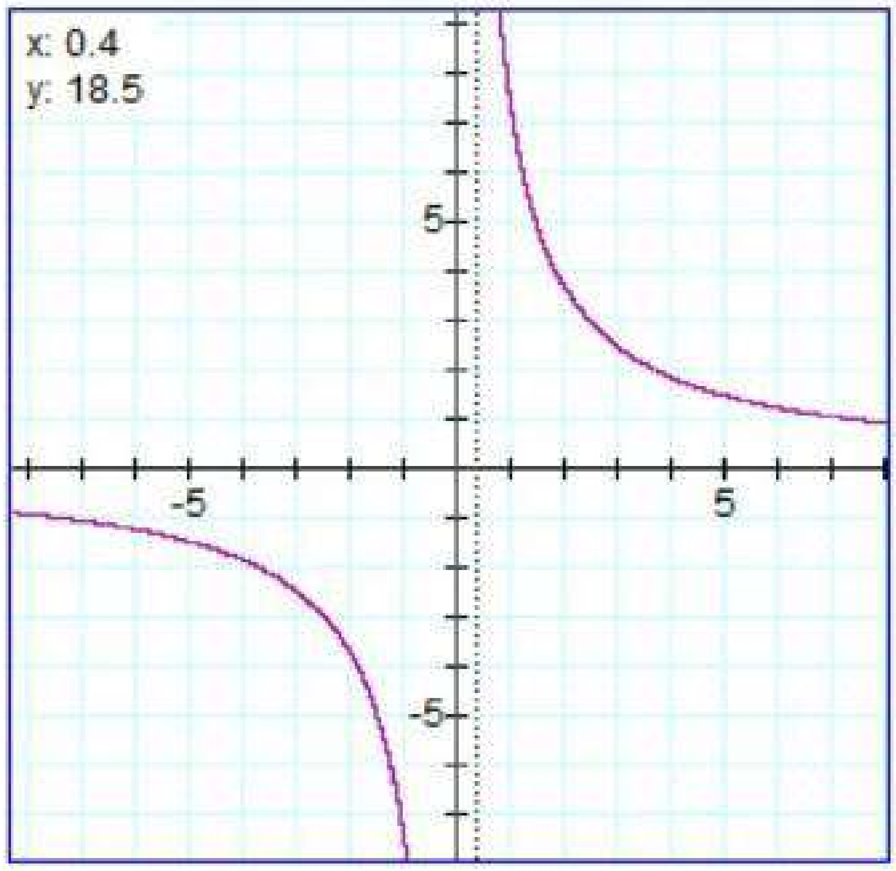
ω	0.39	0.399	0.3999	0.4	0.4001	0.401	0.41
$f\left(\omega\right)$	18.9	18.54	18.505	18.5	18.495	18.45	18.05

(2) يتبين من الجدول أن $\lim\limits_{x\to 0.4} f\left(\omega\right)=18.5$

(3) $f\left(\omega\right)$ متصلة عند $\omega=0.4$ لإن $\lim\limits_{x\to 0.4} f\left(\omega\right)=f\left(0.4\right)=18.5$

(b) يتضح من الرسم البياني أن الدالة غير متصلة (لا نهائي) عند $\omega=0$ لإن الدالة تقترب من قيمتين مختلفتين على يمين ويسار العدد 0

(c)



---

9)

أعد تعرف الدالة $f\left(x\right)=\dfrac{x^{2}-9}{x+3}$ لتصبح متصلة عند $x=-3$

-1 $f\left(-3\right)=\dfrac{0}{0}$

-2 ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001		-5.999	-5.99	-5.9

يظهر في الجدول أعلاه أن قيم $f\left(x\right)$ تقترب من -6 عندما تقترب x من -3 من الجهتين أي أن

$$\lim_{x\to -3} f(x)=-6$$

$f\left(x\right)$ غير متصلة عند $x=-6$ لأن $f\left(-3\right)$ غير موجودة وبما أن $\lim\limits_{x\to -3} f\left(x\right)$ موجودة فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=-3$

-3

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^{2}-9}{x+3} & x\neq -3\\ -6, & x=-3\end{cases}$$

(10

أعد تعرف الدالة $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ لتصبح متصلة عند $x=5$

-1 $f\left(5\right)=\dfrac{0}{0}$

-2 ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 5

x	4.9	4.99	4.999	5	5.001	5.01	5.1
$f(x)$	9.9	9.99	9.999		10.001	10.01	10.1

يظهر في الجدول أعلاه أن قيم $f\left(x\right)$ تقترب من 10 عندما تقترب x من 5 من الجهتين أي أن

$$\lim_{x\to 5} f(x)=10$$

$f\left(x\right)$ غير متصلة عند $x=10$ لأن $f\left(5\right)$ غير موجودة وبما أن $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ موجودة فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=5$

-3

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & x\neq 5\\ 10, & x=5\end{cases}$$

(11

أعد تعرف الدالة $f(x)=\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ لتصبح متصلة عند $x=\sqrt{2}$

1- $f\left(\sqrt{2}\right)=\frac{0}{0}$

2- ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من $\sqrt{2}$

x	$\sqrt{1.9}$	$\sqrt{1.99}$	$\sqrt{1.999}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2.001}$	$\sqrt{2.01}$	$\sqrt{2.1}$
$f(x)$	2.792	2.825	2.82807		2.82878	2.832	2.863

يظهر في الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 2.8285 عندما تقترب x من $\sqrt{2}$ من الجهتين أي أن

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)=2.8285$$

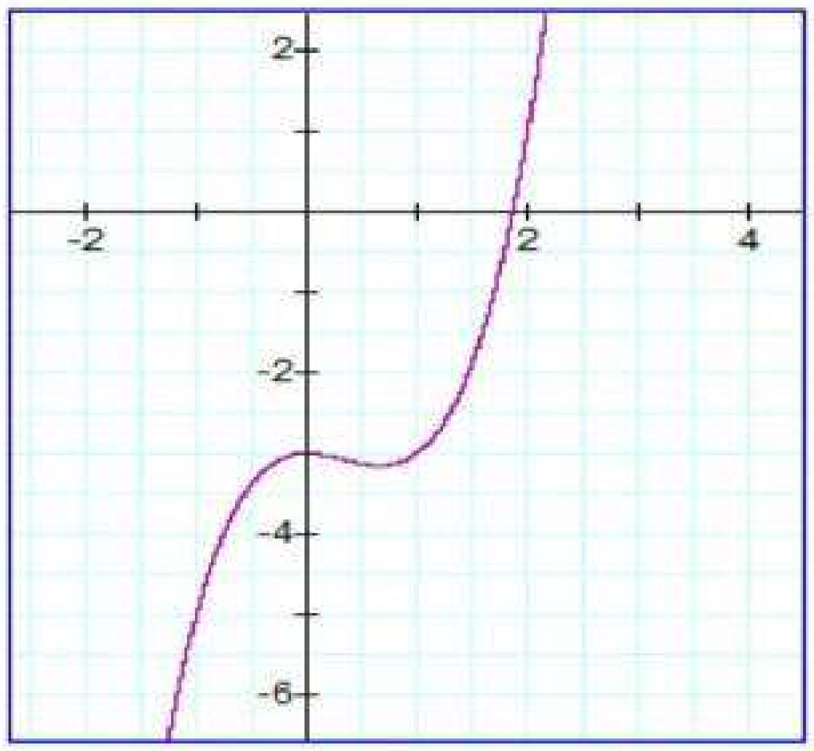
$f(x)$ غير متصلة عند $x=2.8285$ لأن $f\left(\sqrt{2}\right)$ غير موجودة وبما أن $\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)$ موجودة فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=\sqrt{2}$

-3

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & x\neq\sqrt{2}\\ 2.8285, & x=\sqrt{2}\end{cases}$$

* حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي ينحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة

في الفترة المعطاة

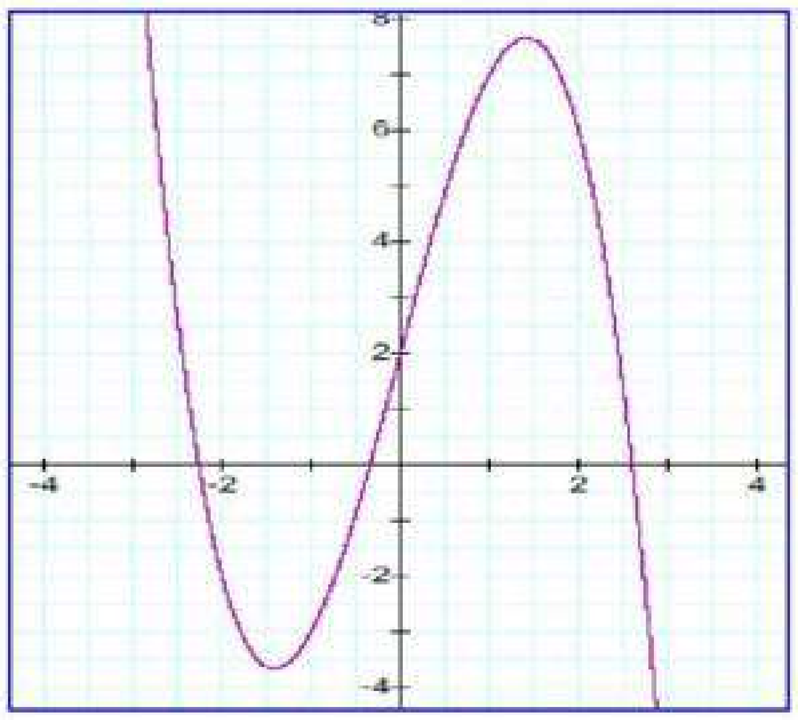


(12) $f(x)=x^3-x^2-3$ في الفترة $[-2,4]$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-15	-5	-3	-3	1	15	45

بما أن $f(1)$ سالبة و $f(2)$ موجبة

$\therefore$ يوجد صفر للدالة $f(x)$ في الفترة $[1,2]$



(13) $g(x)=-x^3+6x+2$ في الفترة $[-4,4]$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	42	11	-2	-3	2	7	6	-7	-38

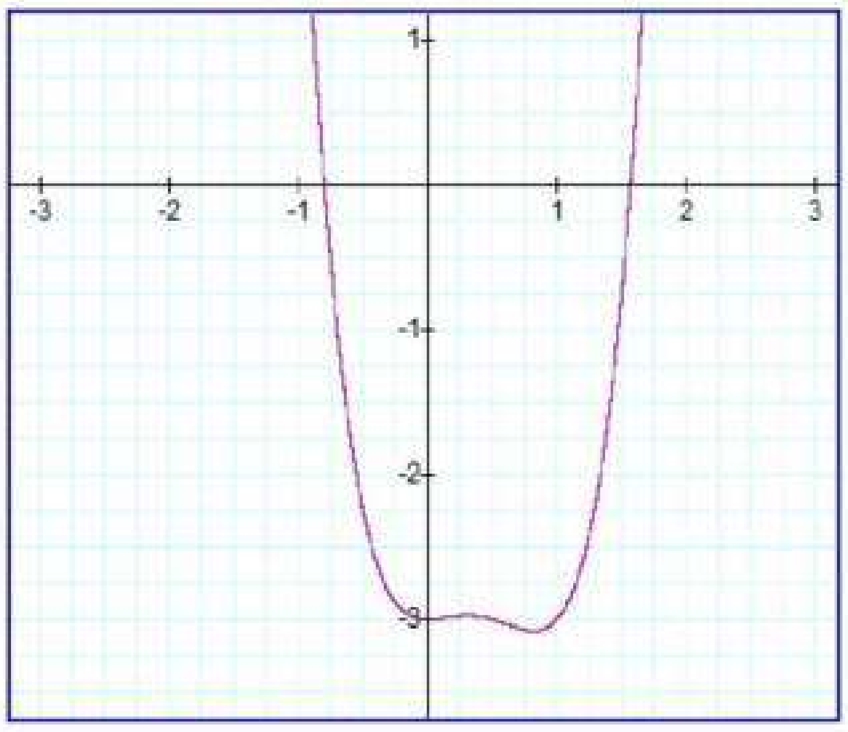
بما أن $g(-3)$ موجبة و $g(-2)$ سالبة $\therefore$ يوجد صفر للدالة

$g(x)$ في الفترة $[-3,-2]$

وكذلك يوجد صفر للدالة $g(x)$ في الفترة $[-1,0]$ و الفترة $[2,3]$

---

(14) $f(x)=2x^4-3x^3+x^2-3$ في الفترة $[-3,3]$

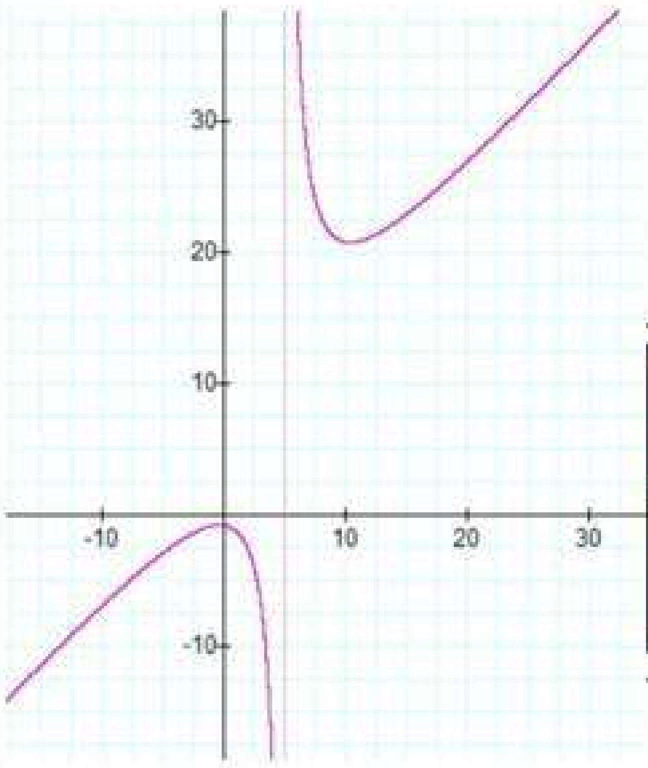


x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	249	57	3	-3	-3	9	87

بما أن $f(-1)$ موجبة و $f(0)$ سالبة $\therefore$ يوجد صفر للدالة

$f(x)$ في الفترة $[-1,0]$ وكذلك يوجد صفر للدالة $f(x)$ في الفترة $[0,1]$

(15) $h(x)=\dfrac{x^2+4}{x-5}$ في الفترة $[-2,4]$



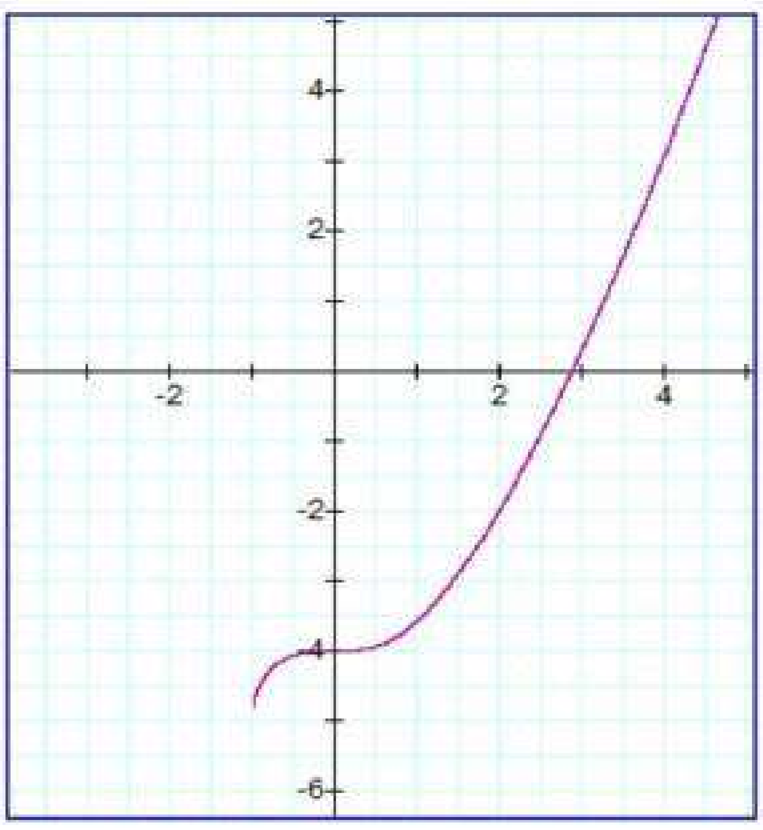
x	-2	-1	0	1	2	3	4
$h(x)$	-1.14	-0.83	-0.8	-1.25	-2.67	-6.5	-20

من بيانات الجدول ومن الرسم البياني يتضح أنه لا يوجد أصفار

للدالة $h(x)$

---

(16) $g(x)=\sqrt{x^3+1}-5$ في الفترة $[0,5]$



x	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	-4	-3.59	-2	0.29	3.06	6.22

بما أن $g(2)$ موجبة و $g(3)$ سالبة $\therefore$ يوجد صفر للدالة

$g(x)$ في الفترة $[2, 3]$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عددياً:

(17) واضح من الرسم أن $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$ وكذلك $f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$4 \cdot 10^{16}$	$4 \cdot 10^{12}$	$4 \cdot 10^{8}$	0	$4 \cdot 10^{8}$	$4 \cdot 10^{12}$	$4 \cdot 10^{16}$

(18) واضح من الرسم أن $f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$ و $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to \infty$

x	-10000	-1000	0	1000	10000
$f(x)$	$5 \cdot 10^{12}$	$5 \cdot 10^{9}$	-1	$-5 \cdot 10^{9}$	$-5 \cdot 10^{12}$

(19) واضح من الرسم أن $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$ وكذلك $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$

x	-10000	-1000	0	1000	10000
$f(x)$	-9995	-995	-0.333	1005	10005

(20) واضح من الرسم أن $f(x) \to -4$ عندما $x \to \infty$ وكذلك $f(x) \to -4$ عندما $x \to -\infty$

x	-10000	-1000	0	1000	10000
$f(x)$	-3.998	-3.981	-0.833	-4.019	-4.001

(21) واضح من الرسم أن $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$ وكذلك $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$

x	-10000	-1000	0	1000	10000
$f(x)$	-5000	-500	غير معرفة	499.7	4999.7

---

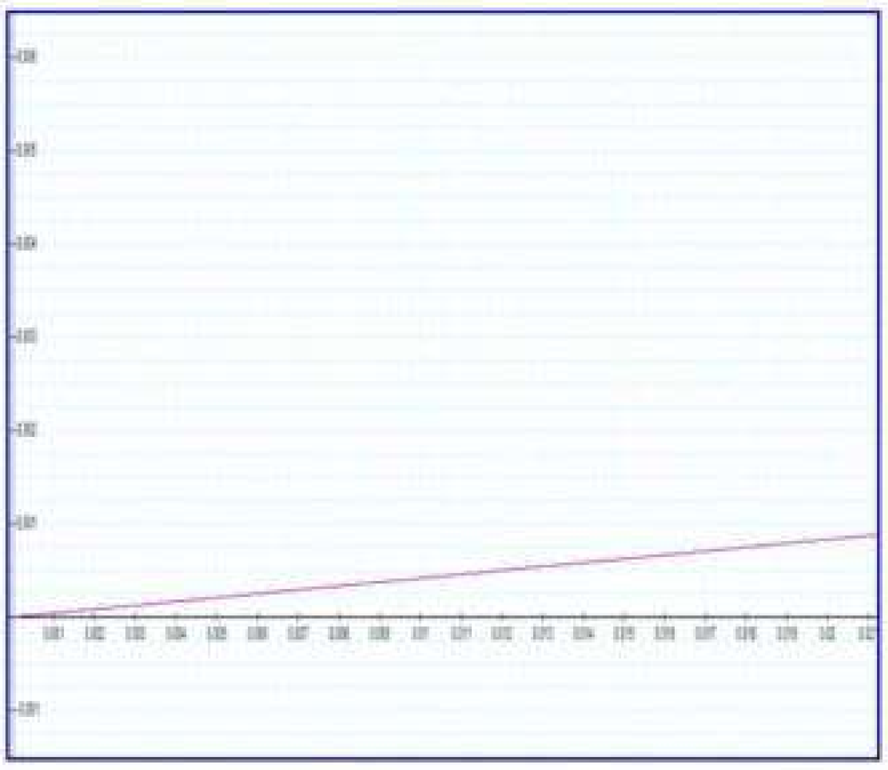
(22) واضح من الرسم أن $f(x) \to -2$ عندما $x \to \infty$ وكذلك $f(x) \to -2$ عندما $x \to -\infty$

x	-1000	-10	0	10	1000
$f(x)$	-1.999999	-1.99	-5	-1.98	-1.999999

---

(23) كيمياء:

(a)



(b) يبين سلوك طرفي التمثيل البياني أنه إذا زاد تركيز العامل المساعد فإن معدل التفاعل الكيميائي يقترب من 0.5

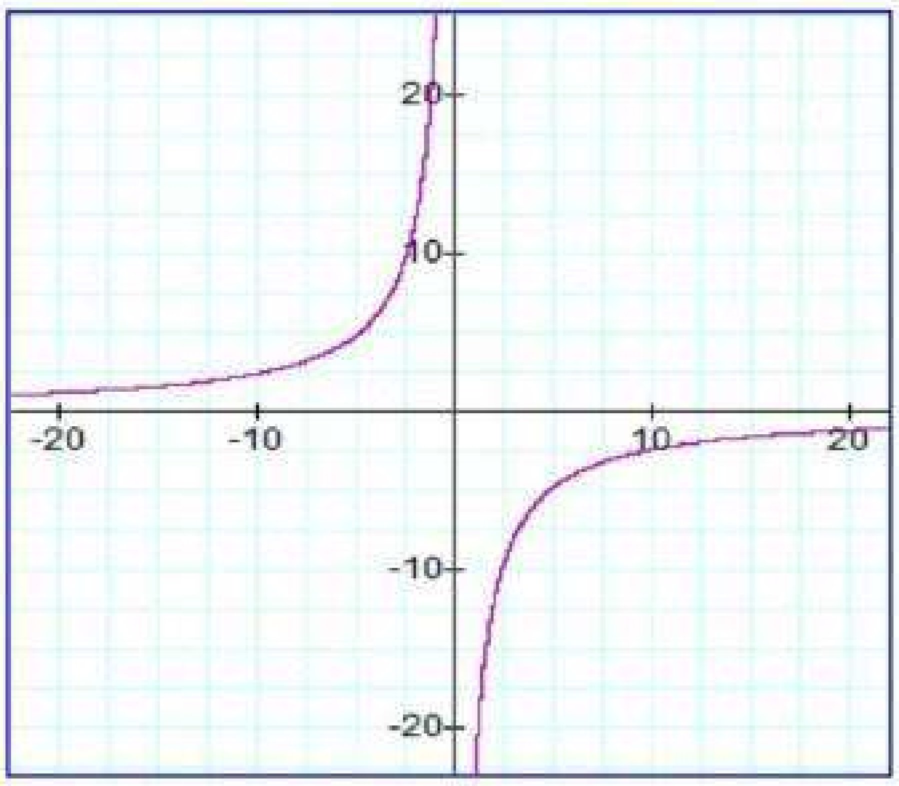
x	0	100	1000	10000
$R(x)$	0	0.446	0.494	0.499

استعمل التبرير المنطقي لتحديد سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي، عندما تقترب x من ∞. برر إجابتك.

24) $f(u)=\dfrac{12}{u}$

عندما $u \to \infty$ فإن $f(u) \to 0$

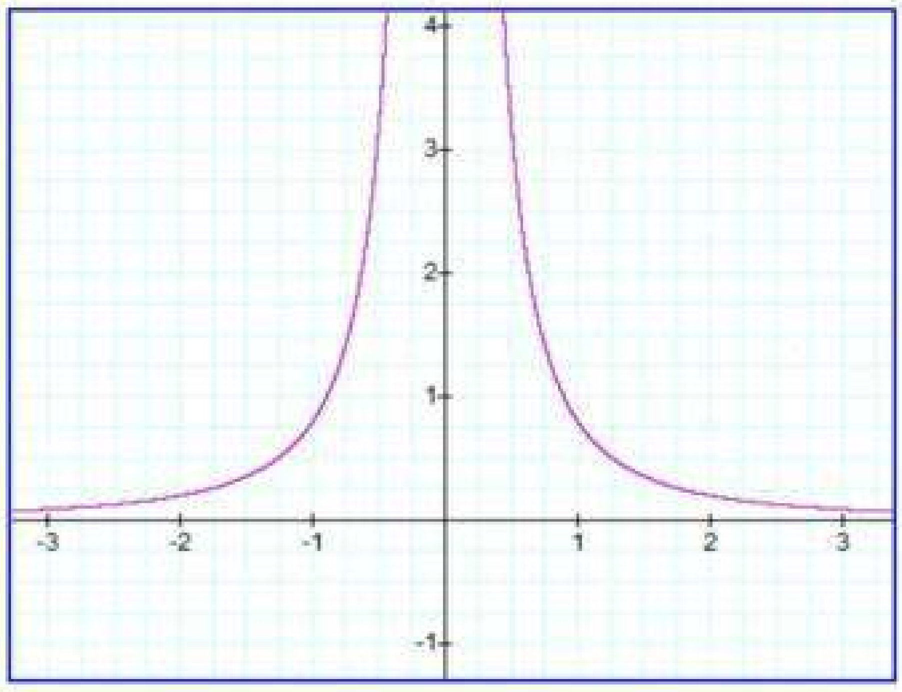
وعندما $u \to -\infty$ فإن $f(u) \to 0$



25) $q(x)=-\dfrac{24}{x}$

من الرسم البياني عندما $x \to \infty$ فإن $q(x) \to 0$

وعندما $x \to -\infty$ فإن $q(x) \to 0$



26) $f(x)=\dfrac{0.8}{x^2}$

من الرسم البياني يتضح أنه عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to 0$

وعندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to 0$

27) $h(r)=\dfrac{-1}{r^2+1}$

عندما $r \to \infty$ فإن $h(r) \to 0$

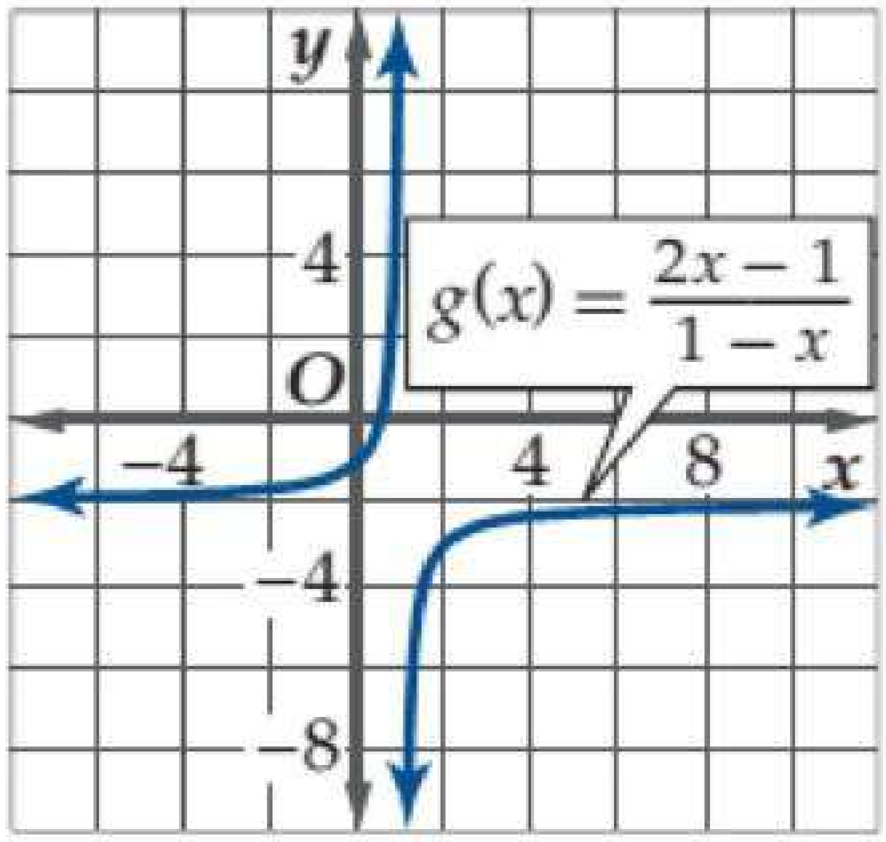
وعندما $r \to -\infty$ فإن $h(r) \to 0$

فيزياء:

(28) $E(m) = \frac{p^2}{2m}$

عند تزايد كتلة الجسم تقترب طاقة حركة السيارة من 0

استعمل التمثيل البياني لتحديد قيمة أو قيم x التي تكون الدالة غير متصلة عندها، وحدد نوع عدم الاتصال، ثم استعمل المنحني لوصف سلوك طرفي التمثيل.

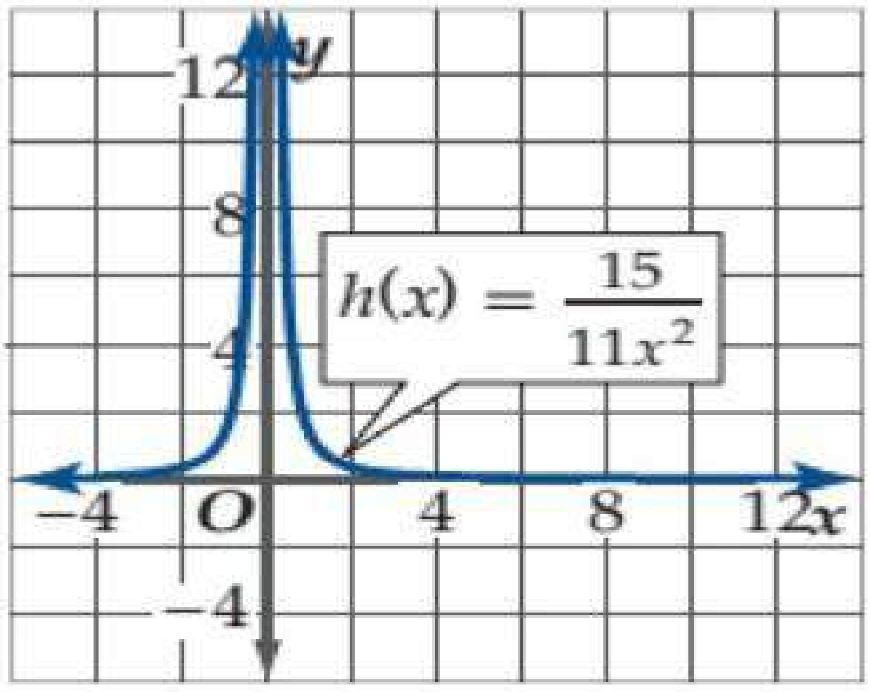


(29) الدالة غير متصلة عند $x = 1$ اتصال غير نهائي

حيث أن الدالة غير معرفة عند $x = 1$

سلوك طرفي الدلة:

من الرسم البياني يتضح أنه عندما $x \to \infty$ فإن
$g(x) \to -2$ وعندما $x \to -\infty$ فإن $g(x) \to -2$



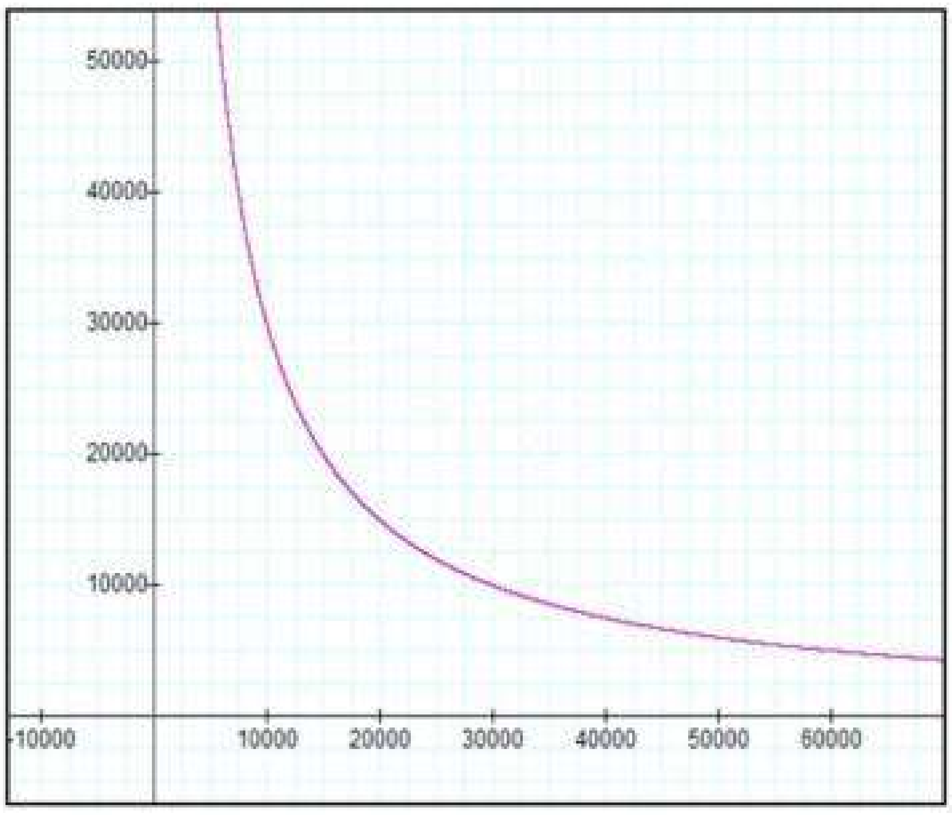
(30) الدالة غير متصلة عند $x = 0$ عدم اتصال لا نهائي

حيث أن الدالة غير معرفة عند $x = 0$

سلوك طرفي الدلة:

من الرسم البياني يتضح أنه عندما $x \to \infty$ فإن
$h(x) \to 0$ وعندما $x \to -\infty$ فإن $h(x) \to 0$

(31) <u>فيزياء:</u>



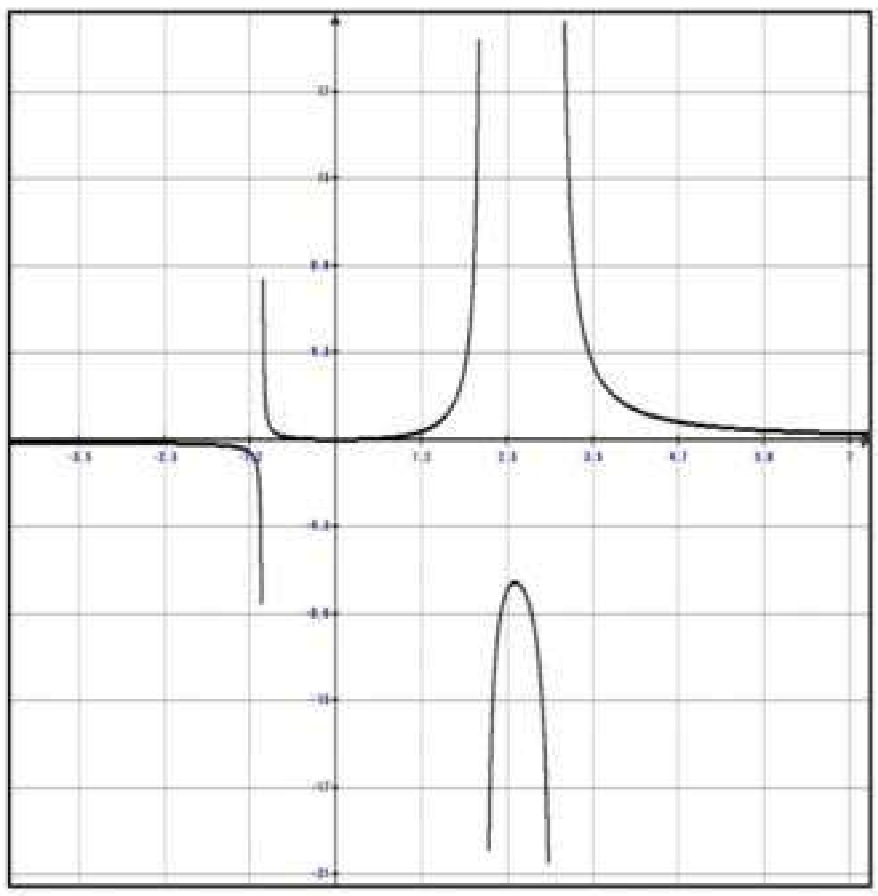
(a) $f(\lambda)=\dfrac{c}{\lambda}$

(b) **<u>سلوك طرفي الدلة:</u>**

من الرسم البياني يتضح أنه عندما $\lambda \to \infty$ **فإن** $f(\lambda)\to 0$ **وعندما** $\lambda \to 0$ **فإن** $f(\lambda)\to\infty$

(c) **الدالة غير متصلة عند** $\lambda = 0$

الحاسبة البيانية:



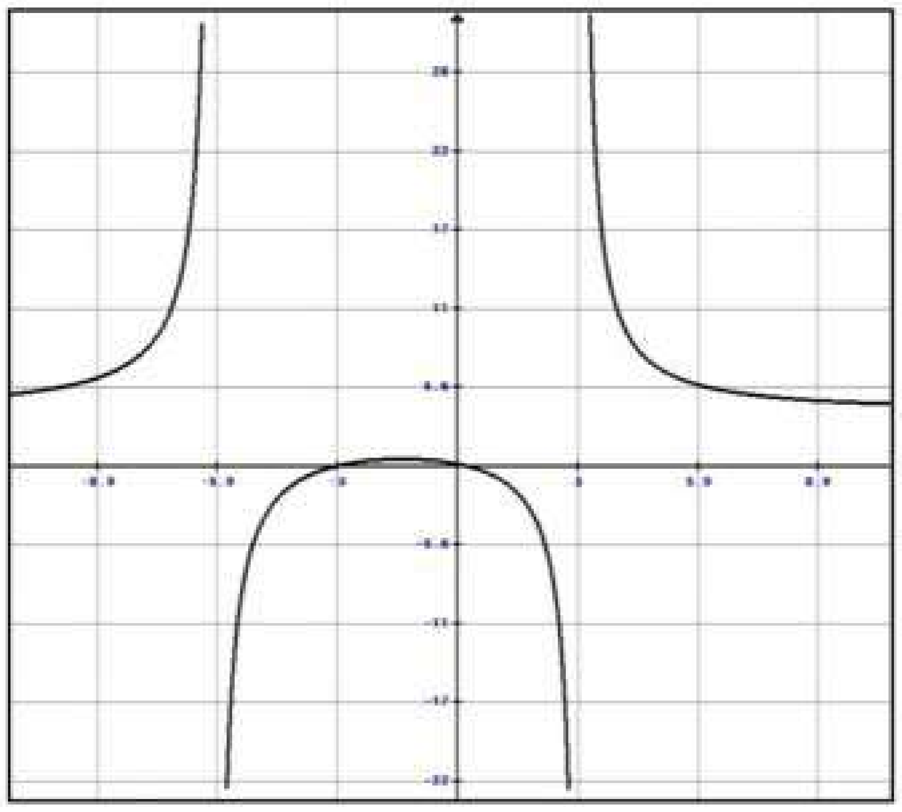
(32) <u>الإتصال</u>: الدالة غير متصلة، عدم اتصال لانهائي عند $x=3$ ، $x=2$ ، $x=-1$

<u>سلوك طرفي الدالة:</u>

$f(x)\to 0$ **عندما** $x\to\infty$

، $f(x)\to 0$ **عندما** $x\to-\infty$

<u>الأصفار</u>: للدالة صفر حقيقي عند $x=0$



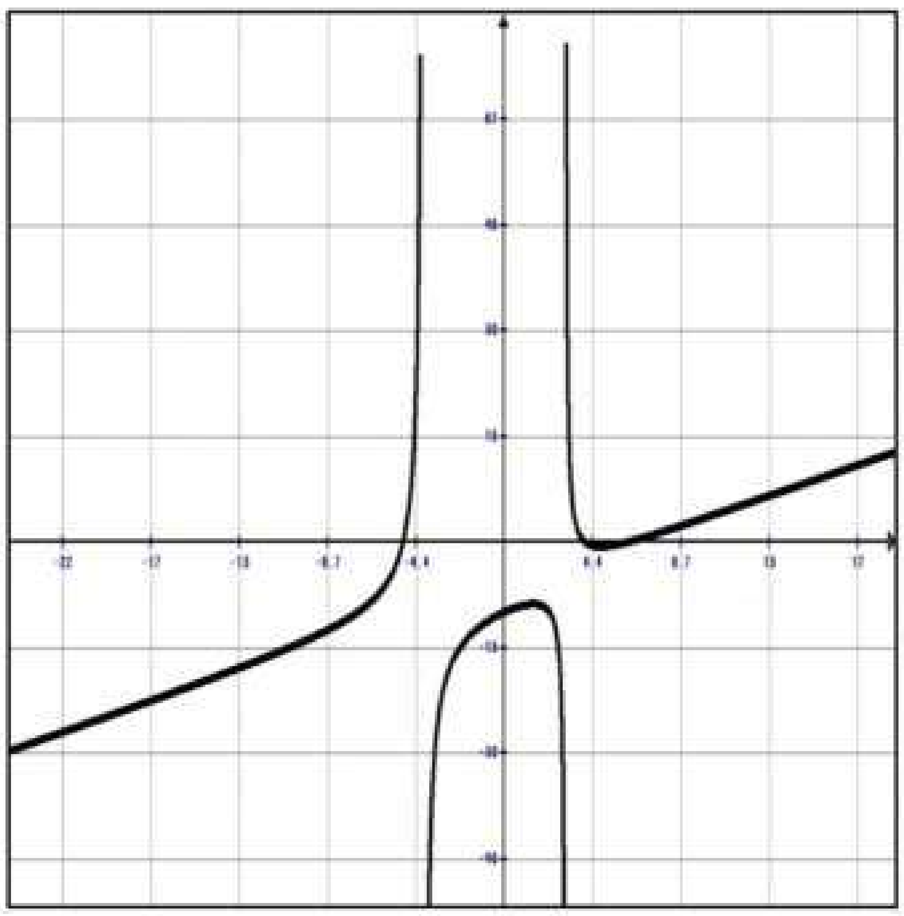
(33) <u>الإتصال</u>: الدالة غير متصلة، عدم اتصال لانهائي عند $x=3$ ، $x=-6$

<u>سلوك طرفي الدالة:</u>

$h(x)\to 4$ **عندما** $x\to\infty$

، $h(x)\to 4$ **عندما** $x\to-\infty$

<u>الأصفار</u>: للدالة صفر حقيقي عند $x=0.25$ ، $x=-3$



(34) الإتصال: الدالة غير متصلة، عدم اتصال لا نهائي عند

$x=-4$ ، $x=3$

سلوك طرفي الدالة:

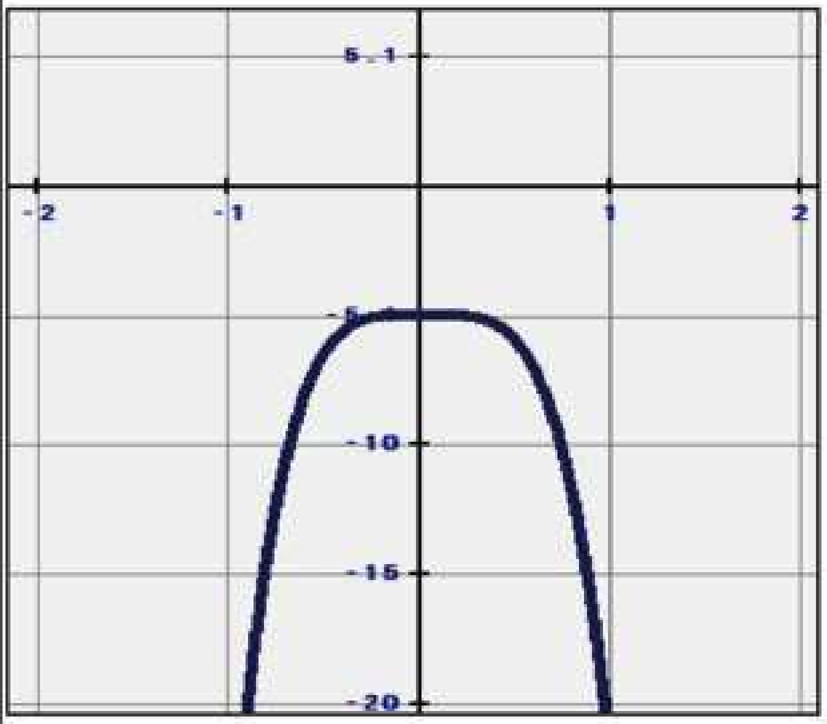
$h(x)\to\infty$ عندما $x\to\infty$

، $h(x)\to-\infty$ عندما $x\to-\infty$

الأصفار: للدالة صفر حقيقي عند

$x=6$ ، $x=4$ ، $x=-5$

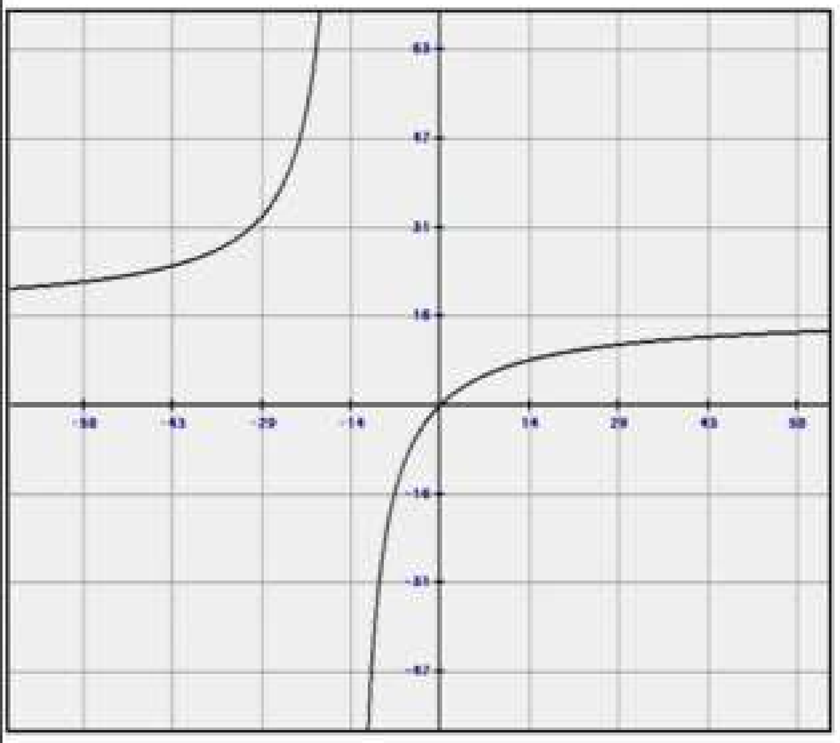
الحاسبة البيانية:



(35) واضح من الرسم أن $g(x)\to-\infty$ عندما $x\to\infty$

وكذلك $g(x)\to-\infty$ عندما $x\to-\infty$

x	-1000	-100	0	100	1000
$g(x)$	$-1\cdot10^{15}$	$-1\cdot10^{10}$	-5	$8\cdot10^{9}$	$9.8\cdot10^{14}$



(36) واضح من الرسم أن $f(x)\to16$ عندما $x\to\infty$

وكذلك $f(x)\to16$ عندما $x\to-\infty$

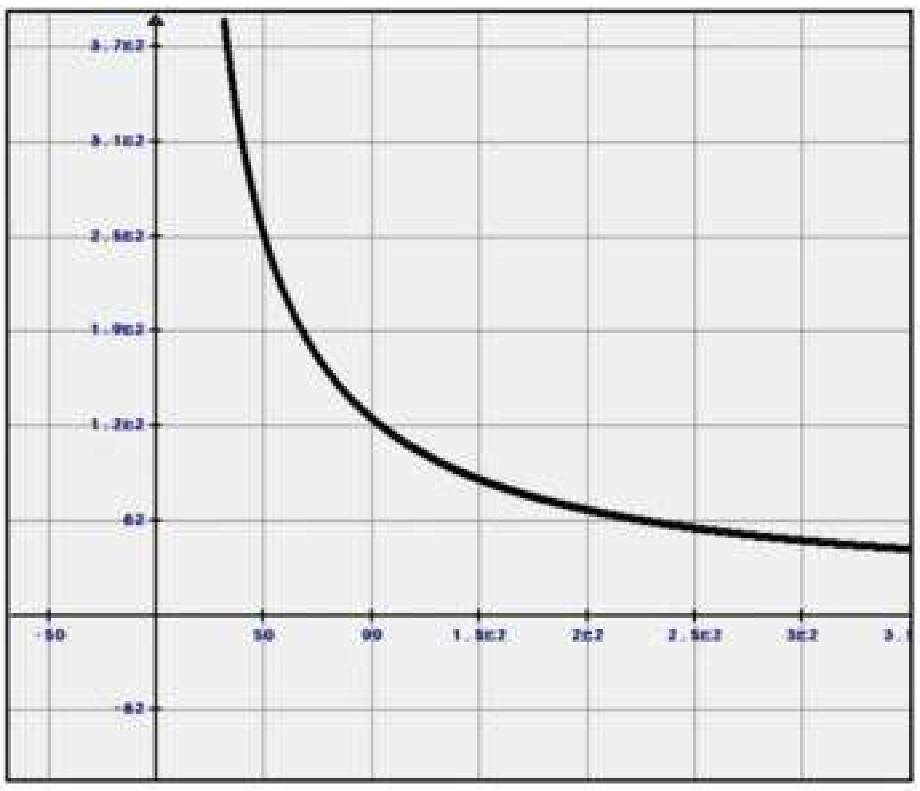
x	-10000	-1000	0	1000	10000
$f(x)$	16.02	16.24	غير معرفة	15.76	15.97

أعمال:

(37)

(a) $f(n)=\dfrac{9n+12000}{n}$

(b)



(c) عندما تزيد عدد القمصان بشكل كبيرجداً ($n\to\infty$)

فإن تكلفة القميص الواحد تساوي 9 ريالات.

تمثيلات متعددة:

(38) (a)

$$f_1(x)=\frac{3x^3+2}{x^3+4}$$

$$f_2(x)=\frac{-x^3+5}{x^3+7}$$

$$f_1(x)=\frac{9x^3-6}{x^3+8}$$

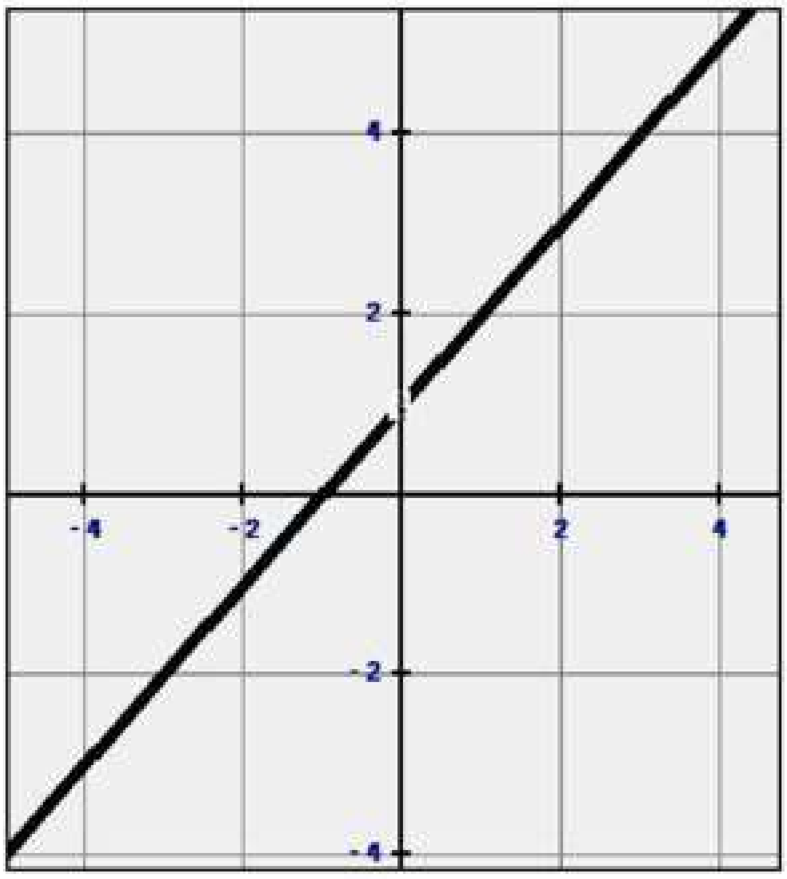
$c=1$				
a	b	d	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3	2	4	3	3
-1	5	7	-1	-1
9	-6	8	9	9

(b) $f(x)=\dfrac{ax^3+b}{cx^3+d}$

a	b	c	d	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
6	5	3	1	2	2
3	4	12	13	0.25	0.25
7	1	7	-4	1	1

(c) نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{ax^3+b}{cx^3+d}$ عند $x\to\infty$ ، $x\to-\infty$ تساوي $\dfrac{a}{c}$

مسائل مهارات التفكير العليا

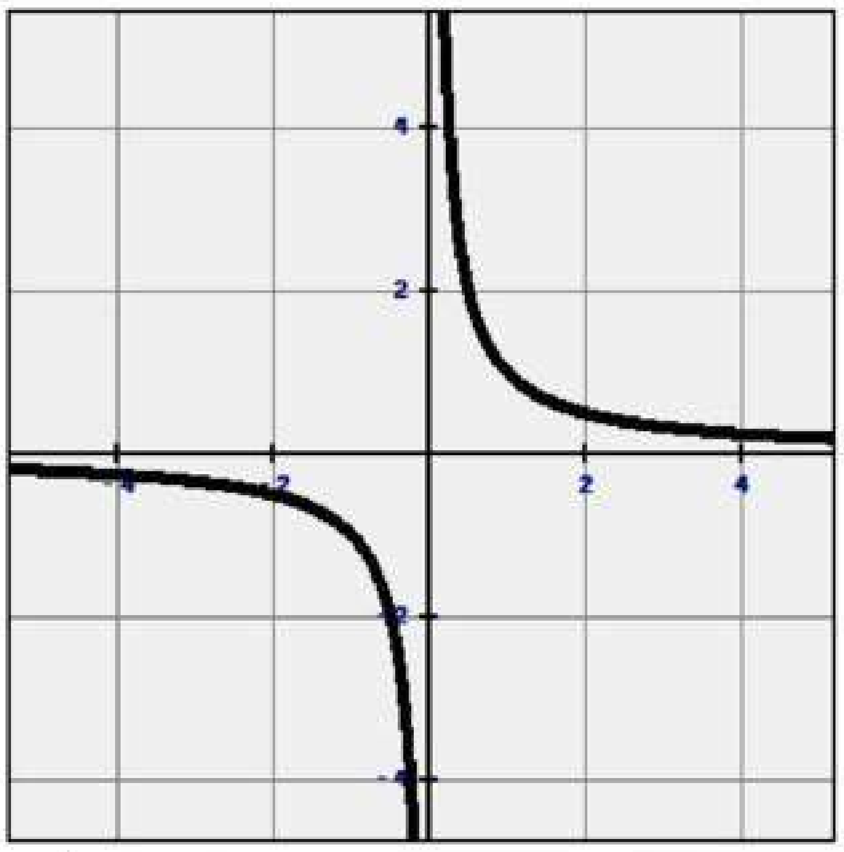


تبرير:

(39) $f(x)=\dfrac{x^5+x^6}{x^5}$

من الرسم البياني الدالة $f(x)$ غير متصلة عند $x=0$

(عدم إتصال قابل للإزالة) لإن $f(0)$ غير موجودة



(40) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^5}$

من الرسم البياني الدالة $f(x)$ غير متصلة عند $x=0$

(عدم إتصال لا نهائي) لإن $f(0)$ غير موجودة كما أن الدالة كلما اقتربت x من 0 من الجهتين فإن $f(x)$ تقترب من ∞ ، $-\infty$

---

(41) تحد:

$b=3$ ، $a=9$

تبرير: أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ في كل الحالات الآتية، وبرر إجابتك.

(42) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

بما أن $f(x)$ دالة زوجية فإن التمثيل البياني عند $x=-\infty$ يكون مشابهاً للتمثيل البياني وعند $x=\infty$

(43) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

بما أن $f(x)$ دالة فردية فإن التمثيل البياني عند $x=-\infty$ يكون معاكساً لسلوكها عند $x=\infty$

---

(44) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

بما أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل فإن التمثيل البياني عند $x=-\infty$ يكون معاكساً لسلوكها عند $x=\infty$ حيث أن $(x,y)\to(-x,-y)$

---

(45) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

بما أن الدالة متماثلة حول محور y لذا فإن التمثيل البياني عند $x=-\infty$ يكون مشابهاً للتمثيل البياني عند $x=\infty$ حيث أن $f(x)=f(-x)$

---

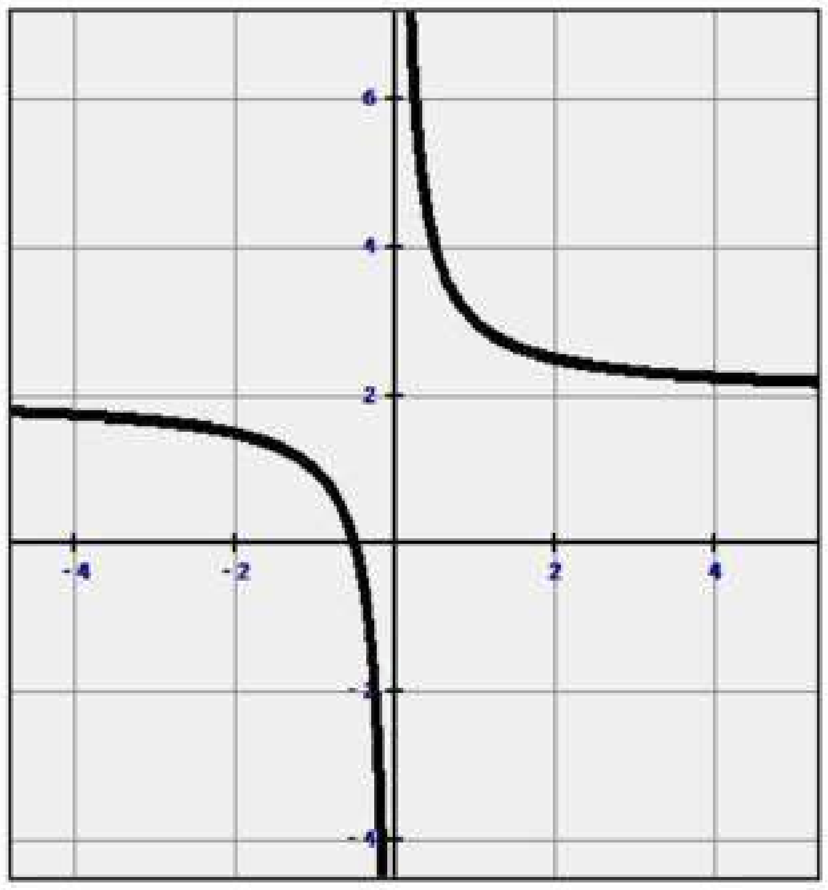
(46) <u>أكتب</u>:

الدالة $f(x)=\dfrac{x(x+3)}{x}$ عدم إتصال قابل للإزالة عند $x=0$ ويمكن إزالتة عن طريق قسمة كلاً من البسط والمقام على x فتصبح دالة أخري $g(x)=(x+3)$

الدالة $f(x)$ تختلف عن الدالة $g(x)$ لأن $f(0)$ غير معرفة ولكن $g(0)=3$

مراجعة تراكمية:

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كل من الدوال الآتية بيانياً، وتحديد أصفارها.
<u>ثم تحقق من إجابتك جبرياً.</u>



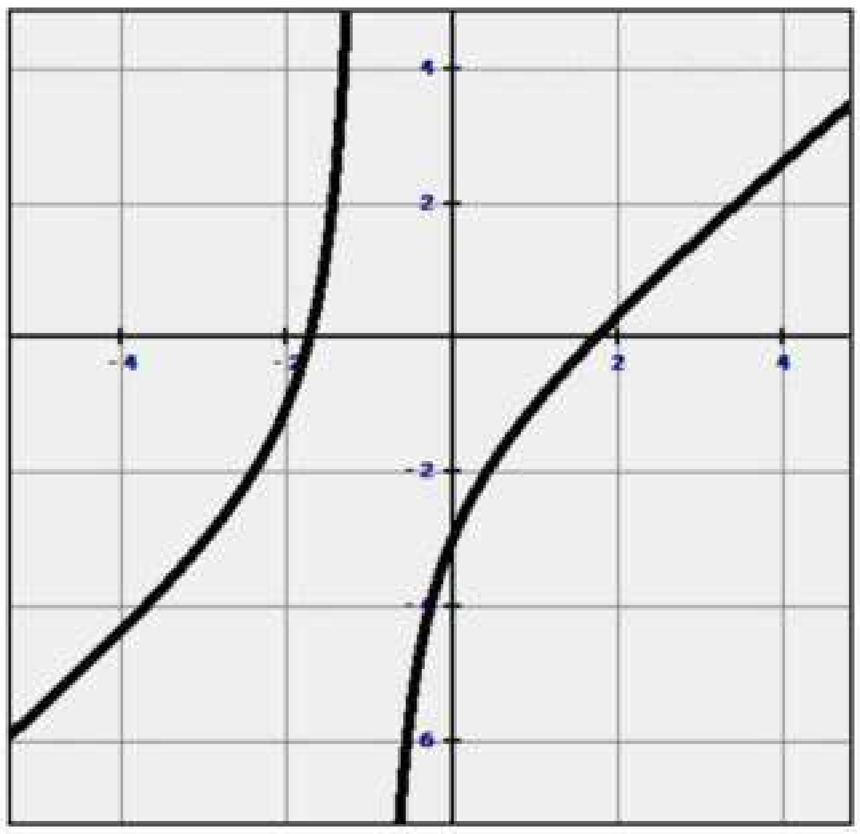
(47) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$

<u>جبرياً:</u>

$$f(x)=\frac{2x+1}{x}=0$$

$$\therefore\ 2x+1=0 \quad \therefore\ 2x=-1$$

$$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$$



(48) $g(x)=\dfrac{x^2-3}{x+1}$

<u>جبرياً:</u>

$$g(x)=\frac{x^2-3}{x+1}=0$$

$$\therefore\ x^2-3=0 \quad \therefore\ x^2=3$$

$$\therefore\ x=\pm\sqrt{3}$$

---

(49) $h(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

من الرسم البياني يتضح أنه
لا يوجد أصفار للدالة.

حدد مجال الدالة لكل من الدوال الآتية:

(50) $f(x)=\dfrac{4x+6}{x^2+3x+2}$

المجال: $(-\infty,-2)\cup(2,-1)\cup(-1,\infty)$

(51) $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2-2x-10}$

المجال: $\left(-\infty,1-\sqrt{11}\right)\cup\left(1-\sqrt{11},1+\sqrt{11}\right)\cup\left(1+\sqrt{11},\infty\right)$

(52) $g(a)=\sqrt{2-a^2}$

المجال: $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

إذا كانت $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-3x+1}$ فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

(53) $f(9)=\dfrac{2\cdot9-5}{9^2-3\cdot9+1}=\dfrac{13}{55}$

$$f(3b)=\frac{2(3b)-5}{(3b)^2-3(3b)+1}=\frac{6b-5}{9b^2-9b+1} \quad \textbf{(54)}$$

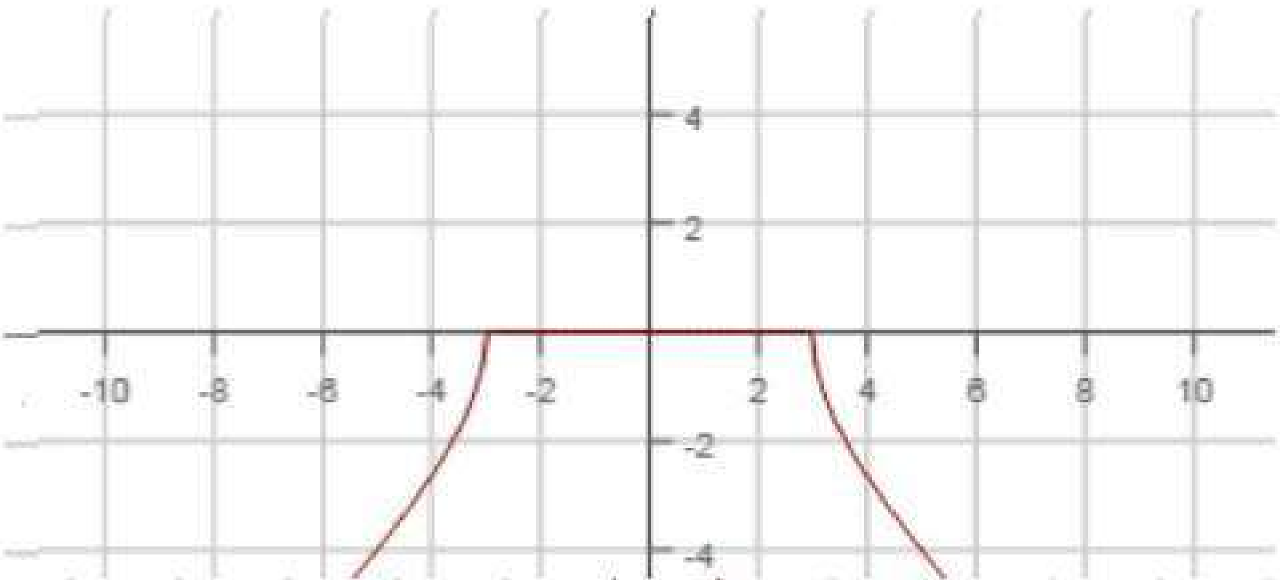
(55)

$$f(2a-3)=\frac{2(2a-3)-5}{(2a-3)^2-3(2a-3)+1}=\frac{4a-6-5}{4a^2-12a+9-6a+9+1}$$

$$=\frac{4a-11}{4a^2-18a+19}$$

مثل بيانياً كل من الدوال الآتية باستخدام الحاسبة البيانية، ثم حلل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبرياً. وإن كانت زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها.

(56



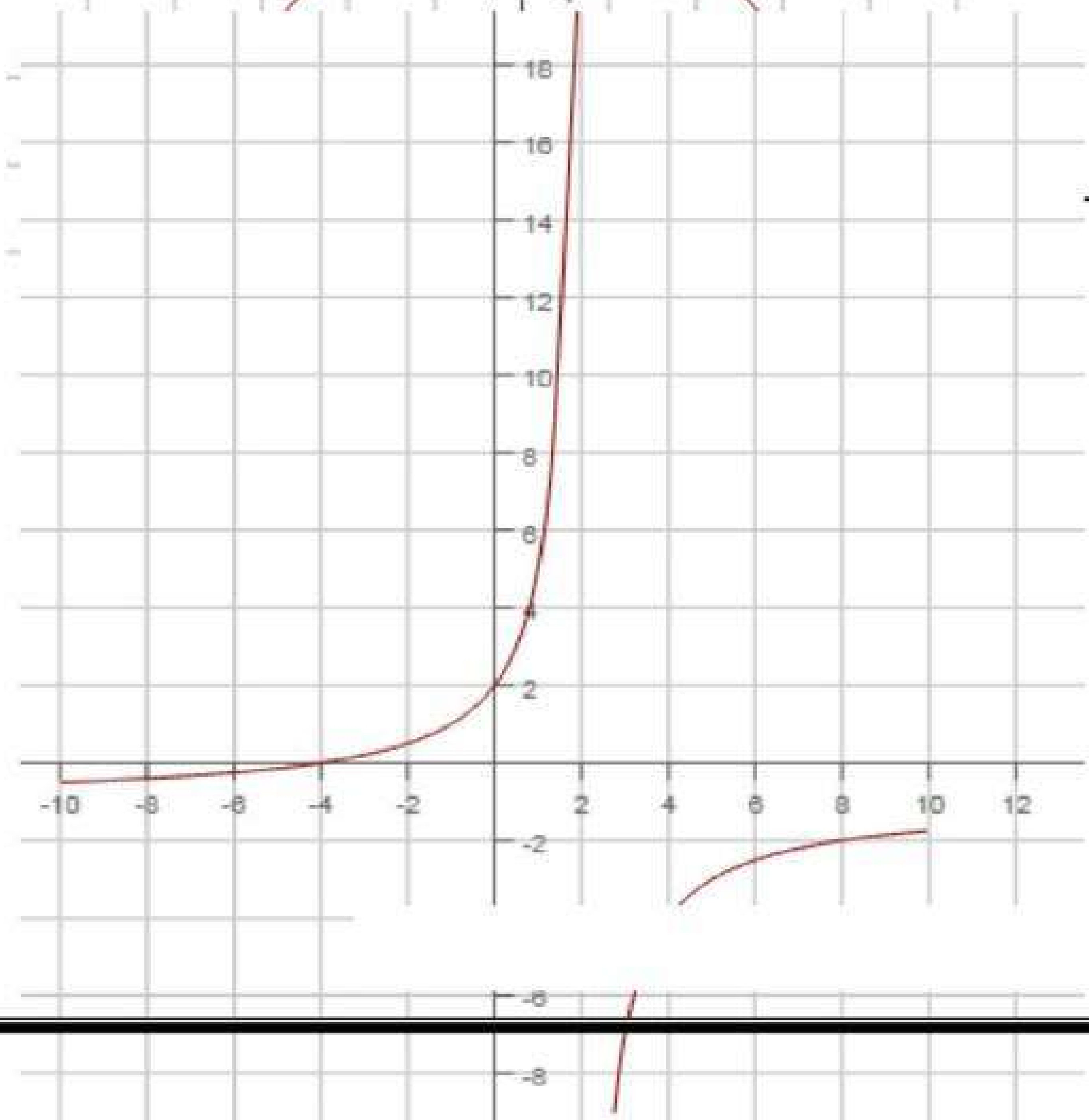
$$h(x)=\sqrt{x^2-9}$$
$$\sqrt{x^2-9}=0$$
$$x=\pm 3$$

الدالة متماثلة حول المحور y

$$h(-x)=\sqrt{(-x)^2-9}$$
$$\sqrt{x^2-9}=0$$
$$x=\pm 3$$

$$h(x)=h(-x)$$

لذا فهي دالة زوجية



$$g(x)=x^6-3 \quad \textbf{(57)}$$

$$f(x)=\frac{x+4}{x-2}$$

$$f(x)=0$$

$$x=-4$$

$$f(-x)=\frac{-x+4}{-x-2}$$

$$f(x)=0$$

$$x=4$$

$$f(x)\neq f(-x)$$

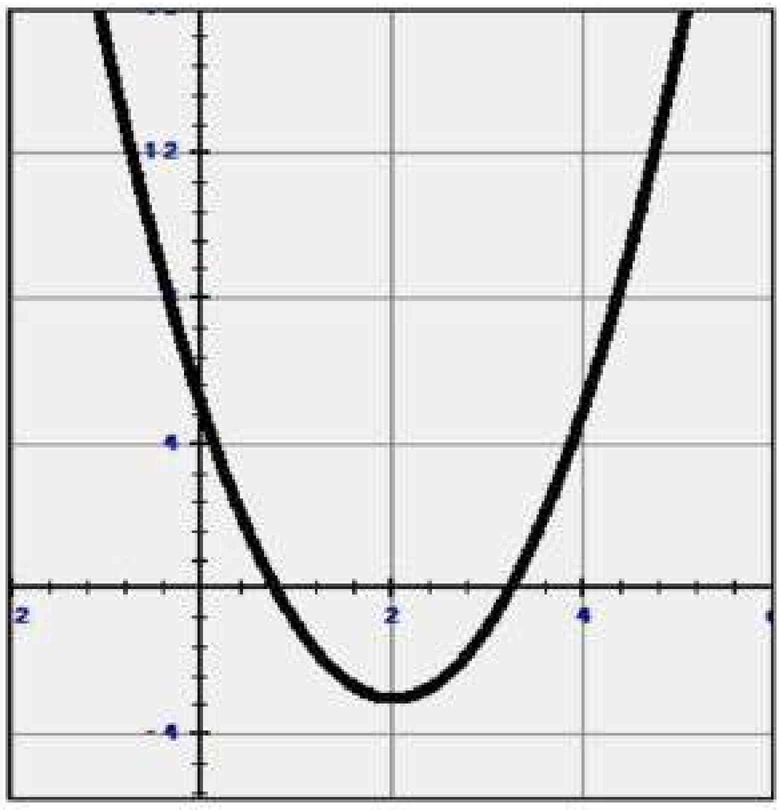
ليست زوجية أو فردية

تدرب على الاختبار:

(58) D 4

(59) A $[6,7]$

(1-4)القيم القصوى ومتوسط معدل التغير



(**1A**) $f(x)=2x^2-8x+5$

يبين الرسم البياني أن الدالة f متناقصة في الفترة $(-\infty,2)$

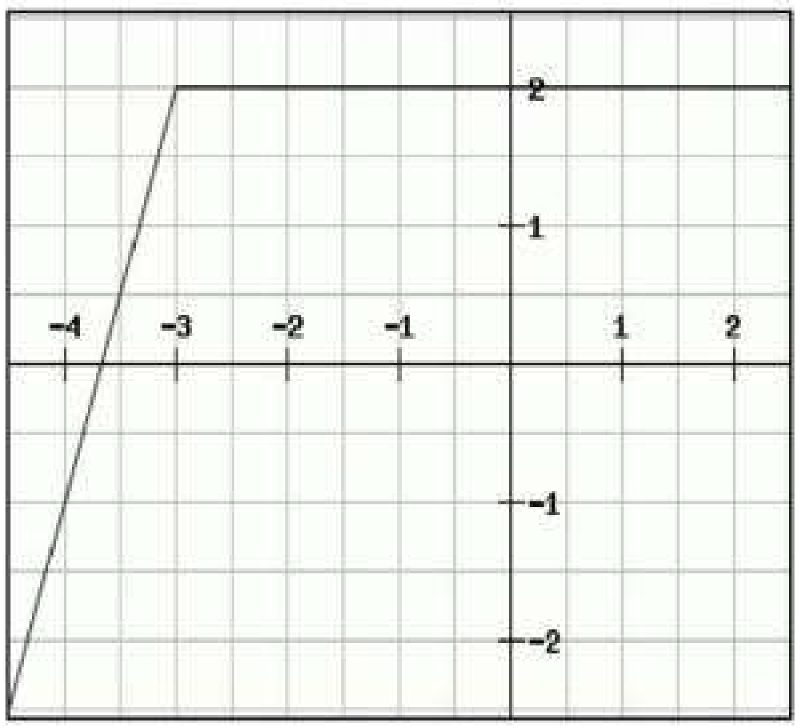
ومتزايدة في الفترة $(2,\infty)$

الفترة $(2,\infty)$

x	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	−3	5	29	69	125	197

الفترة $(-\infty,2)$

x	−8	−6	−4	−2	0	2
$f(x)$	197	125	69	29	5	−3



(**1B**)

$$h(x)=\begin{cases}3x+11 & , x<-3\\ 2 & , x\ge -3\end{cases}$$

يبين الرسم البياني أن الدالة h متزايدة في الفترة $(-\infty,-3)$

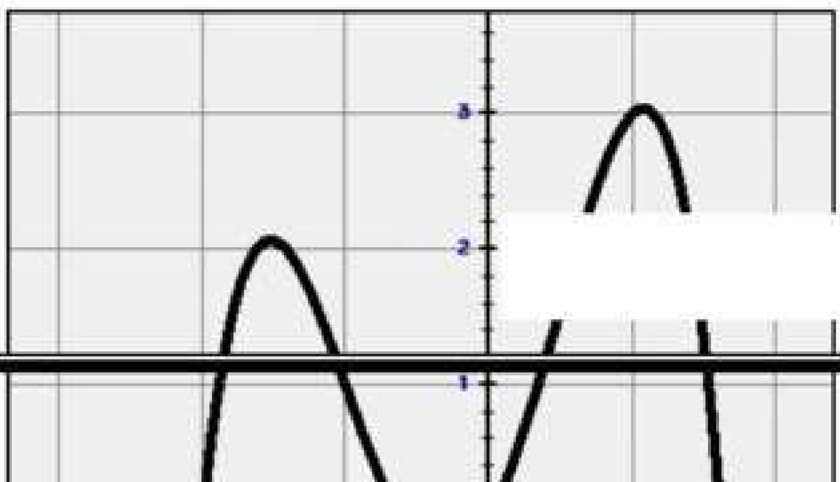
وثابتة على الفترة $(-3,\infty)$

الفترة $(-3,\infty)$

x	−3	−2	−1	0	1	2
$h(x)$	2	2	2	2	2	2

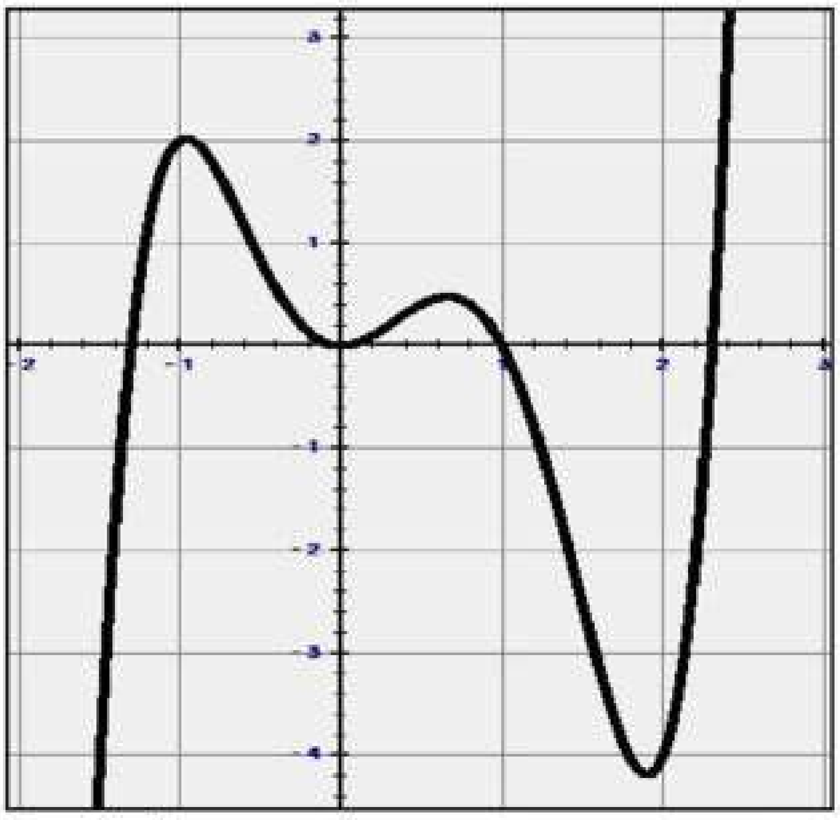
الفترة $(-\infty,-3)$

x	−8	−7	−6	−5	−4	−3
$h(x)$	−13	−10	−7	−4	1	2



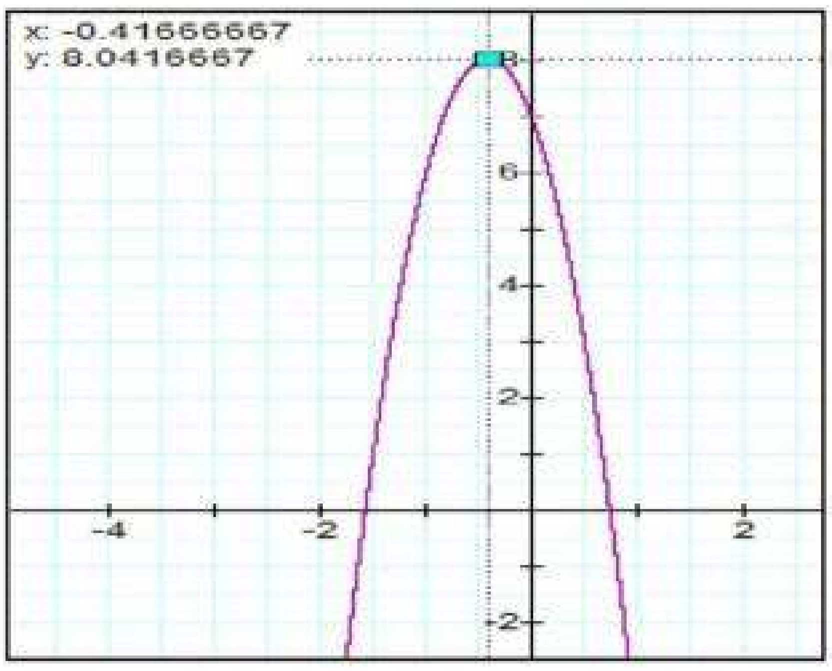
(**2A**) $f(x)=-x^4-x^3+3x^2+2x$

يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند
$x=-1.5$، ومقدارها 2 كما توجد قيمة صغري محلية عند
$x=-0.5$، ومقدارها -0.3 كما توجد قيمة عظمى مطلقة
عند $x=1$، ومقدارها 3



$g(x)=x^5-2x^4-2x^3+3x^2$ ($2B$)

يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند
$x=-1.5$، ومقدارها 2 كما توجد قيمة صغري محلية عند
$x=-0.5$، ومقدارها -0.3 كما توجد قيمة عظمى مطلقة
عند $x=1$، ومقدارها 3

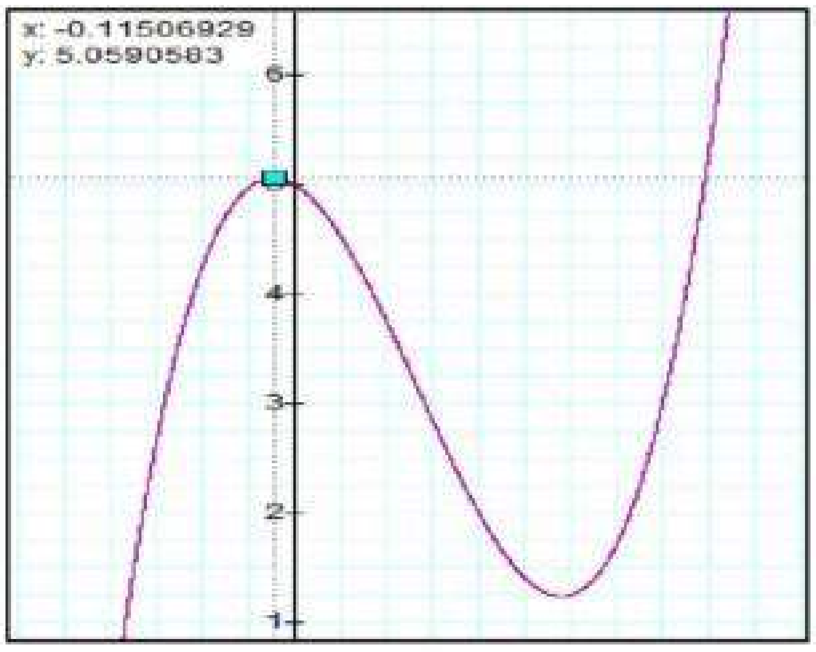


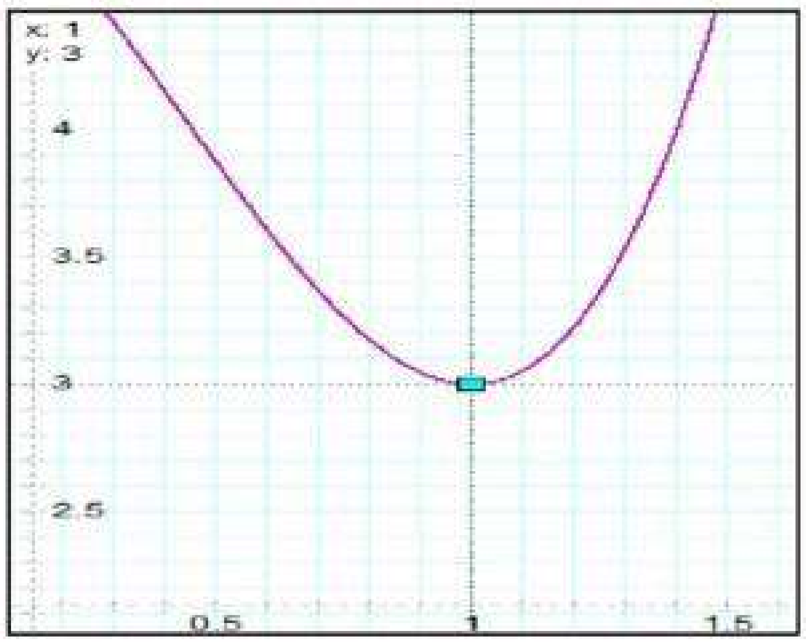
$h(x)=7-5x-6x^2$ ($3A$)

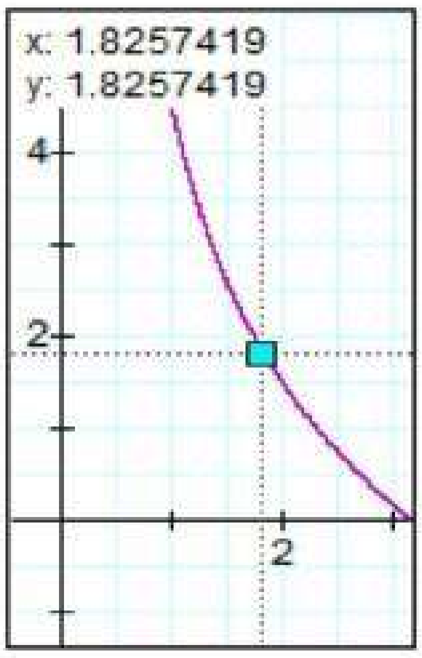
من الرسم البياني يتضح أنه يوجد للدالة قيمة عظمي مطلقة
عند النقطة $(-0.42, 8.04)$

$g(x)=2x^3-4x^2-x+5$ ($3B$)

من الرسم البياني يتضح أنه يوجد للدالة
قيمة عظمي محلية عند $(-0.12, 5.06)$
وقيمة صغري محلية عند $(1, 3)$







(4) **صناعة:**
نصف القطر حوالى $1.83\ in$
الإرتفاع حوالي $1.83\ in$

($5A$) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ في الفترة $[2, 3]$

$$m_{\sec}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$
$$=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}$$
$$=\frac{(3)^3-2(3)^2-3(3)+2-(2)^3+2(2)^2+3(2)-2}{1}$$
$$=\frac{6}{1}=6$$

(**5B**) $f(x)=x^4-6x^2+4x$ في الفترة $[-5,-3]$

$$m_{\sec}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$
$$=\frac{f(-3)-f(-5)}{-3+5}$$
$$=\frac{(-3)^4-6(-3)^2+4(-3)-(-5)^4+6(-5)^2-4(-5)}{2}$$
$$=\frac{-440}{2}=-220$$

(**6**) $d(t)=-16t^2+20t+4$ من 0.5 الي 1 ثانية

$$m_{\sec} = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}$$
$$= \frac{d(1) - d(0.5)}{1 - 0.5}$$
$$= \frac{-16(1)^2 + 20(1) + 4 + 16(0.5)^2 - 20(0.5) - 4}{0.5}$$
$$= \frac{-2}{0.5} = -4 \quad ft/\sec$$

سرعة الجسم تتناقص في الفترة من 0.5 الي 1 ثانية.

تدرب وحل المسائل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقرباً إلى أقرب 0.5 وحدة. ثم عزز إجابتك عددياً:

(1) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$

متزايدة في الفترة $(-\infty, -0.5)$، ومتناقصة في الفترة $(-0.5, 1)$، و متزايدة في الفترة $(1, \infty)$

---

(2) $f(x) = x^4 - 3x^3 - x + 1$

متناقصة في الفترة $(-\infty, 2.5)$، ومتزايدة في الفترة $(2.5, \infty)$

---

(3) $f(x) = \frac{x-2}{x}$

متزايدة في الفترة $(-\infty, 0)$، ومتزايدة في الفترة $(0, \infty)$

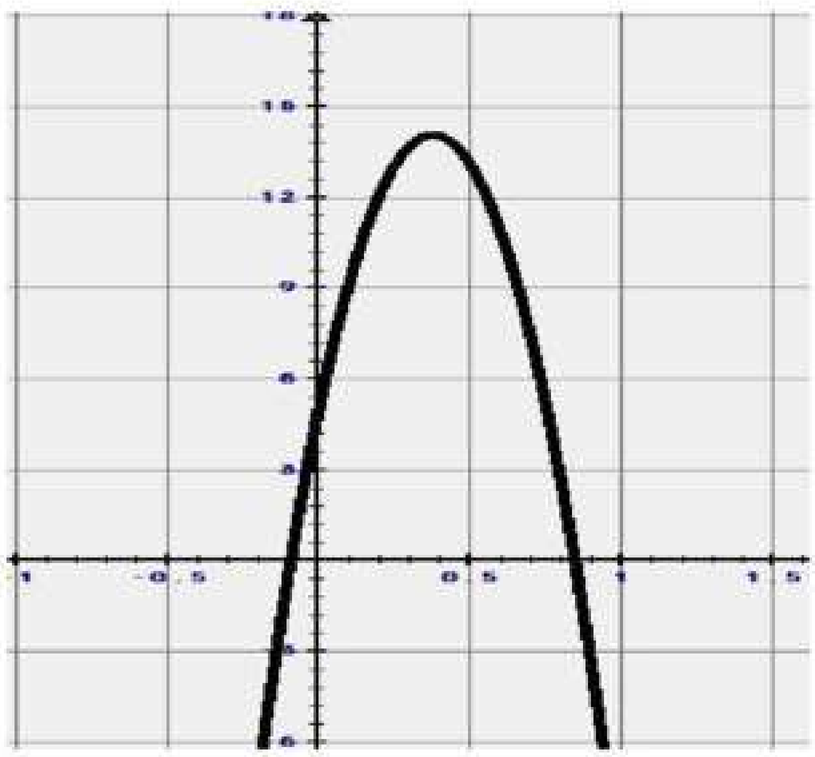
---

(4) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ,x\ge 0\\ -\sqrt{-x} & ,x<0\end{cases}$

متزايدة في الفترة $(-\infty,\infty)$

---

(5) كرة سلة:



$f(t)=-64.4t^2+48.3t+5$

(a)

(b) أقصي أرتفاع يصل إلية المنحنى $14.06\,ft$

قدّر قيم x التي يكون لكلٍّ من الدوال الآتية عندها قيم قصوى مقرباً إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عدديًا.

(6) $f(x)=x^5-3x^4+2x^2$

يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية ومقدارها 0.25 عند $x=0.5$، $x=-0.5$، كما توجد قيمة صغري محلية عند $x=2.5$، ومقدارها -9 كما لها قيمة صغري محلية عند $x=0$، ومقدارها 0

---

(7) $f(x)=-x^4+4x^2-1$

يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية ومقدارها 3 عند $x=1.5$، $x=-1.5$، كما توجد قيمة صغري محلية عند $x=0$، ومقدارها -1

---

(8) $f(x) = -x^5 + 10x^3$

يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغري محلية ومقدارها -58.8 عند $x = -2.5$، كما توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 2.5$، ومقدارها 58.8

(9) $f(x) = x^6 - 20x^4 + 3x^3$

يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغري محلية ومقدارها -1043 عند $x = 3.5$، كما توجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = -3.5$، ومقدارها -1335، ولها قيمة عظمى محلية عند $x = 0$، ومقدارها 0

---

(10) $f(x) = -x^5 + 4x^4 - 4x^3$

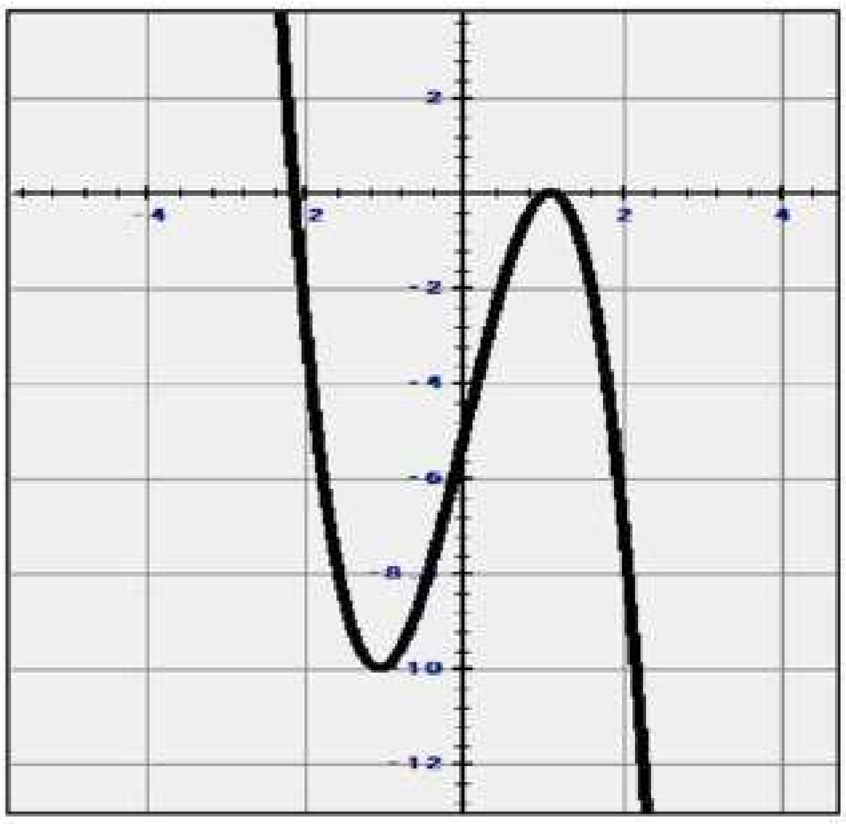
يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغري محلية ومقدارها -1 عند $x = 1$، كما توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 2$، ومقدارها 0

---

(11) $f(x) = -0.5x^4 + 2.5x^3 + x^2 - 6.5x$

يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغري محلية ومقدارها -3.5 عند $x = 1$، ولها قيمة عظمى محلية عند $x = -1$، ومقدارها 4.5، ولها قيمة عظمى مطلقة عند $x = 4$، ومقدارها 22.5

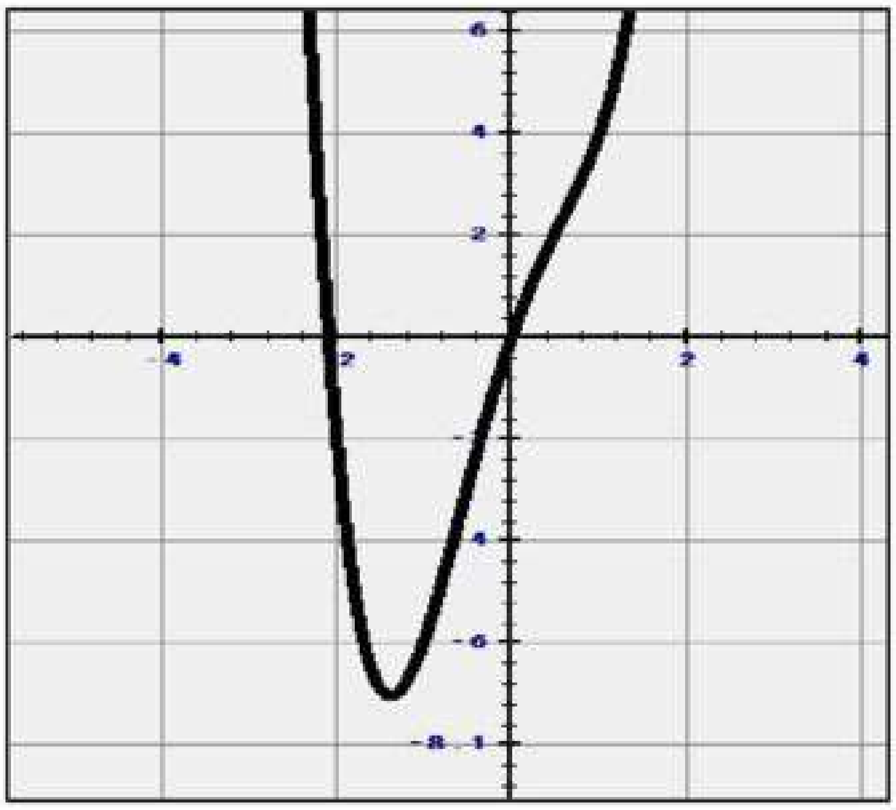
الحاسبة: أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربه إلى أقرب جزء من مئة لكل دالة فيما يأتي، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.



(12) $g(x) = -2x^3 + 7x - 5$

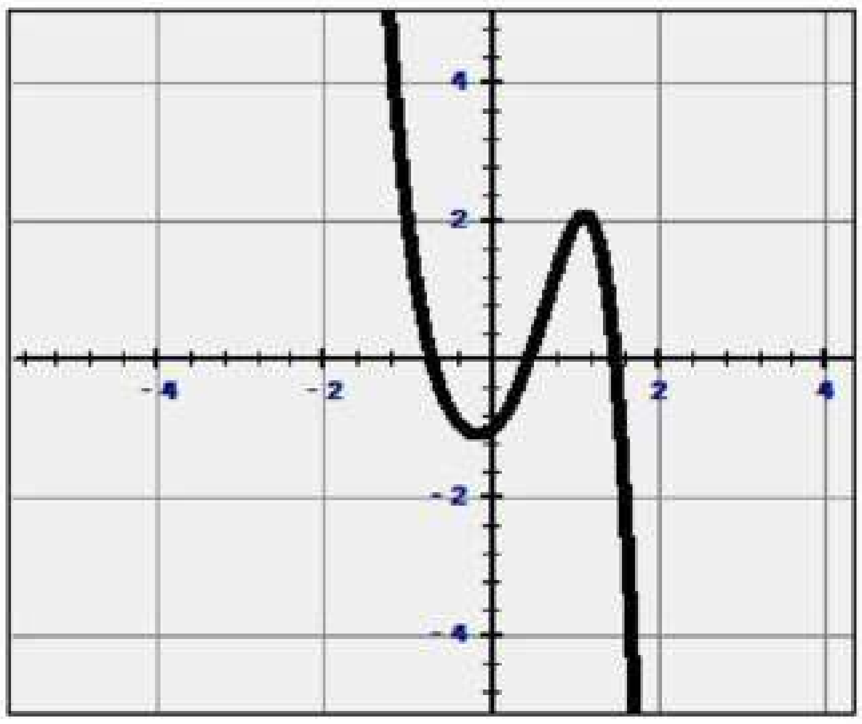
للدالة قيمة عظمى محلية عند $(1.08, 0.04)$،

وصغرى محلية عند $(-1.08, -10)$



(13) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5x$

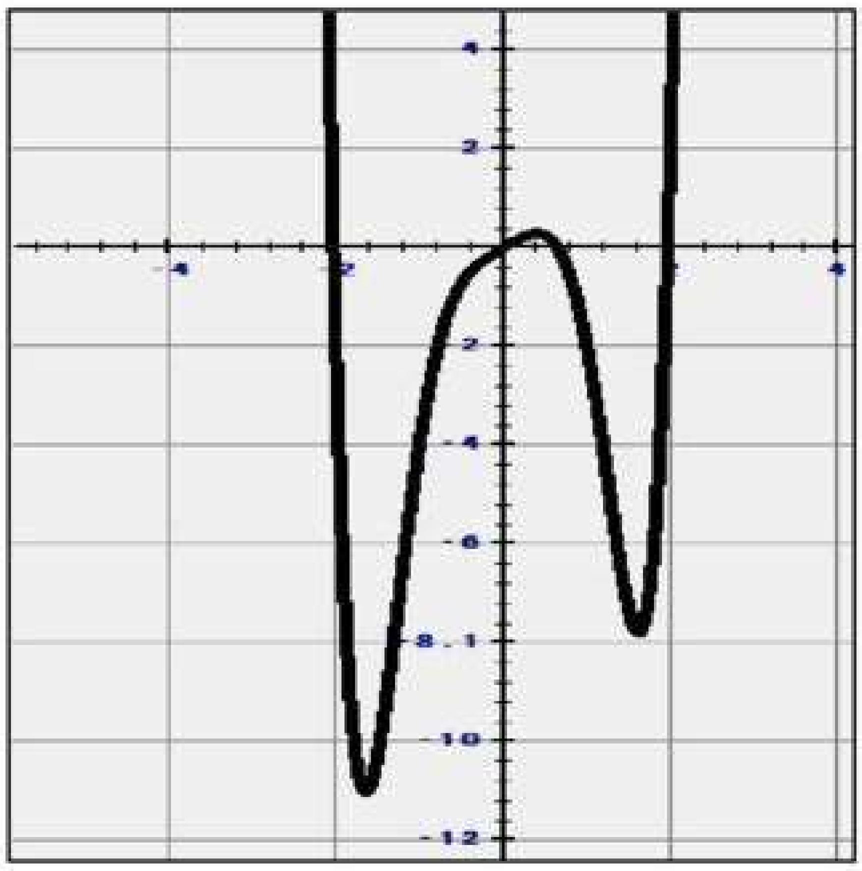
للدالة قيمة صغرى مطلقة عند $(-1.38, -7.08)$



(14) $f(x) = -x^5 + 3x^2 + x - 1$

للدالة قيمة صغرى محلية عند $(-0.17, -1.08)$ ،

و عظمى محلية عند $(1.11, 2.12)$



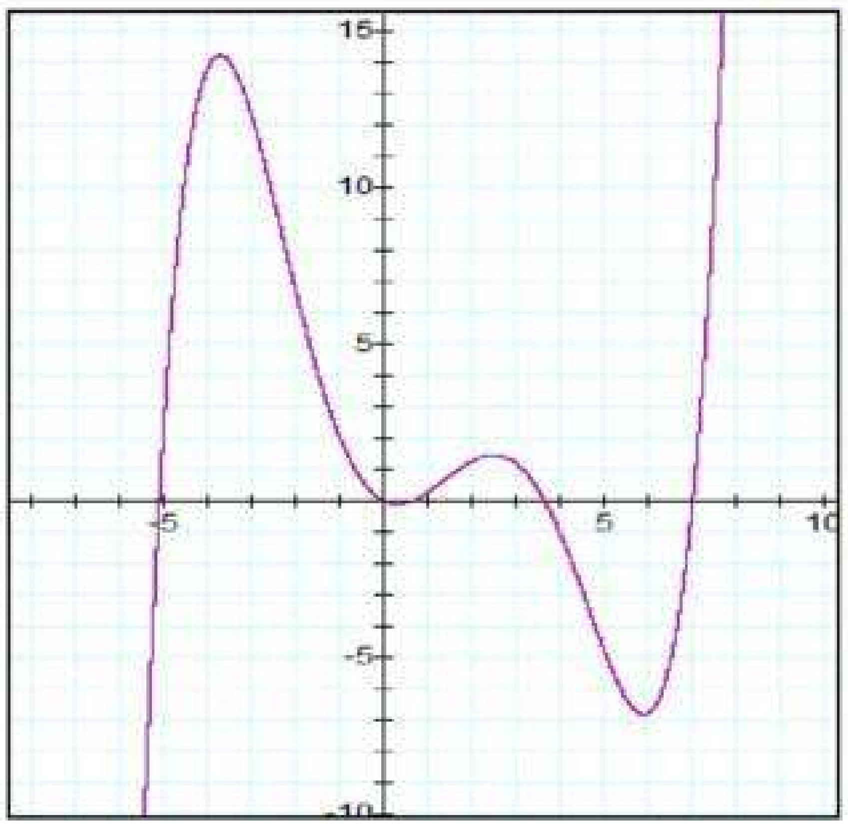
(15) $f(x) = x^6 - 4x^4 + x$

للدالة قيمة صغرى مطلقة عند $(-1.64, -11.12)$ ،

وعظمى محلية عند $(0.41, 0.30)$ ،

وصغرى محلية عند $(1.62, -7.85)$

(16) $f\left(x\right)=0.008x^{5}-0.05x^{4}-0.2x^{3}+1.2x^{2}-0.7x$



للدالة قيمة عظمى محلية عند $(2.49, 1.45)$،

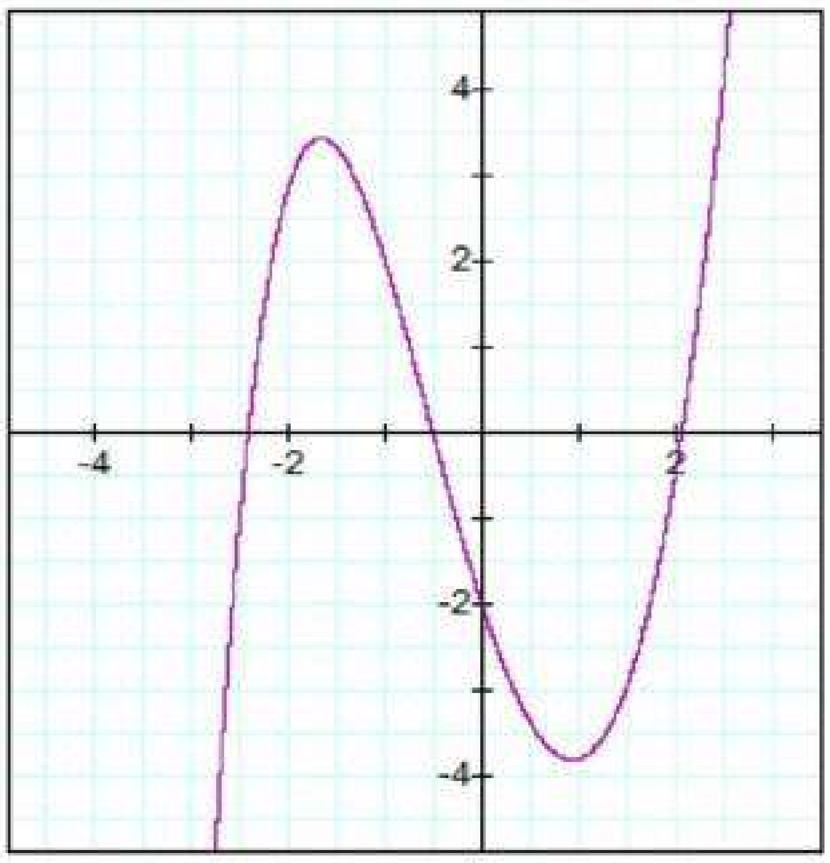
وصغرى محلية عند $(5.90, -6.83)$،

وعظمى محلية عند $(-3.72, 14.23)$،

وصغرى محلية عند $(0.32, -0.11)$

---

(17) $f\left(x\right)=0.025x^{5}-0.1x^{4}-0.57x^{3}+1.2x^{2}-3.5x-2$

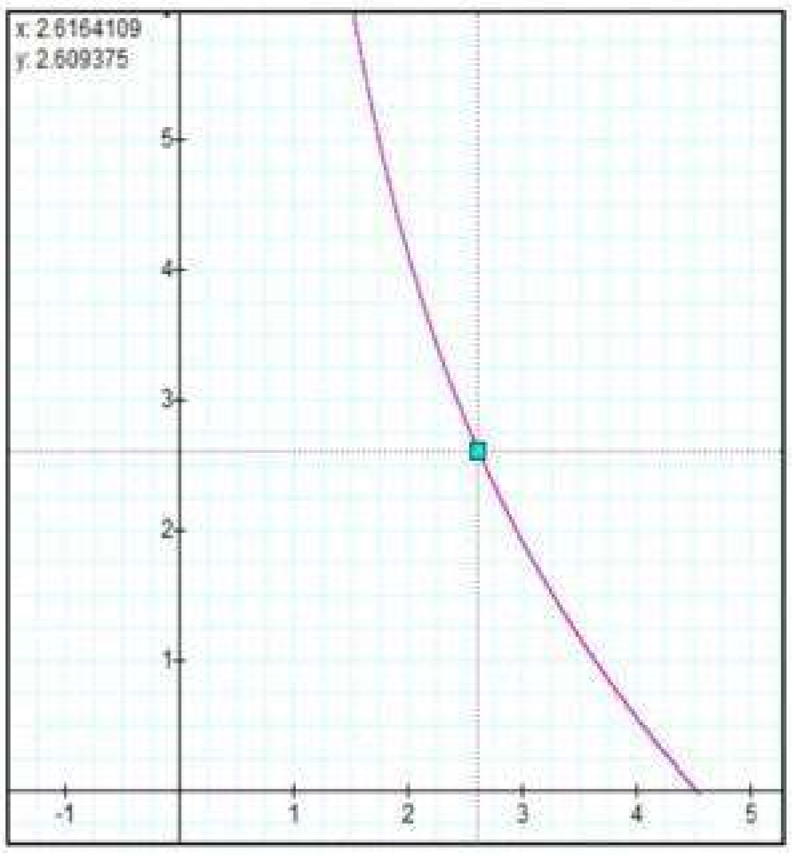


للدالة قيمة عظمى محلية عند $(-1.66, 3.43)$،

وصغرى محلية عند $(0.93, -3.82)$

---

(18) <u>هندسة:</u>



المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = 20.5π بوصة مربعة

$$2\cancel{\pi}rh+\cancel{\pi}r^{2}=20.5\cancel{\pi}$$

$$\therefore 2rh+r^{2}=20.5$$

نصف القطر = 2.6 بوصة ، الإرتفاع = 2.6 بوصة

$g(x)=3x^2-8x+2$ **(19)**

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{g(8)-g(4)}{8-4}$$

$$=\frac{1474-162}{4}=328$$

$f(x)=3x^4-2x^2+6x-1$ **(20)**

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(9)-f(5)}{9-5}$$

$$=\frac{19574-1854}{4}=4430$$

$f(x)=-2x^4-5x^3+4x-6$ **(21)**

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)}$$

$$=\frac{-1861+7}{6}=-309$$

$h(x)=-x^5-5x^2+6x-9$ **(22)**

$$\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{h(6)-h(3)}{6-3}$$

$$=\frac{-7929+279}{3}=-2550$$

$f(x)=\frac{x-3}{x}$ **(23)**

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(12)-f(5)}{12-5}$$

$$=\frac{0.75-0.4}{7}=0.05$$

(24) $f(x)=\sqrt{x+8}$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(4)-f(-4)}{4-(-4)}$$
$$=\frac{3.464-2}{8}=0.183$$

طقس:

(25) $f(x)=-0.5455x^2+7.09x+21.45$

(a)

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(4)}{5-4}$$
$$=\frac{43.263-41.082}{1}=2.181$$

(b)

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(10)-f(7)}{10-7}$$
$$=\frac{37.8-44.351}{3}=-2.18$$

(26) **استعمل التمثيل البياني:**

(a)

في الفترة $[5,15]$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(15)-f(5)}{15-5}=5$$

في الفترة $[15,20]$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(20)-f(15)}{20-15}=3$$

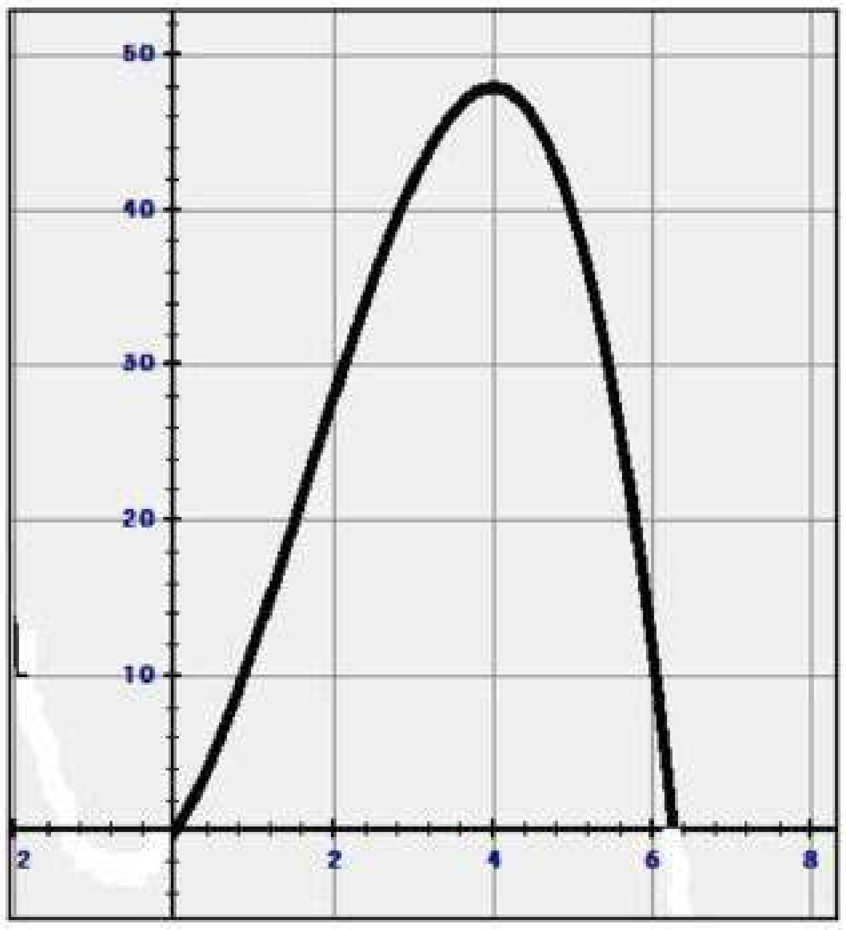
في الفترة $[25,45]$ $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(45)-f(25)}{45-25}=0.5$

(b)
تتزايد سرعة الجسم أو يتسارع الجسم في الفترات الثلاث، وأكبر معدل لتسارع الجسم في الفترة $[5,15]$ ويقل التسارع في الفترة $[25,45]$ لكن سرعة الجسم تظل في تزايد.

---

(27) **تكنولوجيا:**

$$p(x)=-x^3+5x^2+8x$$



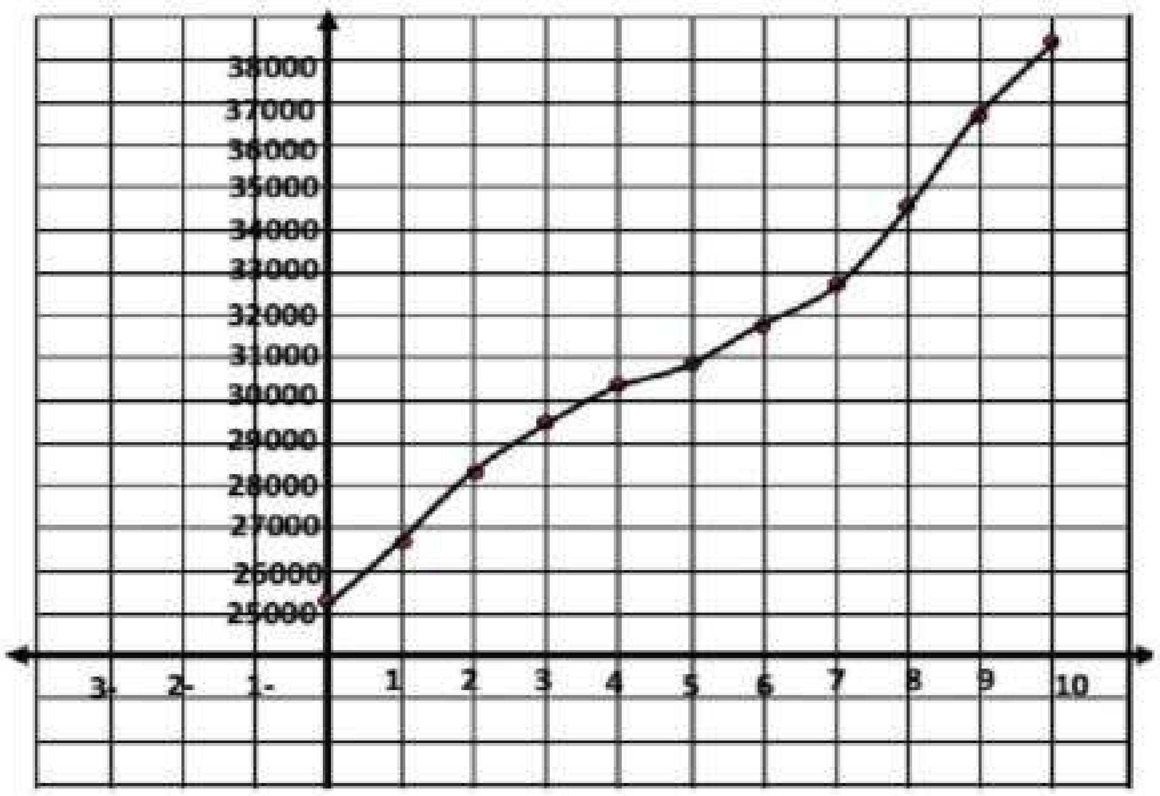
(a)

(b) 400 ريال

(c) 48 ريال

(28) **دخــــل:**

$$I(x)=-1.465x^5+35.51x^4-277.99x^3+741.06x^2+847.8x+25362$$



(a)

(b)

$$\frac{I(x_2)-I(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{I(10)-I(3)}{10-3}$$
$$=\frac{38556-29590}{7}=1280.9$$

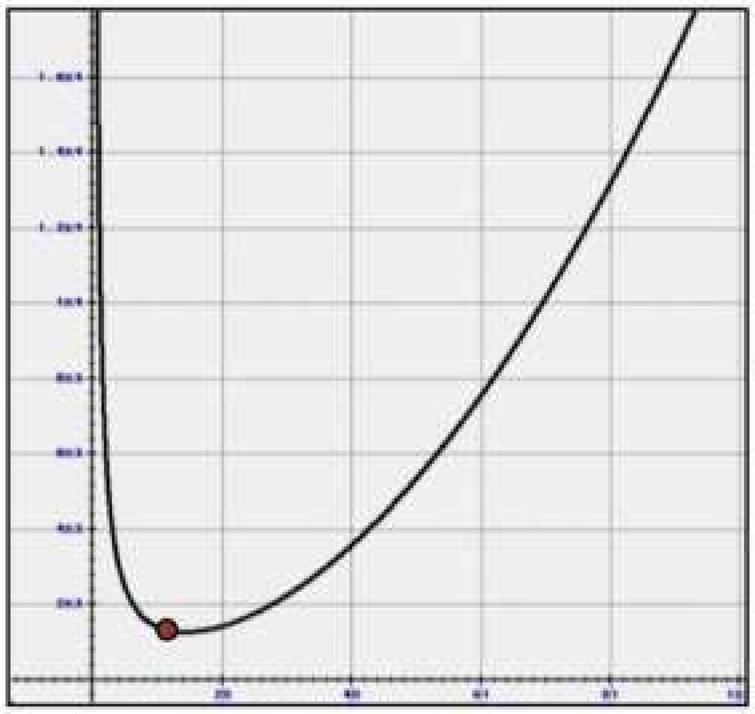
معدل التغير من عام 1423 إلى عام 1430 يساوي 1280.9 ريال.

(c) متوسط التغير أقل ما يمكن في الفترة من عام 1420 إلى عام 1424ويساوي 826.4 ريال، ويكون أعلى ما يمكن فى الفترة من عام 1423 إلى عام 1427ويساوي 1711.44ريال

---

(29) صندوق:

إيجاد الدالة:



الحجم = 3024

$$\therefore \ell\omega h = 3024 \quad , \because \ell = \omega$$
$$\therefore \omega^2 h = 3024 \quad ,\therefore h = \frac{3024}{\omega^2}$$

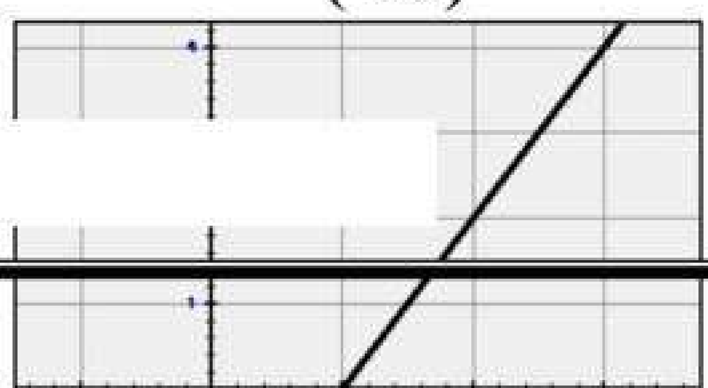
مساحة السطح = $f(\omega) = 2\omega^2 + 4\omega h = 2\omega^2 + \dfrac{12096}{\omega}$

الأبعاد التي تجعل مساحة السطح أقل ما يمكن هي $\ell = \omega = h = 14.5\,ft$

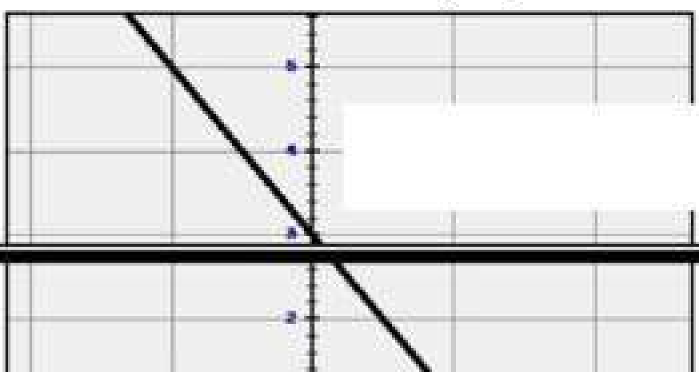
القيمة الصغري المطلقة عند $\omega = 14.5\,ft$

مثل بيانياً الدالة $f(x)$ في كل حالة مما يأتي:

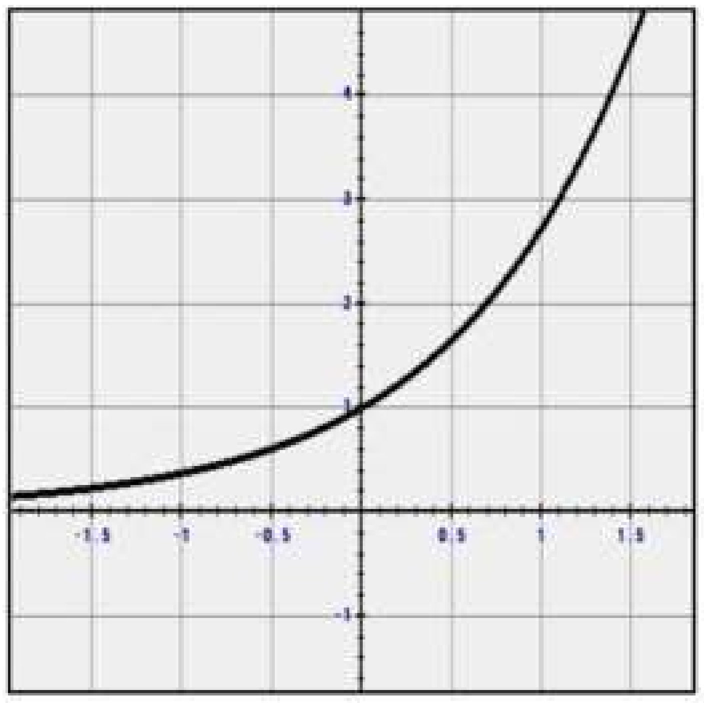
(30)



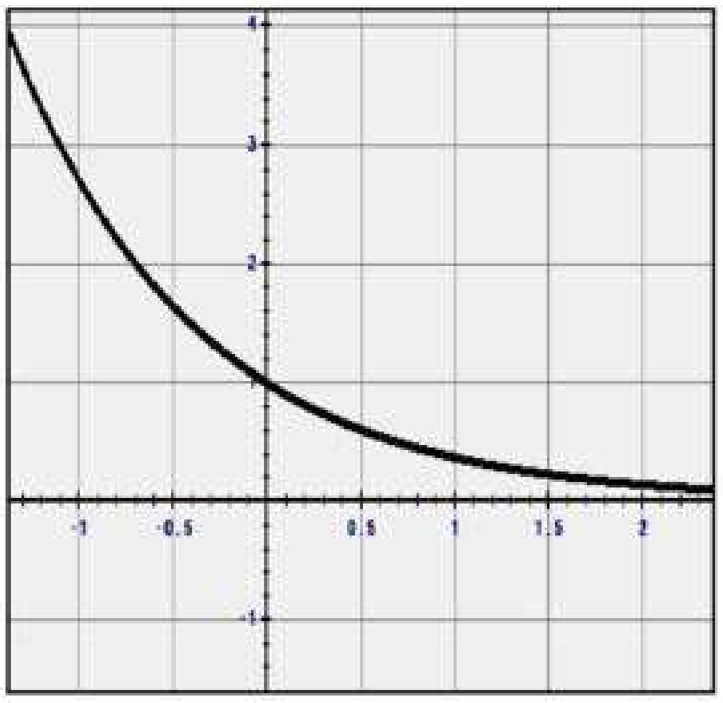
(31)



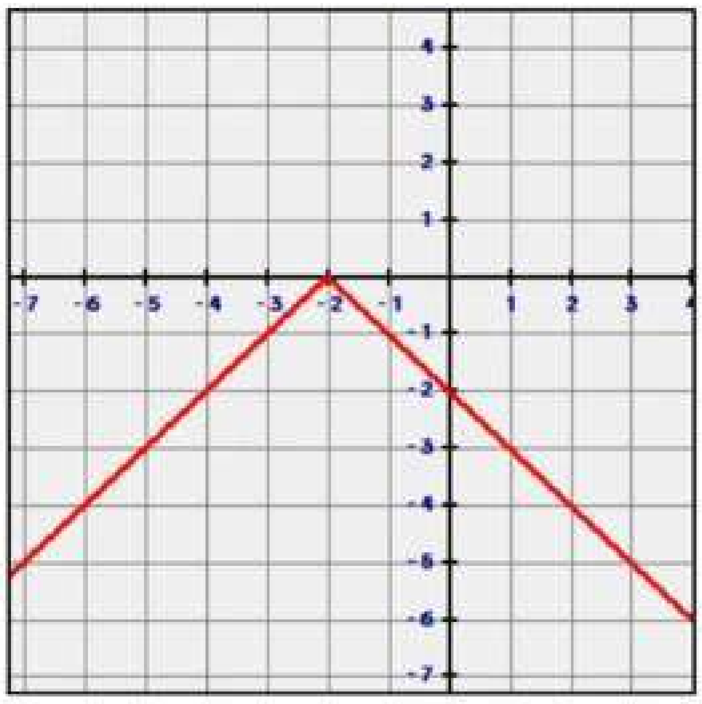
(32)



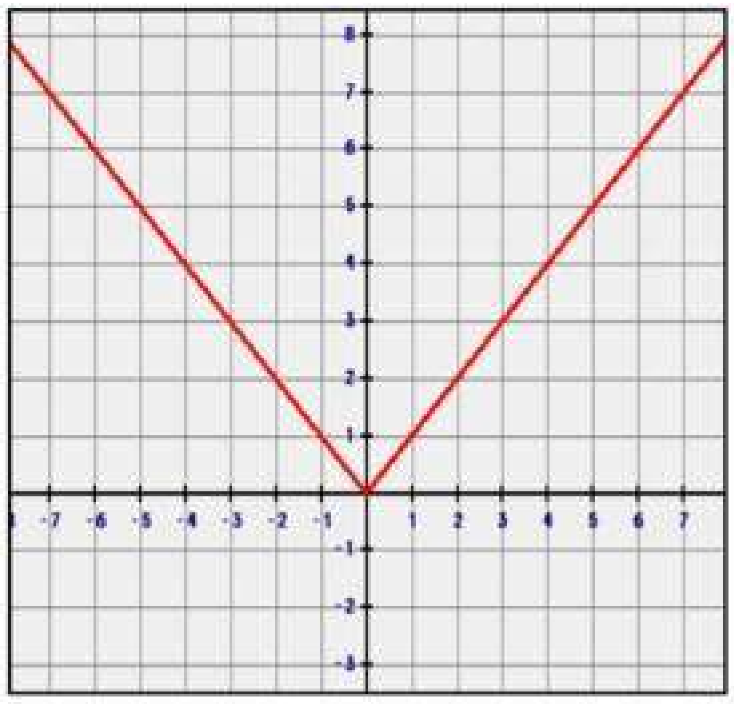
(33)



(34)



(35)



حدّد إحداثي النقطة التي يكون عندها لكل دالة مما يأتي قيمة قصوى مطلقة إن وجدت وبين نوعها:

(36) $f\left(x\right)=2\left(x-3\right)^{2}+5$

النقطة $(3,5)$، صغرى مطلقة.

---

(37) $f(x) = -0.5(x+5)^2 - 1$

النقطة $(-5,-1)$، عظمى مطلقة.

---

(38) $f(x) = -4|x-22| + 65$

النقطة $(22,65)$، عظمى مطلقة.

---

(39) $f(x) = \left(36 - x^2\right)^{0.5}$

النقطة $(0,6)$، عظمى مطلقة.

---

(40) $f(x) = x^3 + x$

لايوجد قيم قصوى مطلقة.

---

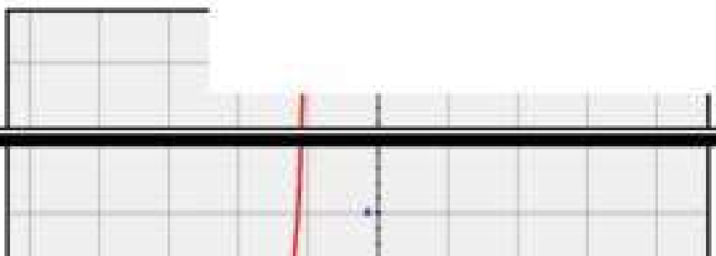
(41) سفر:

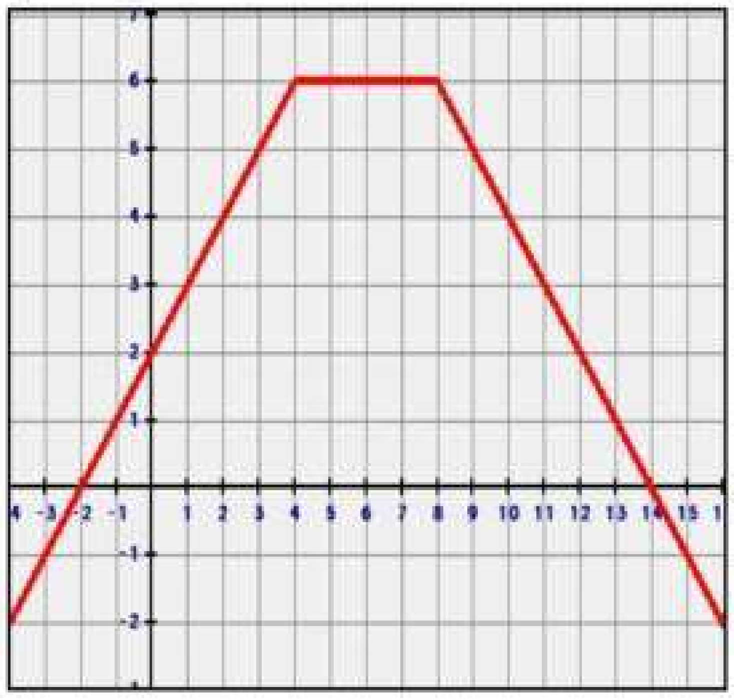
من أسباب الإختلاف في متوسط التغير هو أن ما قد واجه عبد الله إشارات ضوئية في أثناء سيرة مما أدى إلى نقص في معدل المسافة المقطوعة، وسبب آخر انه قد يكون سلك بعض الطرق المختصرة في بعض الأوقات، ويكون المعدل ثابتاً في بعض الفترات نتيجة انه لم يواجة أي إشارات ضوئية في أثناء سيرة أو أنه سلك طريقاً سريعا.

مسائل مهارات التفكير العليا.

مسائل مفتوحة: مثل بيانياً الدالة $f(x)$ في كل من السؤالين الآتيين:

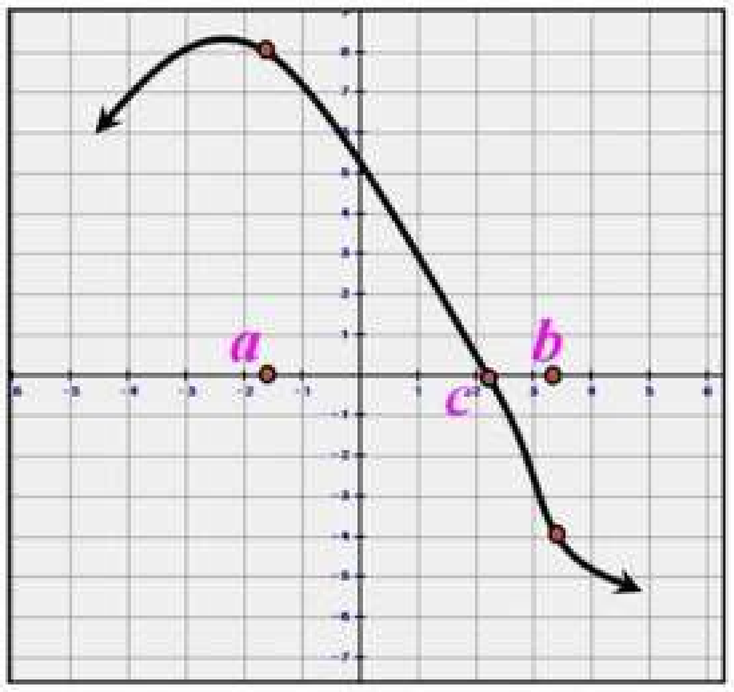
(42) (43)





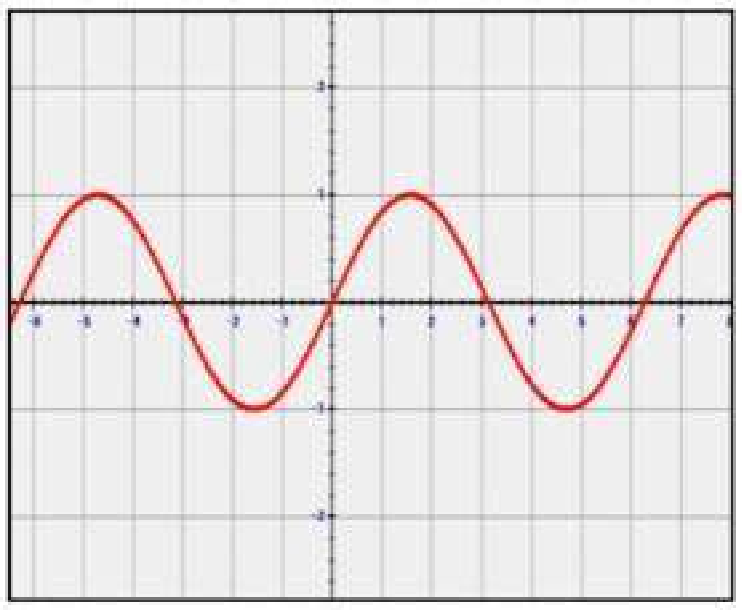
(44) **تبرير:**

$f(c)$ قيمة صغرى محلية لذا فإن $f(a)$ أكبر من $f(c)$ عند $a<c$. وإذا تزايدت قيم x من a إلى c فإن قيم الدالة تتناقص.



(45) **تحد:**

$g(a)$ موجبة و g متصلة و $b>a$ لذلك عندما تتزايد قيم المجال من a إلى b تتناقص قيم الدالة g من الموجب للسالب. ويكون قيمة $g(c)$ تنتمي للفترة $[-4,8]$



(46) **تحد:**

يوجد قيمة عظمي محلية عند عدد لانهائي من قيم x ومقدارها 1

يوجد قيمة صغرى محلية عند عدد لانهائي من قيم x ومقدارها -1

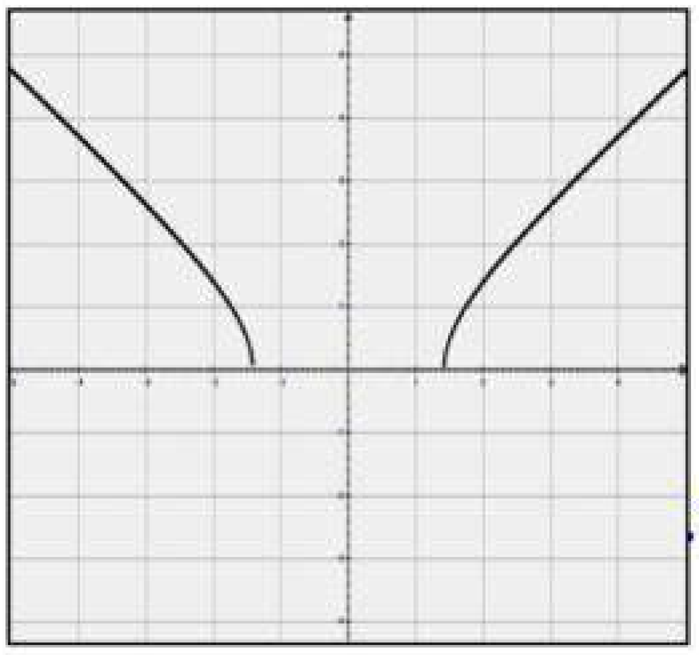
(47) **تبرير :**

عندما تكون الدالة ثابتة على فترة فإن قيم y متساوية، لذا فإن قيم y لنقاط القاطع تكون متساوية، ويكون القاطع في هذة الحالة أفقياً وميله يساوي صفر.

---

(48) اكتب :

عندما تكون الدالة متزايدة على فترة يكون متوسط معدل التغير موجباً.
وإذا كانت الدالة متناقصة على فترة يكون متوسط معدل التغير سالباً.
وإذا كانت الدالة ثابتة على فترة يكون متوسط معدل التغير صفراً.



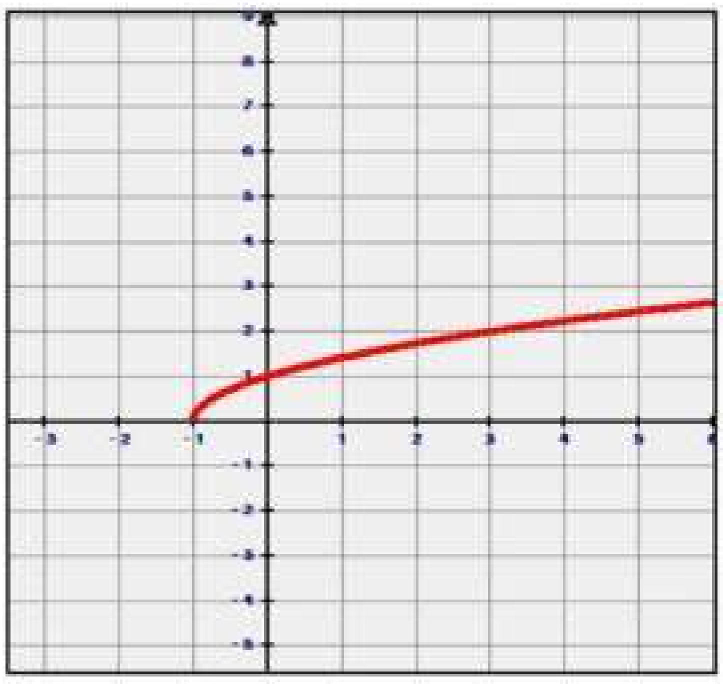
مراجعة تراكمية:

(49) $f\left(x\right)=\sqrt{x^{2}-2}$

الدالة معرفة عند $x=-3$

$f\left(x\right)\to 2.65$ **عندما** $x\to -3$ **من الطرفين** $2.65=(-3)$ $\therefore f(-3)=2.65$

لذا الدالة متصلة عند $x=-3$



(50) $f\left(x\right)=\sqrt{x+1}$

الدالة معرفة عند $x=3$

$f\left(x\right)\to 2$ **عندما** $x\to 3$ **من الطرفين** $2=(3)$ $\therefore f(3)=2$

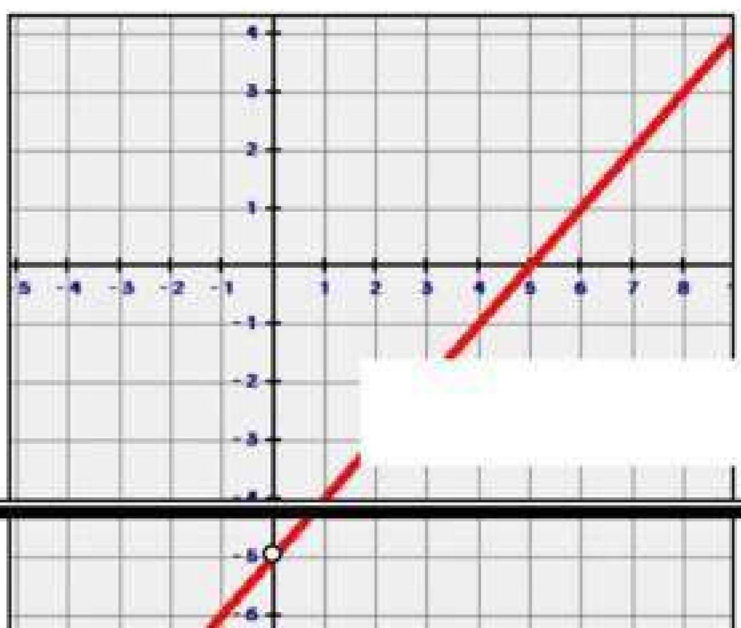
لذا الدالة متصلة عند $x=3$

---

(51) $h\left(x\right)=\dfrac{x^{2}-25}{x+5}$

للدالة نقطة عدم إتصال قابلة للإزالة عند $x=-5$

حيث أن الدالة غير معرفة عند $x=-5$

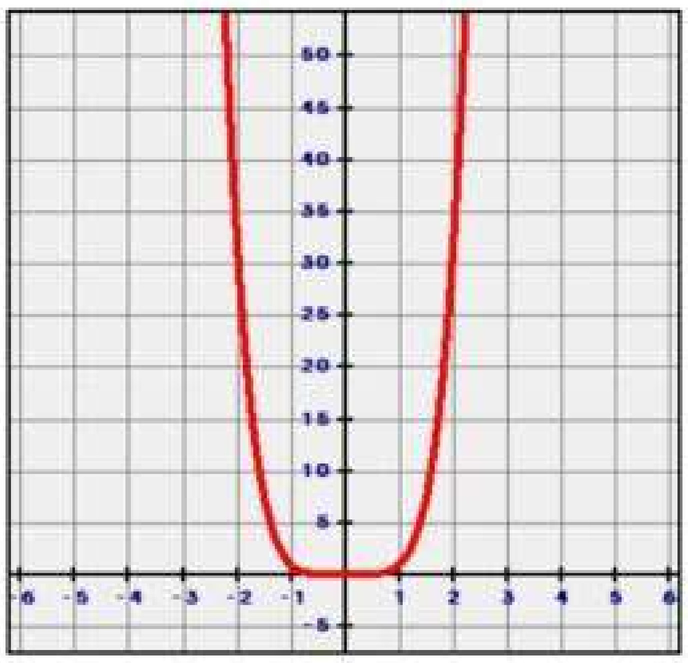


الدالة معرفة عند $x=5$ ،

$\therefore\ h(5)=0$ من الطرفين $x\to 5$ عندما $h(x)\to 0$

لذا الدالة متصلة عند $x=5$

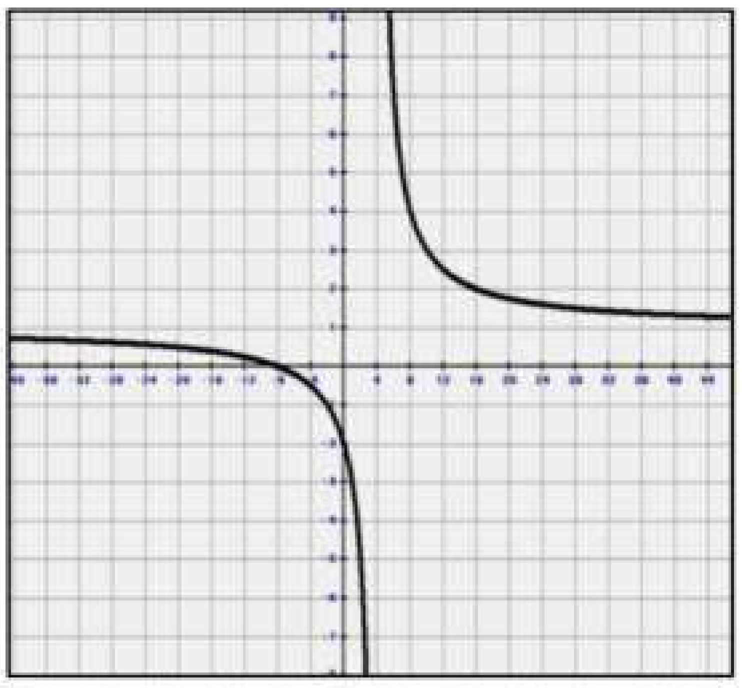
مثل كل دالة مما يأتي بيانياً مستعملاً الحاسبة البيانية.



(52) $f(x)=\left|x^5\right|$

دالة زوجية، متماثلة حول محور y

$$f(-x)=\left|(-x)^5\right|=x^5=f(x)$$



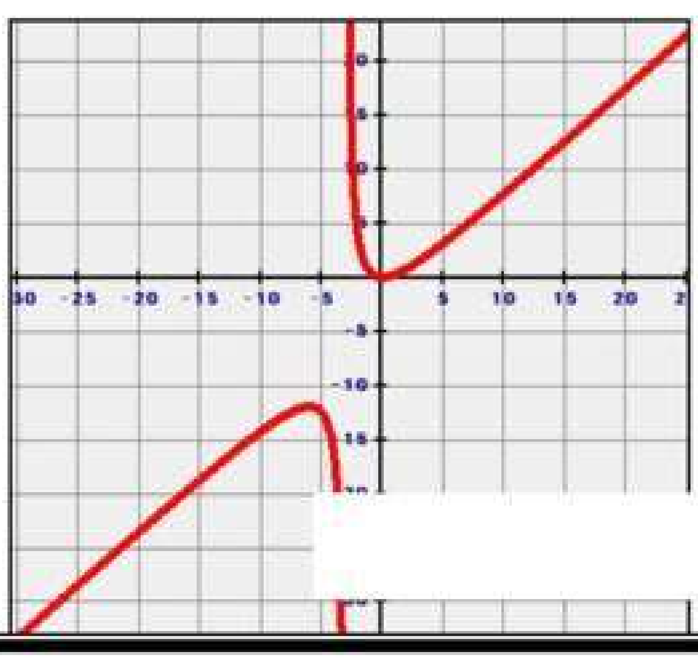
(53) $f(x)=\dfrac{x+8}{x-4}$

ليست فردية وليست زوجية.

---

(54) $g(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$

ليست فردية وليست زوجية.



أوجد مجال كل دالة مما يأتي:

(55) $f\left(x\right)=\dfrac{3x}{x^2-5}$

المجال $=\left\{x\,\middle|\,x\neq\sqrt{5}\ \ ,x\in R\right\}$

(56) $g\left(x\right)=\sqrt{x^2-9}$

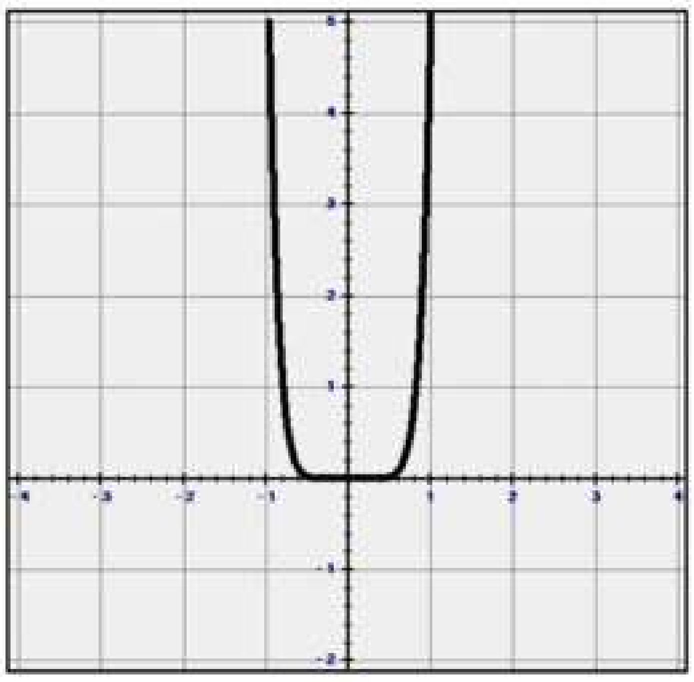
المجال $=\left(-\infty,-3\right]\cup\left[3,\infty\right)$

(57) $h(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-7}}$

المجال $=\left(-\infty,-\sqrt{7}\right)\cup\left(\sqrt{7},\infty\right)$

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

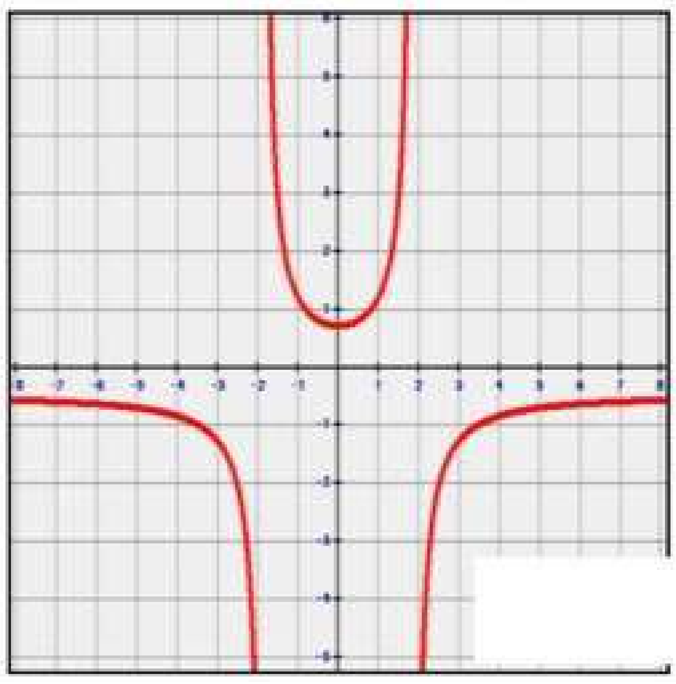
(58) $f\left(x\right)=x^{10}-x^9+5x^8$



يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x\to\infty$ فإن $f\left(x\right)\to\infty$

وعندما $x\to-\infty$ فإن $f\left(x\right)\to\infty$

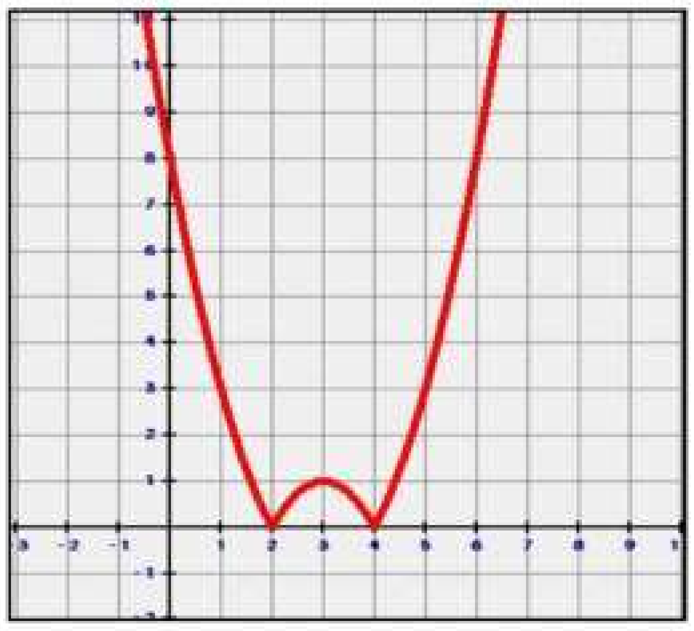
(59) $g\left(x\right)=\dfrac{x^2+5}{7-2x^2}$



يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x\to\infty$ فإن $f\left(x\right)\to-0.5$

وعندما $x\to-\infty$ فإن $f\left(x\right)\to-0.5$

(60) $h(x) = \left|(x-3)^2 - 1\right|$



يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to \infty$

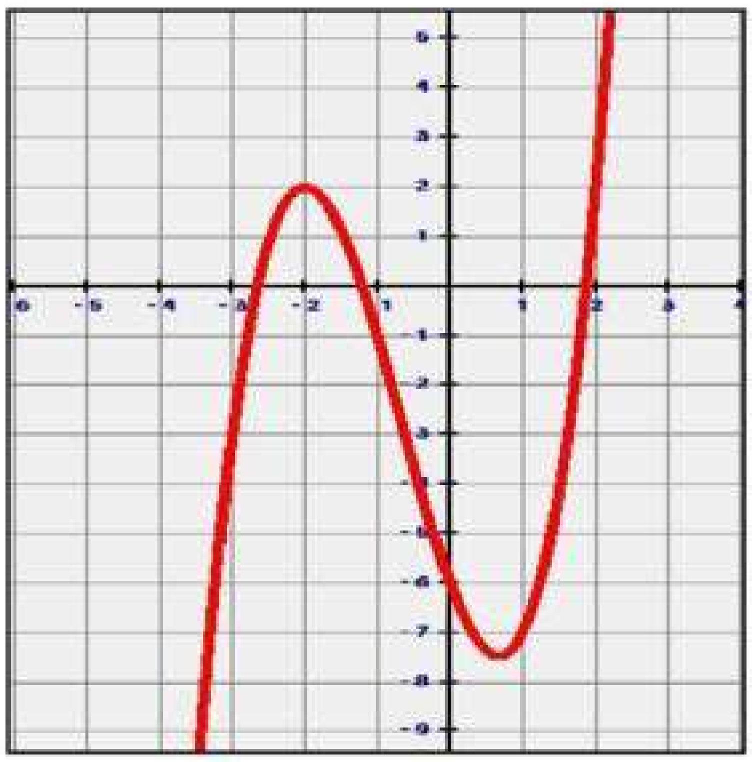
وعندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to \infty$

تدرب على الإختبار

(61) (A) $q + n$

---

(62)



(C) قيمة عظمى محلية عند $x = -2$

قيمة صغري محلية عند $x = 0.7$

الفصل (1) إختبار منتصف الفصل

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت تمثل y دالة في x:

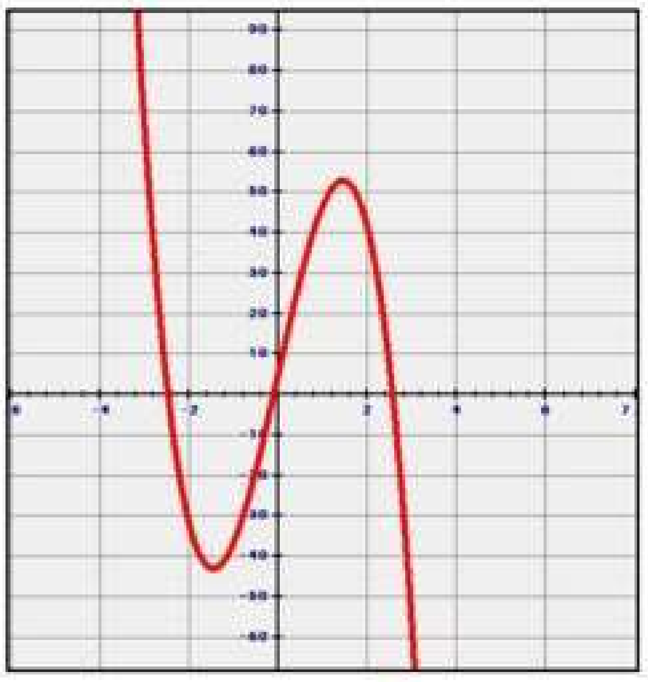
(1) دالـــــــــــــة

(2) دالـــــــــــــــــة

(3) ليست دالــــــــــــــــة

(4) دالـــــــــــــــــة

(5) $f\left(2\right)=2$



(6) **كرة قدم:**

a) $h\left(3\right)=-8\times(3)^2+50\times3+5=83ft$

b) $\left[0,2.55\right)$ حيث أن الزمن لا يكون سالباً والإرتفاع أيضاً لا يمكن أن يكون سالبا.

استعمل التمثيل البياني للدالة h أدناه لإيجاد مجالها ومداها في كل مما يأتي:

(7) المجال: $\left[0,\infty\right)$ ، المدى: $\left[0,\infty\right)$

(8) المجال: $\left\{x\mid x\in R\right\}$ ، المدى: $\left\{y\mid y\in Z\right\}$

أوجد المقطع y والأصفار لكلٍ من الدالتين الآتيتين:

(9) $f\left(x\right)=x^3-16x$

لإيجاد المقطع y نضع $x=0$ $\therefore$ $f\left(x\right)=0$ $\therefore$ المقطع $y=0$

لإيجاد الأصفار نضع $f\left(x\right)=0$

$$\therefore x^3-16x=0$$

$$\therefore x(x^2-16)=0$$

$$\therefore x(x-4)(x+4)=0$$

$$\therefore x=0\ ,x=4\ or\ \ x=-4$$

(10) $f\left(x\right)=5-\sqrt{x}$

لإيجاد المقطع y نضع $x=0$ $\therefore$ $f\left(x\right)=5-0=5$ $\therefore$ المقطع $y=5$

لإيجاد الأصفار نضع $f\left(x\right)=0$

$$\therefore\ 5-\sqrt{x}=0$$
$$\therefore\ \sqrt{x}=5$$
$$\therefore\ x=25$$

اختبر تماثل كلٍّ من المعادلتين الآتيتين حول المحور x ، والمحور y، ونقطة الأصل.

(11) $x^2+y^2=9$

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل لأن

$$f(-x,-y)=(-x)^2+(-y)^2=x^2+y^2=f(x,y)$$

المنحنى متماثل حول محور x لأن

$$f(x,-y)=x^2+(-y)^2=x^2+y^2=f(x,y)$$

المنحنى متماثل حول محور y لأن

$$f(-x,y)=(-x)^2+y^2=x^2+y^2=f(x,y)$$

---

(12) $xy=4$

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل لأن $f(-x,-y)=(-x)(-y)=xy=f(x,y)$

المنحنى غير متماثل حول محور x لأن

$$f(x,-y)=x(-y)=-xy\neq f(x,y)$$

المنحنى غير متماثل حول محور y لأن

$$f(-x,y)=(-x)(y)=-xy\neq f(x,y)$$

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند $x=5$ وبرر إجابتك :

(13) الدالة غير متصلة، لأن الدالة غير معرفة عند $x=5$

(14) الدالة متصلة عند $x=5$ لأن

الدالة معرفة عند $x = 5$ وقيمتها 2.5

$f(x) \to 2.5$ عندما $x \to 5$ من الطرفين $\therefore \lim\limits_{x\to 5} f(x) = 2.5$

$\because \lim\limits_{x\to 5} f(x) = f(5)$ اذن الدالة متصلة عند $x = 5$

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

(15)

يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to -\infty$

وعندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to \infty$

---

(16)

يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to 5$

وعندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to 5$

---

(17) اختيار من متعدد:

$c)$ لا نهائي

لان قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب x من 1.5 من اليسار وتتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 1.5 من اليمين

استعمل التمثيل البياني لكل دالة لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة مقربه إلى أقرب 0.5 وحدة

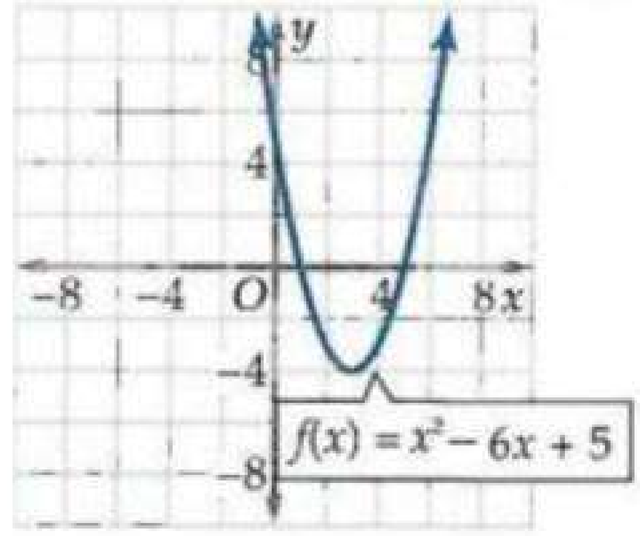
(18) متزايدة في الفترة $(3, \infty)$، ومتناقصة في الفترة $(-\infty, 3)$

---

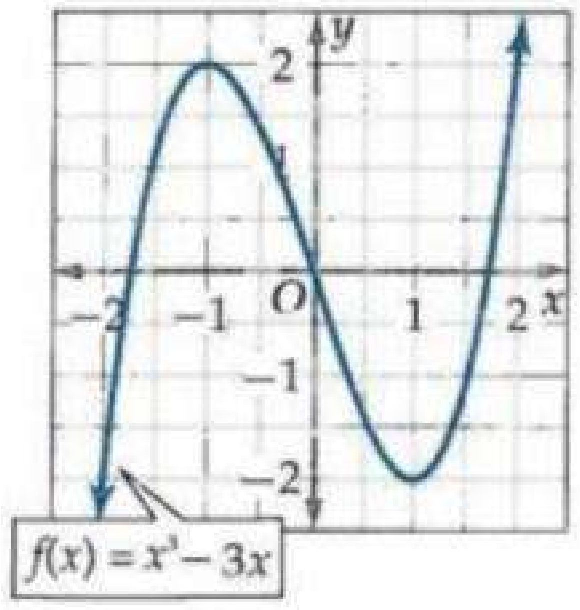
(19) متزايدة في الفترة $(-\infty, -2)$، ومتناقصة في الفترة $(-2, 1.5)$، و متزايدة في الفترة $(1.5, \infty)$

---

(20)



يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية ومقدارها -4 عند $x = 3$.



يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية ومقدارها 2 عند $x = -1$، كما توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 1$، ومقدارها -2

(21) فيزياء:

$$d(t) = 16t^2$$

متوسط السرعة في الفترة $[0, 3]$ $\dfrac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{16(3)^2 - 16(0)^2}{3 - 0} = 48\ ft/s$

(1-5)الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

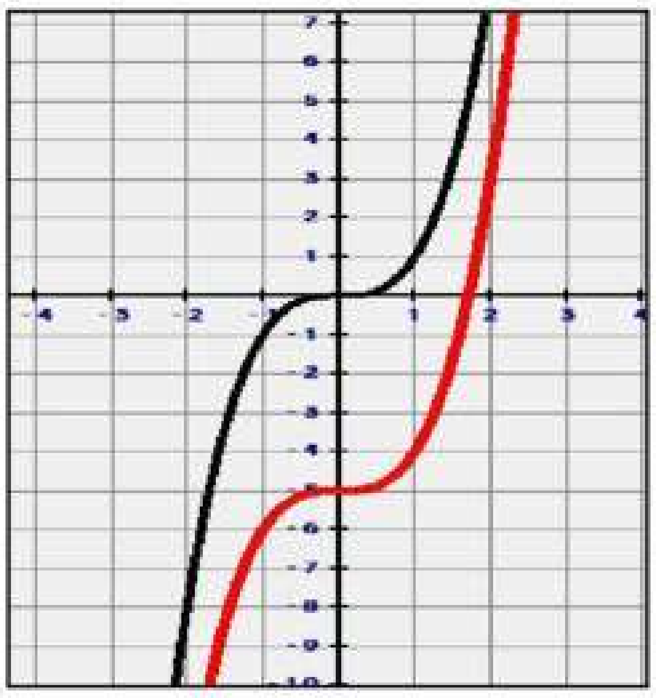
تحقق من فهمك

$f(x)=|x|$ (1A)

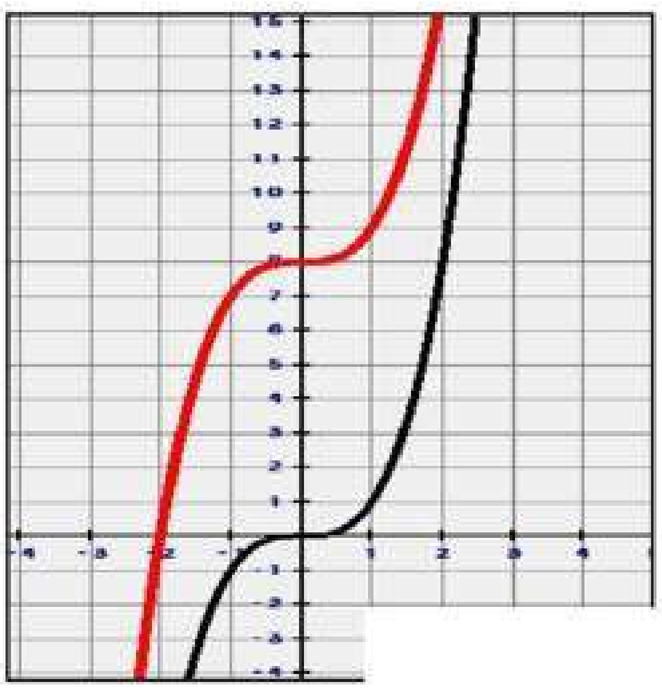
- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$
- مدى الدالة $\{y \mid 0 \le y < \infty, y \in R\}$
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0,0)$
- الدالة زوجية والمنحنى متماثل حول محور y
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- المنحنى متناقص في الفترة $(-\infty,0)$ ومتزايد في الفترة $(0,\infty)$
- يبدأ المنحنى عند $x=0$ وينتهي عند $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

تحقق من فهمك

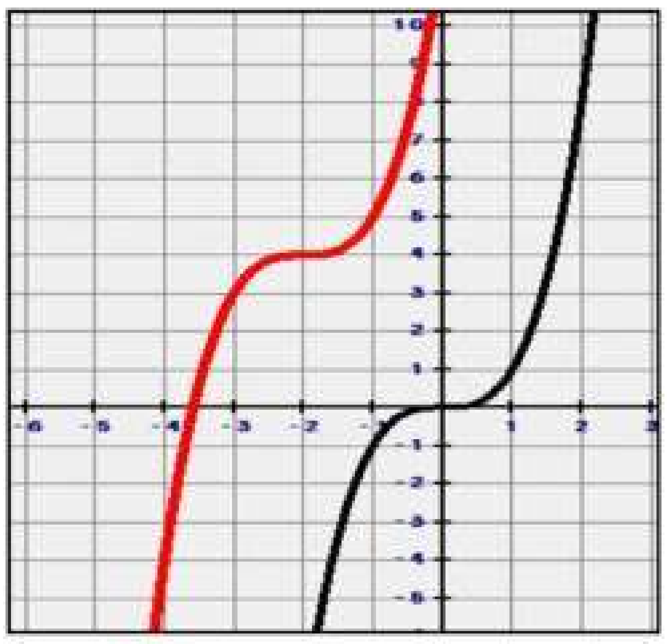
$h(x)=x^3-5$ (2A)



$h(x)=8+x^3$ (2B)



($2C$) $h(x)=(x+2)^3+4$



تحقق من فهمك

صف العلاقة بين منحنى $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $g(x)$ ثم أكتب معادلة $g(x)$ في كل من السؤالين الآتيين.

($3A$) منحنى الدالة $g(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x ، وإنسحاب وحدتين إلى أسفل. $g(x)=-\frac{1}{x}-2$ أو $g(x)=-\left(\frac{1}{x}+2\right)$

($3B$) منحنى الدالة $g(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x ، وإنسحاب أربع وحدلت لليسار. $g(x)=\frac{1}{-x-4}$ أو $g(x)=-\frac{1}{x+4}$

تحقق من فهمك

($4A$) $f(x)=[x]$ ، $g(x)=\frac{1}{2}[x]$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضيق لمنحنى الدالة $f(x)=[x]$ لأن $g(x)=\frac{1}{2}[x]=\frac{1}{2}f(x)$

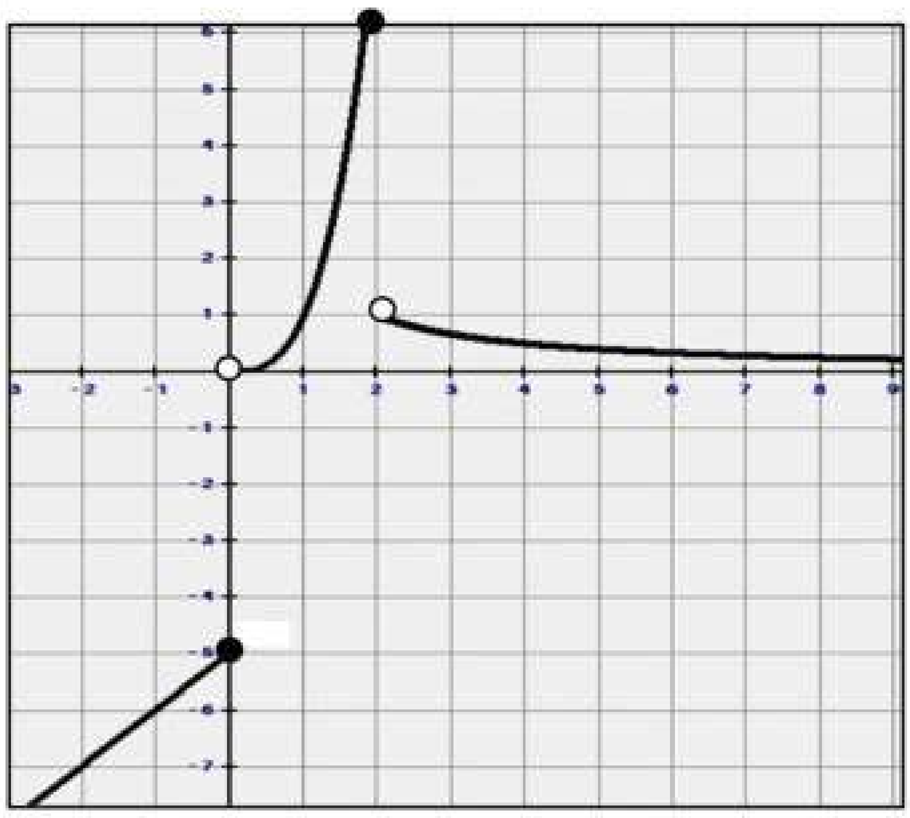
و $0<\frac{1}{2}<1$

(4B) $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $g(x)=\frac{5}{x}+3$

منحنى الدالة $g(x)$ هو توسيع رأسي لمنحنى الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$

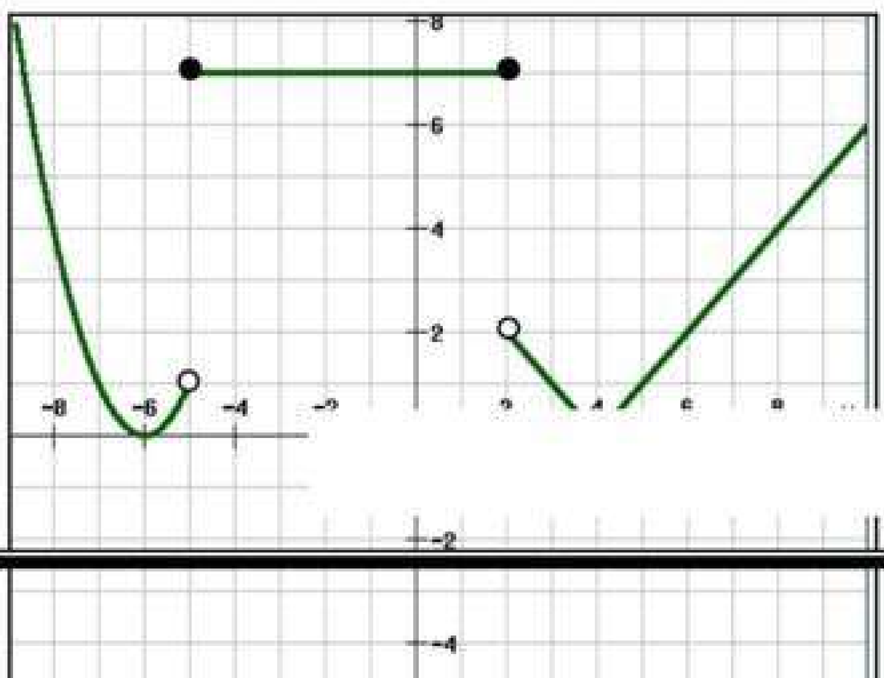
معاملة 5 وحدة، وإنسحاب ثلاث وحدات للأعلى.

تحقق من فهمك



(5A)
$$f(x)=\begin{cases} x-5 & ,x\le 0 \\ x^3 & ,0<x\le 2 \\ \frac{2}{x} & ,x>2 \end{cases}$$

(5B)



$$f(x)=\begin{cases}(x+6)^2 & ,x<-5\\ 7 & ,-5\le x\le 2\\ |4-x| & ,x>2\end{cases}$$

تحقق من فهمك

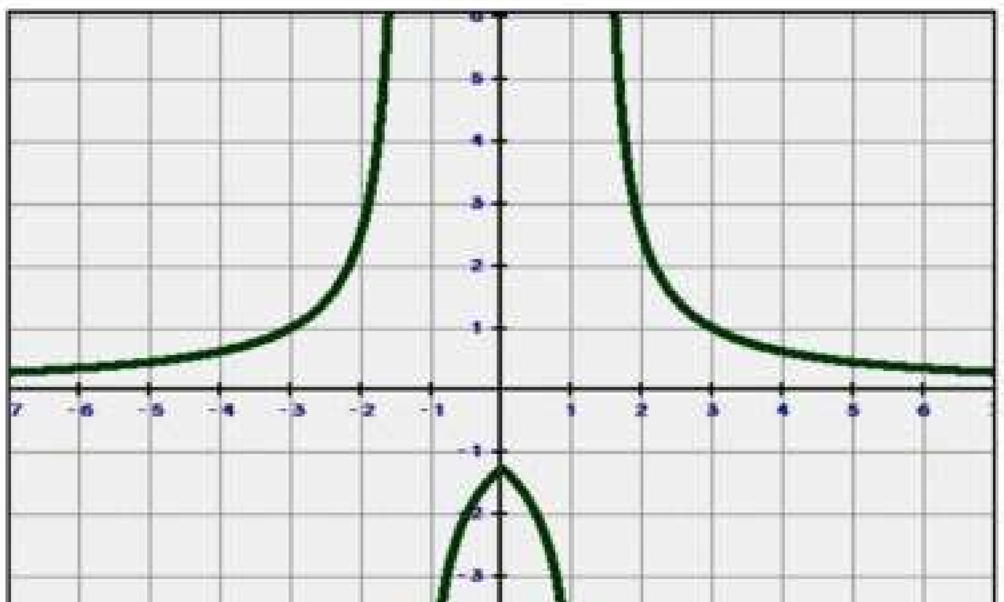
(6) كهرباء: $I(x)=\sqrt{\frac{\hat{}}{11}}$

(A) منحنى الدالة $I(x)$ هو توسيع افقي لمنحنى الدلة $f(x)=\sqrt{x}$

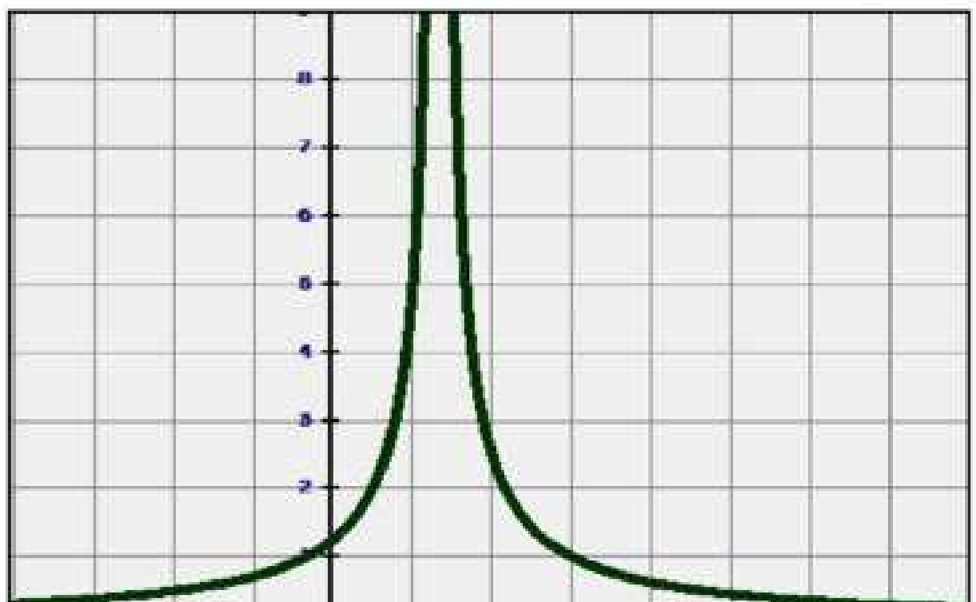
(B) عندما تكون المقاومة 15 فإن $I(x)=\sqrt{\frac{x}{15}}$

(7A) $f(x)=\frac{5}{3x-4}$

$h(x)=f(|x|)$

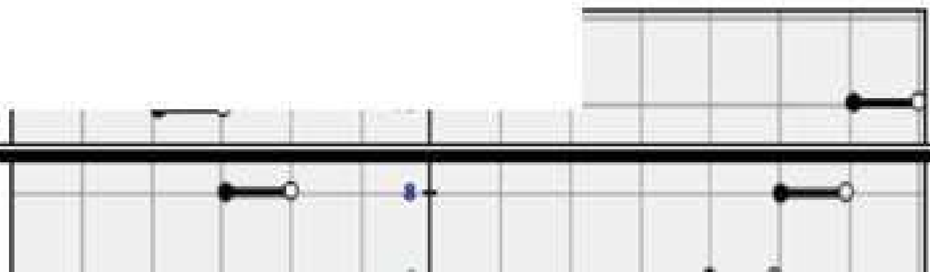


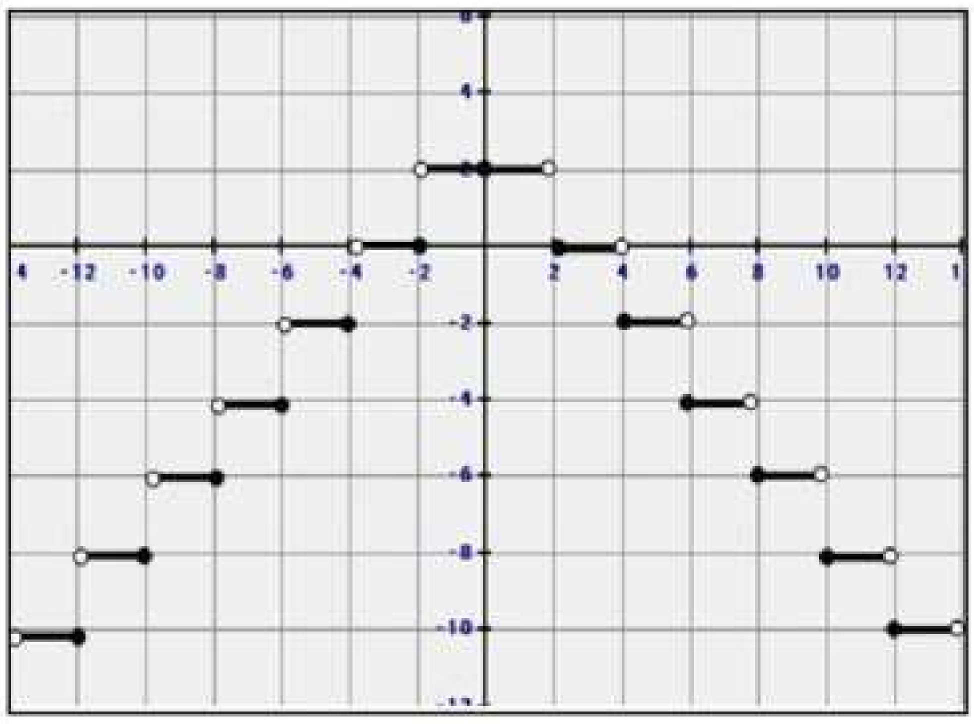
$g(x)=|f(x)|$



$h(x)=f(|x|)$

$g(x)=|f(x)|$





تدرب وحل المسائل

صف الخصائص لكل دالة من الدوال الرئيسية الأم الآتية:

(1) $f(x)=[\![x]\!]$

- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$
- مدى الدالة $\{y \mid y \in Z\}$
- يقطع المنحنى المحور y عند $(0,0)$
- يقطع المنحنى المحور x عند $0 \le x < 1$
- لا يوجد تماثل للدالة، وليست فردية وليست زوجية.
- للدالة عدم إتصال قفزي عند $\{x \mid x \in Z\}$.
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$
- الدالة ثابتة عند $\{x \mid x \notin Z\}$، ومتزايدة عند $\{x \mid x \in Z\}$.

---

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

- مجال الدالة $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$
- مدى الدالة $\{y \mid y \neq 0, y \in R\}$
- المنحنى لا يقطع أي من المحورين.
- الدالة فردية، والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل.
- للدالة عدم إتصال لا نهائي عند $x = 0$.
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- الدالة متناقصة في $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

---

(3) $f(x) = x^3$

- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$
- مدى الدالة $\{y \mid y \in R\}$
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0,0)$
- الدالة فردية، والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- المنحنى متزايد عند جميع قيم المجال.

---

(4) $f(x) = x^2$

- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$
- مدى الدالة $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$
- المنحنى يقطع المحور x ، والمحور y عند $(0,0)$
- الدالة زوجية، والمنحنى متماثل حول المحور y.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال، $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$
- المنحنى متزايد في الفترة $(0,\infty)$، ومتناقص في الفترة $(-\infty,0)$.

(5) $f(x) = c$

- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$

- مدى الدالة $\{y \mid y = c, c \in R\}$
- المنحنى يقطع المحور y عند $(0, c)$
- المنحنى يقطع المحور x في عدد لانهائى من النقاط عندما $c = 0$
  المنحنى لا يقطع المحور x عندما $c \neq 0$
- الدالة زوجية، والمنحنى متماثل حول المحور y.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال، $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$
- الدالة ثابتة على الفترة $(-\infty, \infty)$.

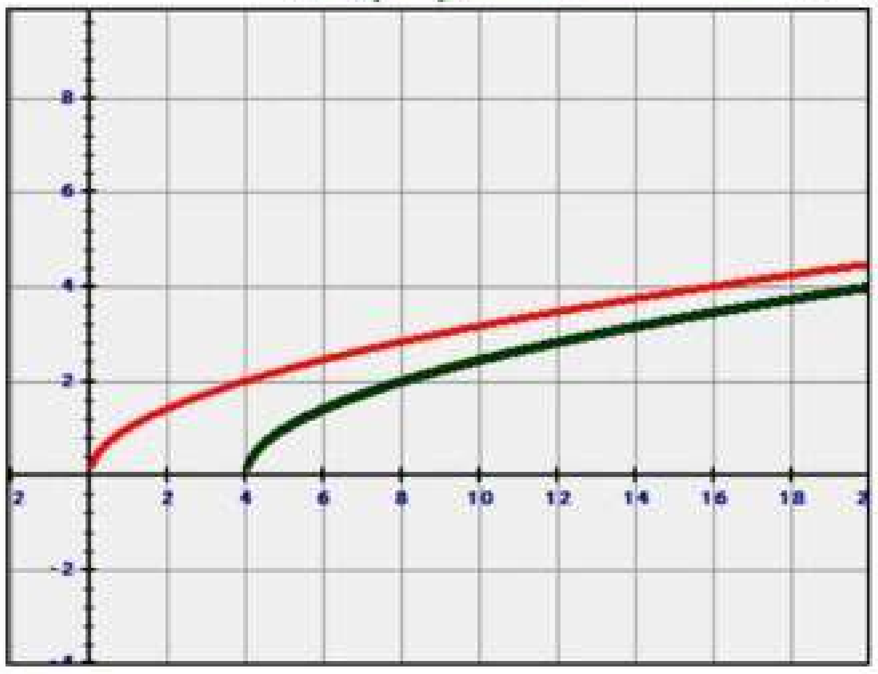
---

(6) $f(x) = x$

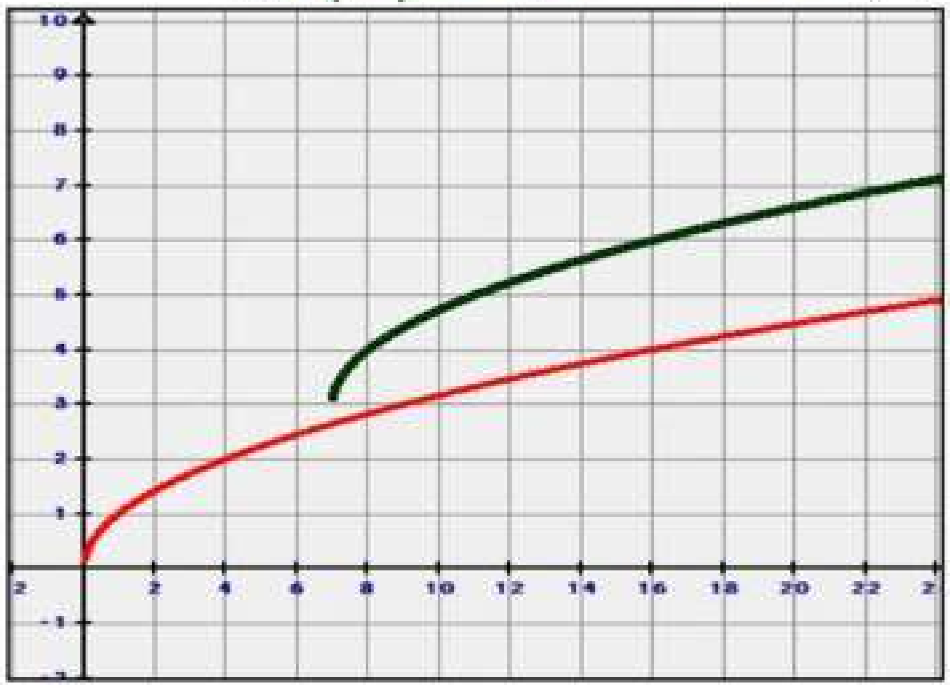
- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$
- مدى الدالة $\{y \mid y, y \in R\}$
- المنحنى يقطع المحور x ، والمحور y عند $(0, 0)$
- الدالة فردية، والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال، $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- المنحنى متزايد في الفترة $(-\infty, \infty)$.

استعمل منحنى الدالة الرئيسية (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين:

(7) $g(x) = \sqrt{x-4}$

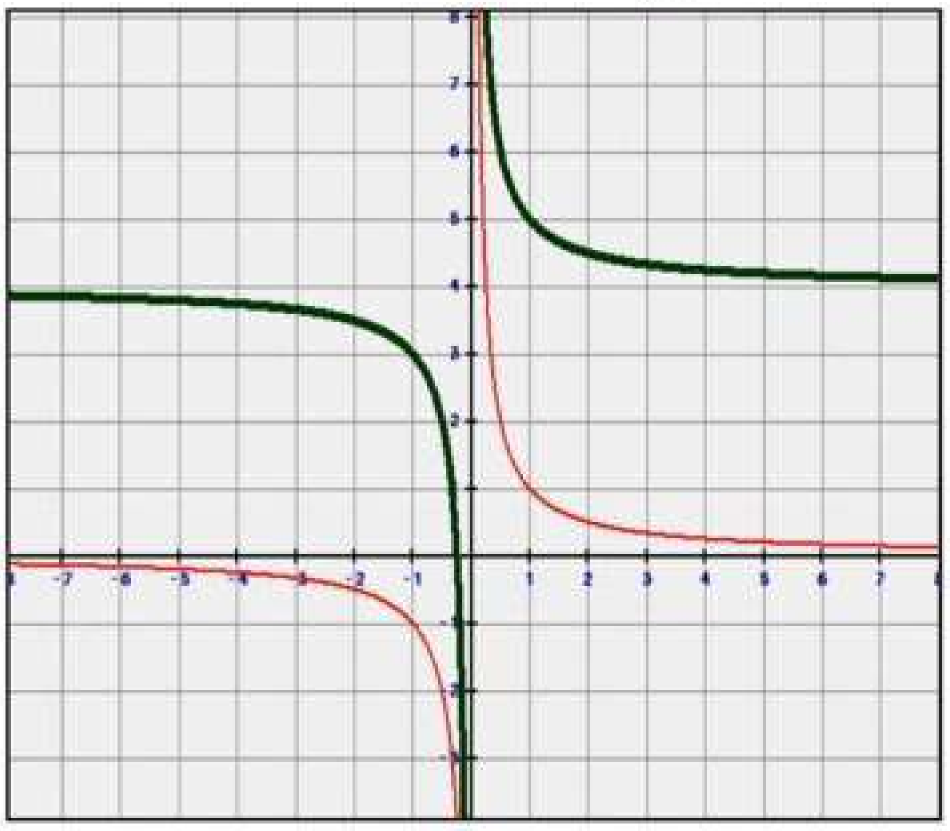


(8) $g(x) = \sqrt{x-7} + 3$

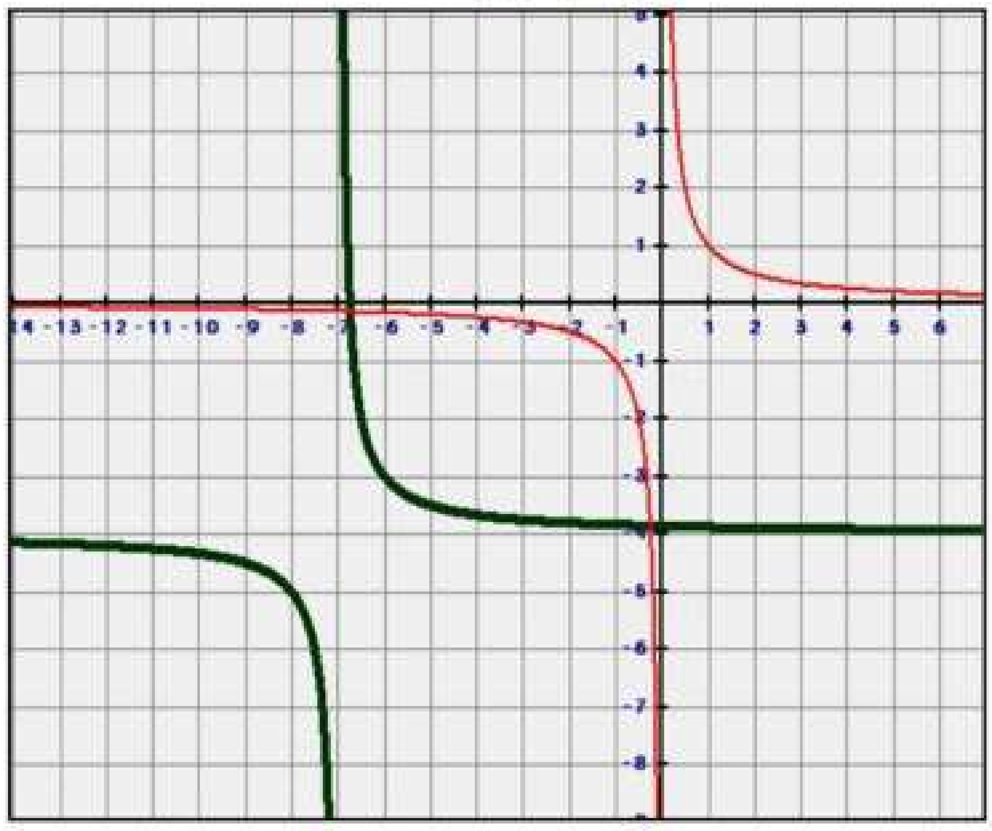


استعمل منحنى الدالة الرئيسية (الأم) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ لتمثيل كل من الدالتين:

(9) $g(x)=\dfrac{1}{x}+4$



(10) $g(x)=\dfrac{1}{x+7}-4$



صف العلاقة بين منحنى $f(x)=[\![x]\!]$ و $g(x)$ في كل من الحالتين الآتيتين،

ثم اكتب معادلة $g(x)$.

(11) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره ثلاث وحدات إلى اليسار $g(x)=[\![x+3]\!]$.

---

(12) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ بإنعكاس حول محور x، يتبعه انسحاب مقداره اربع وحدات إلى اللأعلى $g(x)=-[\![x]\!]+4$.

صف العلاقة بين منحنى $f(x)=|x|$ و $g(x)$ في كل من الحالتين الآتيتين،

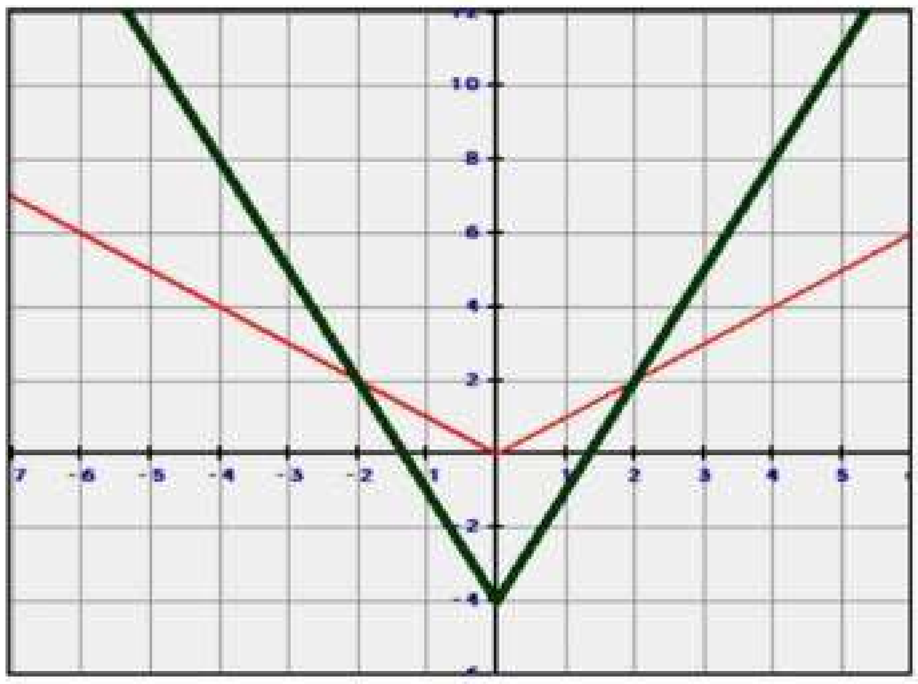
ثم اكتب معادلة $g(x)$.

(13) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ بإنسحاب مقداره ثمان وحدات إلى اليمين $g(x)=|x-8|$.

---

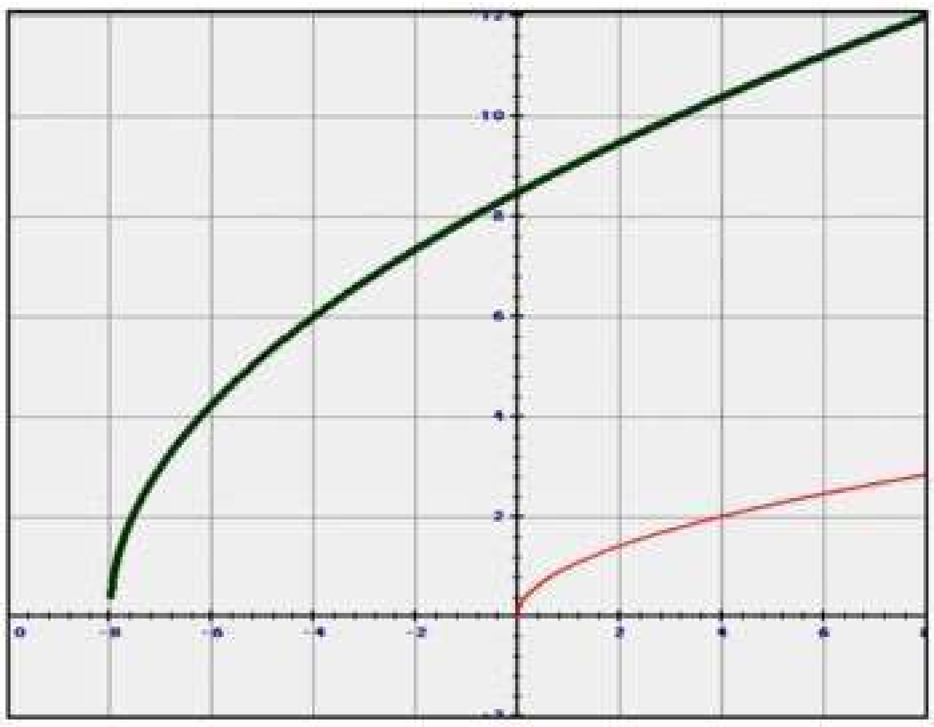
(14) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره وحدة إلى اليمين ووحدتان إلى الاسفل، $g(x)=|x-1|-2$.

اكتب الدالة الرئيسية (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما في مستوى إحداثي واحد.



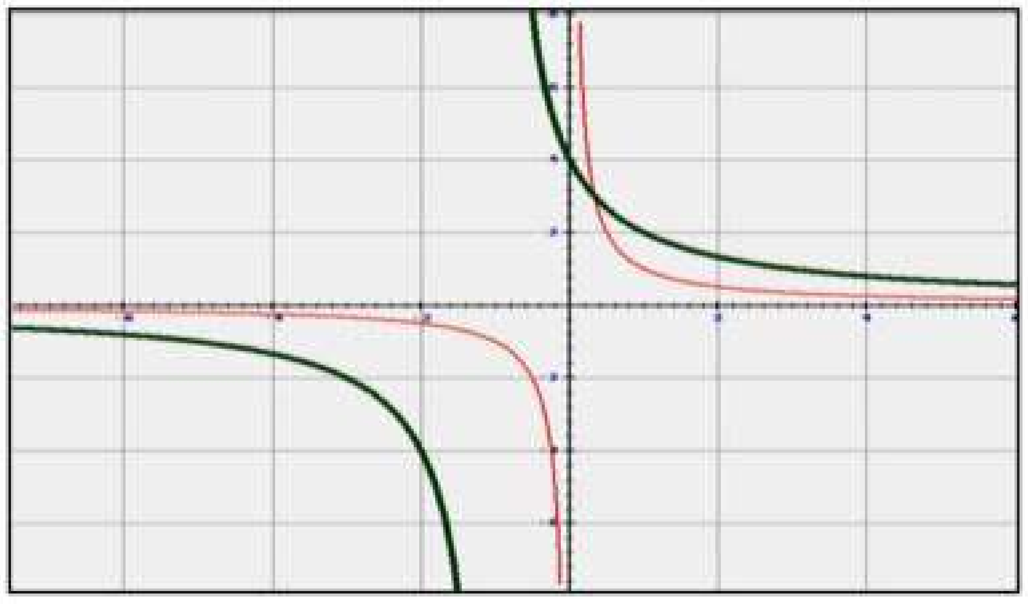
$g(x)=3|x|-4$ (15)

$f(x)=|x|$ ، منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي بإنسحاب أربع وحدات إلى الأسفل للدالة $f(x)$



$g(x)=3\sqrt{x+8}$ (16)

$f(x)=\sqrt{x}$ ، منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي بإنسحاب ثمان وحدات إلى اليسار للدالة $f(x)$



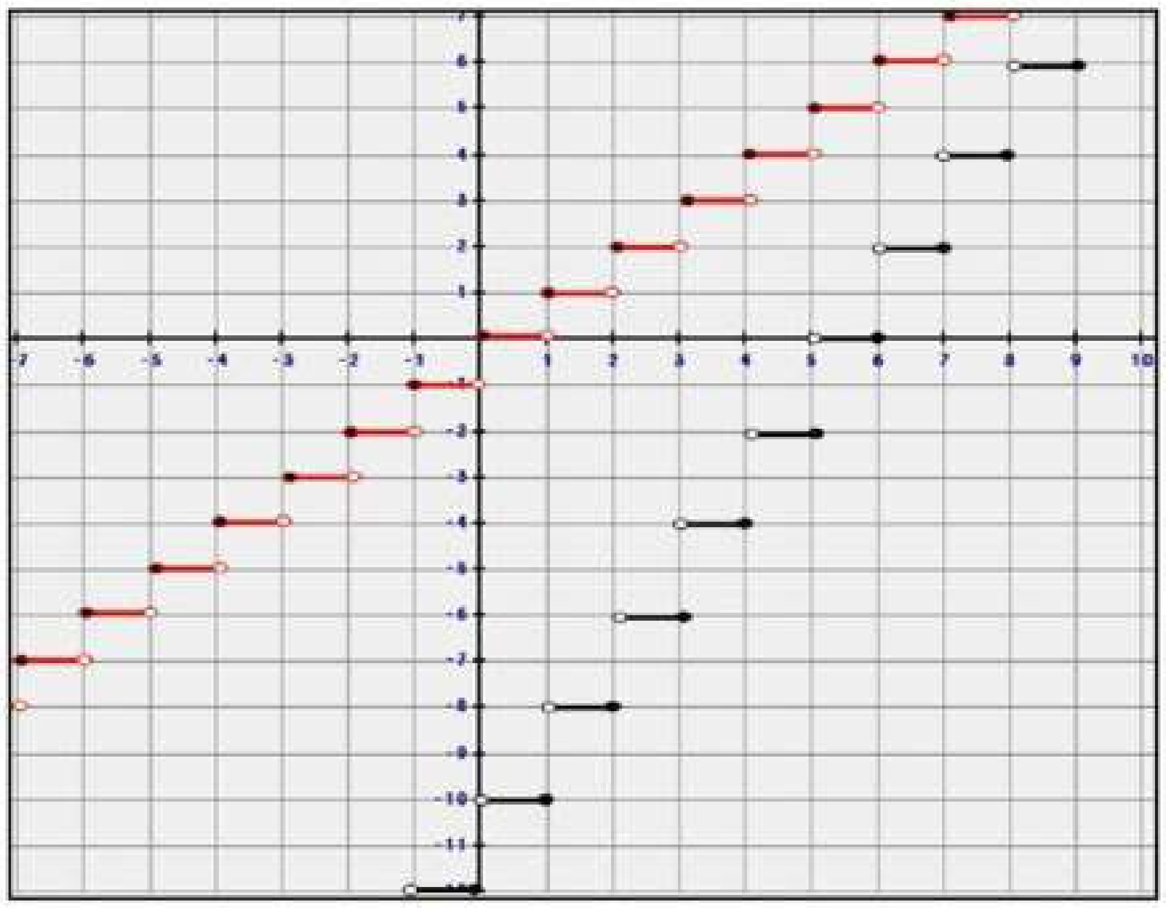
$g(x)=\dfrac{4}{x+1}$ (17)

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي بإنسحاب وحدة واحدة إلى اليسار للدالة $f(x)$

$g(x) = 2[\![x-6]\!]$ (18)

$f(x) = [\![x]\!]$ ، منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي

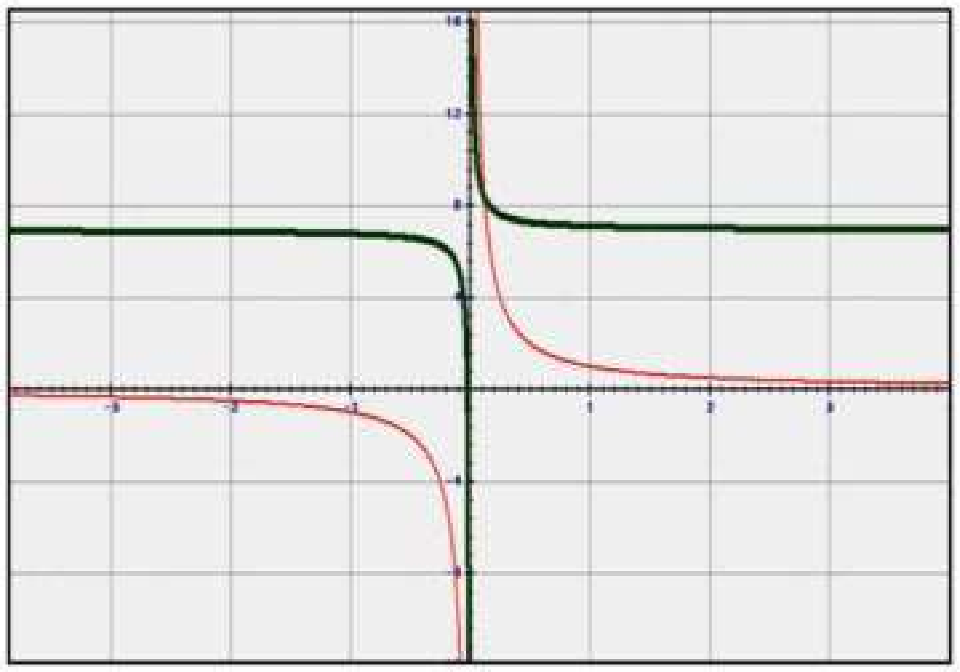
بإنسحاب ست وحدات إلى اليمين للدالة $f(x)$



$g(x) = \dfrac{1}{6x} + 7$ (19)

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ ، منحنى $g(x)$ هوتضيق رأسي يتبعه

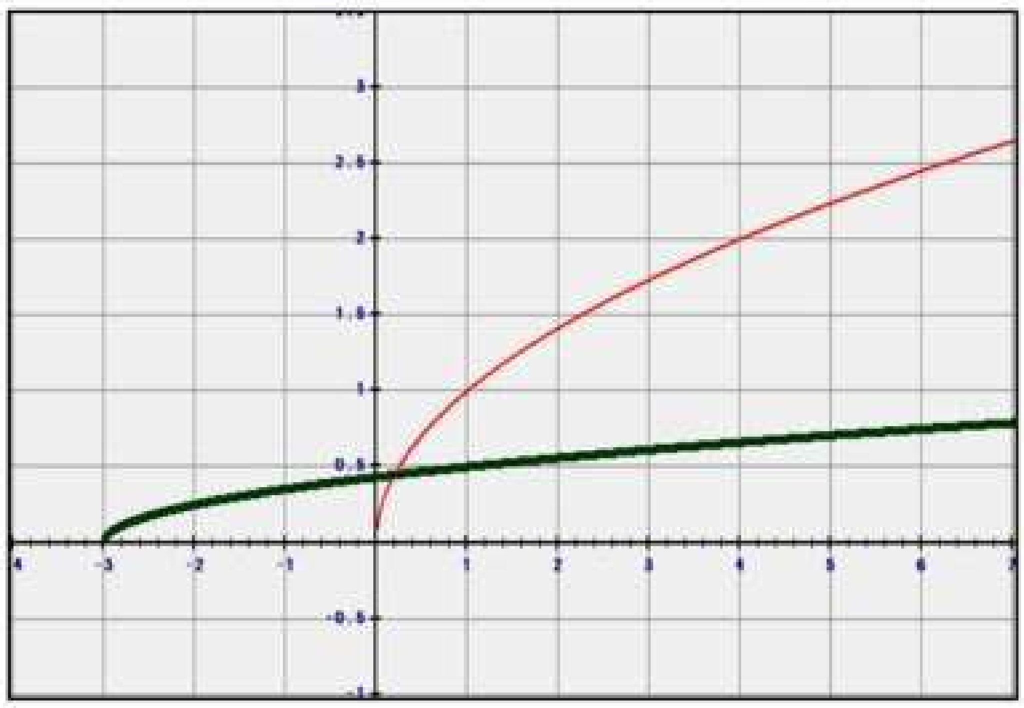
إنسحاب سبع وحدات إلى أعلى للدالة $f(x)$



$g(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{4}$ (20)

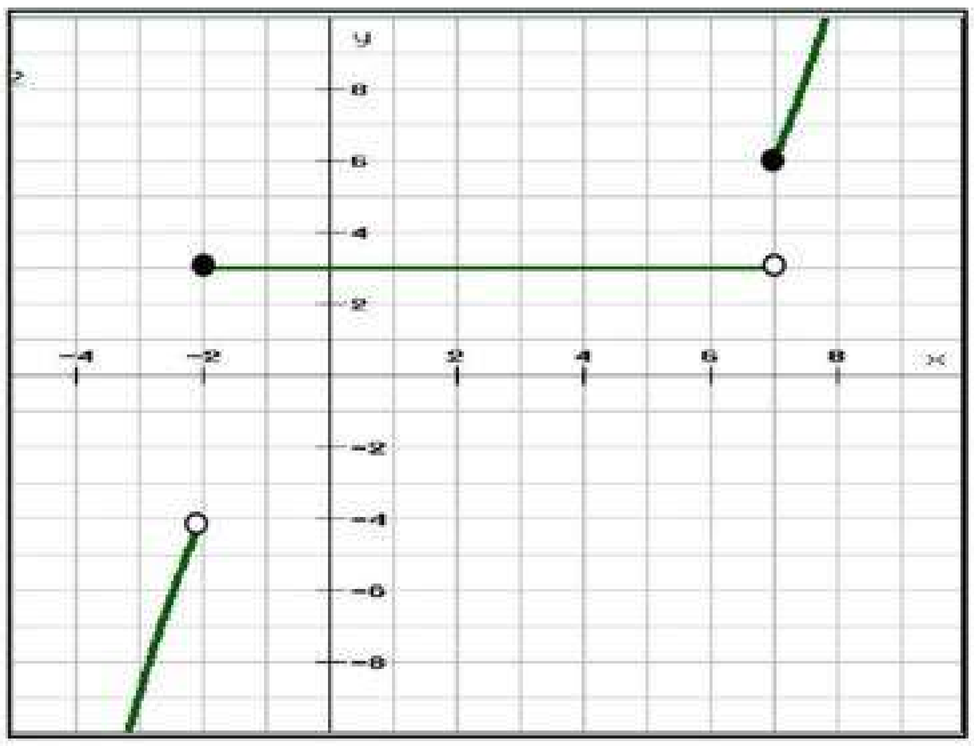
$f(x) = \sqrt{x}$ ، منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي

بإنسحاب ثلاث وحدات إلى اليسار للدالة $f(x)$

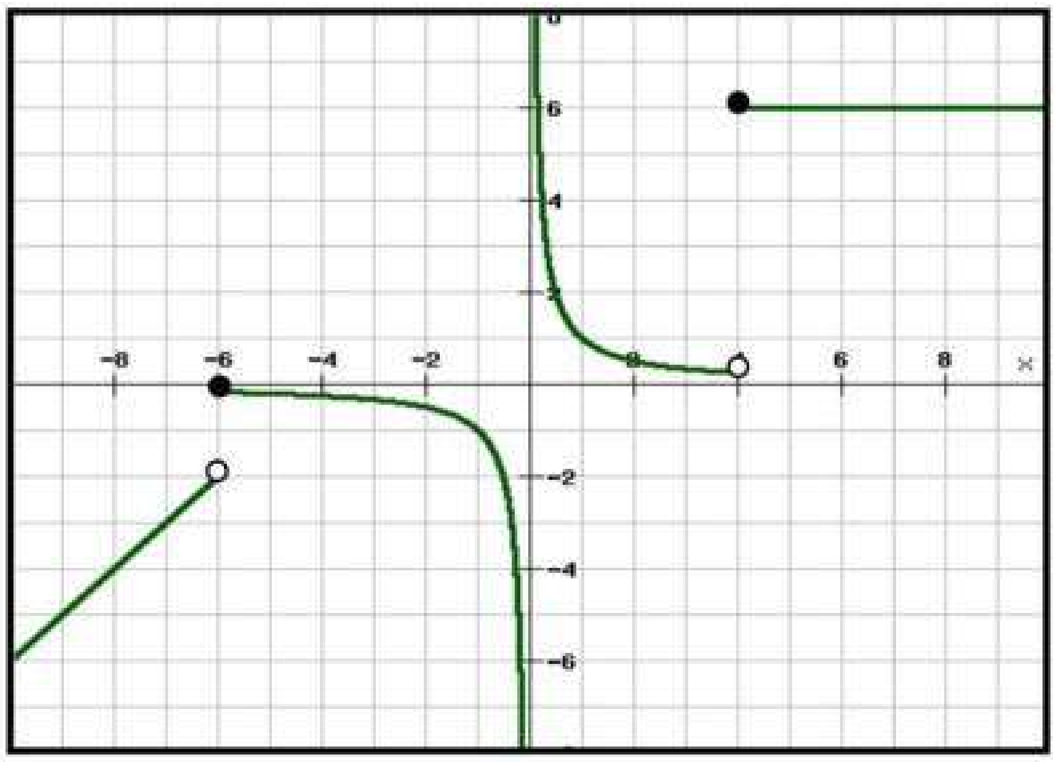


مثل منحنى كل من الدوال الآتية بيانياً:

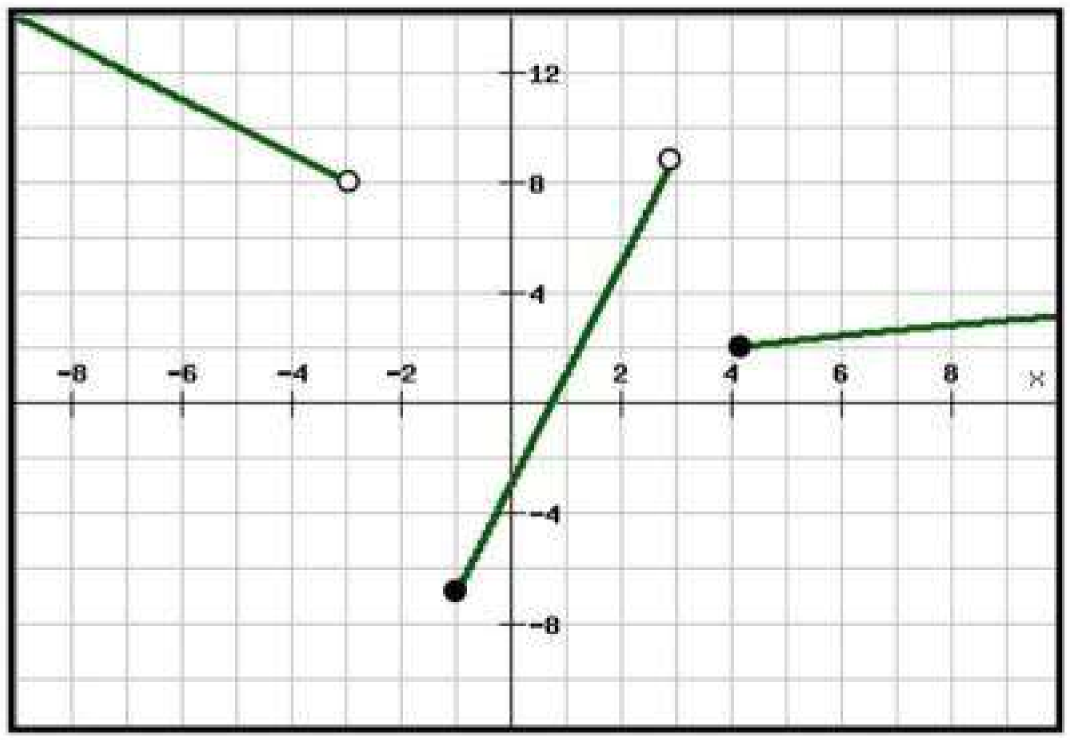
21) $$f(x)=\begin{cases} -x^2 & , x<-2 \\ 3 & , -2\le x<7 \\ (x-5)^2+2 & , x\ge 7 \end{cases}$$



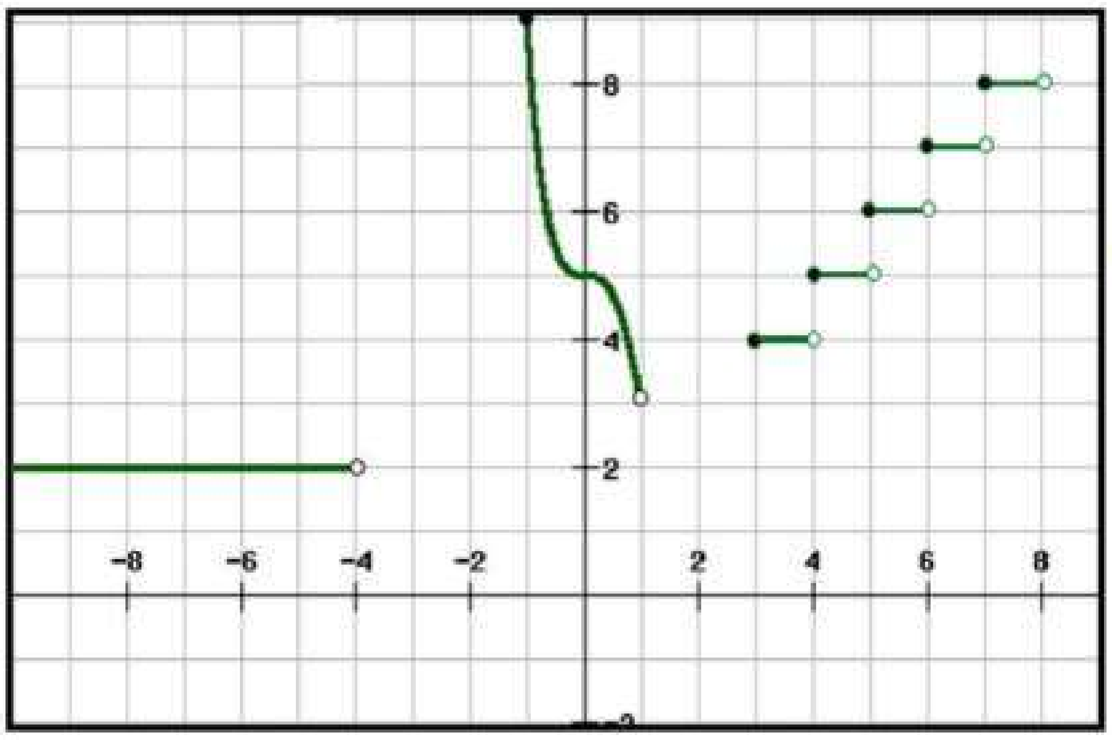
22) $$g(x)=\begin{cases} x+4 & , x<-6 \\ \dfrac{1}{x} & , -6\le x<4 \\ 6 & , x\ge 4 \end{cases}$$



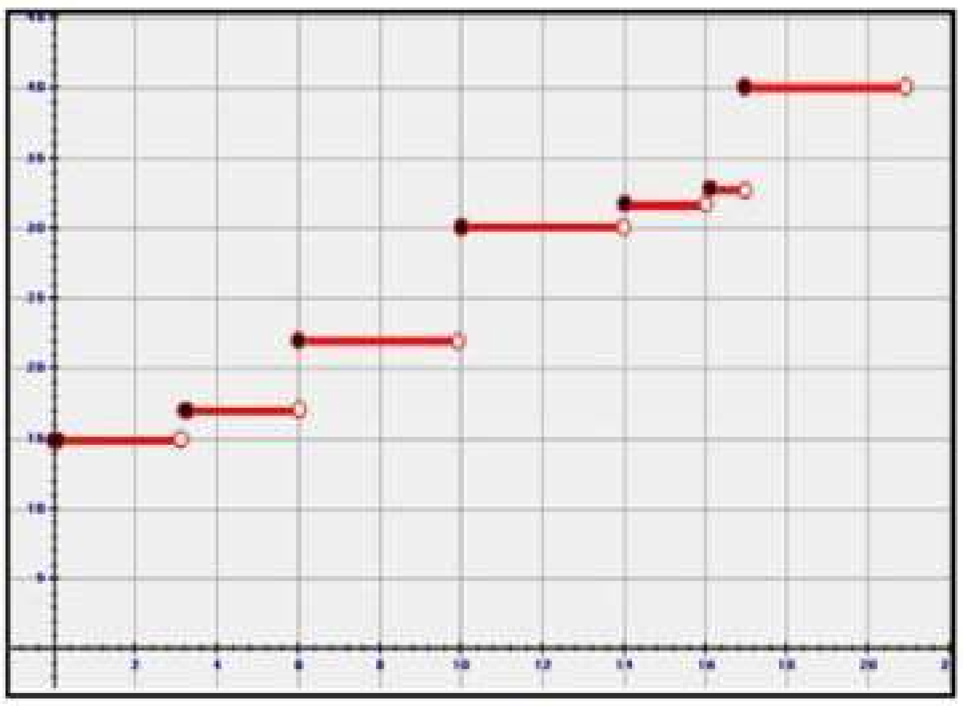
23) $$h(x)=\begin{cases} |x-5| & , x<-3 \\ 4x-3 & , -1\le x<3 \\ \sqrt{x} & , x\ge 4 \end{cases}$$



(24) $g(x)=\begin{cases} 2 & , \ x<-4 \\ x^4-3x^3+5 & , \ -1\le x<1 \\ \lfloor x\rfloor+1 & , \ x\ge 3 \end{cases}$



(25) **أسعار:**



---

(26) **أعمال:**

a) منحنى $C(x)$ هوتضيق رأسي يتبعه إنسحاب عشرون وحدة إلى أعلى للدالة $f(x)$

b) $C(x)=30+0.1\lfloor x\rfloor$

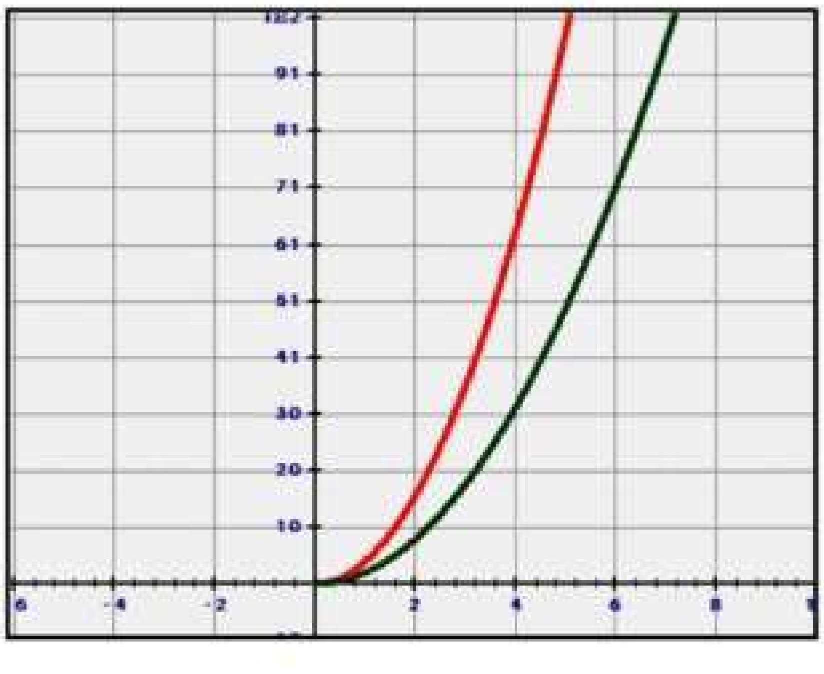
c) نعم، بعد 100دقيقة.

---

(27) **فيزياء:**

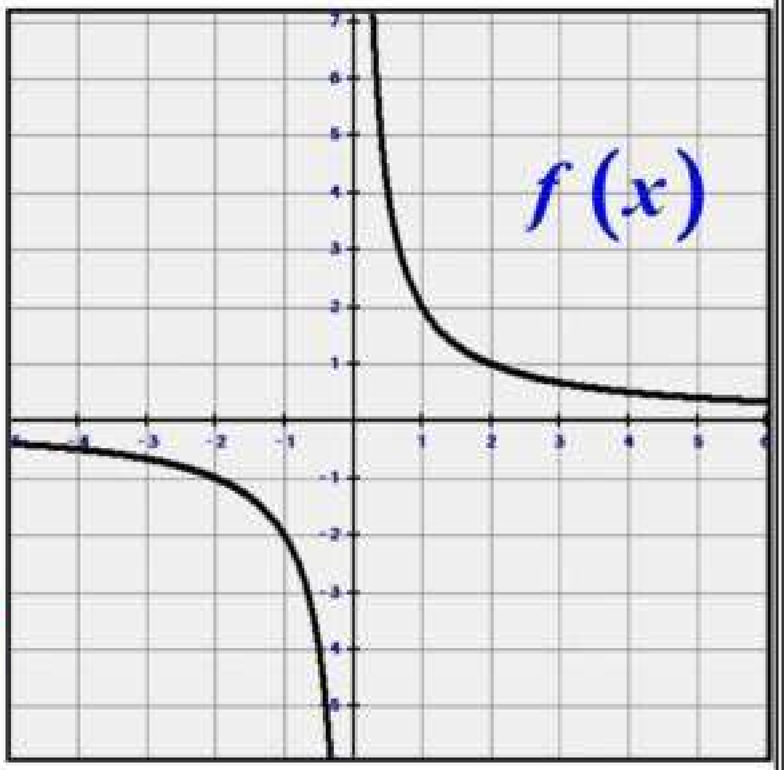
a) منحنى $E(x)$ هو توسع رأسي للدالة $f(x)$

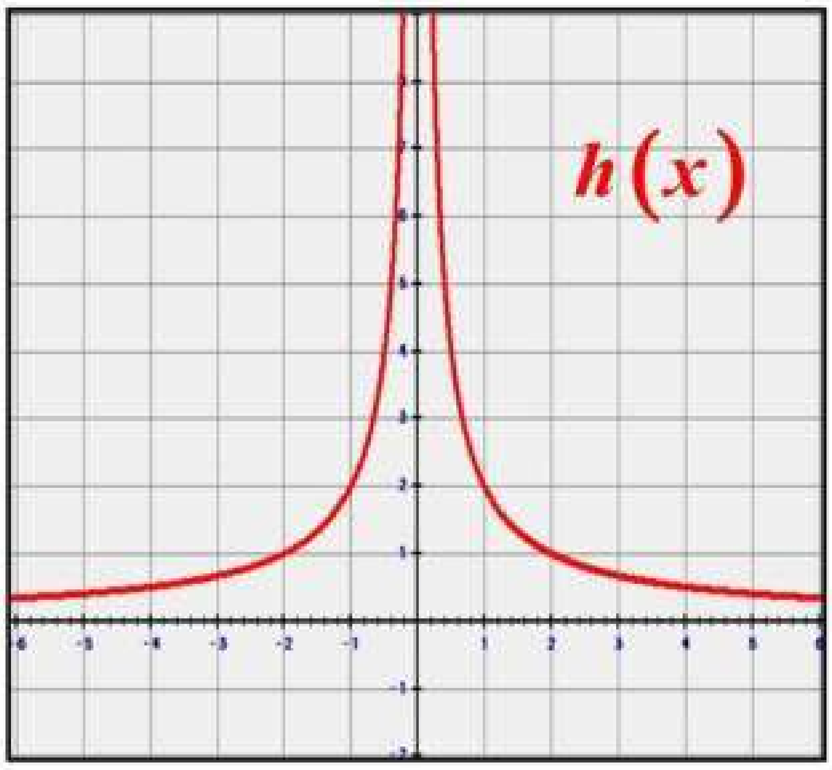
b) منحنى $E(x)=4x^2$ ، منحني $E(x)=2x^2$

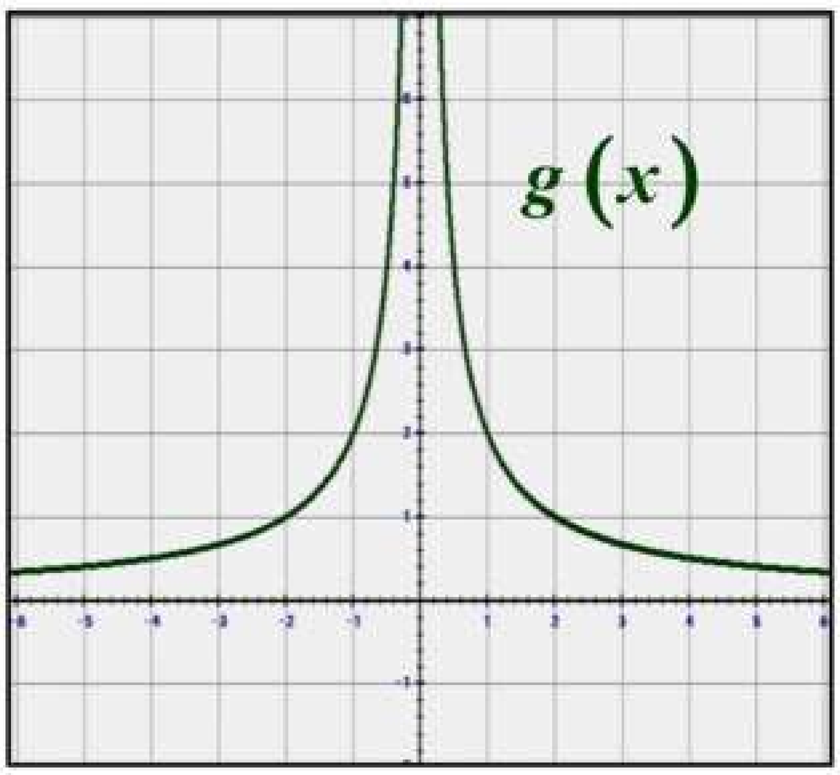


استعمل منحنى الدالة $f(x)$ لتمثيل منحنى الدالتين $h(x)=f(|x|)$ ، $g(x)=|f(x)|$ في كلاً مما يأتي:

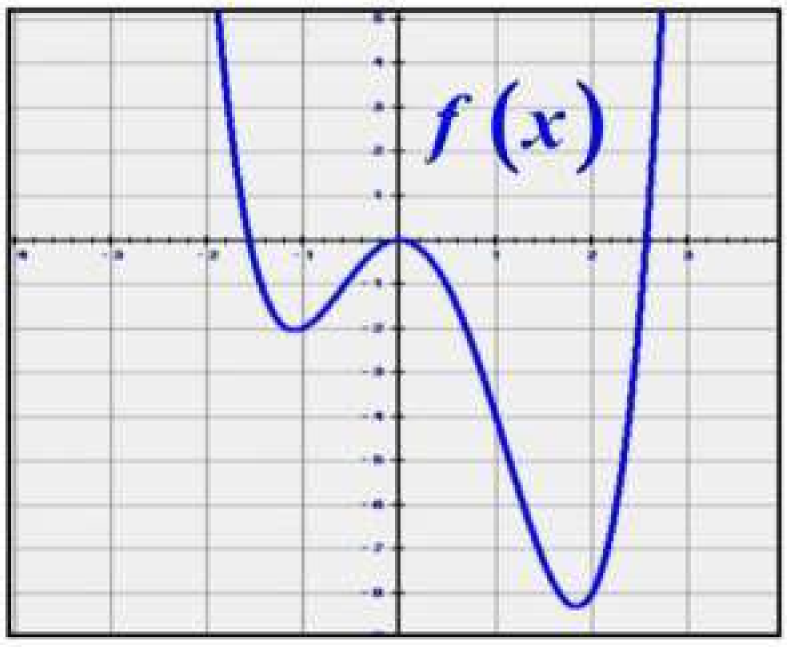
$(28)\quad f(x)=\dfrac{2}{x}$

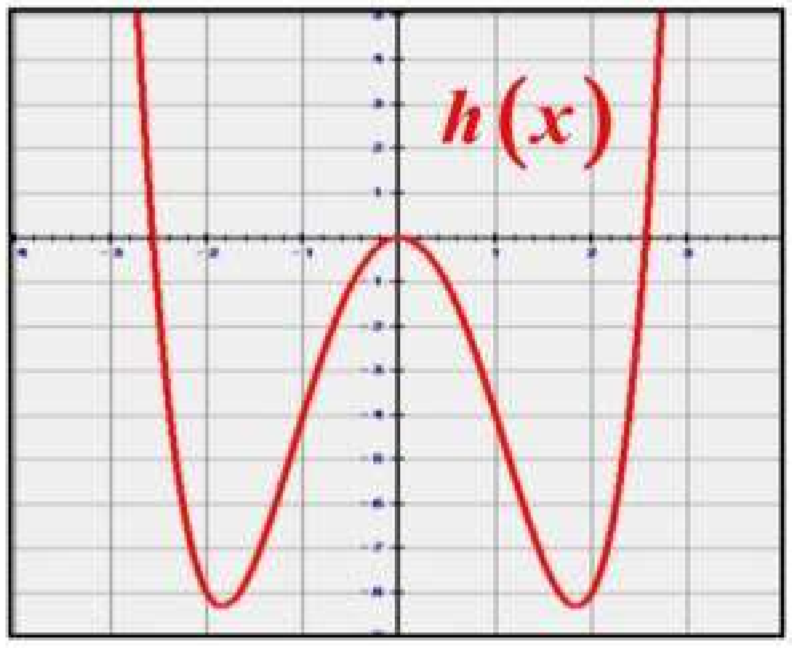


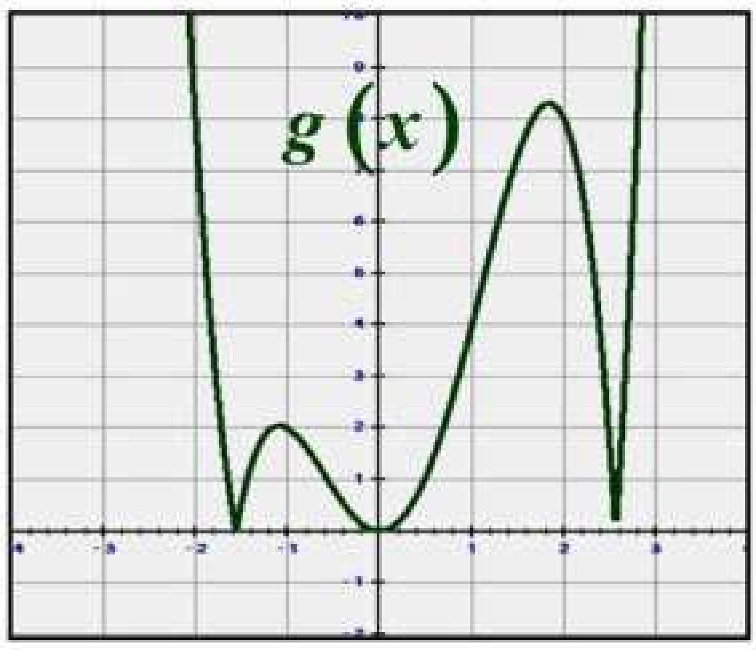




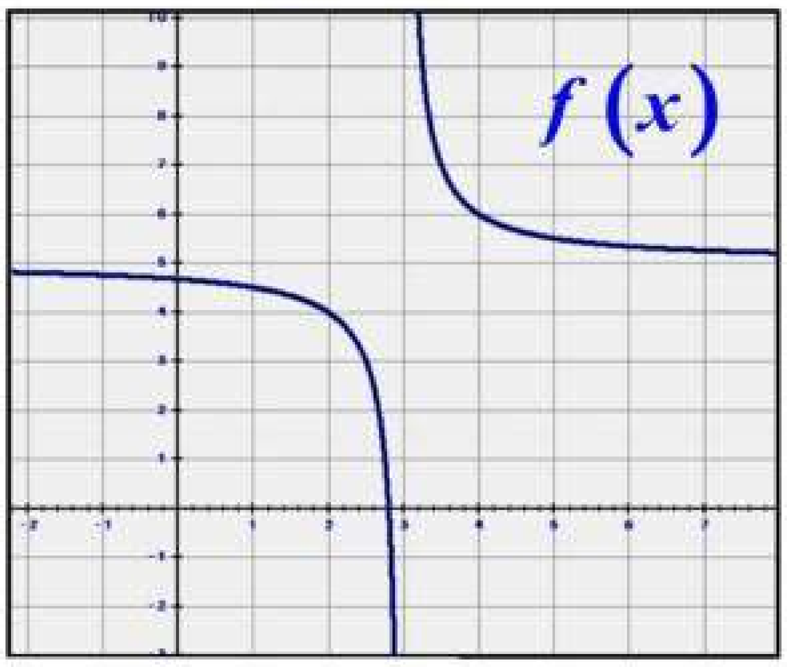
$(29)\quad f(x)=x^4-x^3-4x^2$

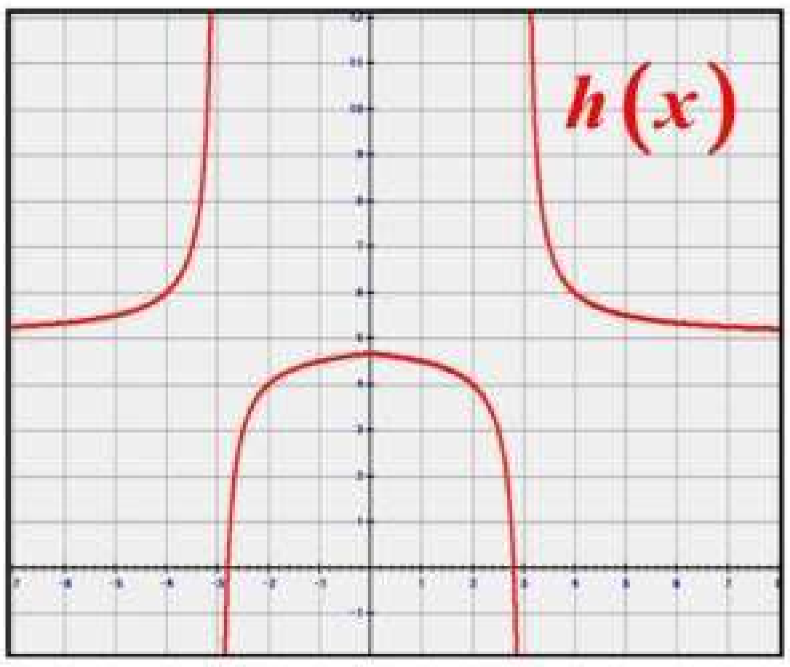


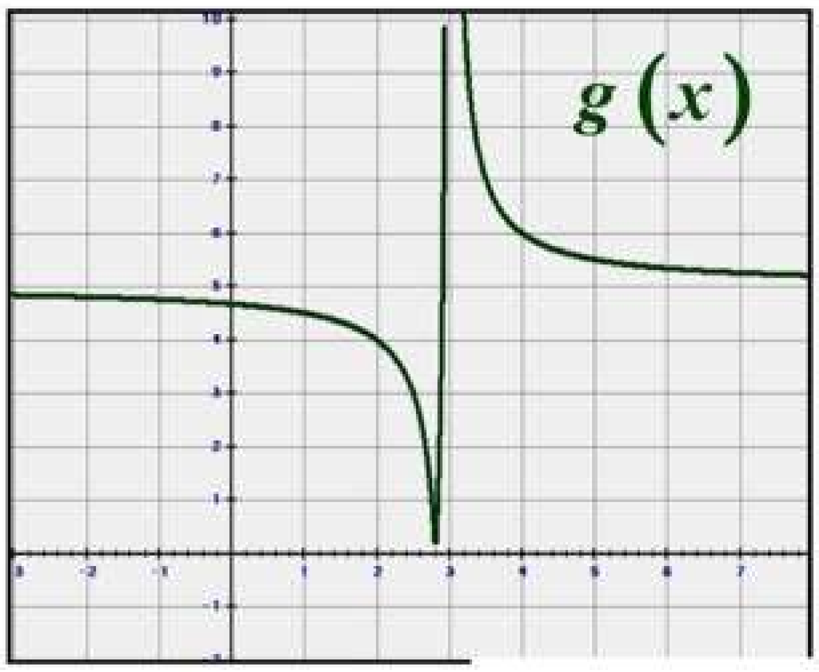




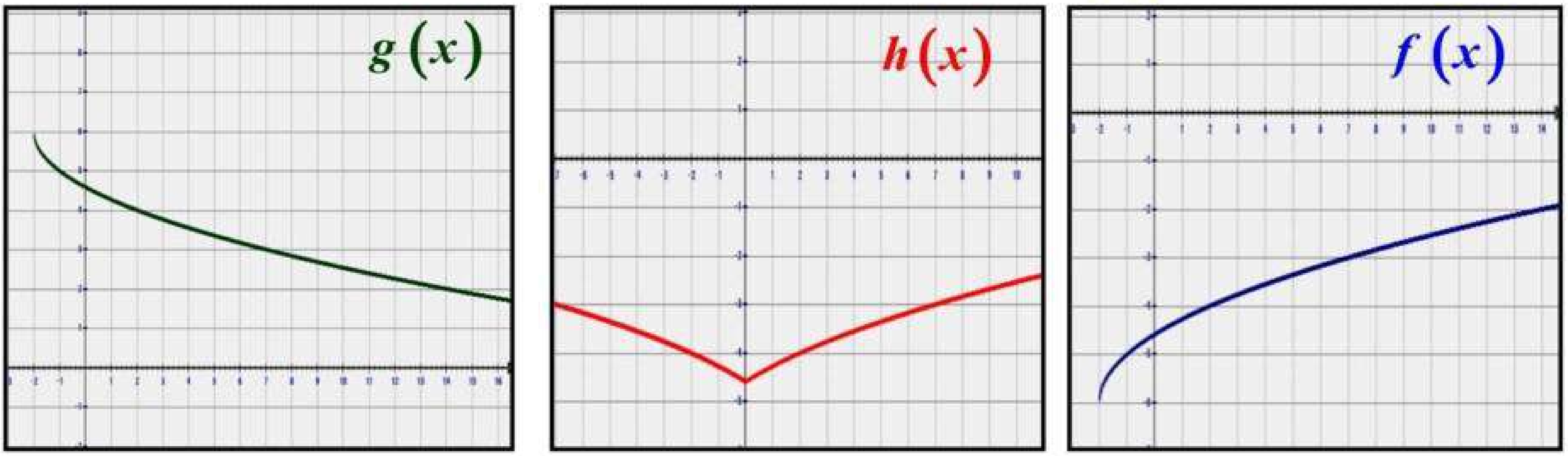
$(30)\quad f(x)=\dfrac{1}{x-3}+5$







$f(x) = \sqrt{x+2} - 6$ (31)



اكتب الدالة الناتجة من إجراء التحويلات الهندسية المعطاة على الدالة النيسية (الأم) في كل من السؤالين الآتيين:

$g(x) = \dfrac{2}{x+7} + 5$ (32)

$g(x) = -3\llbracket x \rrbracket - 4$ (33)

فيزياء :

$g(t) = 2t + t^2 = (t+1)^2 - 1$ (34)

إنسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار ووحدة واحده لأسفل.

$g(t) = t^2 + 10$ (35)

إنسحاب بمقدار عشرة وحدات إلى الأعلى.

$g(t) = 1 + 8t + 2t^2 = 2(t+2)^2 - 7$ (36)

توسع رأسي، وإنسحاب مقدارة وحدتان إلى اليسار وإنسحاب مقدارة سبع وحدات لأسفل.

$g(t) = 3 + 5t + \dfrac{3}{2}t^2 = \dfrac{3}{2}\left(t + \dfrac{5}{3}\right)^2 - \dfrac{7}{6}$ (37)

توسع رأسي، وإنسحاب مقدارة $\dfrac{5}{3}$ وحدة إلى اليسار وإنسحاب مقدارة $\dfrac{7}{6}$ وحدة لأسفل.

اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍ مما يأتي:

38) $g(x) = -0.5(x-5)^3 - 8$

---

39) تسوق:

a) $g(x) = 0.12 f(x)$

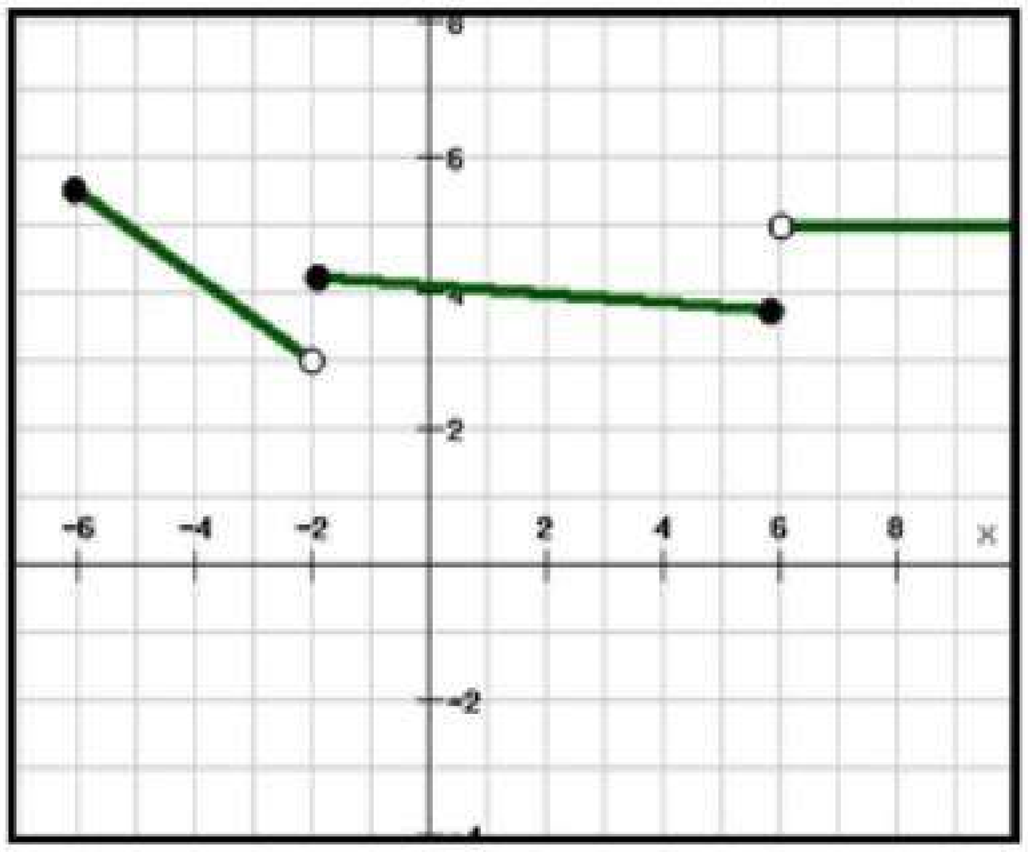
b) $g(x) = f(x-30)$

c) $g(x) = f(x) - 0.45$

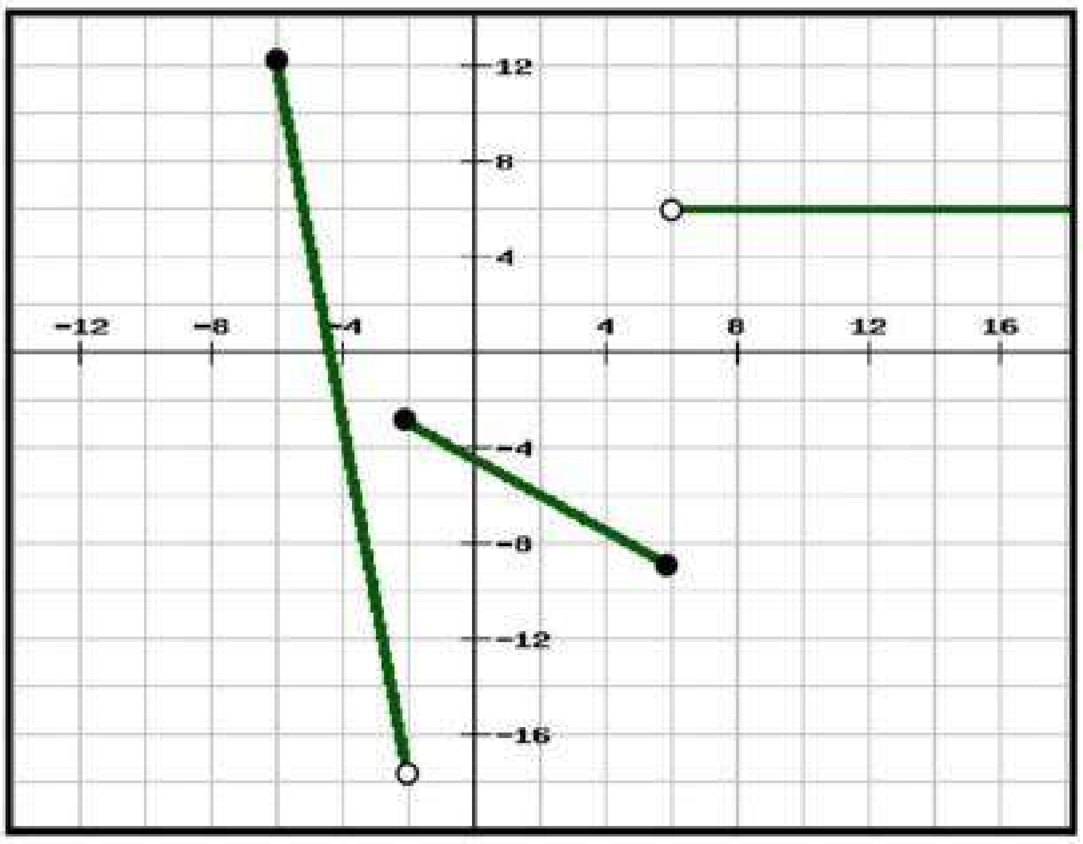
اكتب دالة تمثل المنحنى في كل مما يأتي:

40) $f(x) = \dfrac{-4}{x+5} + 6$

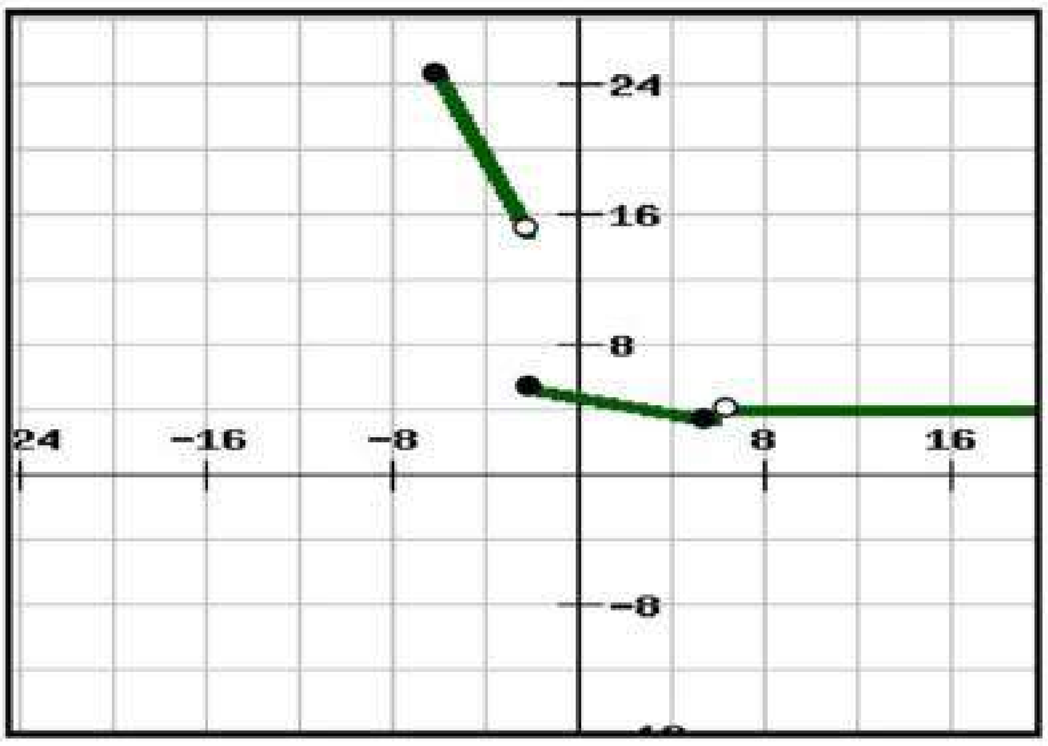
41)



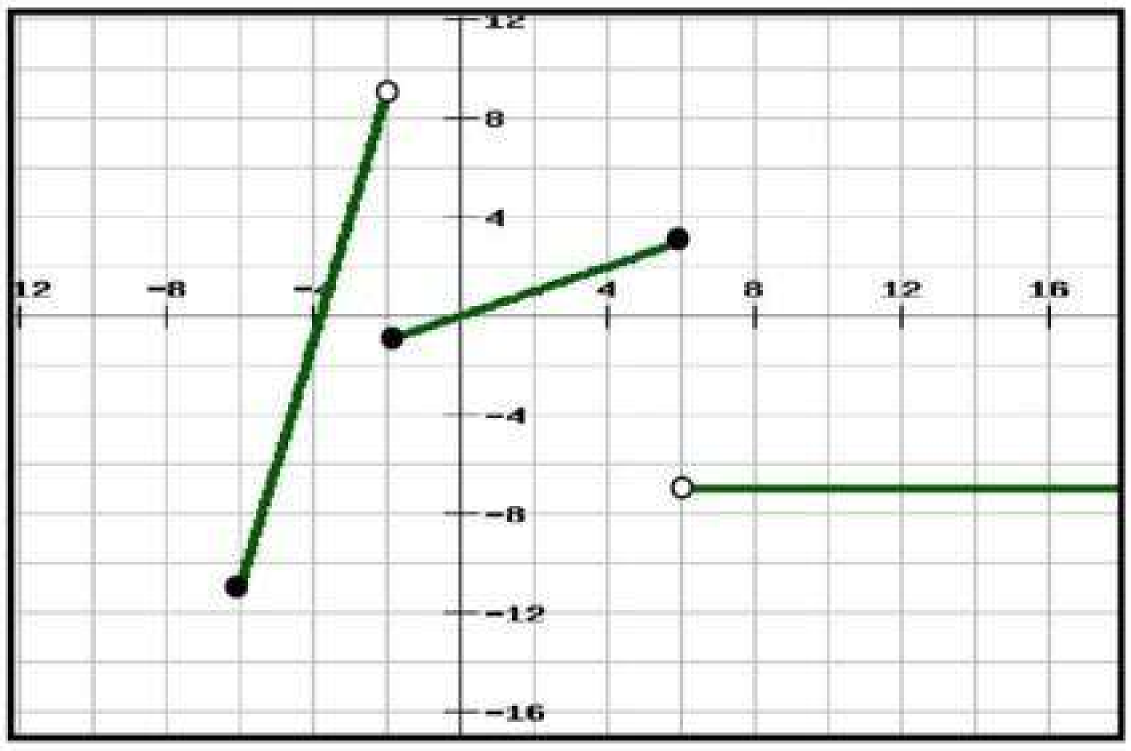
42)



(43)

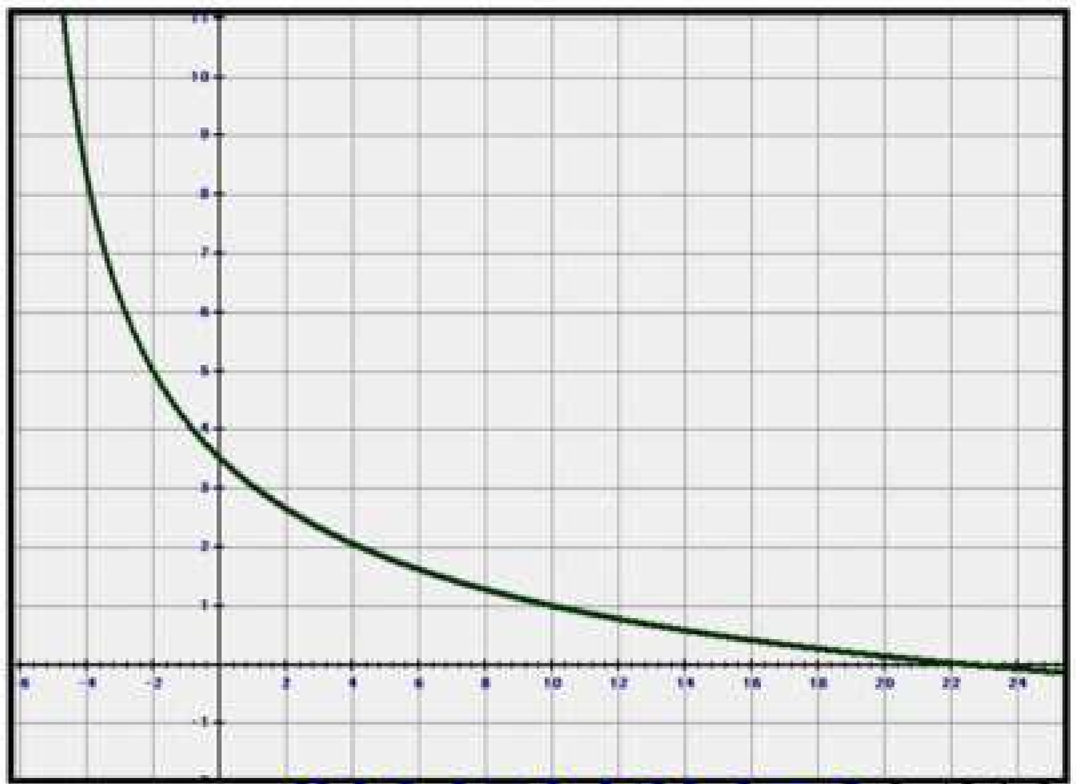


(44)

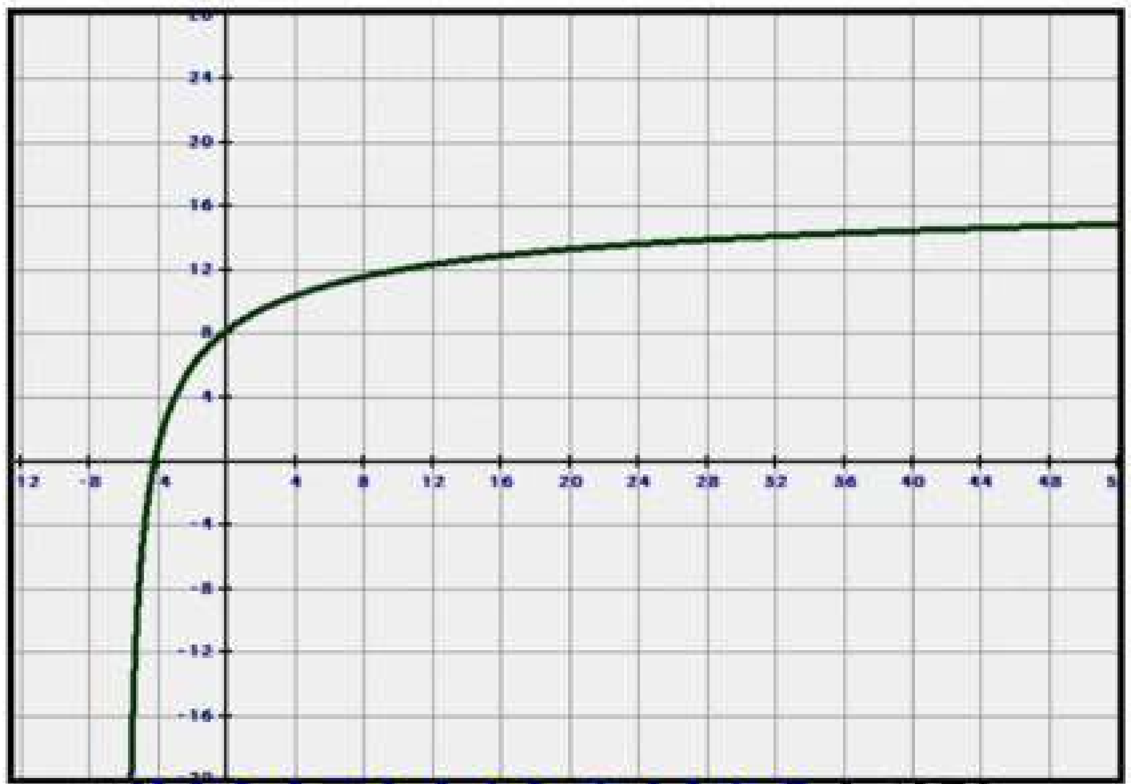


استعمل $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x+6}} - 4$ **لتمثيل كل دالة مما يأتي:**

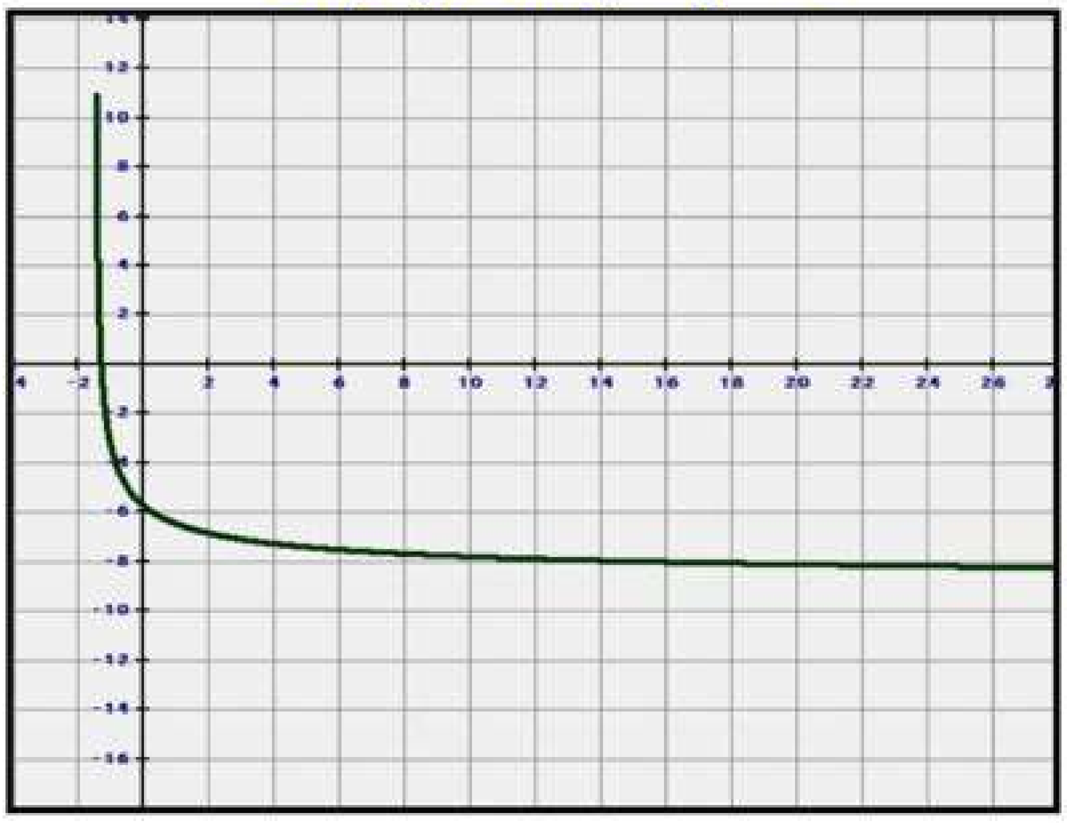
(45) $g(x) = 2f(x) + 5$



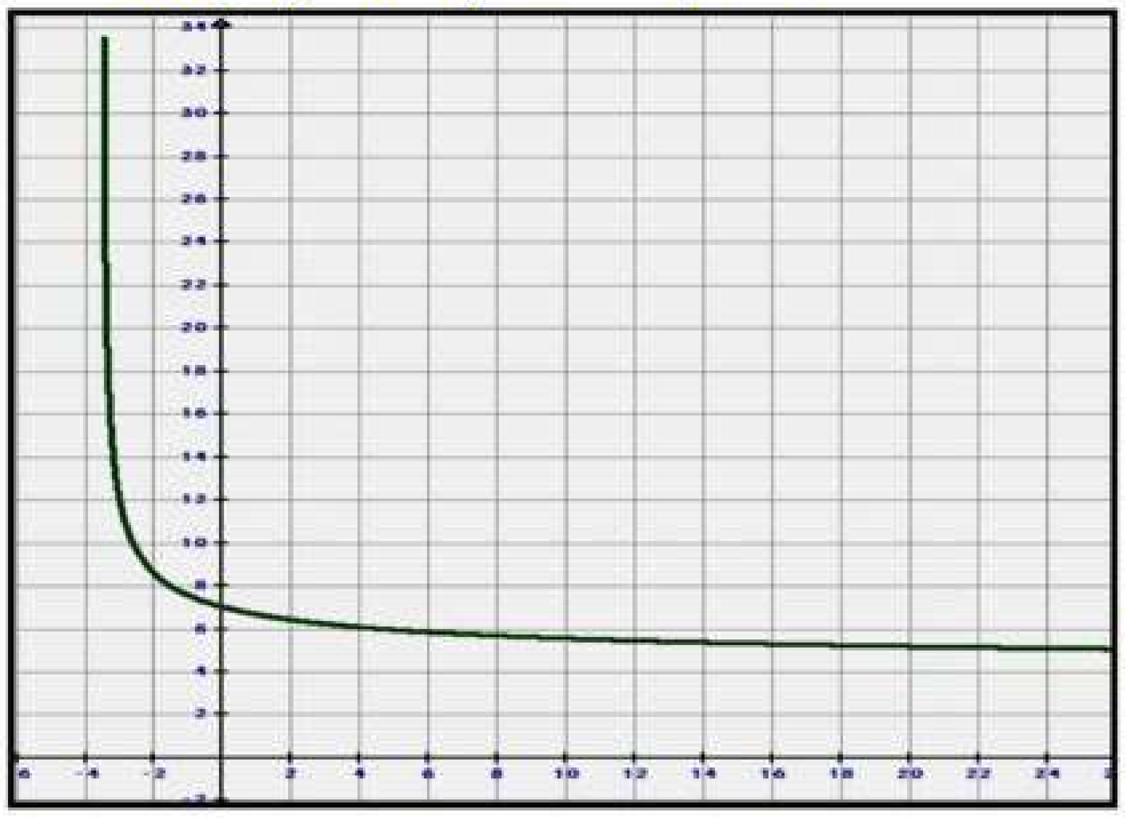
(46) $g(x) = -3f(x) + 6$



(47) $g(x) = f(4x) - 5$



(48) $g(x) = f(2x+1) + 8$



(49) **تمثيلات متعددة:**

a) **جدوليا:**

a	$f(a)$	$g(a)$	$f(a)+g(a)$	$h(a)$
3	22	15	37	37
-4	15	-13	2	2
1	10	7	17	17

b) **لفظيا:**

$h(a)$ تساوي جمع $g(a)$ و $f(a)$

c) **جبريا:**

$$f(x)+g(x)=x^2+2x+7+4x+3$$
$$=x^2+6x+10=h(x)$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

(50) **اكتشف الخطأ:**
كلاًهما صحيح، في دالة أكبر عدد صحيح، سحب الدالة الأصلية a وحدة لليسار يماثل سحب الدالة الأصلية a وحدة إلى الأعلى.

---

(51) **تبرير:**
$f(x)=h(x)$، وليكن $f(x)=x^3$ دالة فردية الدالة $g(x)$ إنعكاس للدلة $f(x)$ في المحور y اذن $g(x)=-x^3$، والدالة $h(x)$ إنعكاس للدلة $g(x)$ في المحور x ومنها $h(x)=-(-x)^3=x^3$ ومنها $f(x)=h(x)$.

---

(52) **تبرير:**
أحيانا، إذا كانت $f(x)$ زوجية فتكون قيمتها صحيحة للدوال الزوجية التي تقع قيمتها في الربع الأول، وفي الربع الثاني، وتكون الدالة زوجية.

---

(53) أحيانا، إذا كانت $f(x)$ زوجية فإن $f(x)=f(-x)$ وهذا صحيح فقط للدوال الزوجية التي تقع قيمتها في الربع الثالث والربع الرابع.

(54) **تحد:**

منحنى $g\left(x\right)$ هو منحنى $f\left(x\right)$ بإنسحاب 6 وحدات إلى اليسار و 8 وحدات إلى الأسفل

$$g\left(x\right)=\sqrt{x+6}-8$$

---

(55) تبرير:

التوسع الرأسي للدالة $f\left(x\right)$ بمقدار أربعة يكافئ $4f\left(x\right)$ ، والتضيق الأفقي لنفس الدالة يكافئ $f\left(\dfrac{x}{4}\right)$ وعند إجراء كلاً التحولين فإم الناتج $f\left(x\right)$ إذا كانت $f\left(x\right)$ دالة خطية.

وإذا كانت $f\left(x\right)$ ليست خطية. فإن الناتج لن يكون $f\left(x\right)$ لذا $4f\left(\dfrac{x}{4}\right)\neq f\left(x\right)$

---

(56)اكتب:

الترتيب مهم لأنه يمكن الحصول على منحنيات مختلفة بترتيب مختلف من التحويلات الهندسية.

فمثلاً إذا كانت الدالة $g\left(x\right)$ هي الدالة $f\left(x\right)=x+5$ بإنسحاب 5 وحدات لأعلى ثم إنعكاس حول محور x فإن $g\left(x\right)=-x-10$ وإذا كانت الدالة $h\left(x\right)$ هي الدالة $f\left(x\right)=x+5$ بإنعكاس حول محور x ثم إنسحاب 5 وحدات لأعلى فإن $h\left(x\right)=-x$

نلاحظ أن $h\left(x\right)\neq g\left(x\right)$ أي أن إختلاف الترتيب في التحويلات يعطي دوال مختلفة.

مراجعة تراكمية:

أوجد متوسط معدل التغير لكل من الدوال الآتية في الفترة المعطاة:

(57) $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{g(3)-g(-1)}{3+1}=\frac{-12}{4}=-3$

(58) $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{g(8)-g(4)}{8-4}=\frac{24}{4}=6$

(59) $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{g(3)-g(-2)}{3+2}=\frac{-70}{5}=-14$

مستعملاً التبرير المنطقي، حدد سلوك طرفي التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية عندما تقترب x من مالانهاية، وبرر إجابتك:

(60) $q(x)\to 0$ عندما $x\to\infty$ تتناقص قيمة الكسر لتكون $q(x)=0$ وكذلك عندما $x\to-\infty$

(61) $f(x)\to 0$ عندما $x\to\infty$ تتناقص قيمة الكسر لتكون $f(x)=0$ وكذلك عندما $x\to-\infty$

(62) $p(x)\to 1$ عندما $x\to\infty$ تقترب الدالة من $\frac{x}{x}$ لذا يكون $p(x)=1$ وكذلك عندما $x\to-\infty$

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتعيين قيمة كل من المقطع y، والاصفار......:

(63) المقطع $y=13$، اصفار الدالة $\{2.25, 5.75\}$

(64) المقطع $y=0$، اصفار الدالة $\{-1, 0, 2\}$

(65) المنحنى لا يقطع المحور y، وأصفار الدالة 3

تدرب على اختبار

(66) D $(1,\infty)$

(67) B $\{y \mid y \geq 4\}$

(1-6)العمليات على الدوال وتركيب دالتين

(1A) $f(x)=x-4 \quad , g(x)=\sqrt{9-x^2}$

* $(f+g)(x)=x-4+\sqrt{9-x^2}$

مجال الدالة $f(x)$ هو $(-\infty,\infty)$ ومجال الدالة $g(x)$ هو $[-3,3]$ لذا فإن مجال $(f+g)$ هو تقاطع المجالين وهو $[-3,3]$

* $(f-g)(x)=x-4-\sqrt{9-x^2}$ ←←←←← المجال: $[-3,3]$

* $(f\cdot g)(x)=x\sqrt{9-x^2}-4\sqrt{9-x^2}$ ←←← المجال: $[-3,3]$

* $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x-4}{\sqrt{9-x^2}}$ ←←←←←←←← المجال: $(-3,3)$

(1B)

$f(x)=x^2-6x \quad , \quad g(x)=\sqrt{x}$

* $(f+g)(x)=x^2-6x+\sqrt{x}$

مجال الدالة $f(x)$ هو $(-\infty,\infty)$ ومجال الدالة $g(x)$ هو $[0,\infty)$ لذا فإن مجال $(f+g)$ هو تقاطع المجالين وهو $[0,\infty)$

* $(f-g)(x)=x^2-6x-\sqrt{x}$ ←←←←← المجال: $[0,\infty)$

* $(f\cdot g)(x)=x^2\sqrt{x}-6x\sqrt{x}$ ←←←←←← المجال: $[0,\infty)$

* $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2-6x}{\sqrt{x}}$ ←←←←←←←←← المجال: $(0,\infty)$

تحقق من فهمك

أوجد $[f\circ g](x), [g\circ f](x), [f\circ g](3)$ في كل مما يأتي:

$f(x) = 3x+1\ ,\ g(x) = 5-x^2$ (2A)

$[f \circ g](x) = f(5-x^2) = 3(5-x^2)+1 = 15-3x^2+1 = 16-3x^2$

$[g \circ f](x) = g(3x+1) = 5-(3x+1)^2 = 5-9x^2-6x-1 = 6-9x^2-6x$

$[f \circ g](3) = 16-3(3)^2 = 16-27 = -11$

$f(x) = 6x^2-4\ ,\ g(x) = x+2$ (2B)

$[f \circ g](x) = f(x+2) = 6(x+2)^2-4 = 6(x^2+4x+4)-4 = 6x^2+24x+20$

$[g \circ f](x) = g(6x^2-4) = (6x^2-4)+2 = 6x^2-2$

$[f \circ g](3) = 6(3)^2+24(3)+20 = 54+72+20 = 146$

تحقق من فهمك

(3A)

$[f \circ g](x) = f(x^2-1) = \sqrt{x^2-1+1} = x$

المجال: $\{x \mid x \in R\}$

(3B)

$[f \circ g](x) = f(x^2+x) = \dfrac{5}{x^2+x}$

المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\ ,\ x \in R\}$

تحقق من فهمك

(4A) $h(x) = x^2 - 2x + 1$

بالتحليل: $h(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$

$f(x) = x^2$ ، $g(x) = x - 1$

(4B) $h(x) = \dfrac{1}{x+7}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ ، $g(x) = x + 7$

تحقق من فهمك

(5) أعمال:

(5A)

$c(x) = x - 100$

$d(x) = 0.85x$

(5B)

$[c \circ d](x) = 0.85x - 100$ ← تمثل سعر الحاسوب بالإستفادة أولاً من الخصم.

$[d \circ c](x) = 0.85x - 85$ ← تمثل سعر الحاسوب بالإستفادة من القيمة أولاً.

(5C)

الإستفادة من الخصم أولاً ثم القيمة $[c \circ d](x)$ يجعل السعر أقل.

تدرب وحل المسائل

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $g(x)$ ، $f(x)$

في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة:

(1)

$(f+g)(x)=x^2+\sqrt{x}+4$ المجال: $\{x|x\geq 0, x\in R\}$

$(f-g)(x)=x^2-\sqrt{x}+4$ المجال: $\{x|x\geq 0, x\in R\}$

$(f\cdot g)(x)=\sqrt{x^5}+4\sqrt{x}$ المجال: $\{x|x\geq 0, x\in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\sqrt{x^3}+\frac{4}{\sqrt{x}}$ المجال: $\{x|x>0, x\in R\}$

---

(2)

$(f+g)(x)=-x^3+x+5$ المجال: $\{x|x\in R\}$

$(f-g)(x)=-x^3-x+11$ المجال: $\{x|x\in R\}$

$(f\cdot g)(x)=-x^4+3x^3+8x-24$ المجال: $\{x|x\in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{8-x^5}{x-3}$ المجال: $\{x|x\neq 3, x\in R\}$

---

(3)

$(f+g)(x)=x^2+6x+8$ المجال: $\{x|x\in R\}$

$(f-g)(x)=x^2+4x+4$ المجال: $\{x|x\in R\}$

$(f\cdot g)(x)=x^3+7x^2+16x+12$ المجال: $\{x|x\in R\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+5x+6}{x+2}=\frac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{\cancel{x+2}}=x+3$$ المجال:

$\{x|x\neq -2, x\in R\}$

---

(4)

$(f+g)(x)=x^2+10x$ المجال: $\{x \mid x\in R\}$

$(f-g)(x)=x^2-8x$ المجال: $\{x \mid x\in R\}$

$(f\cdot g)(x)=9x^3+9x^2$ المجال: $\{x \mid x\in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+x}{9x}=\frac{\cancel{x}(x+1)}{9\cancel{x}}=\frac{x+1}{9}$ المجال: $\{x \mid x\neq 0, x\in R\}$

(5)

$(f+g)(x)=2x$ المجال: $\{x \mid x\in R\}$

$(f-g)(x)=-14$ المجال: $\{x \mid x\in R\}$

$(f\cdot g)(x)=x^2-29$ المجال: $\{x \mid x\in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x-7}{x+7}$ المجال: $\{x \mid x\neq -7, x\in R\}$

(6)

$(f+g)(x)=x^3+x+\frac{6}{x}$ المجال: $\{x \mid x\neq 0, x\in R\}$

$(f-g)(x)=-x^3-x+\frac{6}{x}$ المجال: $\{x \mid x\neq 0, x\in R\}$

$(f\cdot g)(x)=6x^2+6$ المجال: $\{x \mid x\neq 0, x\in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{6}{x^4+x^2}$ المجال: $\{x \mid x\neq 0, x\neq -1\ , x\in R\}$

(7)

$(f+g)(x)=\frac{x^2+12}{4x}$ المجال: $\{x \mid x\neq 0, x\in R\}$

$(f-g)(x)=\frac{x^2-12}{4x}$ المجال: $\{x \mid x\neq 0, x\in R\}$

$(f\cdot g)(x)=\frac{3}{4}$ المجال: $\{x \mid x\neq 0, x\in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2}{12}$ المجال: $\{x \mid x\neq 0,\ x\in R\}$

---

(8)

$(f+g)(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+4\sqrt{x}$ المجال: $\{x \mid x>0, x\in R\}$

$(f-g)(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}$ المجال: $\{x \mid x>0, x\in R\}$

$(f\cdot g)(x)=4$ المجال: $\{x \mid x>0, x\in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{4x}$ المجال: $\{x \mid x>0, x\in R\}$

---

(9)

$(f+g)(x)=\sqrt{x+8}+\sqrt{x+5}-3$ المجال: $\{x \mid x\geq -5, x\in R\}$

$(f-g)(x)=\sqrt{x+8}-\sqrt{x+5}+3$ المجال: $\{x \mid x\geq -5, x\in R\}$

$(f\cdot g)(x)=\sqrt{x^2+13x+40}-3\sqrt{x+8}$ المجال: $\{x \mid x\geq -5, x\in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+5}-3}$ المجال: $\{x \mid x\geq -5, x\neq 4\ , x\in R\}$

---

(10)

$(f+g)(x)=\sqrt{x+6}+\sqrt{x-4}$ المجال: $\{x \mid x\geq 4, x\in R\}$

$(f-g)(x)=\sqrt{x+6}-\sqrt{x-4}$ المجال: $\{x \mid x \ge 4, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=\sqrt{x^2+2x-24}$ المجال: $\{x \mid x \ge 4, x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-4}}$ المجال: $\{x \mid x > 4, x \in R\}$

أوجد $[f \circ g](6)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ **في كل مما يأتي:**

(11) $g(x)=4x-8$, $f(x)=2x-3$

$$[f \circ g](x)=8x-19$$
$$[g \circ f](x)=8x-20$$
$$[f \circ g](6)=29$$

---

(12) $g(x)=-5x+11$, $f(x)=-2x^2-5x+1$

$$[f \circ g](x)=-50x^2+145x-101$$
$$[g \circ f](x)=10x^2+25x+1$$
$$[f \circ g](6)=-1031$$

---

(13) $g(x)=x^2+7x+11$, $f(x)=x^2-16$

$$[f \circ g](x)=x^4+14x^3+71x^2+154x$$
$$[g \circ f](x)=x^4-25x^2+155$$
$$[f \circ g](6)=7905$$

---

(14) $g(x)=-x^2$, $f(x)=2+x^4$

$[f \circ g](x) = 8x^8 + 2$

$[g \circ f](x) = -x^8 - 4x^4 - 4$

$[f \circ g](6) = 1679618$

حدد مجال $f \circ g$، ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية:

(15)

المجال: $\{x \mid x \neq \pm\sqrt{3},\ x \in R\}$

$$[f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 3}$$

---

(16)

المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$$[f \circ g](x) = \frac{2}{x^2 + 3}$$

---

(17)

المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$$[f \circ g](x) = x$$

---

(18)

المجال: $\{x \mid x < 6,\ x \in R\}$

$$[f \circ g](x) = \frac{5}{\sqrt{6 - x}}$$

---

(19)

المجال: $\{x \mid x > -8,\ x \in R\}$

$$[f \circ g](x) = \frac{-4}{\sqrt{x+8}}$$

---

(20)

المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$$[f \circ g](x) = x + 2$$

---

(21) <u>النظرية النسبية:</u>

a) $\{v \mid 0 \le v < c\ ,\ v \in R\}$

لا يمكن أن تكون سرعة الجسم مساوية لسرعة الضوء. ولا تكون v أكبر من c لأنك ستحصل على عدد سالب تحت الجزر التربيعي وهذة كمية غير معرفة ولا يمكن أن تكون السرعة أقل من الصفر لأنها لا يمكن أن تكون سالبة.

---

b)

$$m(10) = 100\ kg$$

$$m(10000) = 100.0000001\ kg$$

$$m(1000000) = 100.0005556\ kg$$

---

c) عندما تقترب v من c من اليسار تزاد قيمة v و عندما تزداد قيمة v يكو ن $m(v)$ تقترب من ∞

---

d)

$$m(v) = f(g(v))$$

$$f(v) = \frac{100}{\sqrt{1-v^2}}\ ,\ g(v) = \frac{v}{c}$$

أوجد دالتين f ، g لكل مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ على ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$.

(22) $h(x)=\sqrt{4x+2}+7$

$f(x)=\sqrt{x}+7$

$g(x)=4x+2$

---

(23) $h(x)=\dfrac{6}{x+5}-8$

$f(x)=\dfrac{6}{x}-8$

$g(x)=x+5$

---

(24) $h(x)=|4x+8|-9$

$f(x)=|x|-9$

$g(x)=4x+8$

(25) $h(x)=\llbracket -3(x-9)\rrbracket$

$f(x)=\llbracket -3x\rrbracket$

$g(x)=x-9$

---

(26) $h(x)=\sqrt{\dfrac{5-x}{x+2}}$

$f(x)=\sqrt{x}$

$g(x)=\dfrac{5-x}{x+2}$

(27) $h(x)=\left(\sqrt{x}+4\right)^3$

$$f(x) = x^3$$
$$g(x) = \sqrt{x} + 4$$

---

(28) $h(x) = \dfrac{8}{(x-5)^2}$

$$f(x) = \frac{8}{x^2}$$
$$g(x) = x - 5$$

---

(29) $h(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}}{x-2}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x-6}$$
$$g(x) = x + 4$$

---

(30) **ميكانيكا الكم:**

a) $f(\nu) = \dfrac{h}{25\nu}$

b) قيمة ν ليست صفر. وإذا كانت تساوي صفر فلا وجود لطول الموجة.

c) $\lambda = \dfrac{h}{200}$

d)

$$f(\nu) = a[b(\nu)] = \frac{h}{25\nu}$$
$$a(\nu) = \frac{h}{\nu}$$

---

(31) **وظائف:**

$a)$ $h[f(x)]$ وتحسب العمولة بعد طرح الحد الأدنى المطلوب من المبيعات الفعلية.

$b)$ حوالي 6000 ريـــــــــــال

أوجد دالتين f ، g لكل مما يأتي بحيث يكون $h(x)=[f\circ g](x)$ على ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x)=x$.

(32)

$$f(x)=\sqrt{x}$$
$$g(x)=x^3-4$$

(33)

$$f(x)=x-\frac{4}{x^2+1}$$
$$g(x)=\sqrt{x-1}$$

(34)

$$f(x)=\frac{x-4}{2x-9}+\sqrt{\frac{4}{x-4}}$$
$$g(x)=x+4$$

أوجد $f(x+1)$, $f(-6)$, $f(0.5)$ في كل مما يأتي مقرباً الناتج لأقرب جزء من عشرة.

(35)

$$f(0.5) = -0.75$$
$$f(-6) = 22$$
$$f(x+1) = x^2 + 4x + 1$$

---

(36)

$$f(0.5) = 8.7$$
$$f(-6) = 11.6$$
$$f(x+1) = \frac{2}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x+1} - 2x - \frac{7}{3}$$

---

(37)

$$f(0.5) = 8.7$$
$$f(-6) = 11.6$$
$$f(x+1) = \sqrt{-x} + 18x^2 + 36x + 11$$

أوجد $[f \circ g \circ h](x)$ لكل مما يأتي:

(38)

$$[f \circ g \circ h](x) = x + 6\sqrt{x} + 11$$

(39)

$$[f \circ g \circ h](x) = \sqrt{\frac{1}{x^2}} + 2$$

(40)

(a $g(x) = x^2 + 4$

(b $g(x) = 4x + 8$

(41)

(a $g(x) = 9x^2$

(b $g(x) = 50x^2 + 25$

(42)

(a $g(x) = \frac{1}{4x}$

(b $g(x) = \sqrt{x}$

<u>باستعمال منحنى الدالتين $f(x)\ ,\ g(x)$ الممثلين في الشكل أدناه، أوجد:</u>

(43)

$$(f + g)(2) = 2 + (-1) = 1$$

(44)

$$(f - g)(-6) = 4 - (-5) = 9$$

(45)

$$(f \cdot g)(4) = 0$$

(46)

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-2)=\frac{4}{3}$$

(47)

$$(f\circ g)(-4)=f(-4)=0$$

(48)

$$(g\circ f)(6)=g(-2)=-3$$

(49) **كيمياء:**

a) $\{m \mid m>0\ ,\ m\in R\}$ لا يمكن أن تكون كتلة جسم ما سالبة أو تساوي الصفر.

b) $7.22\ m/s$ تقريباً

c) تتناقص سرعتها.

d) $v(m)=(f\circ g)(m)$

$$f(m)=\sqrt{m}$$

$$g(m)=\frac{(24.9435)(303)}{m}$$

أوجد ثلاث دوال $f\ ,\ g\ ,\ h$ بحيث يكون $a(x)=[f\circ g\circ h](x)$ في كل مما يأتي:

(50)

$$f(x)=x^2$$

$$g(x)=\sqrt{x}+4$$

$$h(x)=x-7$$

(51)

$f(x)=\sqrt{x}$
$g(x)=x^2+8$
$h(x)=x-5$

---

(52)

$f(x)=\frac{3}{x}$
$g(x)=x^2+4$
$h(x)=x-3$

---

(53)

$f(x)=\frac{4}{x+1}$
$g(x)=x^2$
$h(x)=\sqrt{x}+3$

أوجد $[g\circ f](x)$ ، $[f\circ g](x)$ في كل مما يأتي وحدد أي قيود على مجال دالة التركيب في كل حالة:

(54)

$[f\circ g](x)=x$ ، مجـــــــالها $\{x|x\geq -4, x\in R\}$
$[g\circ f](x)=x-3$ ، مجـــــــالها $\{x|x\geq -4, x\in R\}$

(55)

$\{x \mid x \geq -6, x \in R\}$ مجـــــــــالها ، $[f \circ g](x) = \sqrt{\sqrt{16+x^2}+6}$

$\{x \mid x \geq -6, x \in R\}$ مجـــــــــالها ، $[g \circ f](x) = \sqrt{x+22}$

(56)

$\{x \mid x \geq -4, x \in R\}$ مجـــــــــالها ، $[f \circ g](x) = \sqrt[4]{9-x^2}$

$\{x \mid 0 \leq x \leq 9, x \in R\}$ مجـــــــــالها ، $[g \circ f](x) = \sqrt{9-x^2}$

---

(57)

$\left\{x \middle| x \neq 4, x \neq -\frac{1}{2}, x \neq 12, x \in R\right\}$ مجـــــــــالها ، $[f \circ g](x) = \frac{6x-24}{x-12}$

$\left\{x \middle| x \neq 4, x \neq -\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{4}, x \in R\right\}$ مجـــــــــالها ، $[g \circ f](x) = \frac{4x+2}{4x-1}$

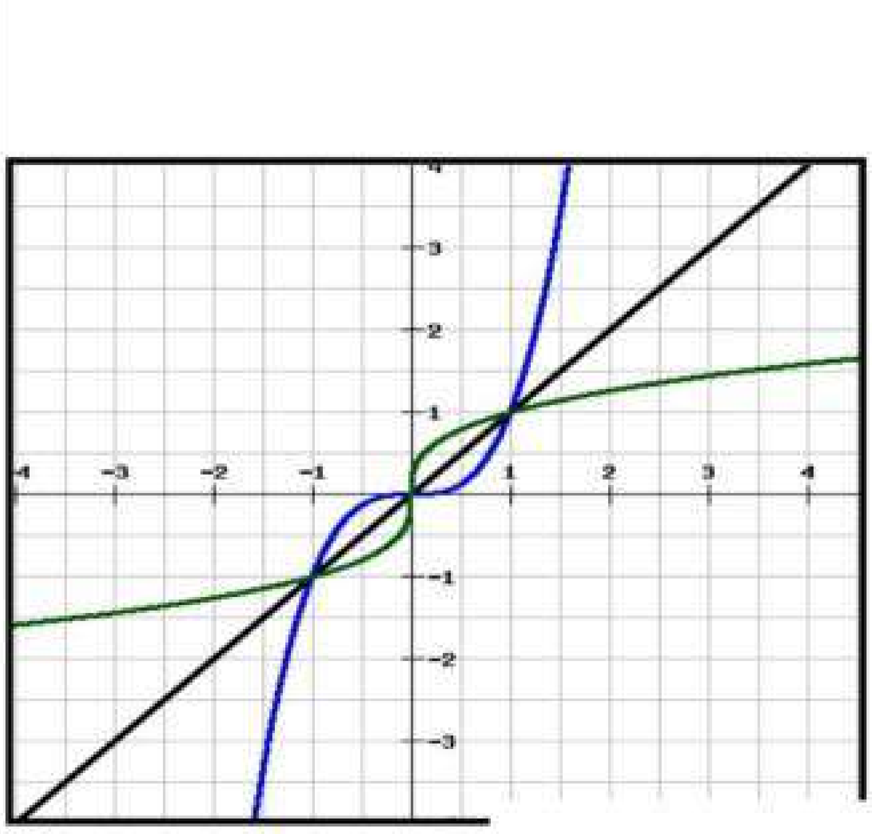
---

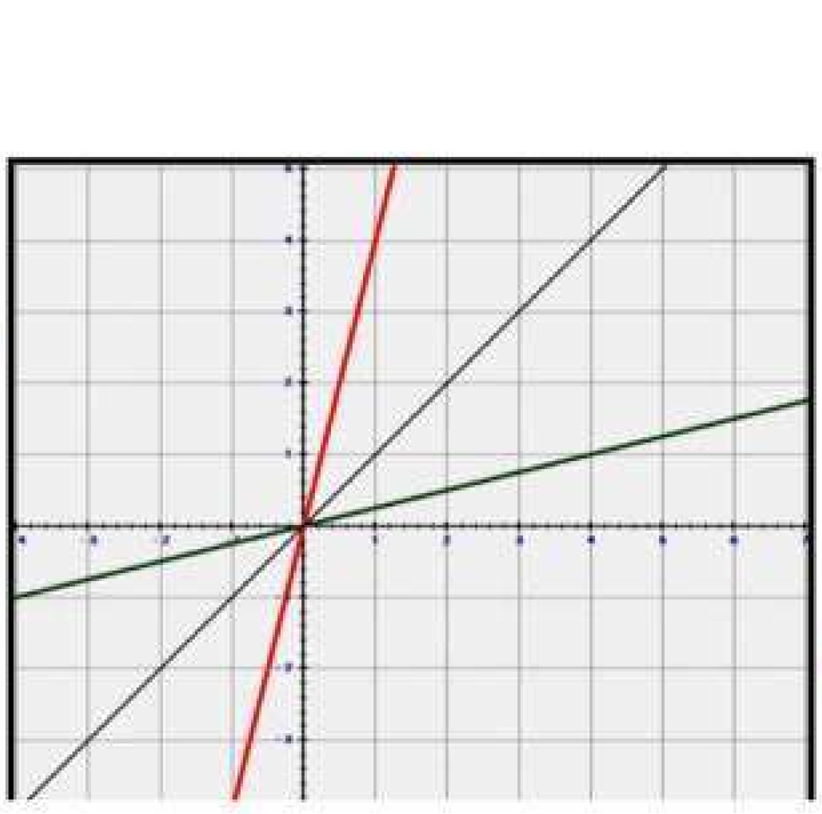
(58) تمثيلات متعددة:

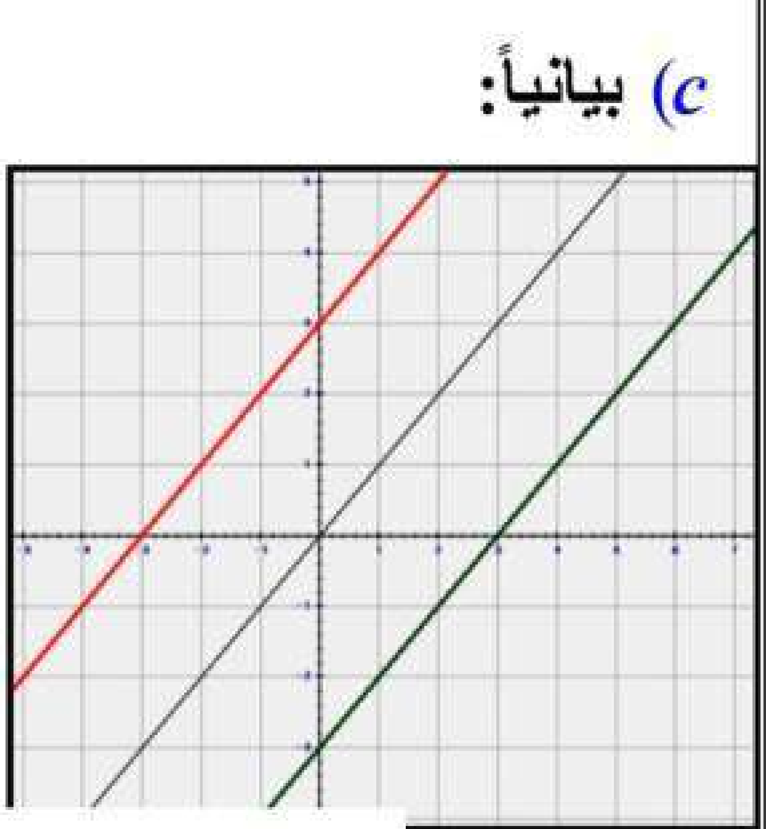
a) جبرياً: لكل دالة $[f \circ g](x) = x$

b) لفظياً: لكل زوج من الدوال تختصر الأعداد بعضها مع بعض على ألا يكون للتركيب أية معاملات غير الواحد، ولا يبقى ثوابت.

c) بيانياً:







d) لفظياً: محور الإنعكاس بين كل زوج من الدوال هو المستقيم $y = x$

e)تحليلياً: يكافئ كل من التركيبين $[f \circ g](x)$ و $[g \circ f](x)$الدالة المحايدة.

f) تحليلياً:

$(a)\ g(x) = x + 6$

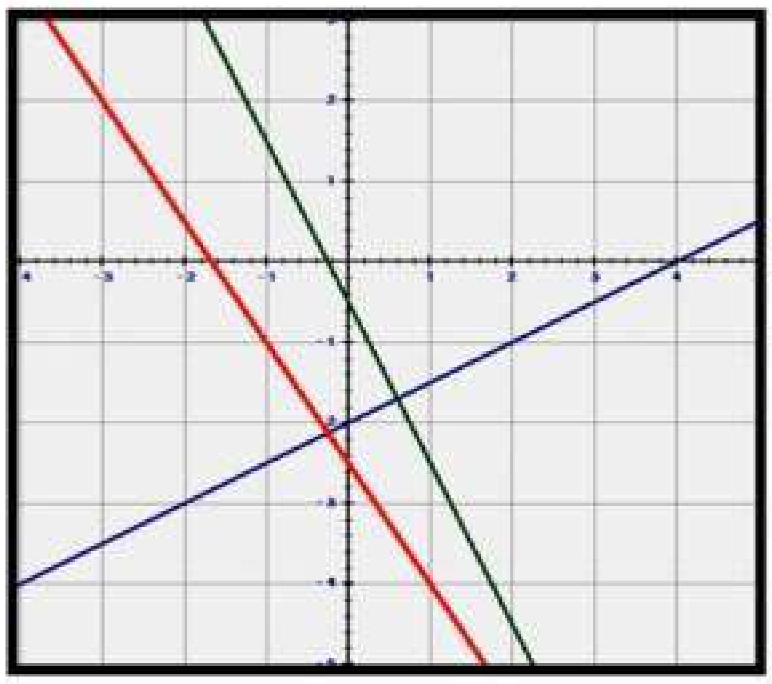
$(b)\ g(x) = 5x$

$(c)\ g(x) = \sqrt[4]{x}$

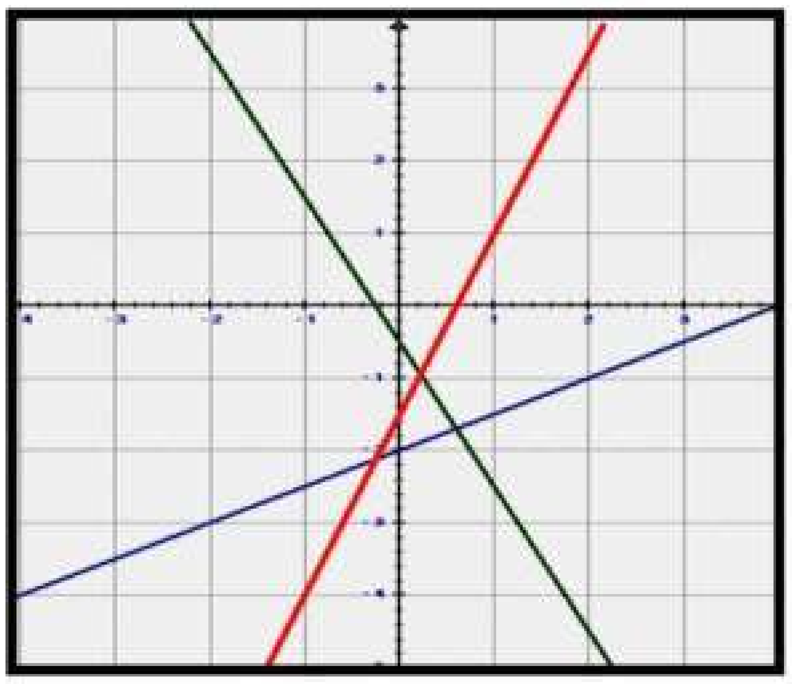
$(d)\ g(x) = \dfrac{x+3}{2}$

<u>**مثل كلاً من الدوال الآتية بيانياً بإستعمال الشكل المجاور:**</u>

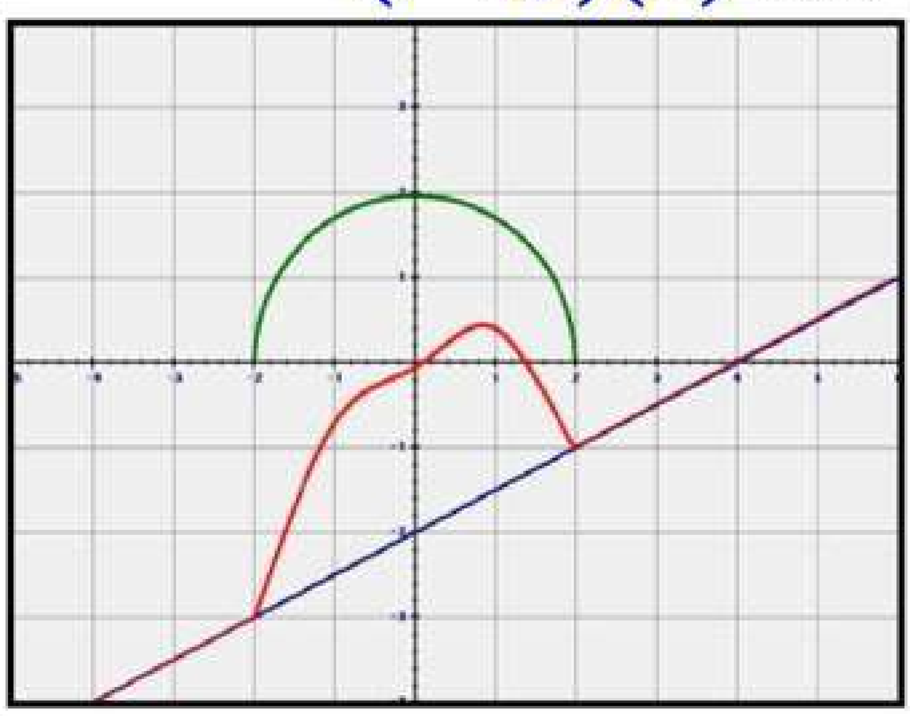
(59 $(f + h)(x)$



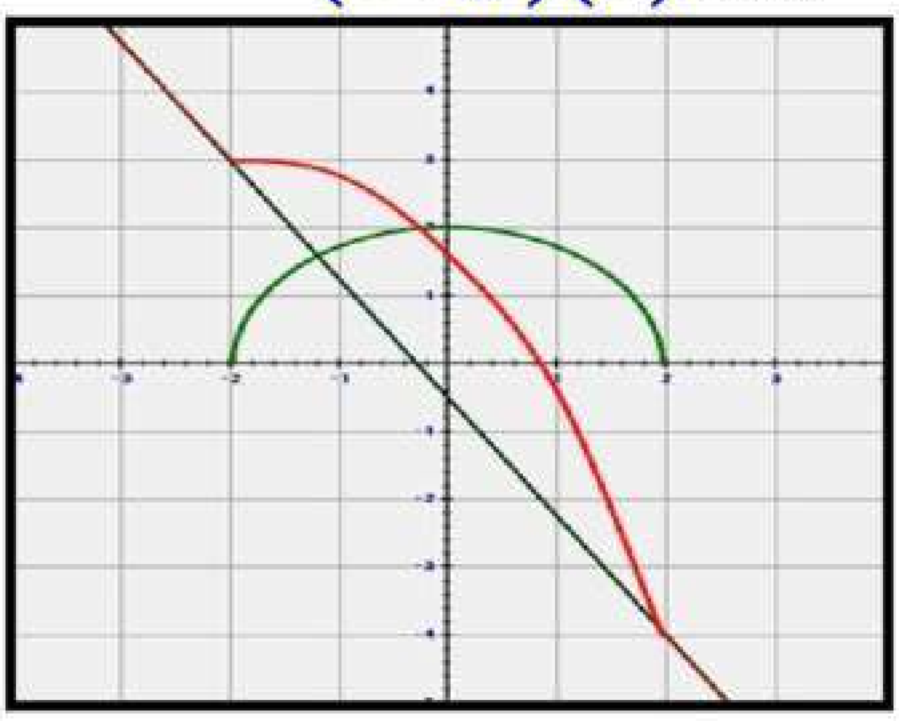
(60 $(f - h)(x)$



(61 $(f + g)(x)$



(62 $(h + g)(x)$



حدد مجال كل من دالتي التركيب الآتيتين، بإستعمال الشكل الآتي:

(63) $\{x \mid -10 \le x \le -4 \ R \ 2 \le \quad \le 8 , \quad \in x\}$ = $[-10,-4] \cup [2,8]$

(64) $\{x \mid -4 \le x \le 10 \quad , x \in R\}$

مسائل مهارات التفكير العليا:

تبرير:

(65) دالة فردية

(66) دالة فردية

(67) دالة زوجية

(68) دالة زوجية

تحد:

(69) $f(x) = \sqrt{x}$

(70) $f(x) = \frac{x}{2}$

(71) $f(x) = \frac{1}{x}$

(72) $f(x) = |x|$

(73) **تبرير:**

غير صحيحة فهي ليست دائما دالة خطية

إذا كانت $g(x) = x^2 + x + 1$ ، $f(x) = \sqrt{x}$

، $[f \circ g](x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ وهذة ليست دالة خطية.

(74) <u>أكتب</u>:
مجالها $\{x | x \neq 3 , x \in R\}$ بإيجاد النقاط التي تكون عندها الدالة غير متصلة وندرس إتصالها عند أصفار الدالتين ويمكن معرفة النقاط التي يكون عندها الدالة تقترب من ∞.

مراجعة تراكمية:

أوجد القيم القصوي المحلية والمطلقة لكل من الدوال الآتية مقربة لأقرب جزء من مائة، ثم حدد قيم x التي تقع عندها هذة القيم:

(75) $(0 , 4)$ قيمة عظمى محلية، $(3 , 1)$ قيمة صغري محلية.

---

(76) $(1.29 , 1.3)$ قيمة عظمى محلية، $(-1.29 , -7.3)$ قيمة صغري محلية.

---

(77) $(-0.75 , -2.11)$ قيمة عظمى مطلقة.

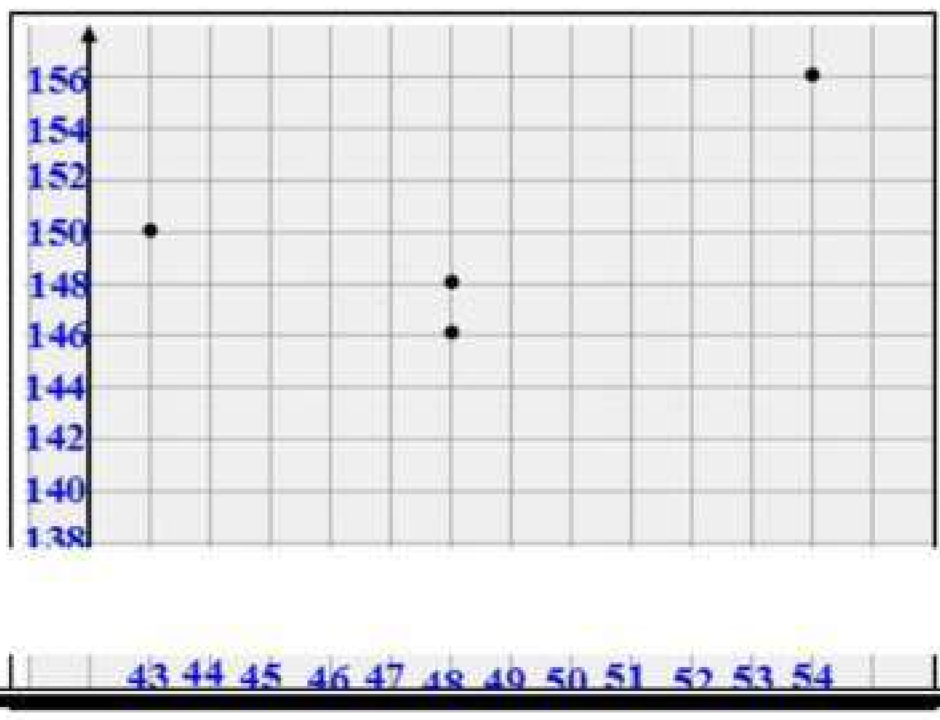
حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة:

(78) للدالة صفر في الفترة $(1 , 2)$ عند $x = 1.73$ وكذلك في الفترة $(-2 , -1)$ عند $x = -1.73$

---

(79) للدالة صفر في الفترة $(2 , 3)$ عند $x = 2.41$ وكذلك في الفترة $(-1 , 0)$ عند $x = -0.41$

(80)
(a



b) المجال: $\{43,48,54\}$

المدى: $\{137,146,148,150,156\}$

c) لا تمثل العلاقة دالة؛ لأن القيمتان 48 , 54 من المجال ترتبطان كل منهما بقيمتين من المدى.

تدرب على الإختبار

(81) B) $2x^4+36x^3+226x^2+576x+512$

(82) B) 3

(1-7) العلاقات والدوال العكسية

(1)

(1A) نعم

(1B) لا

---

(2)

(2A)

$$y = -16 + x^3$$

$$x = -16 + y^3$$

$$y^3 = x + 16$$

$$y = \sqrt[3]{x+16}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+16}$$

(2B)

$$y=\frac{x+7}{x}$$

$$x=\frac{y+7}{y}$$

$$xy=y+7$$

$$xy-y=7$$

$$y(x-1)=7$$

$$y=\frac{7}{x-1}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{7}{x-1} \quad , x\neq 1$$

(2C) غير موجودة

(3) اثبت جبرياً أن كلاً من الدالتين g , f تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

(3A)

$$f(g(x))=18-3\left(6-\frac{x}{3}\right)$$

$$=18-18+x$$

$$=x$$

$$g(f(x))=6-\frac{18-3x}{3}$$

$$=6-6+x$$

$$=x$$

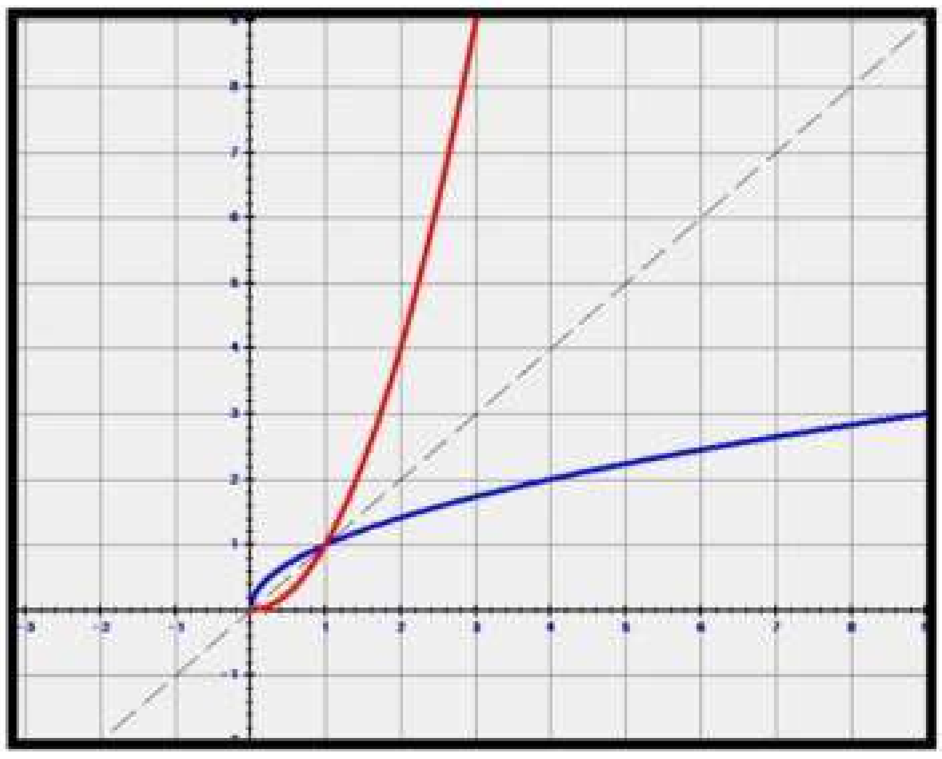
(3B)

$$f(g(x)) = \left(\sqrt{x-10}\right)^2 + 10$$
$$= x - 10 + 10$$
$$= x$$
$$g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 10 - 10}$$
$$= \sqrt{x^2}$$
$$= x$$

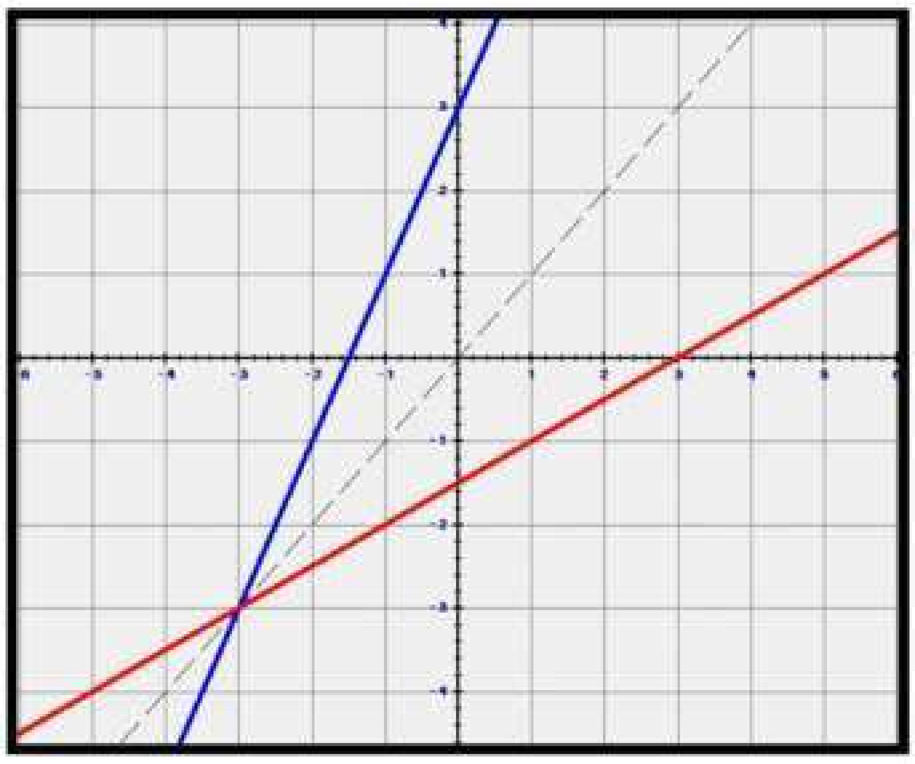
---

(4) استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانياً:

$(4B)$



$(4A)$



(5) توفير:

$(5A)$ يحقق منحنى الدالة إختبار الخط الأفقي، لذا فإن الدالة العكسية للدالة $f(x)$ موجودة

$$y = 0.2(0.65x - 1800)$$
$$x = 0.2(0.65y - 1800)$$
$$x = 0.13y - 360$$
$$y = \frac{x + 360}{0.13}$$
$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x + 360}{0.13}$$

$(5B)$ في الدالة العكسية تمثل x مقدار التوفير الشهري وتمثل $f^{-1}(x)$ الراتب الشهري.

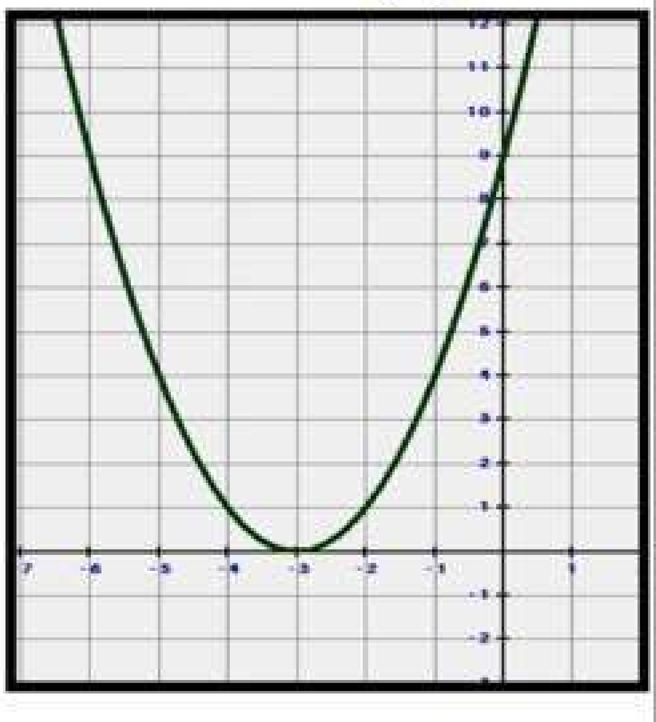
$(5C)$ $x \geq 2769.23$

$(5D)$ 6615.38 ريـــــــــال تقريباً.

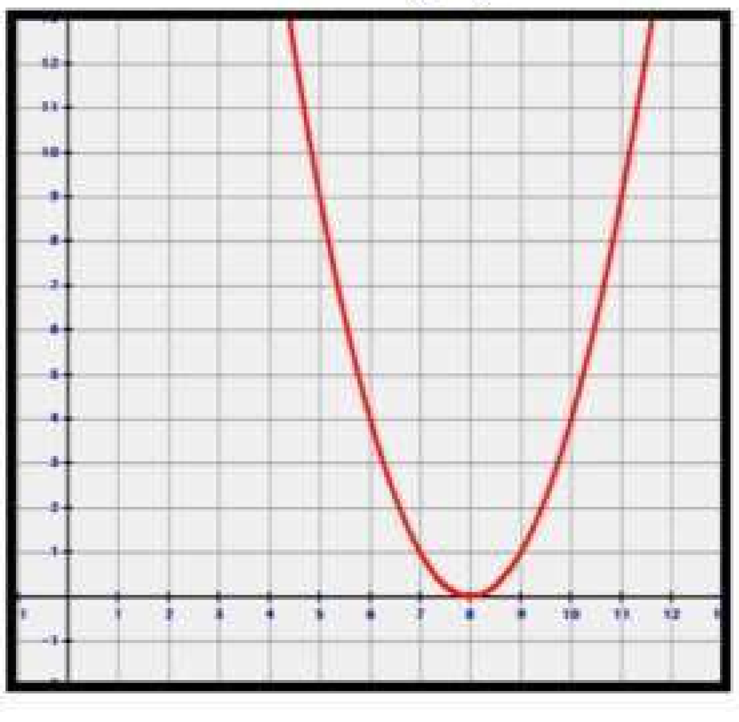
تدرب وحل المسائل:

مثل كل من الدوال الآتية بيانياً باستخدام الحاسبة البيانية، ثم طبق إختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا:

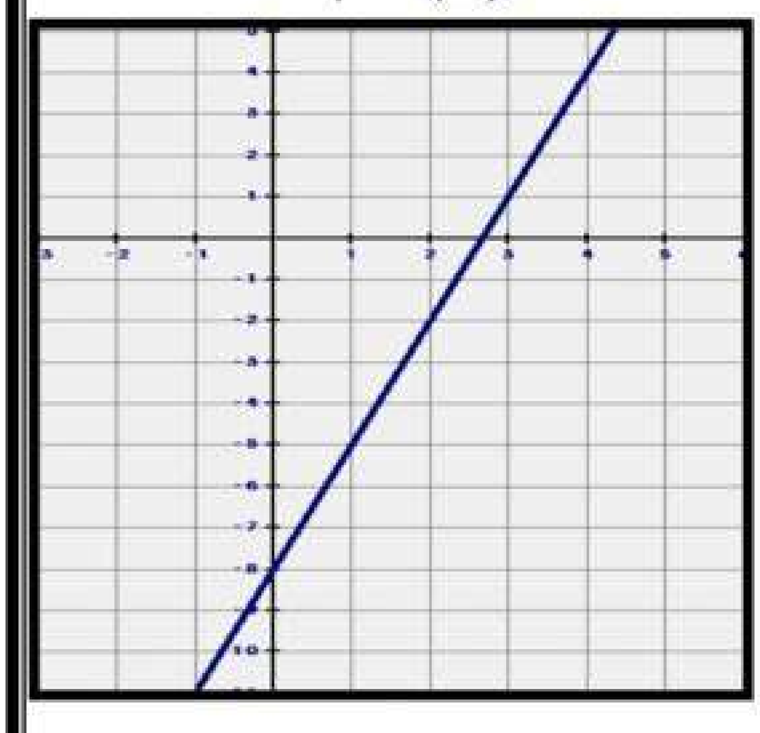
(1) لا



(2) لا



(3) نعم

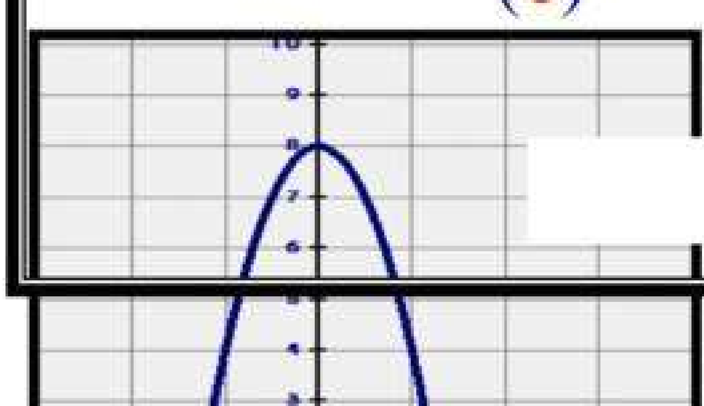


---

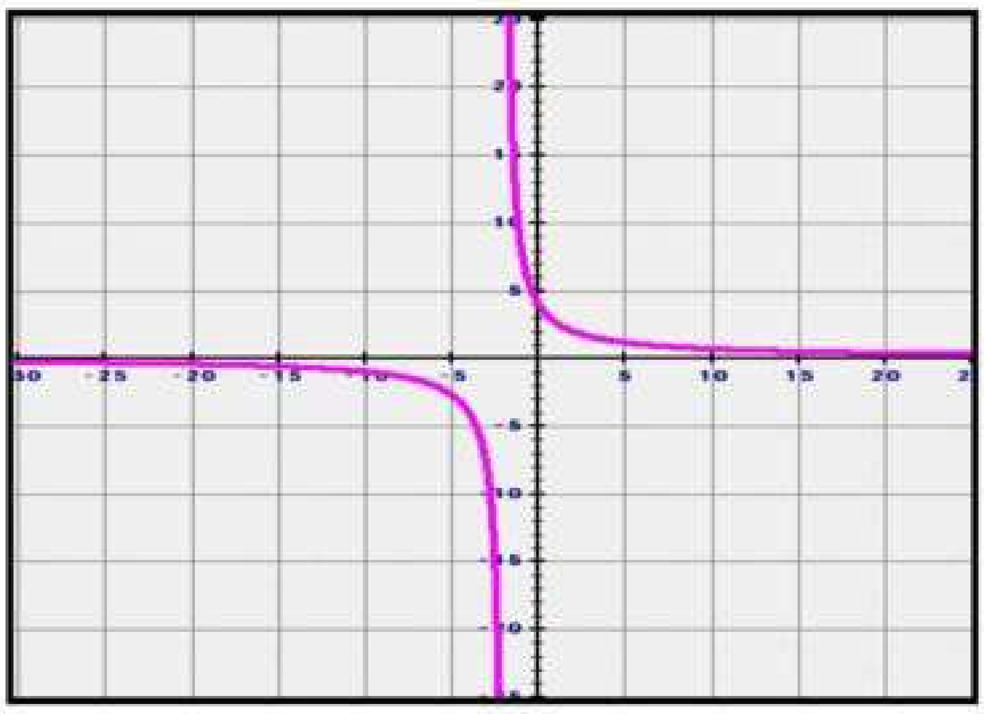
(4) لا

(5) نعم

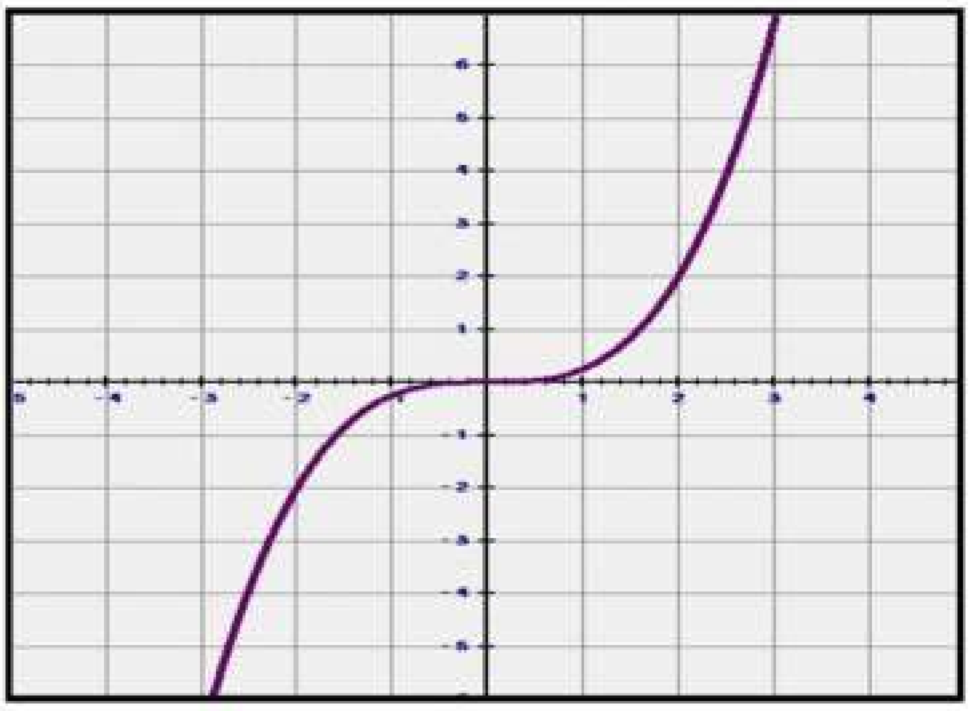
(6) لا



(7) نعم



(8) نعم



أوجد الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ في كل مما يأتي إن أمكن، وحدد مجالها والقيود التي علية، وإذا لم يكن ممكناً فاكتب غير موجودة.

(9) غير موجودة

(10) غير موجودة

(11) $f^{-1}(x) = x^2 - 8 \ , \ x \geq 0$

(12) غير موجودة

(13) غير موجودة

(14) $g^{-1}(x) = \dfrac{6}{1-x} \ , \ x \neq 1$

(15) $f^{-1}(x) = 8 - \dfrac{36}{x^2} \ , \ x > 0$

(16) $g^{-1}(x) = -3 + \dfrac{49}{x^2} \ , \ x > 0$

(17) $h^{-1}(x) = \dfrac{5x+4}{3x-1} \quad , \quad x \neq \dfrac{1}{3}$

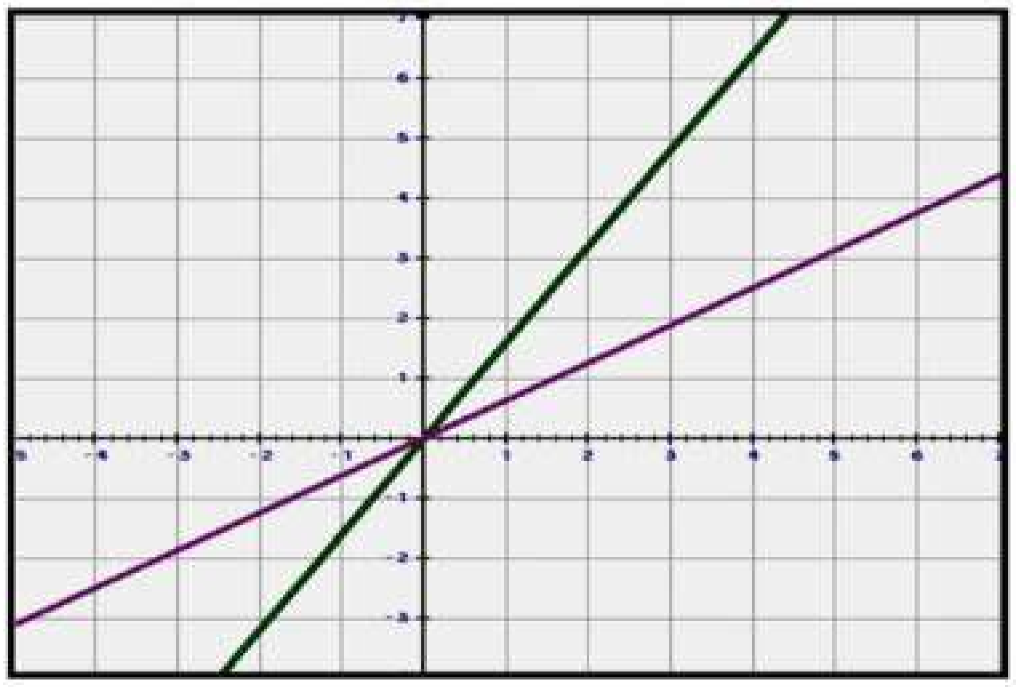
(18) غير موجودة

---

(19) سرعة:

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1.6}$ حيث $f^{-1}(x)$ السرعة بالميل لكل ساعة، (x) سرعة الجسم بالكيلومتر لكل ساعة.

b)



اثبت أن كلاًمن الدالتين f , g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

(20)

$$f\left(g\left(x\right)\right) = 4\left(\frac{x-9}{4}\right)+9$$
$$= x-9+9$$
$$= x$$
$$g\left(f\left(x\right)\right) = \frac{4x+9-9}{4}$$
$$= \frac{4x}{4}$$
$$= x$$

(21)

$$f\left(g(x)\right) = -3\left(\sqrt{\frac{5-x}{3}}\right)^2 + 5$$

$$= -3\left(\frac{5-x}{3}\right) + 5$$

$$= -5 + x + 5 = x$$

$$g\left(f(x)\right) = \sqrt{\frac{5+3x^2-5}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{3x^2}{3}}$$

$$= \sqrt{x^2} = x$$

---

(22)

$$f\left(g(x)\right) = \frac{\left(\sqrt{4x-32}\right)^2}{4} + 8 = \frac{4x-32}{4} + 8 = x - 8 + 8 = x$$

$$g\left(f(x)\right) = \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4} + 8\right) - 32} = \sqrt{x^2 + 32 - 32} = \sqrt{x^2} = x$$

---

(23)

$$f\left(g\left(x\right)\right)=\left(x^{\frac{2}{3}}-8+8\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=x$$

$$g\left(f\left(x\right)\right)=\left[\left(x+8\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}-8$$

$$=x+8-8=x$$

---

(24)

$$f\left(g\left(x\right)\right)=2\left(\sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}\right)^{3}-6$$

$$=2\left(\frac{x+6}{2}\right)-6$$

$$=x+6-6=x$$

$$g\left(f\left(x\right)\right)=\sqrt[3]{\frac{2x^{3}-6+6}{2}}$$

$$=\sqrt[3]{x^{3}}=x$$

---

(25)

$$f\left(g\left(x\right)\right)=\frac{\frac{2x+6}{1-x}-6}{\frac{2x+6}{1-x}+2}=\frac{\frac{2x+6-6+6x}{1-x}}{\frac{2x+6+2-2x}{1-x}}$$

$$=\frac{8x}{8}=x$$

$$g\left(f\left(x\right)\right)=\frac{2\left(\frac{x-6}{x+2}\right)+6}{1-\left(\frac{x-6}{x+2}\right)}=\frac{\frac{2x-12+6x+12}{x+2}}{\frac{x+2-x+6}{x+2}}$$

$$=\frac{8x}{8}=x$$

---

(26) **فيزياء:**

(a $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt{\frac{2x}{m}}$ تمثل السرعة بالمتر / ثانية، x هي طاقة الحركة بالجول، m هي كتلة الجسم بالكيلوجرام

(b

$$f\left(f^{-1}\left(x\right)\right)=\tfrac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{2x}{m}}\right)^2$$

$$=\tfrac{1}{2}m\left(\frac{2x}{m}\right)=x$$

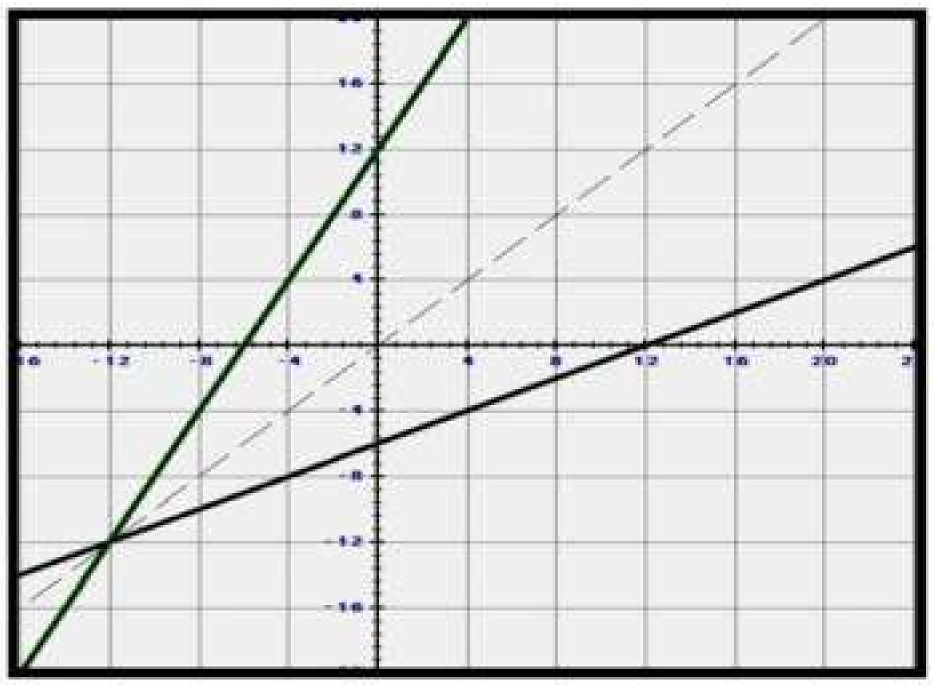
$$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=9\left(\tfrac{1}{2}mx^2\right)=\sqrt{\frac{2\left(0.5mx^2\right)}{m}}$$

$$=\sqrt{x^2}=x$$

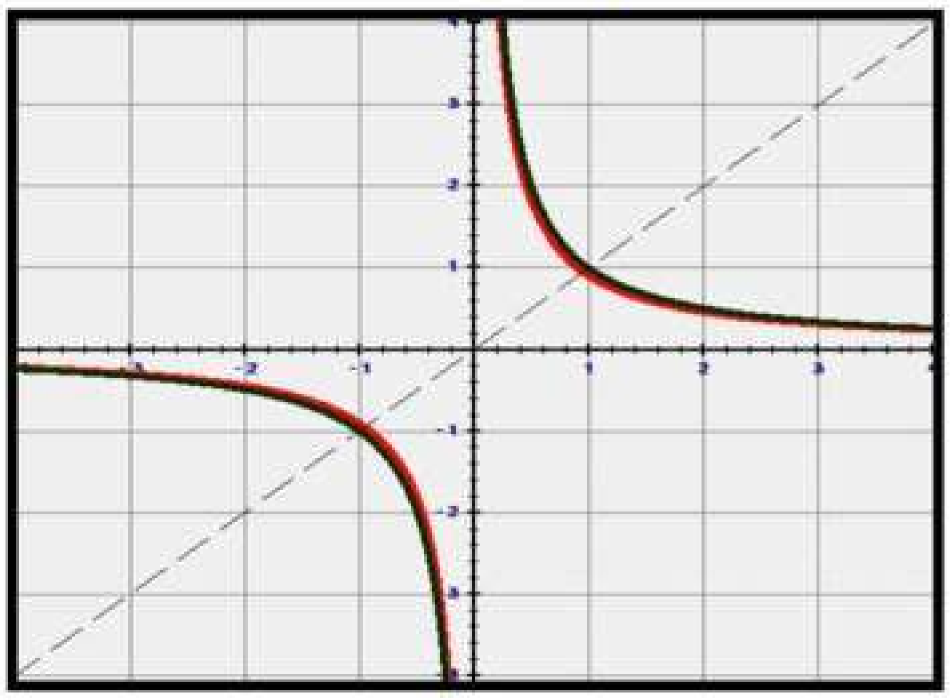
بما أن $f\left(f^{-1}\left(x\right)\right)=f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x$ فإن كل الدالتين عكسية للأخرى.

(c

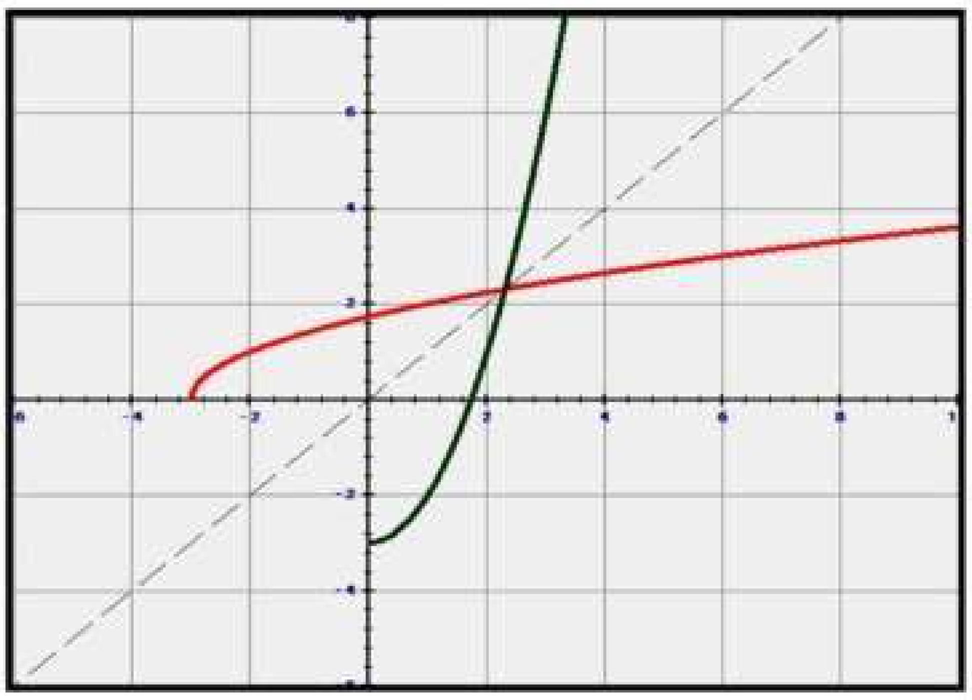
(27)



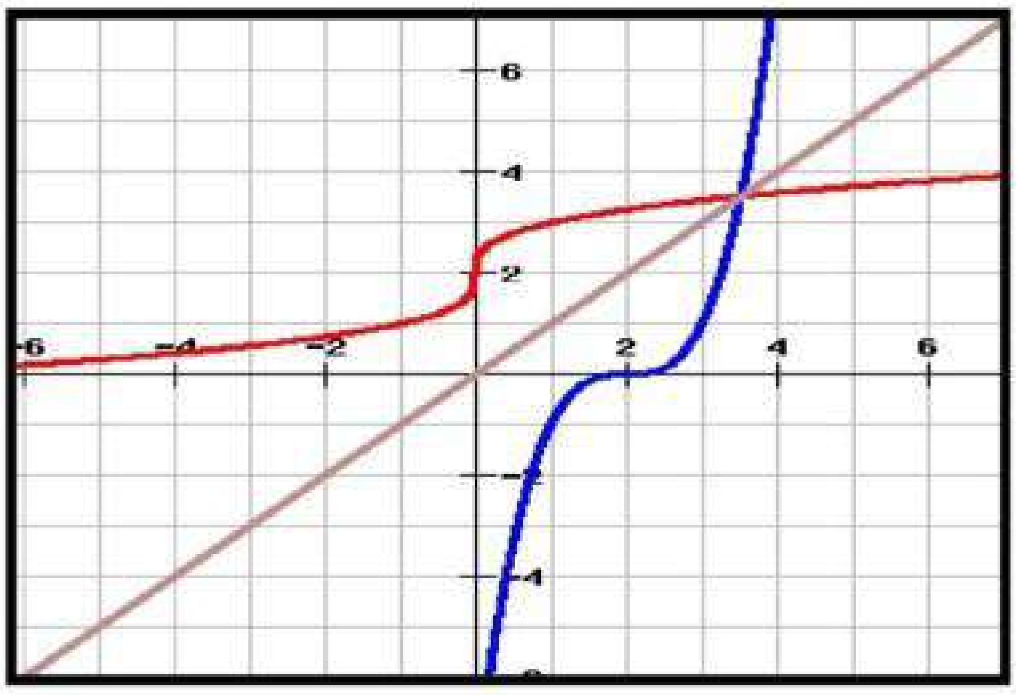
(28)



(29)



(30)



(31) <u>وظائف:</u>

a) تحقق الدالة $f\left(x\right)$ إختبار الخط الأفقى $\left(420 - x\right)20 = \left(x\right)^{-1}f$

$$f^{-1}\left(x\right) = 20\left(x - 420\right)$$

b) تمثل x عمولة فالح خلال إسبوع، أما $f\left(x\right)$ فتمثل مقدار مبيعات فالح.

c) $x \geq 0$، لأنه لايمكن أن تكون المبيعات بالسالب.

d) 6000 ريـــــــــــال

حدد إذا كانت الدالة العكسية موجودة في كل مما يأتي أم لا:

(32) غيـــــــــر موجودة

(33) موجودة

(34) غيـــــــــر موجودة

(35) موجودة

كون جدولاً للدالة $f^{-1}\left(x\right)$ في كل مما يأتي إذا كانت موجودة، إذا كم تكن موجودة فاذكر السبب.

(36) $f^{-1}\left(x\right)$ موجودة

x	-4	0	3	5	9	13
$f\left(x\right)$	-6	-4	-1	3	6	10

---

(37)

$f^{-1}\left(x\right)$ غير موجودة لأن عند عمل إختبار الخط الافقي فإنه يقطع المنحى في أكثر من نقطة

---

(38) درجات الحرارة:

a) $f^{-1}\left(x\right) = \frac{5}{9}\left(x - 32\right)$ وتمثل المعادلة المستعملة للتحويل من درجات فهرنهايت إلى سيلزيوس

---

b)

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=\tfrac{9}{5}\left(\tfrac{5}{9}(x-32)\right)+32$$
$$=x-32+32=x$$
$$f^{-1}\left(f(x)\right)=\tfrac{5}{9}\left(\tfrac{9}{5}x+32-32\right)$$
$$=\tfrac{5}{9}\left(\tfrac{9}{5}x\right)=x$$

c) $(k\circ f)(x)=x+273.15$ وتستعمل للتحويل من درجة الحرارة السليزية إلى درجة الحرارة المطلقة.

---

d) 333.15 درجة مطلقة تقريباً

ضع قيوداً على مجال كل دالة من الدوال الآتية حتى تصبح دالة متباينة، ثم أوجد الدالة العكسية.

(39) $f^{-1}(x)=\sqrt{x}+5\ ,\ x\geq 5$

(40) $f^{-1}(x)=x-11\ ,\ x\leq -9$

(41) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+6}\ ,\ x\geq 0$

(42) $f^{-1}(x)=x-1\ ,\ x\geq -5$

---

(43) أزهـــــار:

a) $f(x)=5x+3(75-x)$ حيث x تمثل عدد أزهار الجوزي

b) $f^{-1}(x)=0.5x-112.5$

c) مجال $f^{-1}(x)=0.5x-112.5$ ، $\{x\,|\,1225\leq x\leq 375\ ,\ x\in R\}$

مجال $f(x)=5x+3(75-x)$ ، $\{x\,|\,10\leq x\leq 75\ ,\ x\in R\}$

d) عدد زهرات القرنفل = 35 زهرة.

إذا كانت الدالة $f^{-1}(x)$ موجودة، فأكتب المجال وللمدى لكل من f ، f^{-1}

(44)

مجال $f(x) = \{x \mid x \geq 6 , x \in R\}$

مدى $f(x) = \{y \mid y \geq 0 , y \in R\}$

مجال $f^{-1}(x) = \{x \mid x \geq 0 , x \in R\}$

مدى $f^{-1}(x) = \{y \mid y \geq 6 , y \in R\}$

---

(45)

$f^{-1}(x)$ غيـــــــــر موجودة

---

(46)

مجال $f(x) = \{x \mid x \neq 4 , x \in R\}$

مدى $f(x) = \{y \mid y \neq 3 , y \in R\}$

مجال $f^{-1}(x) = \{x \mid x \neq 3 , x \in R\}$

مدى $f^{-1}(x) = \{y \mid y \neq 4 , y \in R\}$

---

(47)

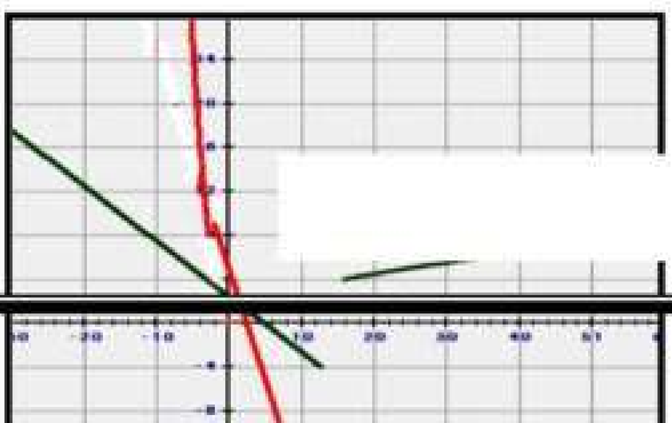
مجال $f(x) = \{x \mid x \neq 3 , x \in R\}$

مدى $f(x) = \{y \mid y \neq 4 , y \in R\}$

مجال $f^{-1}(x) = \{x \mid x \neq 4 , x \in R\}$

مدى $f^{-1}(x) = \{y \mid y \neq 3 , y \in R\}$

أوجد الدالة العكسية في كل مما يأتي، إن أمكن، ثم مثل في مستوى إحداثي واحد، وأذكر أية قيود على المجال:



(48) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , 16 \le x \\ 2.5 - \dfrac{x}{2} & , 13 > x \end{cases}$

---

(49) غيـــــــر موجودة

---

(50) إتصالات:

a) $r(x) = x - 50$

b) $d(x) = 0.9x$

c) $T(x) = 0.9x - 50$

d) $T^{-1}(x) = \dfrac{x+50}{0.9}$ ، وتمثل الدالة العكسية السعر الأصلي للجهاز كدالة في سعر الجهاز بعد الخصم وإجراء التخفيض.

e) 900 ريـــــــــــــــال.

إذا كانت $g(x) = 2x + 6$ ، $f(x) = 8x - 4$ فأوجد:

(51) $\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(x)$

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(x) = \frac{x+2}{16}$$

(52) $\left(g^{-1} \circ f^{-1}\right)(x)$

$$\left(g^{-1} \circ f^{-1}\right)(x) = \frac{x-44}{16}$$

(53) $\left(f \circ g\right)^{-1}(x)$

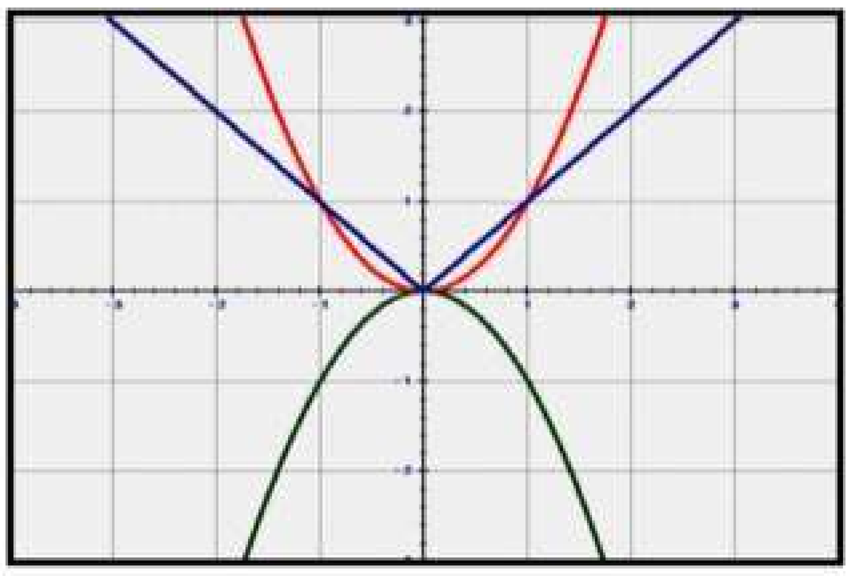
$$\left(f \circ g\right)^{-1}(x) = \frac{x-44}{16}$$

(54) $\left(g \circ f\right)^{-1}(x)$

$$\left(g \circ f\right)^{-1}(x) = \frac{x+2}{16}$$

---

(55) <u>تمثيلات متعددة:</u>



a) لا تحقق هذة الدوال إختبار الخط الأفقي.

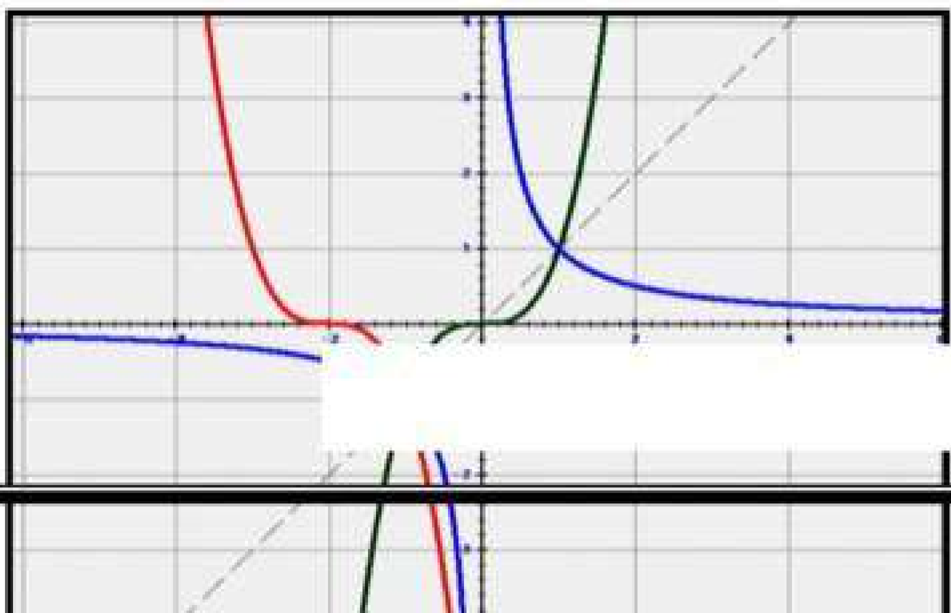
---

b) يمكن التوصيل الي قاعدة تقول أن الدوال الزوجية ليس لها دوال عكسية. حيث إذا كانت الدالة زوجية فإن $f(x)=f(-x)$ وعلية فإن قيمتين من x ترتبطان بقيمة واحدة من y، مما يؤدي إلى ان الدالة لا تحقق اختبار الخط الافقي اي انه لا يوجد للدالة الزوجية دالة عكسية.

---

c) بيانيا:

تحقق هذه الدالة اختبار الخط الافقي.



---

d) **تحليليا:**

يوضح الرسم ان للدوال الثلاث دوال عكسية. ولكن هذا لا ينطبق على كل الدوال الفردية. فمثلا $f(x)=\frac{2}{15}x^3-\frac{47}{15}x$ فردية لان $-f(x)=f(x)$ ومنحنى هذه الدالة لا يحقق الخط الافقي، اي انه لا يوجد دالة عكسية لها.

مسائل مهارات التفكير العليا:

(56) تبرير:

المقطع y للدالة $f^{-1}(x)$ هو $(0,6)$

(57) اكتب:

مجال الدالة التربيعية بحاجة إلى تحديد، بحيث يظهر المنحنى فقط ليكون لها معكوس، وفي هذه الحالة يكون المجال $\left(\frac{-b}{2a},\infty\right)$ أو $\left(-\infty,\frac{-b}{2a}\right)$

---

(58) تبرير:

خطأ، الدوال الثابية خطية لكنها لا تحقق اختبار الخط الافقي لذا، فالدوال الثابتة ليست واحداً لواحد، وعليه لا يوجد لها معكوس.

(59) تحد:

$$f^{-1}(23) = 3$$
$$f(3) = 23$$
$$f(3) = 3^3 - a$$
$$23 = 27 - a$$
$$\therefore a = 4$$

(60)تبرير:

نعم، وواحدة من هذه الدوال هي $f(x) = \frac{1}{x}$. على الرغم من ان كلتا النهايتين تؤول إلى 0 ، الا أنه لا يوجد قيمتان او أكثر من المجال ترتبطان بقيمة واحدة y ، وعليه فالدالة تحقق اختبار الخط الأفقي.

مراجعة تراكمية:

أوجد لكل زوج من الدوال الآتية، $g \circ f$ ، $f \circ g$ ثم أوجد مجال الدالة التركيب:

(61)

$[f \circ g](x) = x^2 + 8x + 7$ المجال $\{x \mid x \in R\}$

$[g \circ f](x) = x^2 - 5$ المجال $\{x \mid x \in R\}$

---

(62)

$[f \circ g](x) = \frac{x}{2} - 4$ المجال $\{x \mid x \in R\}$

$[g \circ f](x) = \frac{x}{2} - 1$ المجال $\{x \mid x \in R\}$

استعمل منحنى الدالة الرئيسية (الام) المعطاة لوصف منحنى كل دالة مرتبطة بها لكل مما يأتي:

(63)

$a)$ توسع افقي.

$b)$ إنسحاب خمس وحدات لليمين ووحدتين للأسفل.

$c)$ توسع رأسي معاملة 3 ، وإنسحاب ست وحدات للأعلى.

---

(64)

$a)$ إنسحاب ثلاث وحدات للأعلى، وإنعكاس حول المحور x ، للجزء من المنحنى الموجود تحت المحور x .

$b)$ إنعكاس حول محور x ، وتضييق أفقي.

$c)$ إنسحاب وحدة واحدة لليسار، وتضييق رأسي.

---

(65)

a) تضييق أفقي.

b) إنسحاب خمس وحدات لليمين.

c) تضييق افقي، وانسحاب اربع وحدات للاسفل، ثم انسحاب إلى اليسار بمقدار $\frac{1}{3}$ وحدة.

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتى فى الفترة المعطاة:

(66) $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=8$

---

(67) $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=-106$

تدرب على اختبار:

(68) $A \leftarrow g(x)=\frac{2x+5}{3}$

D (69) $\leftarrow$ (I و III فقط صحيحان)

الفصل (1) دليل الدراسة والمراجعة:

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يأتى صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل المفردة التى تحتها خط حتى تصبح صحيحة:

(1) صحيحة.
(2) صحيحة.
(3) صحيحة.
(4) صحيحة.
(5) خاطئة، الزوجية.
(6) صحيحة.
(7) صحيحة.
(8) خاطئة، إنعكاس.
(9) صحيحة.
(10) خاطئة، الدالة العكسية.

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x:

(11) دالة.
(12) دالة.
(13) دالة.
(14) ليست دالة.

إذا كانت $f(x) = x^2 - 3x + 4$ أوجد كلاً من القيمتين الآتيتين:

(15) $f(5) = (5)^2 - 3 \times 5 + 4 = 14$

(16) $f(-3x) = 9x^2 + 9x + 4$

أوجد مجال كل دالة من الدوال الآتية:

(17) المجال: $\{x | x \in R\}$

(18) المجال: $\left\{x | x \geq \frac{1}{2}, x \in R\right\}$

(19) المجال: $\{a | a \neq -5, a \in R\}$

(20) المجال: $\{x | x \neq \pm 2, x \in R\}$

استعمل التمثيل البياني لإيجاد مجال كل دالة ومداها في كل مما يأتي:

(21) المجال: $[-8, 8]$

المدى: $[0, 8]$

(22) المجال: $\{x | x \in R\}$

المدى $(-\infty, -3\}$

أوجد المقطع y ، والاصفار لكل دالة مما يأتي:

(23) $\frac{9}{4}$ ، -9

(24) -3.9 ، -27

(25) -4 ، 0.4 ، 0

(26) -1 ، $\sqrt{2}-1$

حدد ما اذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيم x المعطاة وبرر اجابتك بأستعمال اختبار الاتصال واذا كانت الدالة غير متصلة فبين نوع عدم الاتصال.

(27) متصلة عند $x = 4$ ، الدالة معرّفة عند $x = 4$، تؤول الدالة إلى 4 عندما تؤول $x \rightarrow 4$ من الجهتين $f(4) = 4$

(28) غير متصلة عند $x = 10$ والدالة غير معرفة عند $x = 10$، وعدم الاتصال لا نهائي.

$$f(10) = \sqrt{2\times 10 - 4} = \sqrt{16}$$

$$f(10) = 4$$

10.001	10	9.999
4.00		3.999

يبين الجدول أنه عندما تقترب x من 10 من اليسار ومن اليمين فإنها تقترب من 4 وبما أن $f(10) = 4$ إذن الدالة متصلة عند $x = 10$

(29) متصلة عند $x = 0$ ، الدالة معرّفة عند $x = 0$، تؤول الدالة إلى 0 عندما تؤول $x \to 0$ من الجهتين $f(0) = 0$

متصلة عند $x = 7$ ، الدالة معرّفة عند $x = 7$، تؤول الدالة إلى 0.5 عندما تؤول $x \to 7$ من الجهتين $f(7) = 0.5$

(30) غير متصلة عند $x = 2$ والدالة غير معرفة عند $x = 2$، وعدم الاتصال لا نهائي،

الدالة متصلة عند $x = 4$ والدالة معرفة عند $x = 4$، الدالة تؤول إلى $\frac{1}{3}$ عندما تؤول $x \to 4$

من الجهتين $f(4) = \frac{1}{3}$

(31) متصلة عند $x = 1$ ، الدالة معرّفة عند $x = 1$، تؤول الدالة إلى 2 عندما تؤول $x \to 1$

من الجهتين $f(1) = 2$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني:

(32) يوضح التمثبل البياني انه عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to -\infty$ ، وعندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to \infty$

(33) يوضح التمثيل البياني انه عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to 0$ ، وعندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to 0$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الاتيتين لتقدير الفترات إلى اقرب 0.5 وحده التى تكون فيها الدالة متزايدة او متناقصة او ثابتة. ثم قدر إلى اقرب 0.5 وحده القيم القصوى للدالة وبين نوعها.

f (34) متزايدة على $(-\infty, -0.5)$، ومتناقصة على $(-0.5, 5)$، ثم متزايدة على $(0.5, \infty)$ يوجد قيم عظمى محلية عند $(-0.5, 3.5)$، قيمة صغرى محلية عند $(0.5, 2.5)$.

f (35) متناقصة على $(-\infty, -3)$، ومتزايدة على $(-3, -1.5)$، ومتناقصة على $(-1.5, 0.5)$ ومتزايدة على $(0.5, \infty)$، ويوجد قيمة صغري محلية عند $(-3, 3)$ وقيمة عظمى محلية عند $(-1.5, 6)$، وايضا قيمة صغري محلية عند $(0.5, -7)$

أوجد متوسط معدل التغير لكل من الداتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

(36)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$

$$= \frac{-1-1}{2} = -1$$

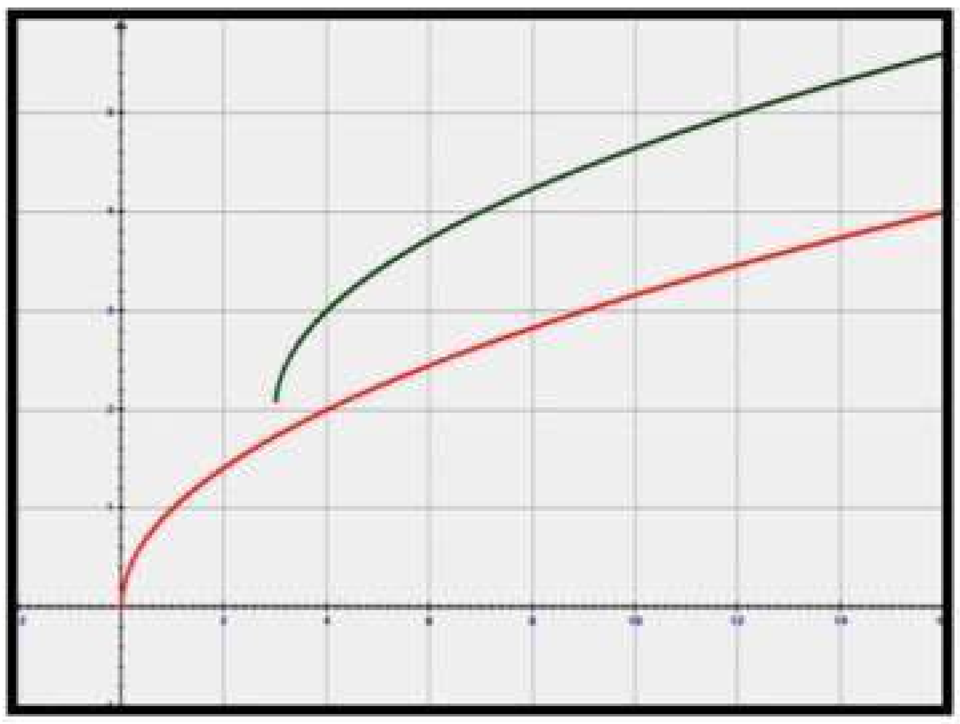
---

(37)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(-5)}{3+5}$$
$$=\frac{20-20}{8}=0$$

أوجد الدالة الرئيسية (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين منحنيي الدالتين، ثم مثلهما في مستوى إحداثي واحد.

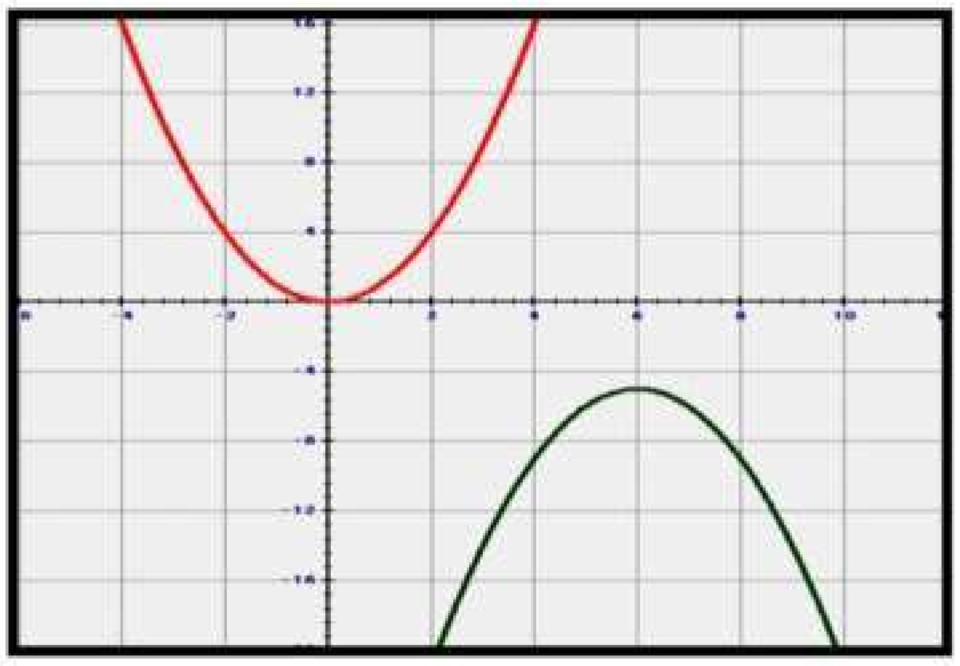
(38) $g(x)=\sqrt{x-3}+2$



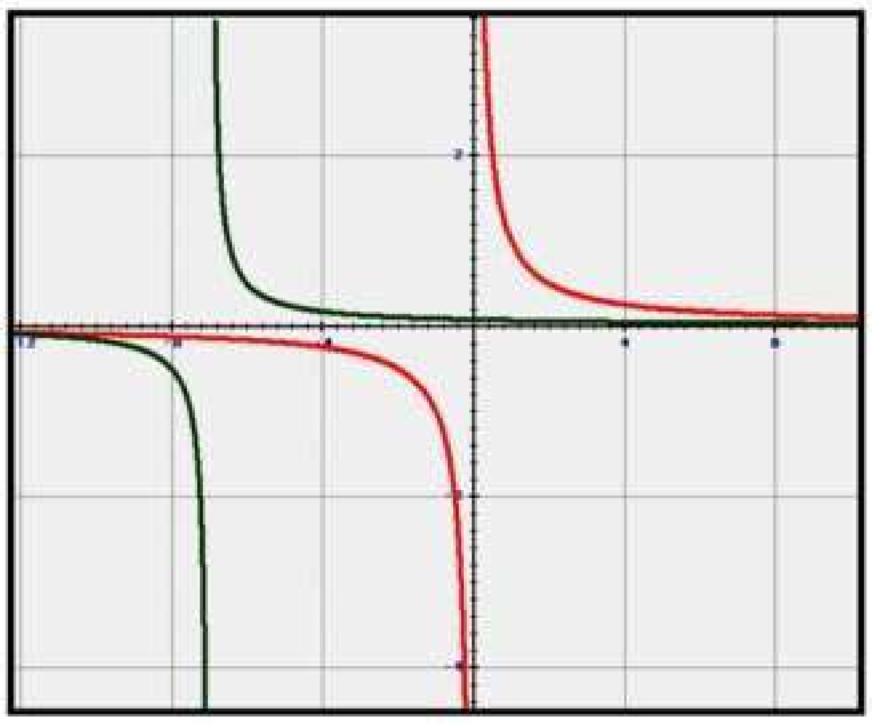
$f(x)=\sqrt{x}$ ، منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ بإنسحاب 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى الأعلى.

---

(39) $g(x)=-(x-6)^2-5$



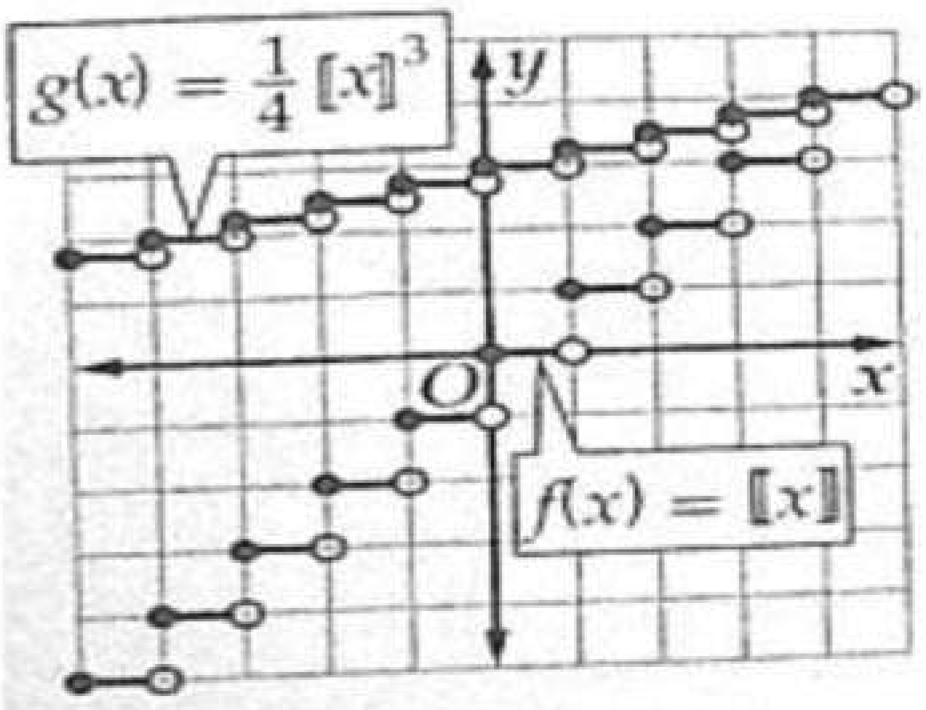
$f(x)=x^2$ ، منحنى $g(x)$ هو صورة منحنى $f(x)$ بالانعكلس في المحور x وإنسحاب 6 وحدات إلى اليمين و5 وحدات إلى الأسفل.



(40) $g(x)=\dfrac{1}{2(x+7)}$

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ بإنسحاب

7 وحدات إلى اليسار وتضيق رأسي بمعامل مقدارة $\dfrac{1}{2}$.



(41) $g(x)=\dfrac{1}{4}[\![x]\!]+3$

$f(x)=[\![x]\!]$ ، منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي

لمنحنى $f(x)$ بمعامل $\dfrac{1}{4}$ وإنسحاب **3** وحدات إلى

الأعلى.

<u>صف العلاقة بين الدالتين $g(x)$ ، $f(x)=\sqrt{x}$ في كل مما يأتي، ثم أكتب معادلة الدالة $g(x)$:</u>

(42)

منحني الدالة $g(x)$ هو منحني الدالة $f(x)$ بإنسحاب مقدارة وحدتان لليسار، $g(x)=\sqrt{x+2}$

---

(43)

منحني الدالة $g(x)$ هو منحني الدالة $f(x)$ بإنعكاس حول المحور x، وإنسحاب مقدارة **4**

وحدات لليمين، وإنسحاب وحدة واحدة إلى أعلى، $g(x)=-\sqrt{x-4}+1$

أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f+g)(x)$ لكل من الدالتين $g(x)$ ، $f(x)$ فيما يأتي. ثم اكتب مجال الدالة الناتجة.

(44)

$(f+g)(x)=2x^2+5x-3$ ، مجـــــــالها $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x)=-2x^2-3x+9$ ، مجـــــــالها $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=2x^3+10x^2+6x-18$ ، مجـــــــالها $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{2(x-1)}$ ، مجـــــــالها $\{x \mid x \neq -3 , 1 \ , x \in R\}$

---

(45)

$(f+g)(x)=4x^2+5x-2$ ، مجـــــــالها $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x)=4x^2-5x$ ، مجـــــــالها $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=20x^3-4x^2-5x+1$ ، مجـــــــالها $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{4x^2-1}{5x-1}$ ، مجـــــــالها $\left\{x \,\middle|\, x \neq \frac{1}{5} \ , x \in R\right\}$

(46)

$(f+g)(x)=x^3+2x^2+2$ ، مجـــــــالها $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x)=x^3-6x^2+8$ ، مجـــــــالها $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=4x^5-8x^4-3x^3+26x^2-15$ ، مجـــــــالها

$\{x \mid x \in R\}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{x^3-2x^2+5}{4x^2-3}$ ، مجـــــــالها $\left\{x \middle| x \neq \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \ \ , x \in R\right\}$

---

(47)

$(f+g)(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$ ، مجـــــــالها $\{x | x \neq 0\ ,\ x \in R\}$

$(f-g)(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$ ، مجـــــــالها $\{x | x \neq 0\ ,\ x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=\dfrac{1}{x^3}$ ، مجـــــــالها $\{x | x \neq 0\ ,\ x \in R\}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=x$ ، مجـــــــالها $\{x | x \neq 0\ ,\ x \in R\}$

أوجد $[f \circ g](2)$ ، $[g \circ f](x)$ ، $[f \circ g](x)$ لكل دالتين من الدوال الآتية:

(48)

$[f \circ g](x)=8x^2-43$

$[g \circ f](x)=32x^2-176x+234$

$[f \circ g](2)=8(2)^2-43=-11$

---

(49)

$[f \circ g](x)=x^2-8x+23$

$[g \circ f](x)=x^2+2x+3$

$[f \circ g](2)=(2)^2-16+23=11$

---

(50)

$$[f \circ g](x) = x^4 - 3x^2 + 4$$

$$[g \circ f](x) = x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 16$$

$$[f \circ g](2) = (2)^4 - 12 + 4 = 8$$

اكتب مجال $[f \circ g]$ متضمنا اية قيود إذا لزم، ثم اوجد $[f \circ g]$:

(51)

$[f \circ g](x) = \dfrac{1}{2x-9}$ ، المجال $\left\{x \mid x \neq 3, \dfrac{9}{2}, x \in R\right\}$

(52)

$[f \circ g](x) = \sqrt{6x-9}$ ، المجال $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

أوجد الدالة العكسية في كل مما يأتي، إن أمكن، ثم مثل f, f^{-1} في مستوى إحداثي واحد:

(53)

$$y = 2x$$

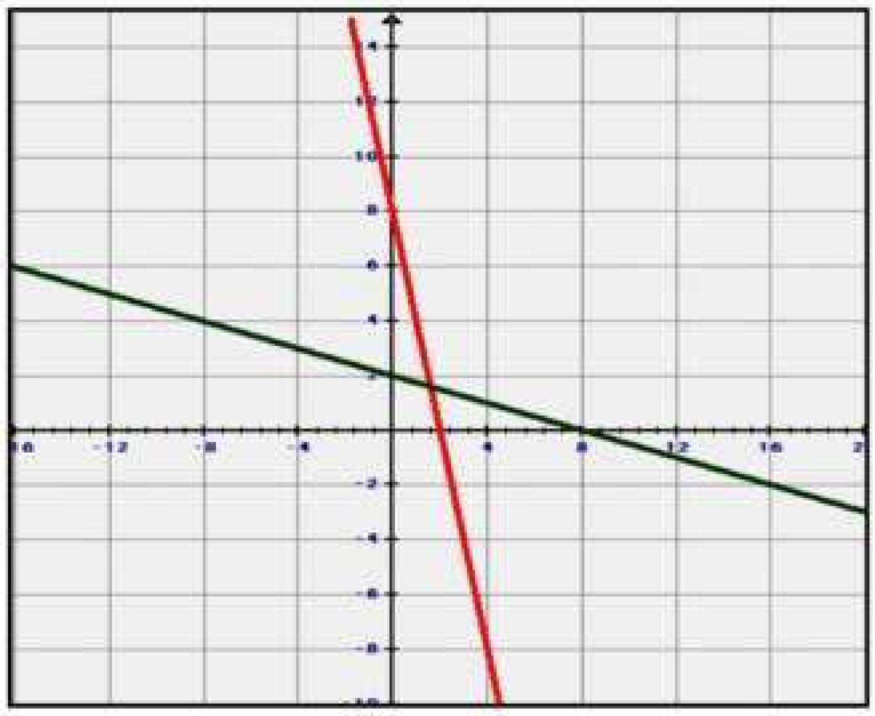
$$x = 2y$$

$$x^2 = 4y^2$$

$$y^2 = \frac{x^2}{4}$$

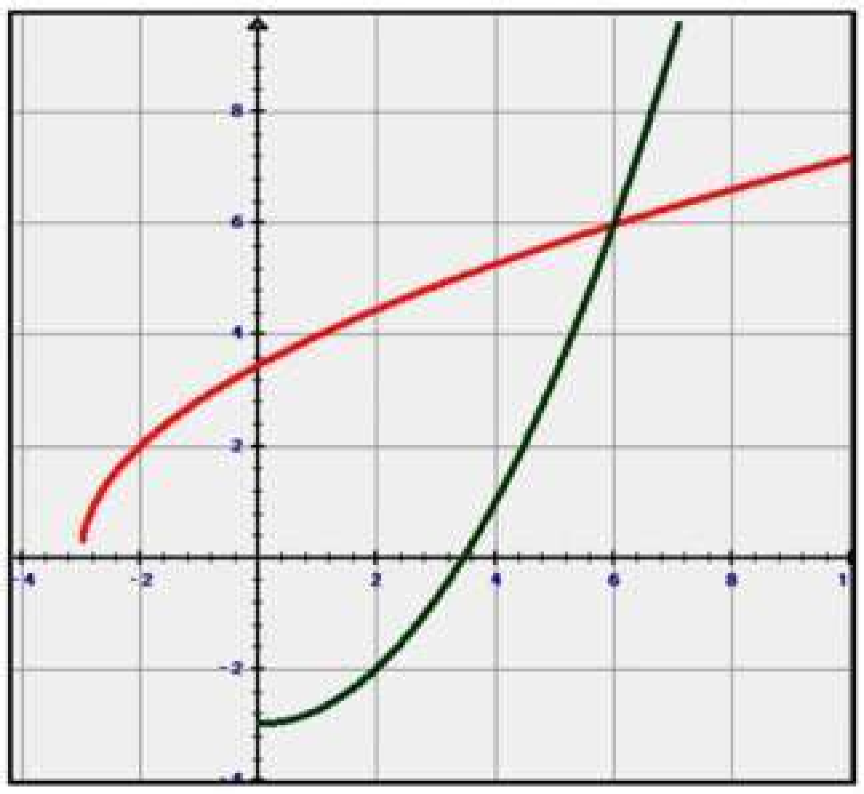
$$y = \sqrt{\frac{x^2}{4}}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$



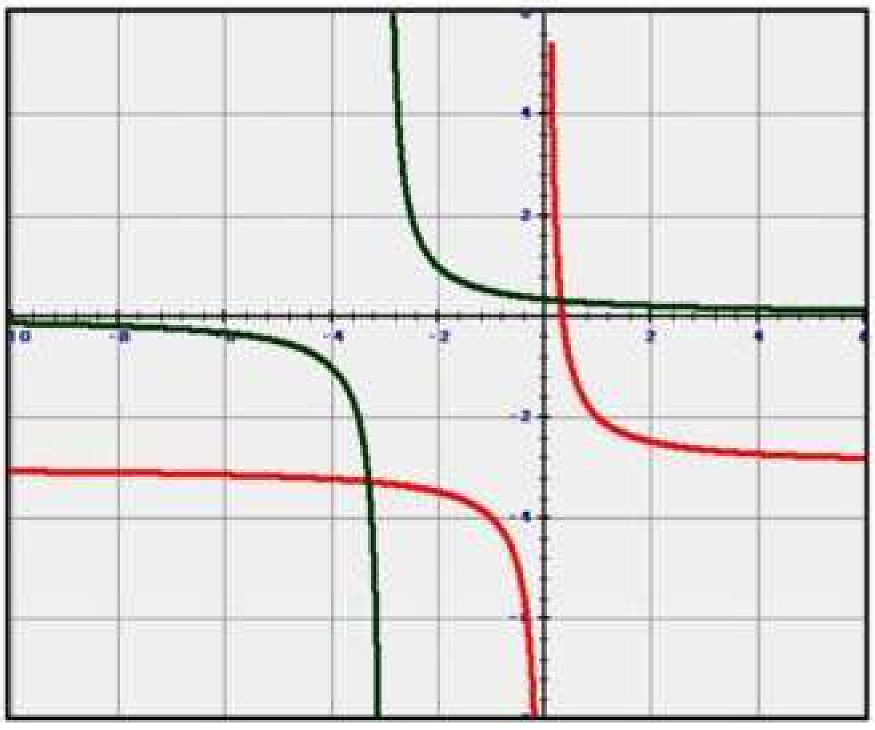
(54)

$$y = -\frac{1}{4}x + 2$$



(55)

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 3$$

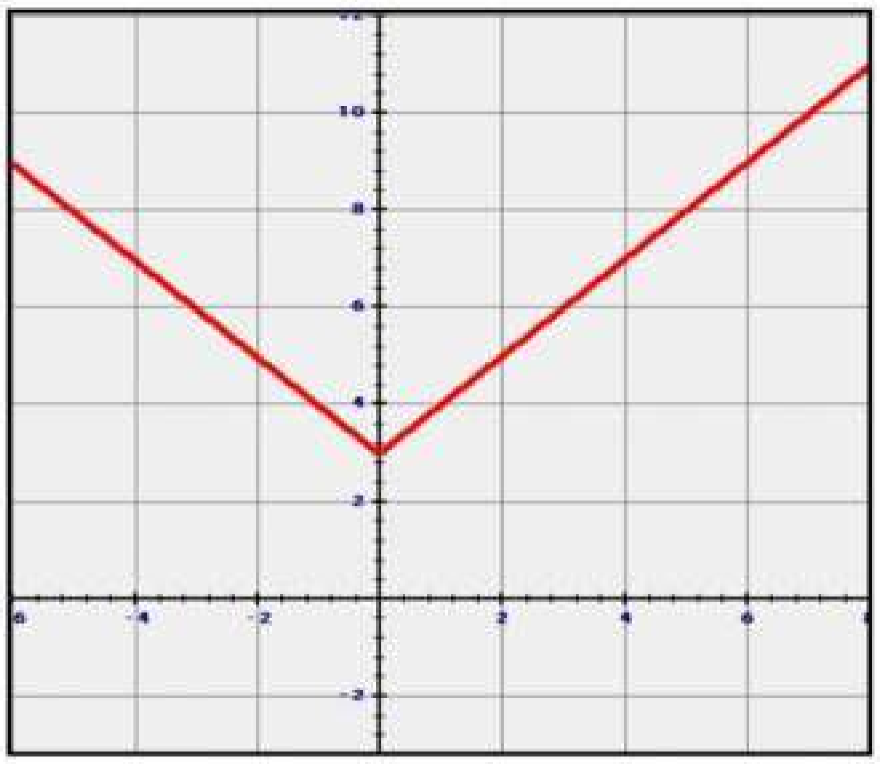


(56)

$$y = \frac{1}{x+3}$$

مثِّل كل دالة من الدوال الآتية باستعمال الحاسبة البيانية، واختبر ما إذا كان المعكوس يمثل دالة أم لا:

(57)

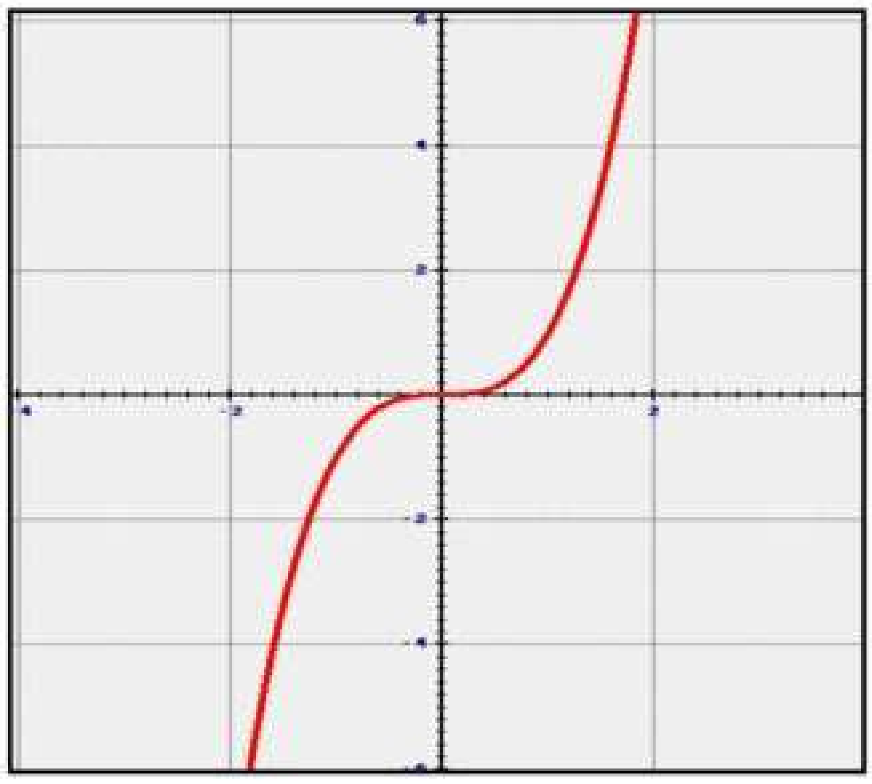


لا يوجد لها معكوس

---

(58)

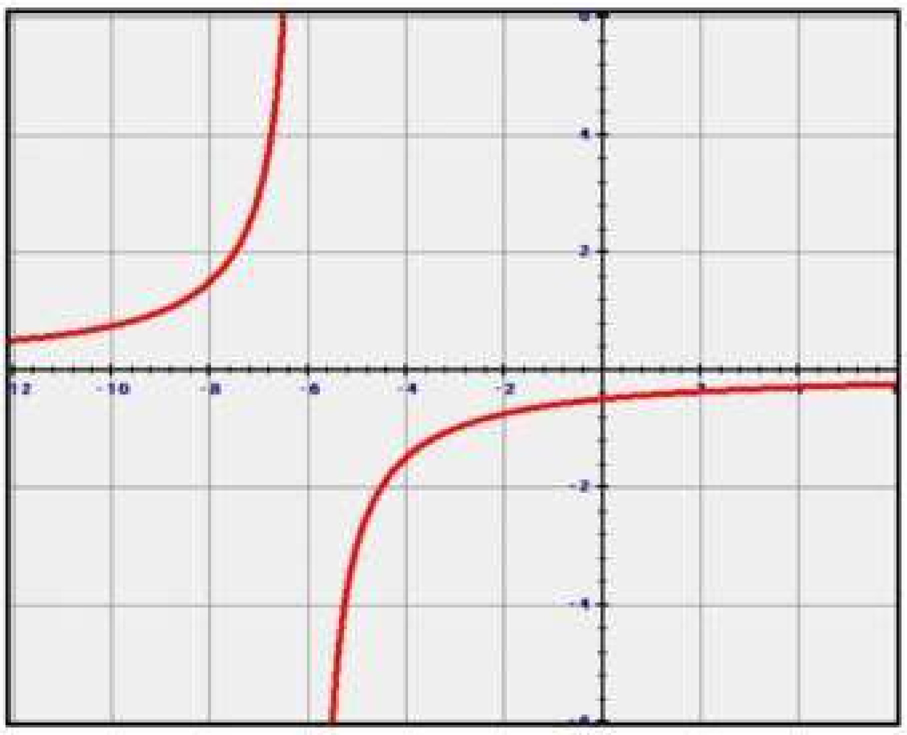
نعم لها معكوس

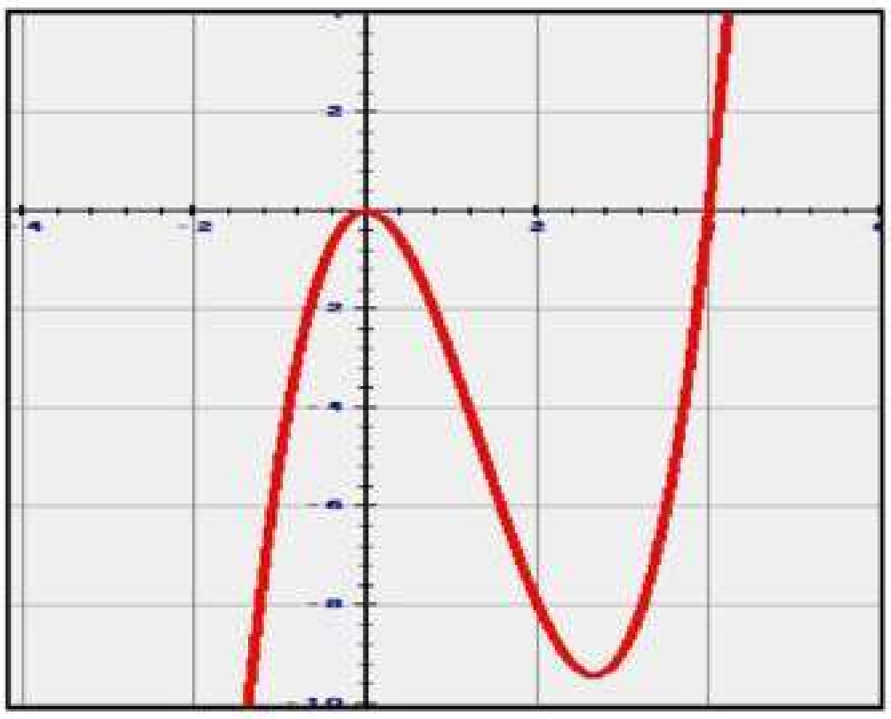


---

(59)

نعم لها معكوس





(60)

ليس لها معكوس

---

(61) **الهواتف المحمولة:**

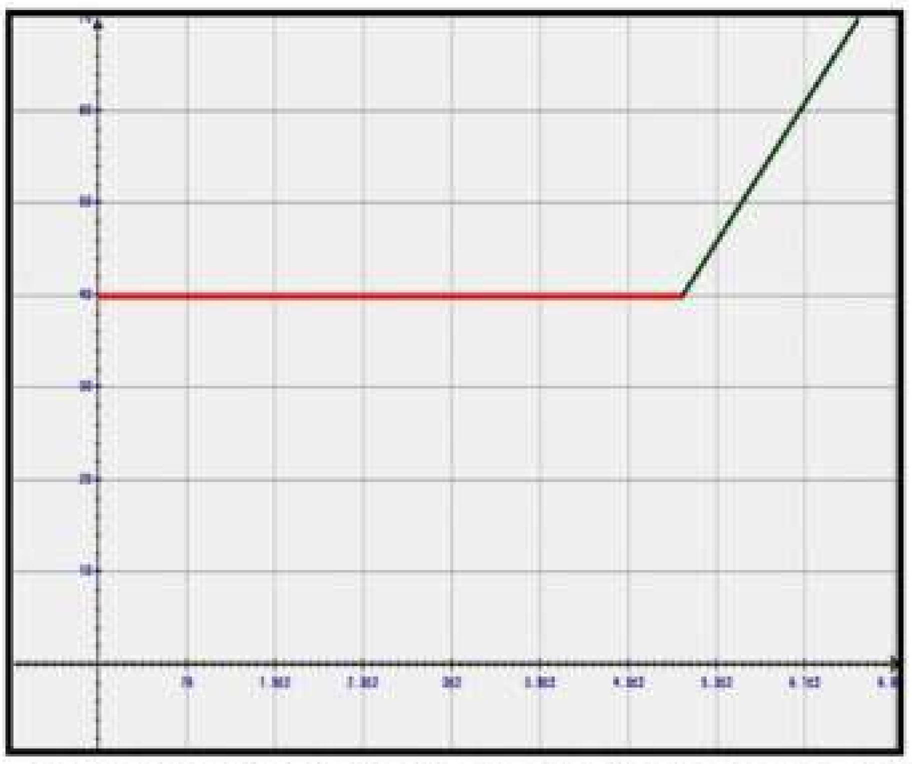
(a

$$p(x)=\begin{cases}40 & ,0\le x\le 500\\ 40+0.2(x-500) & ,x>500\end{cases}$$

(b

$$40$$
$$40+0.2(550-500)$$
$$40+0.2(50)=50$$

(c



---

(62) **أعمال:**

(a) 150 الف ريال تقريباً

(b) 1427 هجرياً

(63) لا، في اللحظة التى ازداد فيه راتبه هناك انفصال قفزي في الدالة التى تمثل راتب وليد.

(64) كرة قدم:

(a) لأن عدد الأهداف يتناقص قبل عام 1426 ثم يتزايد مرة أخرى.

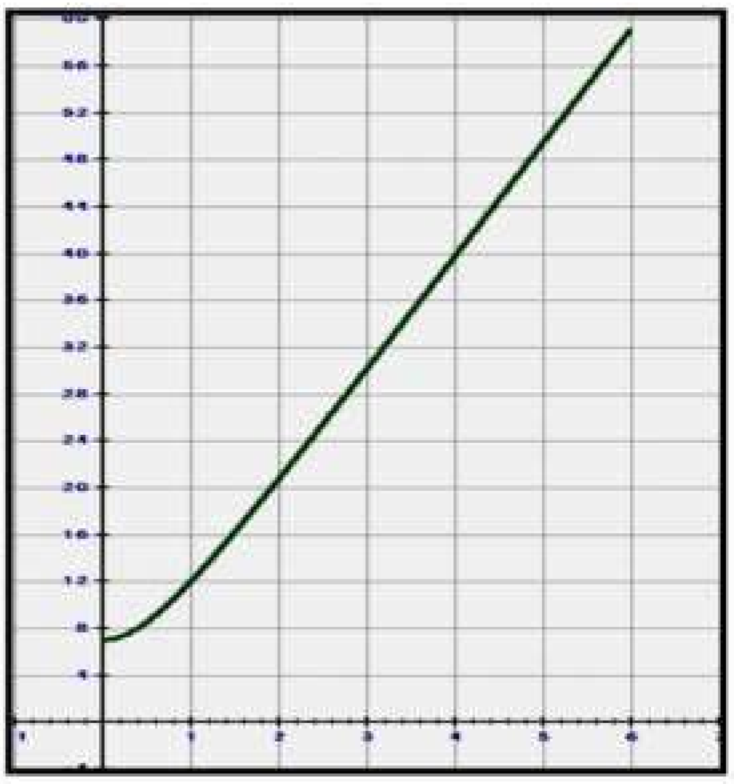
(b)

$$\frac{f(1431)-f(1428)}{1431-1428}=5$$

$$\therefore \frac{f(1431)-42}{3}=5$$

$$\therefore f(1431)=15+42=57$$

(65) فيزياء:



(66) ثقافة مالية:

$$f(x)=x-10+0.05(x-10)$$

$$=1.05x-10.5$$

$$f(90)=1.05(90)-10.5=84$$

84 ريـــــــــال.

(67)

$$A(x) = 6.4516x \ cm^2 \quad (a)$$

$$A^{-1}(x) = \frac{1}{6.4516}x \ in^2 \quad (b)$$

اختبار الفصل (1)

في كل مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x :

(1) ليست دالــــــــــة.

(2) دالــــــــــة.

(3) دالــــــــــة.

---

(4) **موقف سيارات:**

a)

$$c(x)=\begin{cases}3x & , x\le 3\\ 15 & , x>3\end{cases}$$

b) حوالي 7.5 ريال

c) المجال: $[0,24]$ يجب أن يكون عدد الساعات أكبر من 0 وأقل من 24 ساعة.

حدد مجال كل من الدالتين الممثلتين أدناه ومداهما:

(5)

المجال: ← $(-\infty , \infty)$ المدي: ← $[-2 , \infty)$

---

(6)

المجال: ← $(-\infty , 5]$ المدي: ← $[0 , \infty)$

أوجد المقطع y والأصفار لكل دالة من الدالتين الآتيتين:

(7)

المقطع y: ← -12 الأصفار:← $-1\ ,\ 3$

---

(8)

المقطع y: ← 0 الأصفار:← $-3\ ,\ -1,0$

اختيار من متعدد:

(9)

(D $-y^{2} = -4x$

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند $x = 3$، وإذا كانت غير متصلة فحدد نوع عدم الإتصال، لانهائي، قفزي، قابل للإزالة:

(10) متصلة

---

(11) غير متصلة، عدم إتصال قابل للإزالة.

أوجد متوسط معد ل التغير لكل دالة من الدالتين في الفترة $[-2,6]$:

(12)

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(6)-f(-2)}{6+2}$$

$$=\frac{-1278+22}{8}-157$$

---

(13)

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(6)-f(-2)}{6+2}$$
$$=\frac{3-1}{8}=\frac{1}{4}$$

استعمل منحنى كل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة إلى أقرب 0.5 وحدة:

(14)

الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty, 2.5)$ ومتناقصة على الفترة $(2.5, \infty)$

(15)

الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, -1.5)$

الدالة متزايدة على الفترة $(-1.5, 0)$

الدالة متناقصة على الفترة $(0, 1.5)$

الدالة متزايدة على الفترة $(1.5, \infty)$

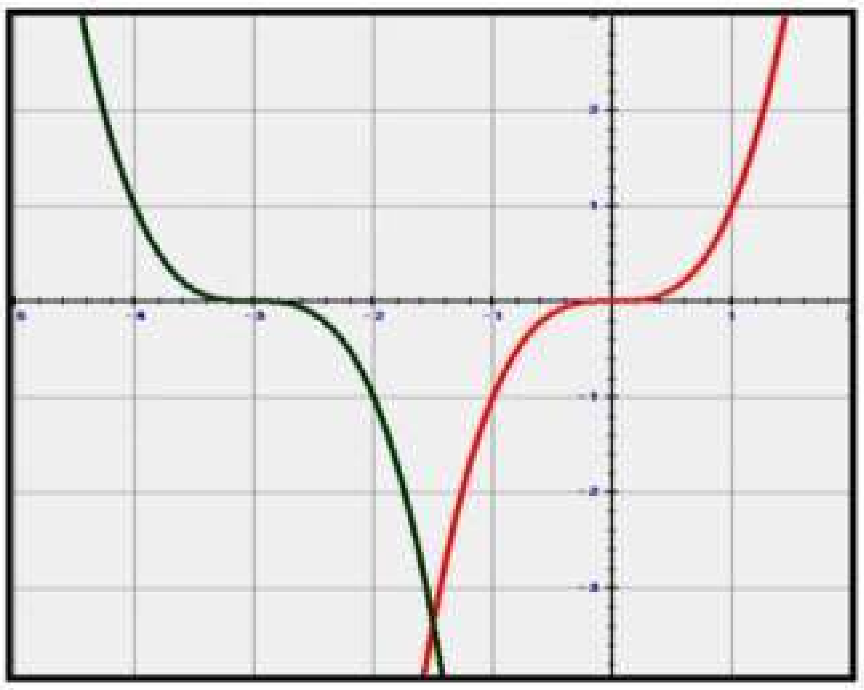
---

(16) اختيار من متعدد:

c) $f(x)=|x+4|-3$

(17)

الدالة الرئيسية (الأم): $f\left(x\right)=x^{3}$



إذا كانت $f\left(x\right)=x-6$ ، $g\left(x\right)=x^{2}-36$ فأوجد كل دالة من الدالتين، ثم أوجد مجالها.

(18)

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{x+6}$$

المجـــــــــــــــــال: $\{x|x\neq -6, x\neq 6, x\in R\}$

(19)

$[f\circ g](x)=x^{2}-12x$ المجـــــــــــــــــال: $\{x\,|\,x\in R\}$

(20) **درجة الحرارة:**

a) $C=\frac{5}{9}(F-32)$

b) $f\left(F\right)=\frac{5}{9}F$ ، $g\left(F\right)=F-32$

بين إذا كانت للدالة f معكوس أم لا في كل مما يأتي، وفي حالة وجودة أكتبة، حدد أية قيود على مجالة:

(21)

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 2$$

---

(22)

$$f^{-1}(x) = \frac{8x+3}{x-1} \text{،} \quad x \neq 1$$

---

(23)

$$f^{-1}(x) = 4 - x^2 \text{،} \quad x \geq 4$$

---

(24)

لا يوجد معكوس للدالة f

الفصل (2) العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

التهيئة للفصل الثاني:

اختبار سريع:

بسط كل مما يأتي مفترضاً أن أياً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

(1) $a^{4+3+5} = a^{12}$

(2) $8x^3y^9z^9$

(3) $\dfrac{-3x^6}{2y^3z^5}$

(4) $\dfrac{4r^4}{81n^4t^2}$

---

(5) **كثافة:** $\dfrac{7.5\times10^3}{1.5\times10^3} = 5\ g/cm^3$

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي:

(6) $f(x) = 2x + 5$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

(7) $f(x) = x - 3$

$$f^{-1}(x) = x + 3$$

(8) $f(x) = -4x$

$$f^{-1}(x) = \frac{-1}{4}x$$

---

(9) $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$

$$f^{-1}(x) = 3x + 12$$

(10) $f(x) = \frac{x-1}{2}$

$$f^{-1}(x) = 2x + 1$$

(11) $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$

$$f^{-1}(x) = 3x - 12$$

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى أم لا. وضح:

(12) نعم،

لأن: $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

(13) لا،

لأن: $[f \circ g](x) = 4x - 5$ بينما $[g \circ f](x) = x$

(14) طعام:

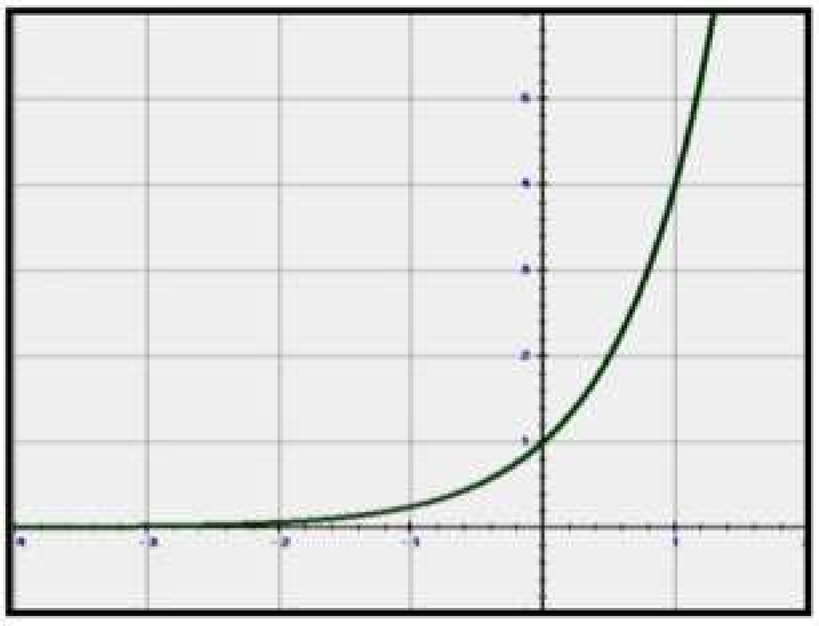
$f^{-1}(x) = 2x - 8$ وهي تعطي عدد الإضافات التي يحصل عليها شخص دفع x ريالاً.

(2-1) تمثيل الدوال الأسية بيانياً

■ **تحقق من فهمك:**

($1A$) مثل الدالة $y = 4^x$ بيانياً، وحدد مجالها ومداها.

y	7^x	x
0.02	7^{-2}	-2
0.14	7^{-1}	-1
1	7^0	0
7	7^1	1
49	7^2	2



التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عند $y = 1$

المجال: R

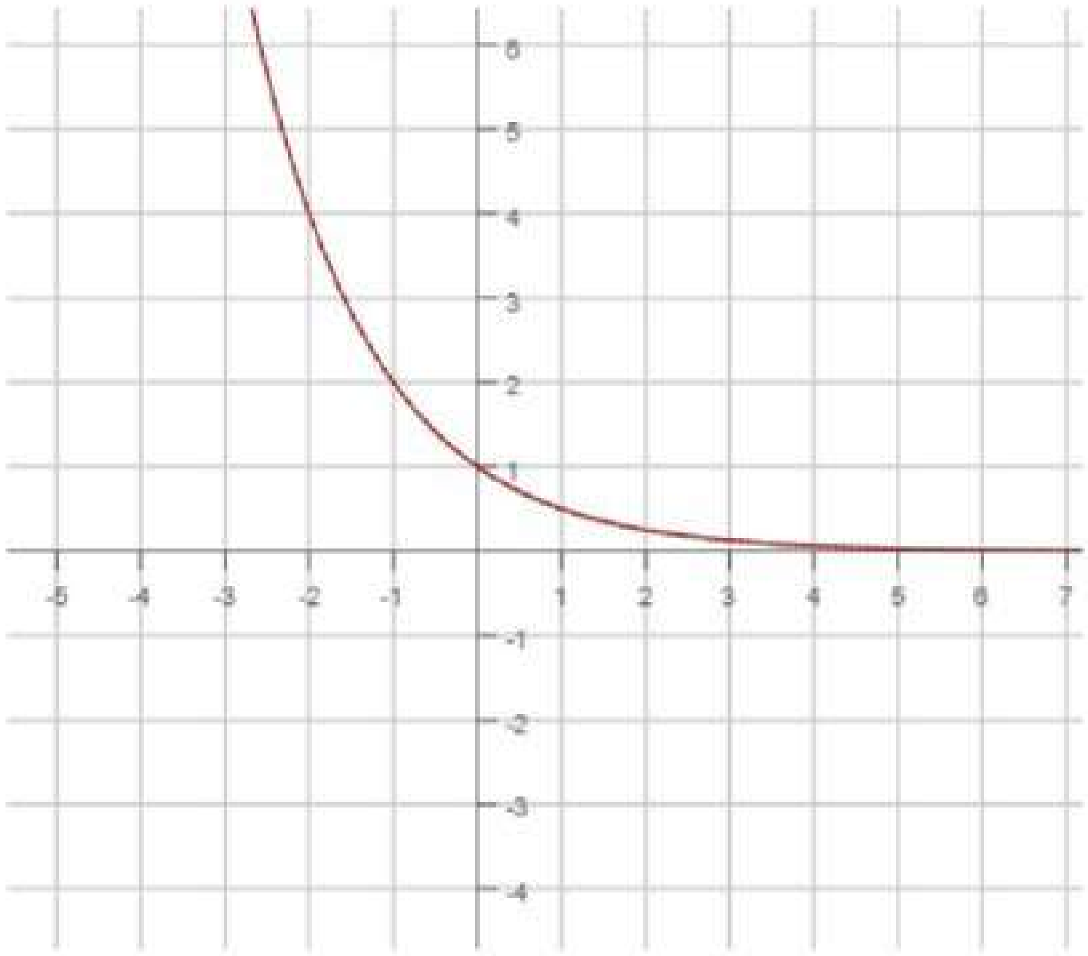
المدي: $\{y \mid y > 0\}$

($1B$) 2.6

■ **تحقق من فهمك:**

(2)

A) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$



x	y
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.75

التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عند $y=1$

المجال: $(-\infty,\infty),\{x \mid x\in \mathbb{R}\}$

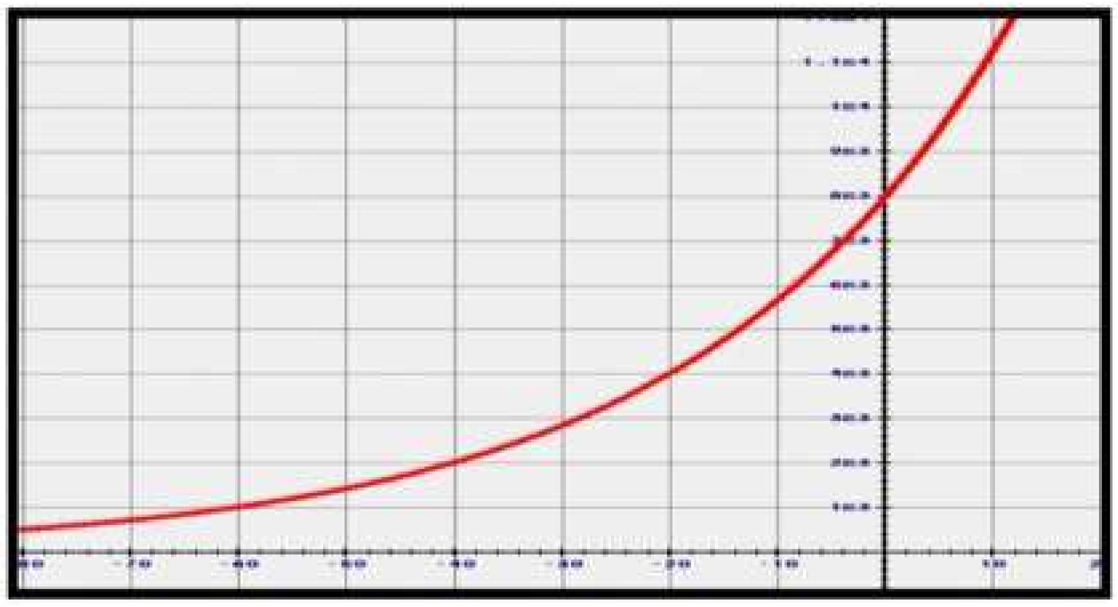
المدي: $(0,\infty),\{y \mid y>0\}$

2B) 5.7

■ **تحقق من فهمك:**

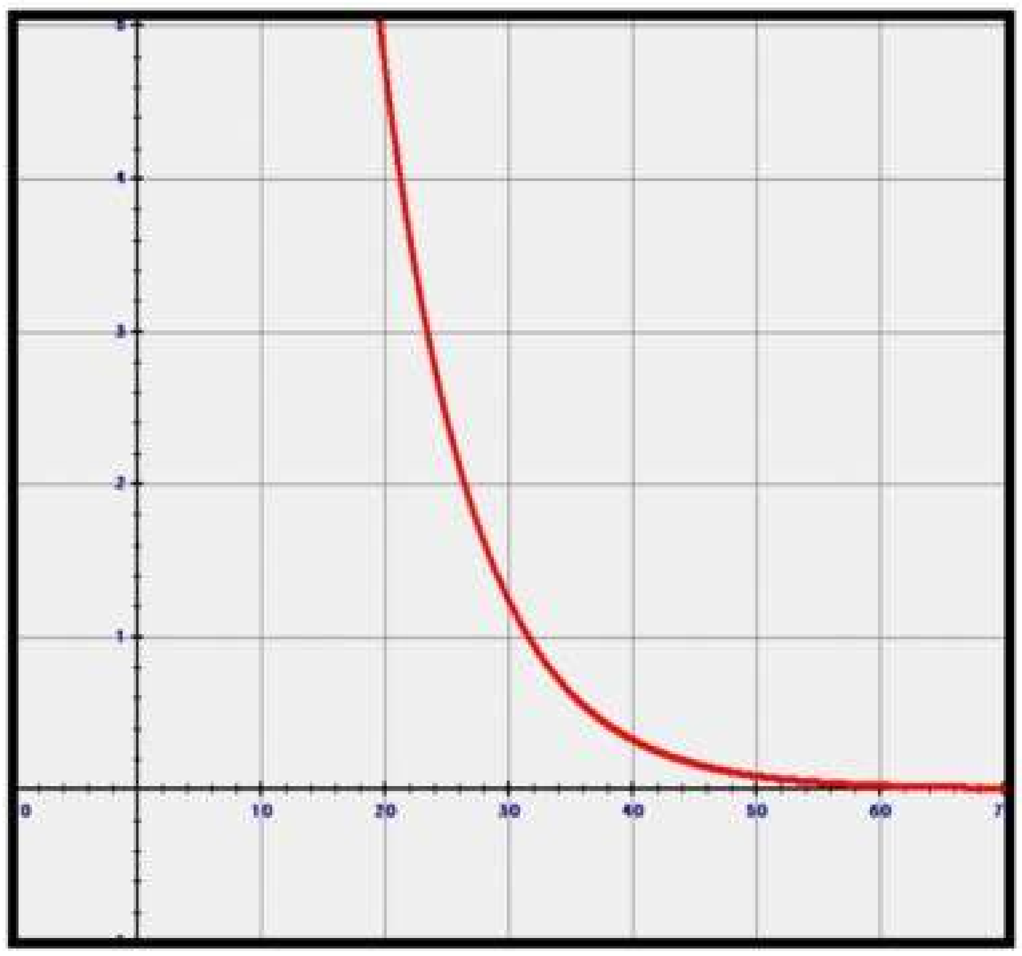
(3) ثقافة مالية:

$y=80000(1.085)^{t}$



■ **تحقق من فهمك**:

(4)



المعادلة الأسية التي تمثل كمية الكافيين المتبقية

$$y = a(1-r)^t$$
$$= 68(1-0.125)^t$$
$$= 68(0.875)^t$$

كمية الكافيين بعد ساعتين:

$$= 68(0.875)^2 \approx 52.06\,mg$$

■ **تحقق من فهمك**:

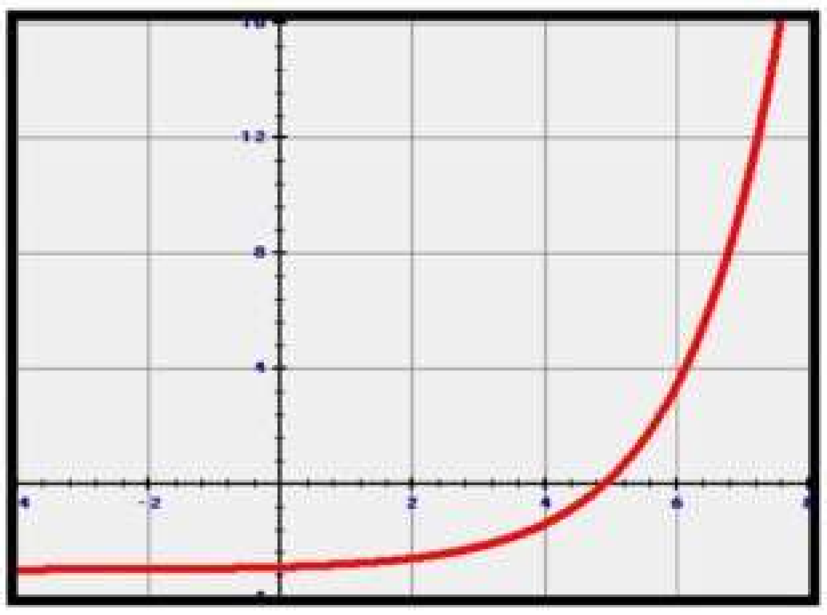
$y = 2^{x+3} - 5$ **(5A)**

التمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 2^x$

بإزاحة 3 وحدات لليسار و 5 وحدات لأسفل.

← المجال: R **← المدي:** $\{y \mid y > -5\}$

$y = 0.1(6)^x - 3$ **(5B)**



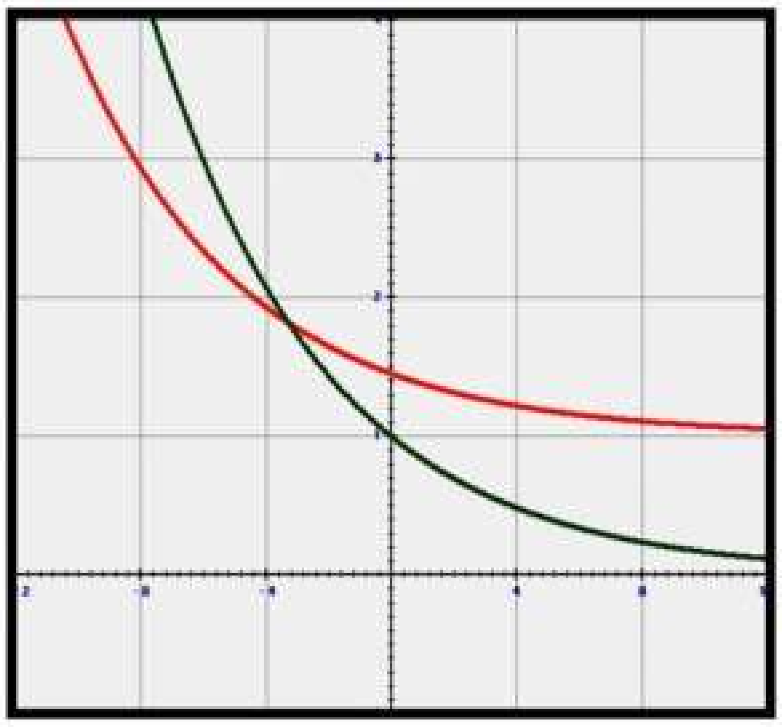
التمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 6^x$

بتضيق رأسي معاملة 0.1 وإزاحة 3 لأسفل.

←المجال: R **← المدي:** $\{y \mid y > -3\}$

■ **تحقق من فهمك**:

$$y=\frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}+1 \quad (6)$$

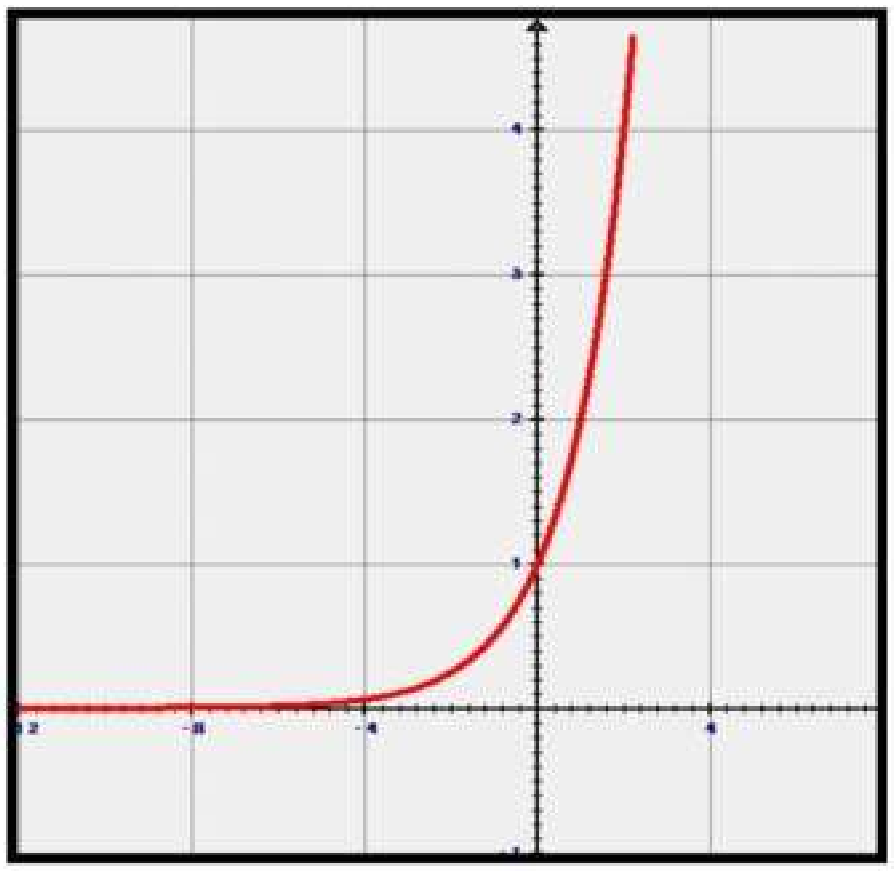


التمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y=\left(\frac{5}{6}\right)^{x}$ **بتضيق رأسي معاملة** $\frac{3}{8}$ **وإزاحة وحدة واحدة لليمين ووحدة واحدة إلى الأعلى.**

←**المجال:** R ← **المدي:** $\{y \mid y>1\}$

تدرب وحل المسائل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدّد مجالها، ومداها:



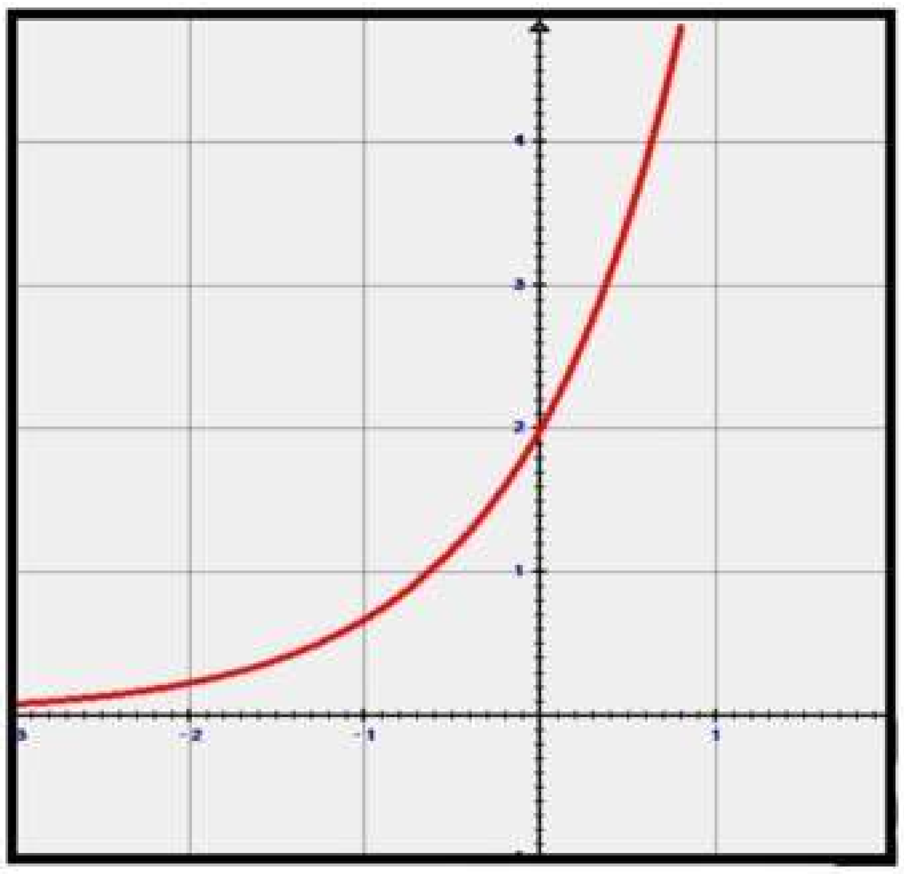
(1)

$f(x) = 2^x$

المجال: R

المدي: $\{y \mid y > 0\}$

$2.8 = 2^{1.5}$

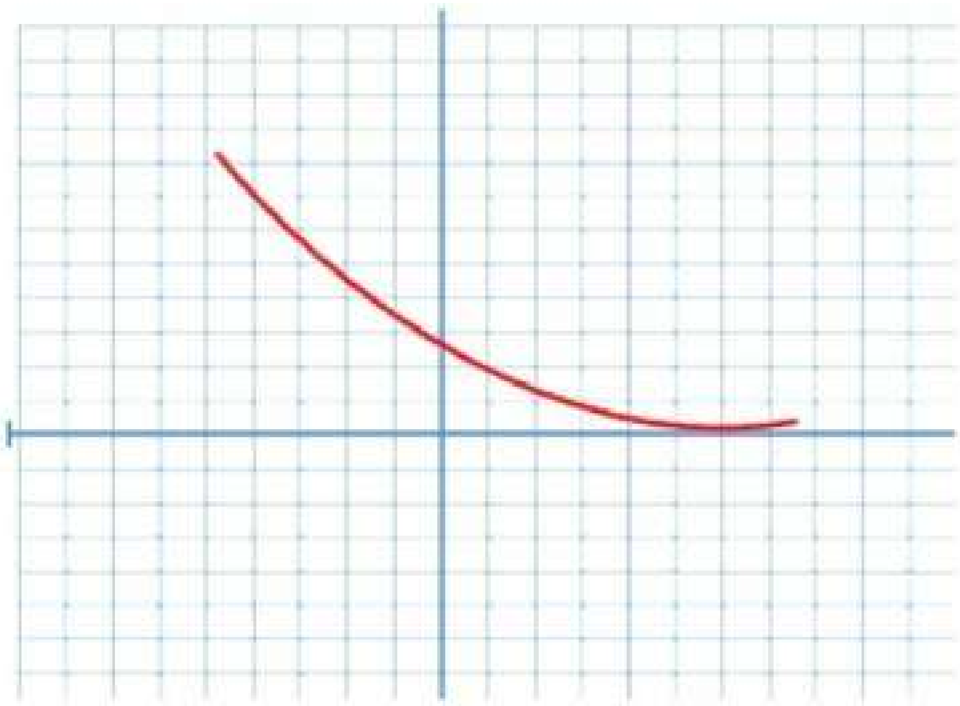


(2) $f(x) = 2(3)^x$

المجال: R

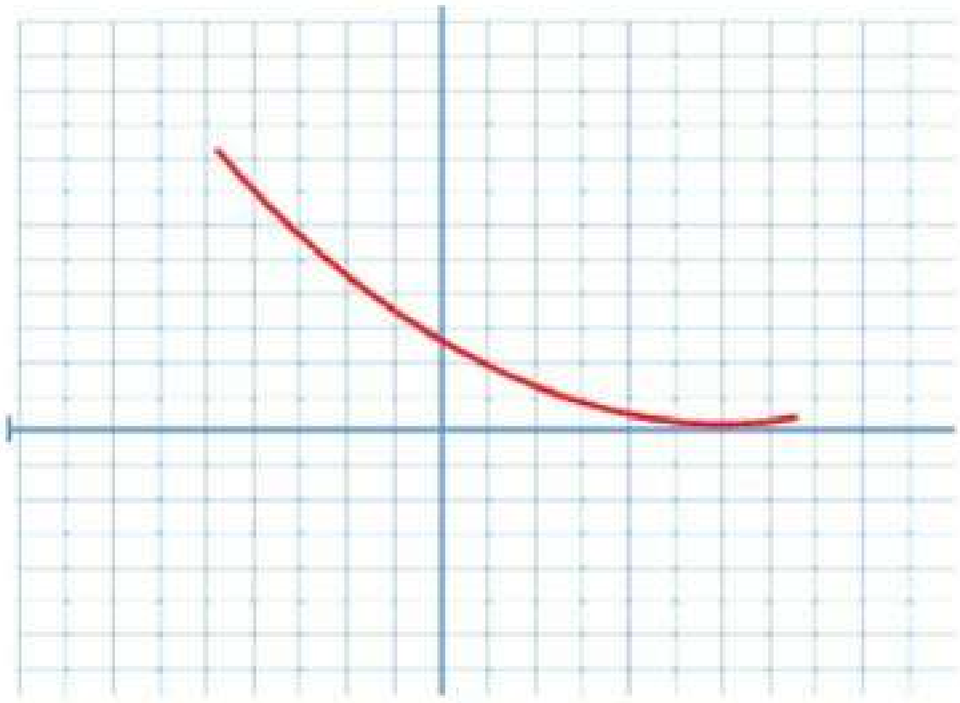
المدي: $\{y \mid y > 0\}$

$0.7 = 2(8)^{\frac{-1}{2}}$



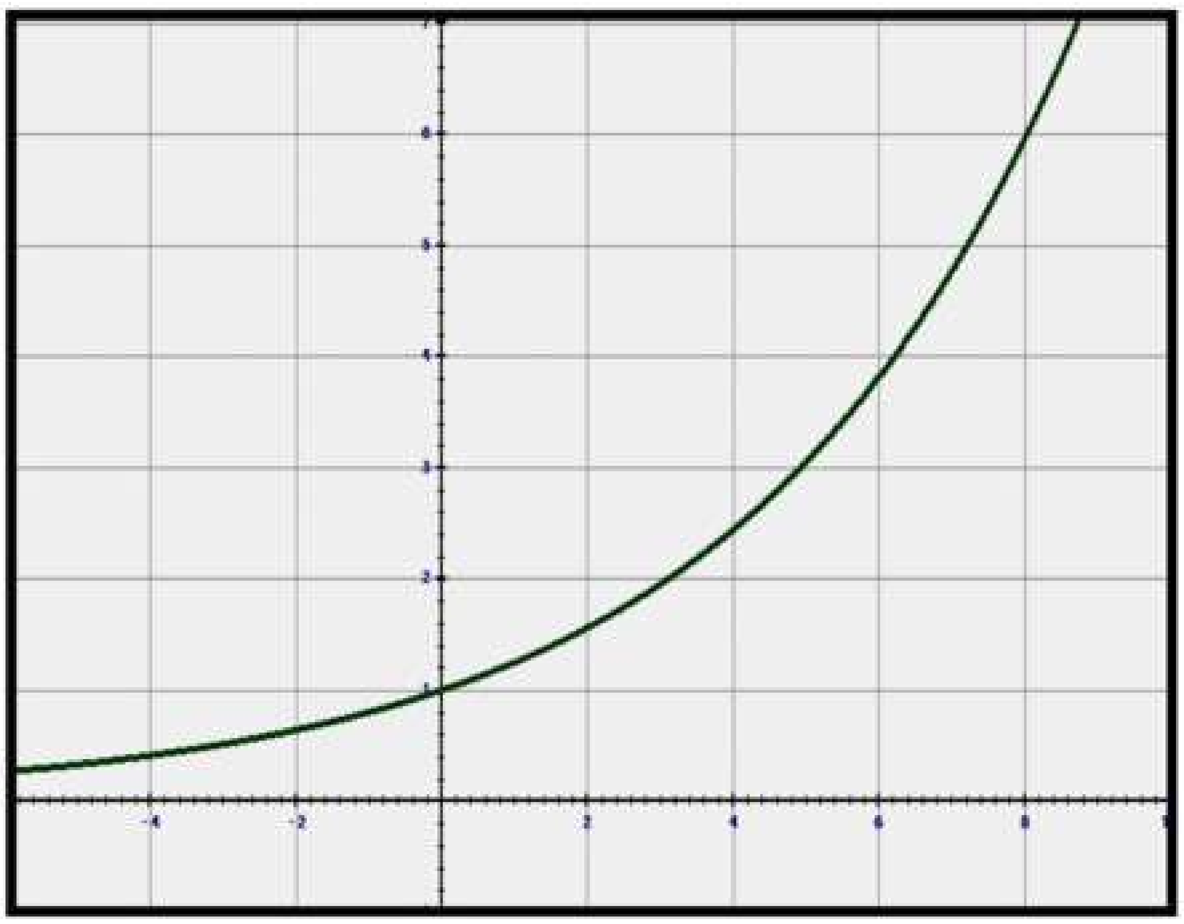
(3) $f(x) = 2(\frac{1}{6})^x$

$0.1 = 2\left(\frac{1}{6}\right)^{1.5}$



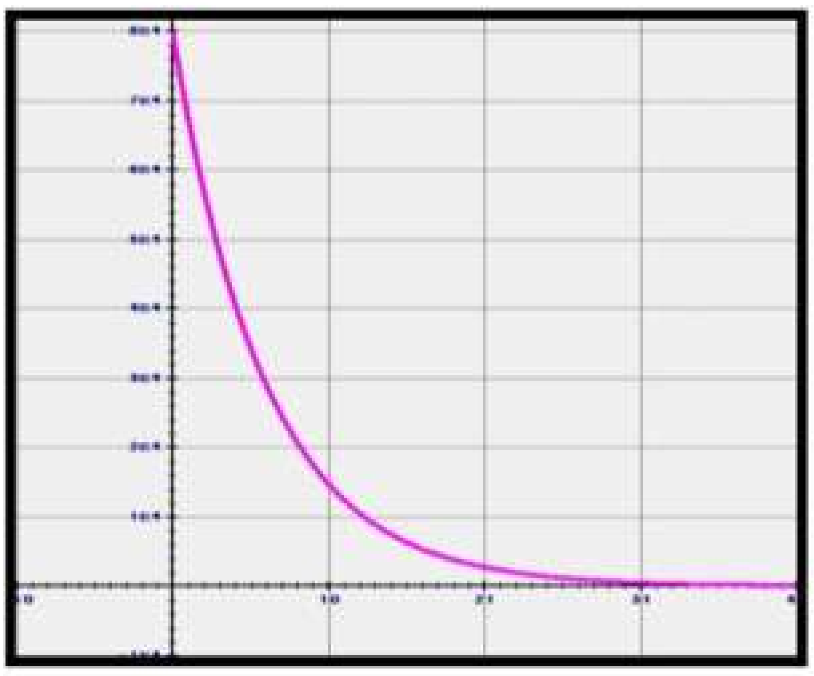
$f\left(x\right)=3(\frac{1}{4})^x$ (4)

$1.5=3\left(\frac{1}{4}\right)^{.5}$



(5) حاسوب:

المعادلة: $y=\left(1.25\right)^t$



(6) سيارات:

المعادلة $y=80000(0.85)^t$

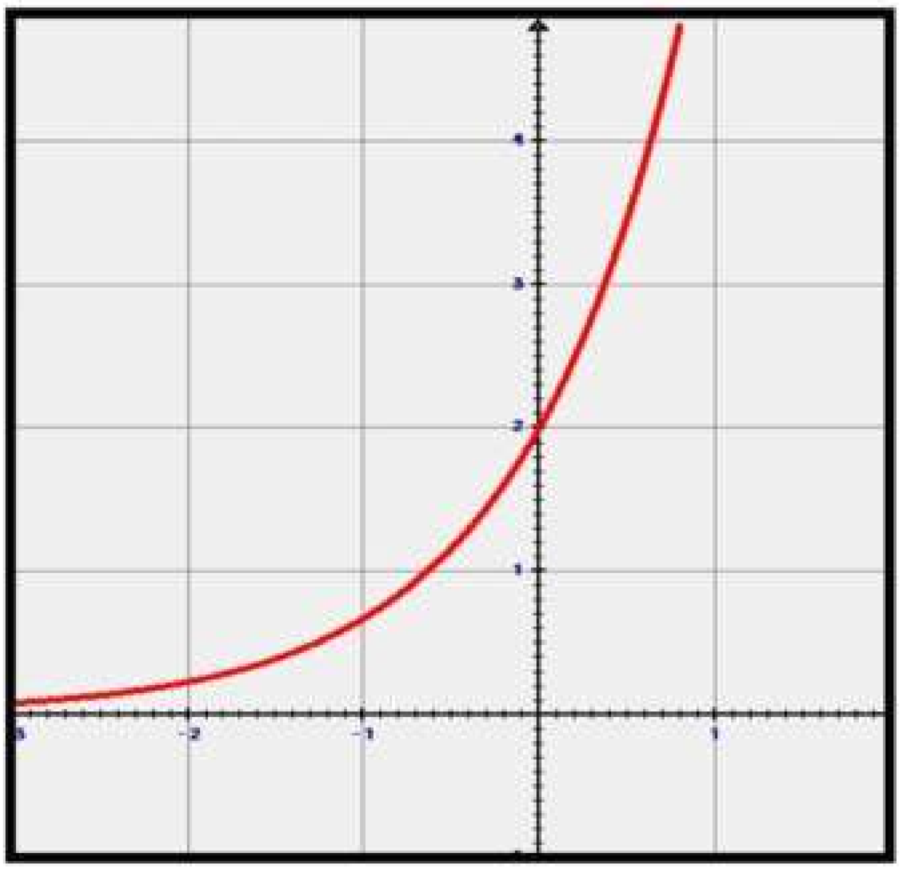
بعد 20 سنة يكون ثمنها 3100 ريـــــــــــــــال تقريباً

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً وحدد مجالها ومداها:

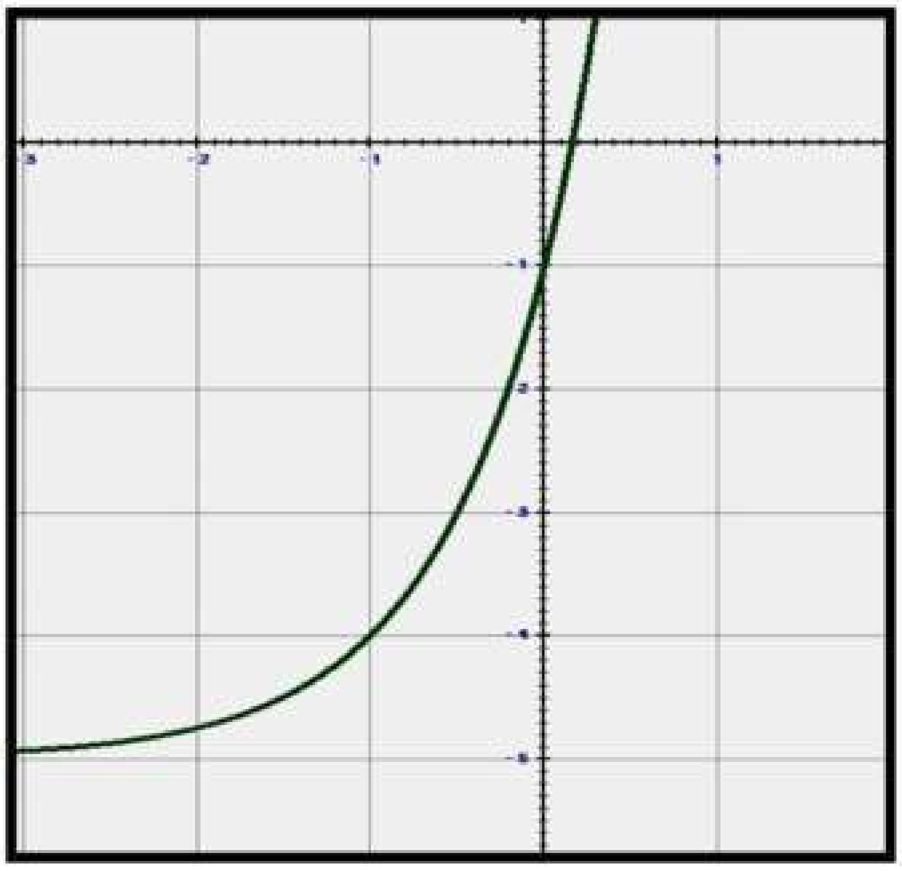
(7) $f\left(x\right)=2(3)^{x}$

المجال: R

المدي: $\{y \mid y>0\}$



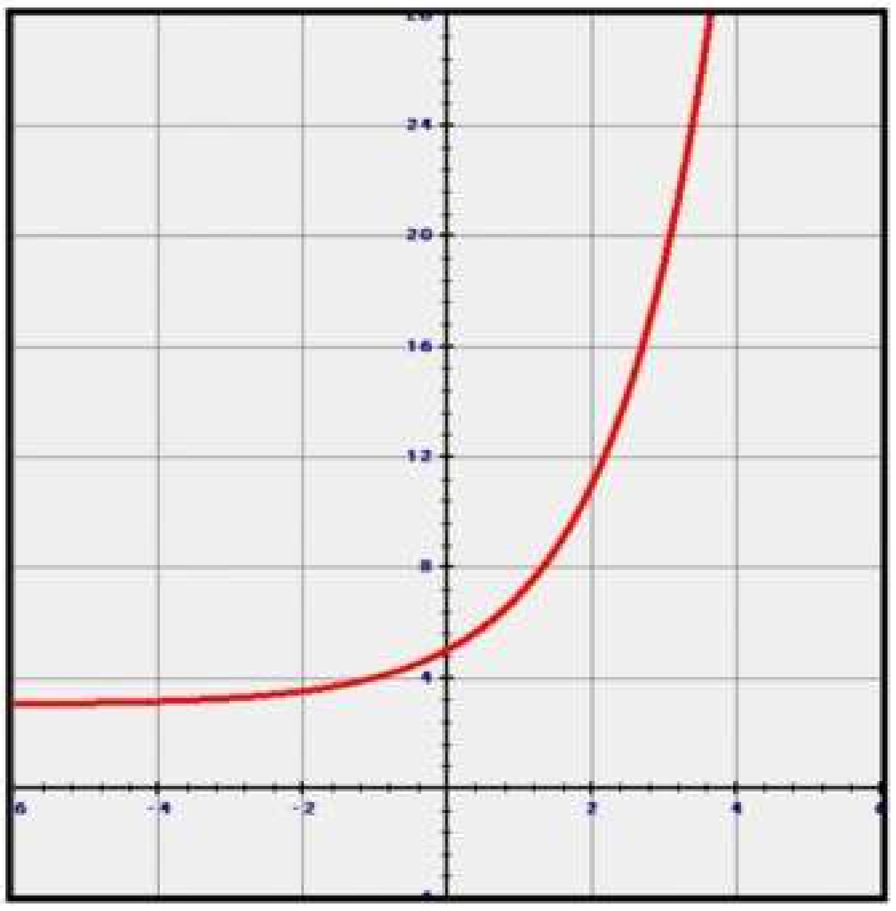
(8) $f\left(x\right)=4^{x+1}-5$



المجال: R

المدي: $\{y \mid y>-5\}$

(9)

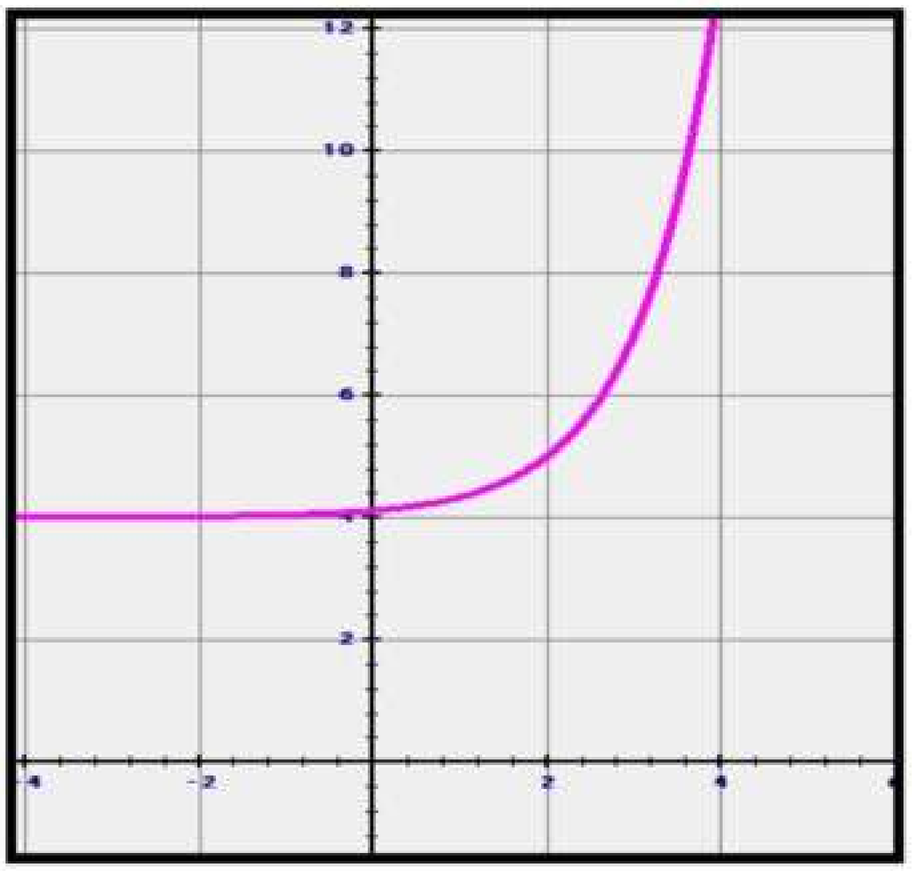


$f\left(x\right)=2^{x+1}+3$

المجال: R

المدي: $\{y \mid y>3\}$

(10)

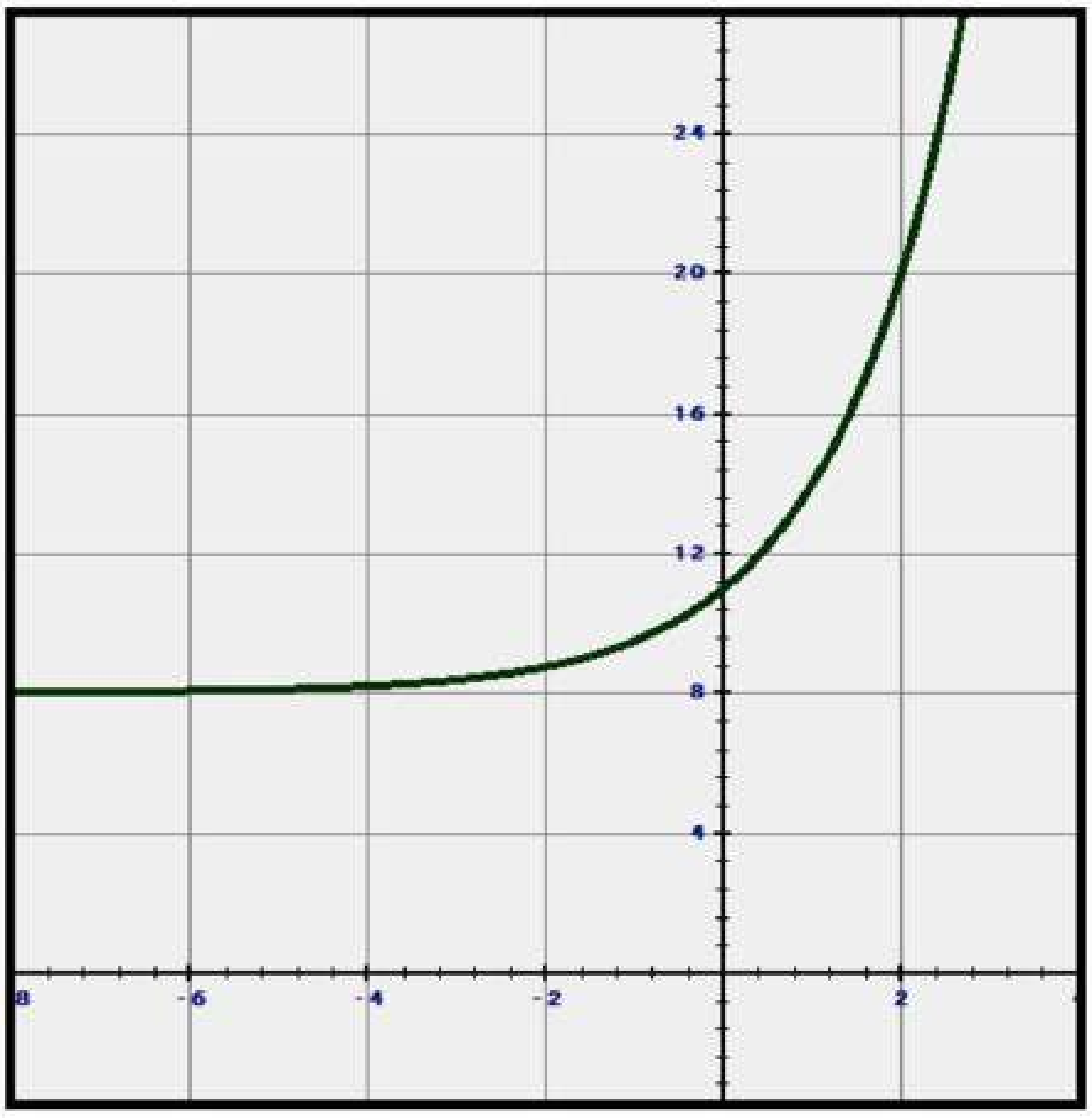


$$f\left(x\right)=3^{x-2}+4$$

المجال: R

المدي: $\{y \mid y>4\}$

(11)

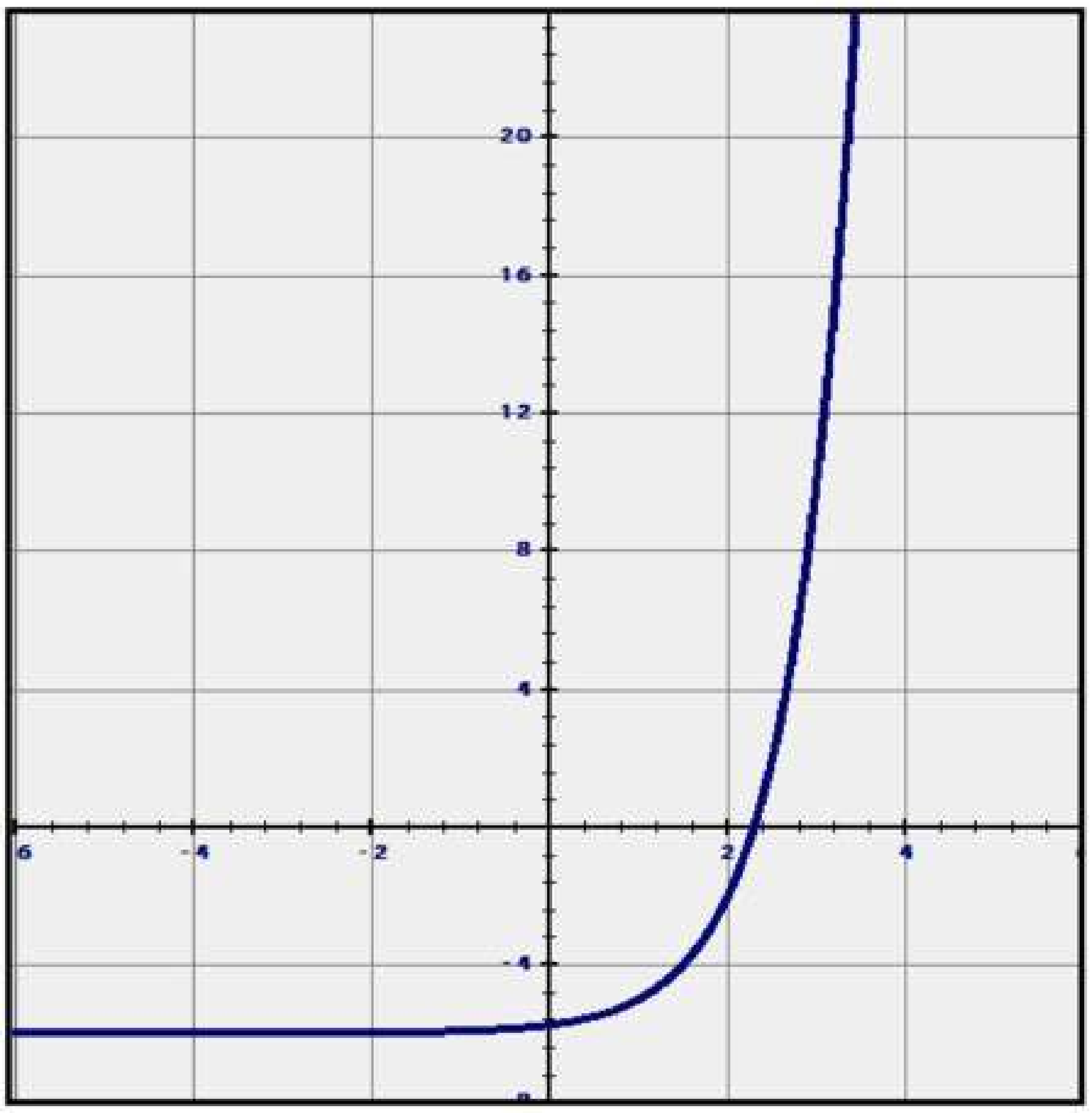


$$f\left(x\right)=3(2)^{x}+8$$

المجال: R

المدي: $\{y \mid y>8\}$

$f(x)=0.25(4)^x-6$ (12)

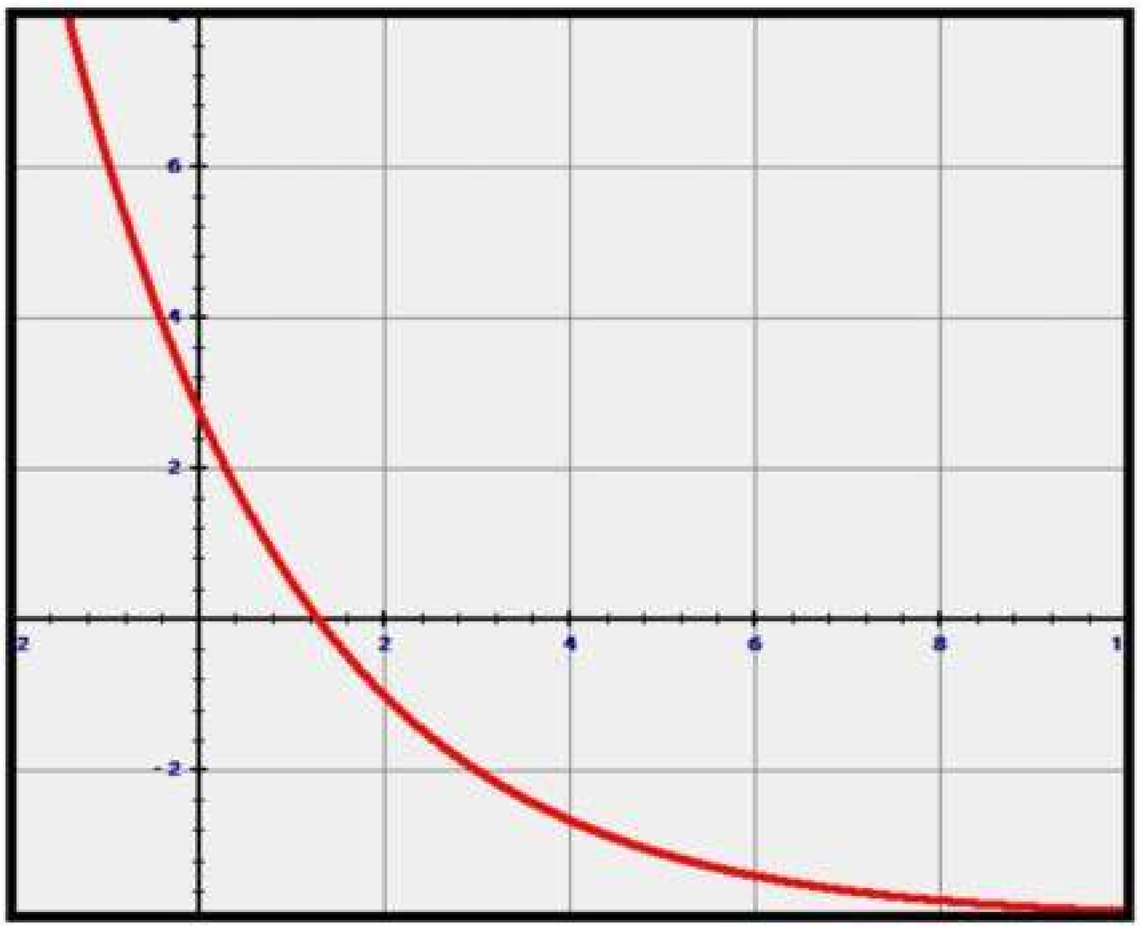


المجال: R

المدي: $\{y \mid y>-6\}$

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً وحدد مجالها ومداها:

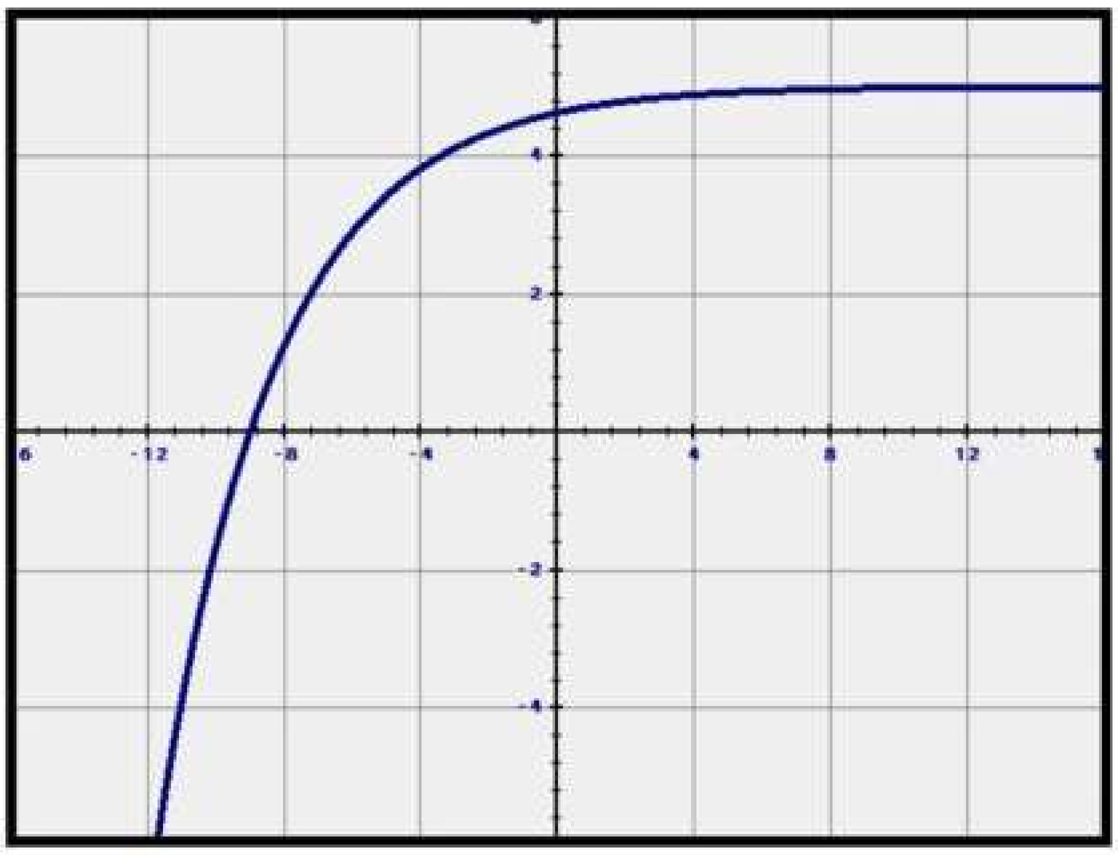
(13)



المجال: R

المدي: $\{y \mid y>-4\}$

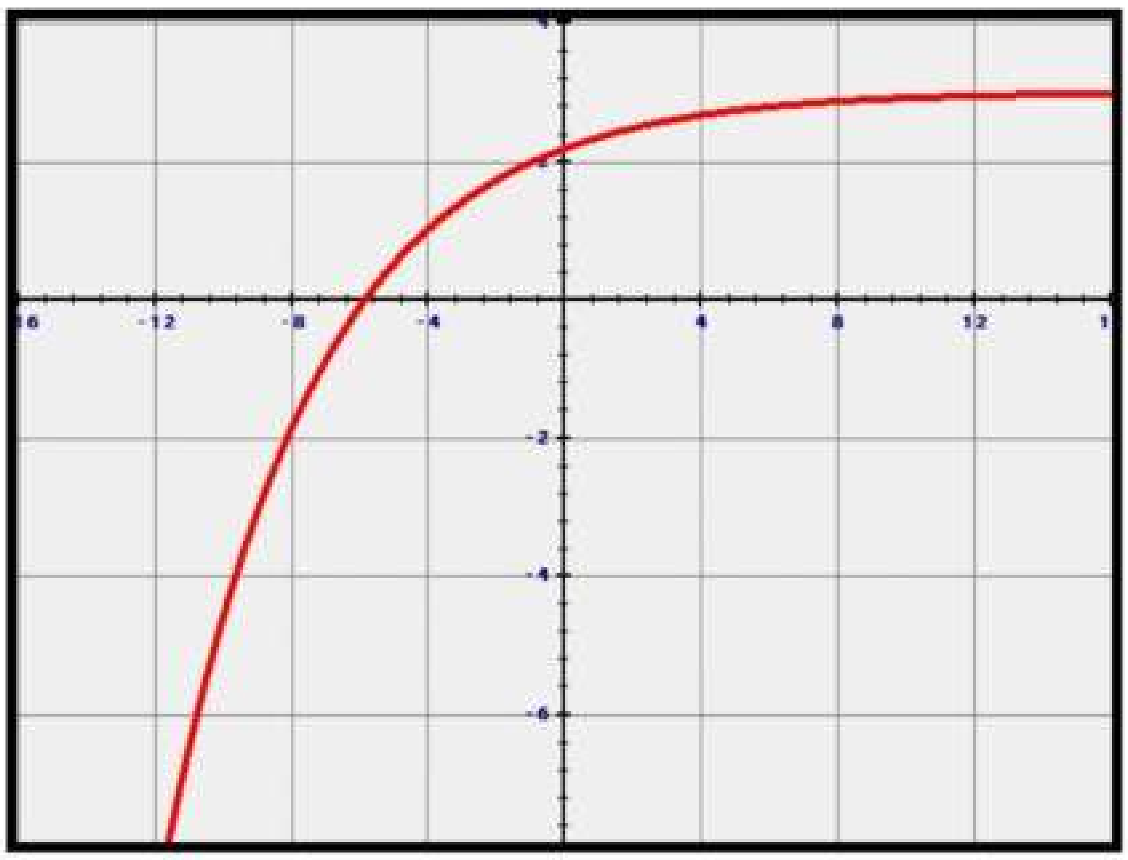
(14)



المجال: R

المدي: $\{y \mid y < 5\}$

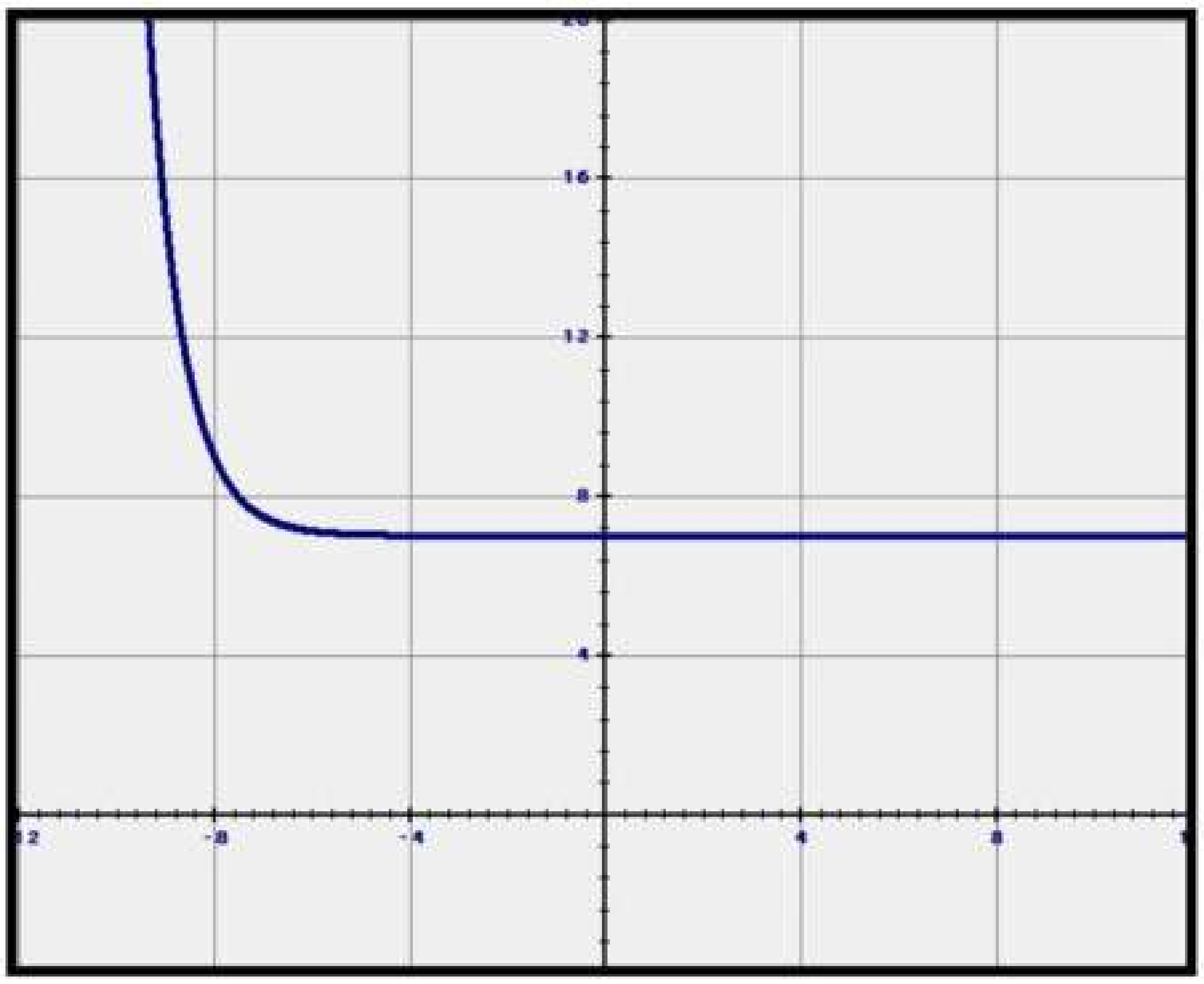
(15)



المجال: R

المدي: $\{y \mid y < 3\}$

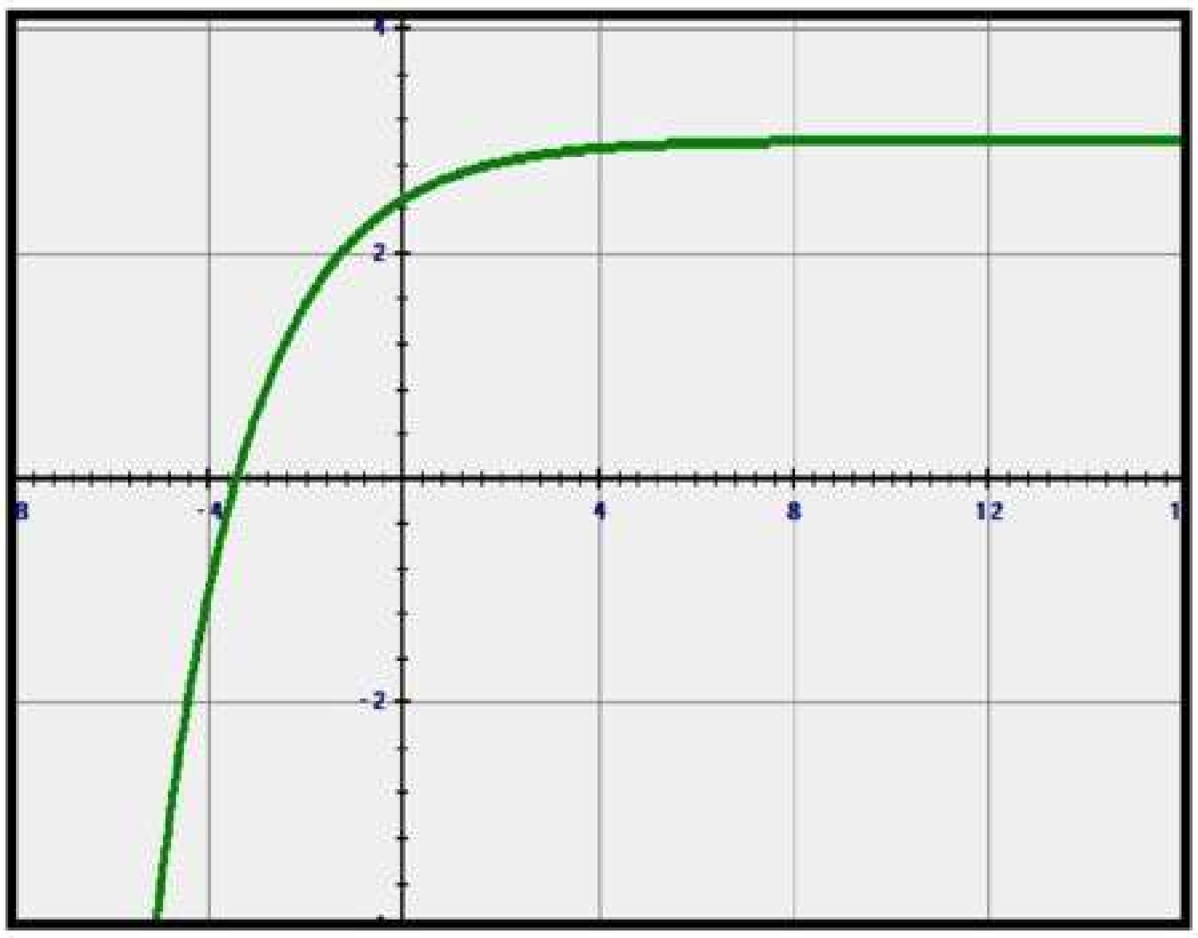
(16)



المجال: R

المدي: $\{y \mid y > 7\}$

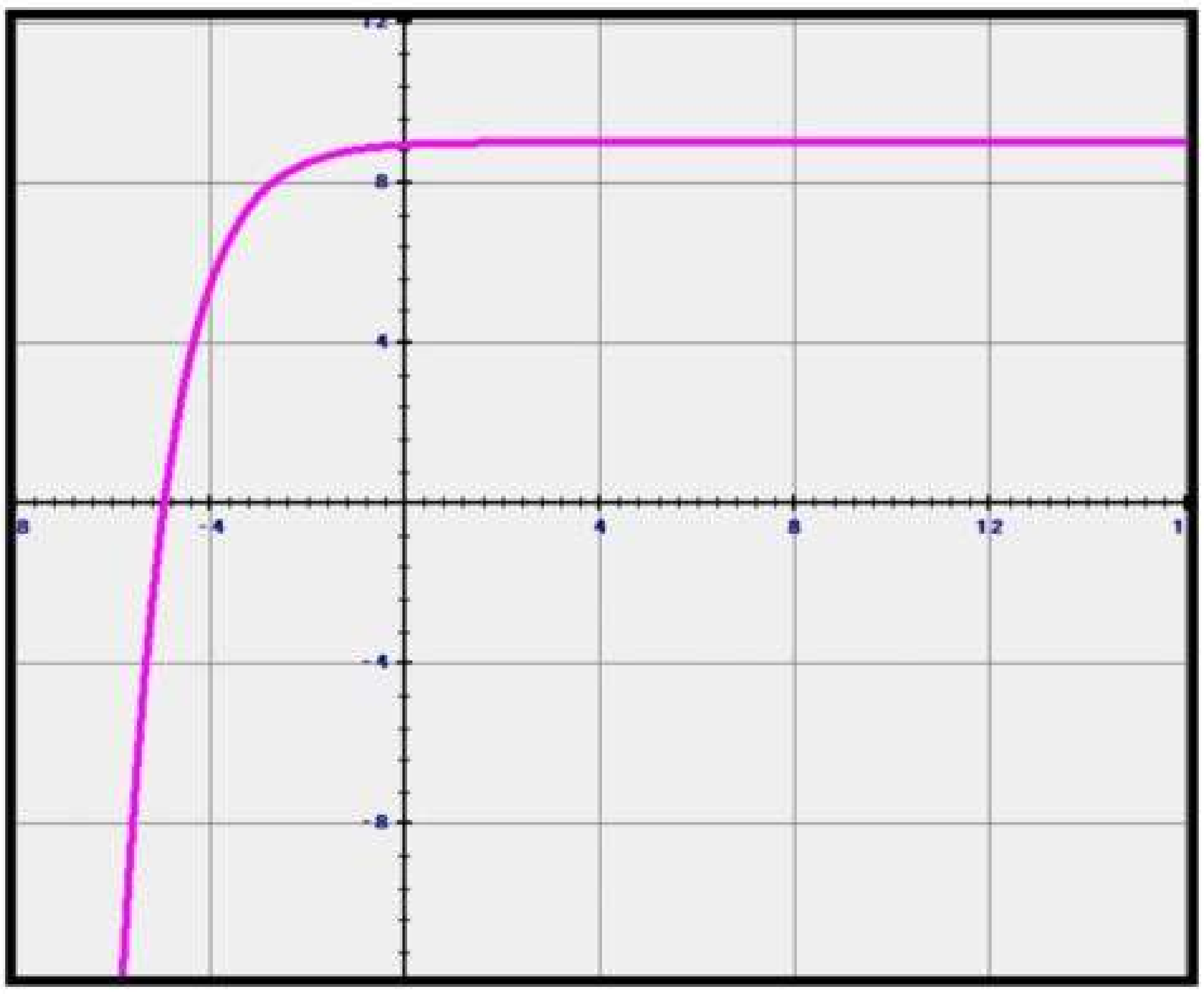
(17)



المجال: R

المدي: $\{y \mid y < 3\}$

(18)



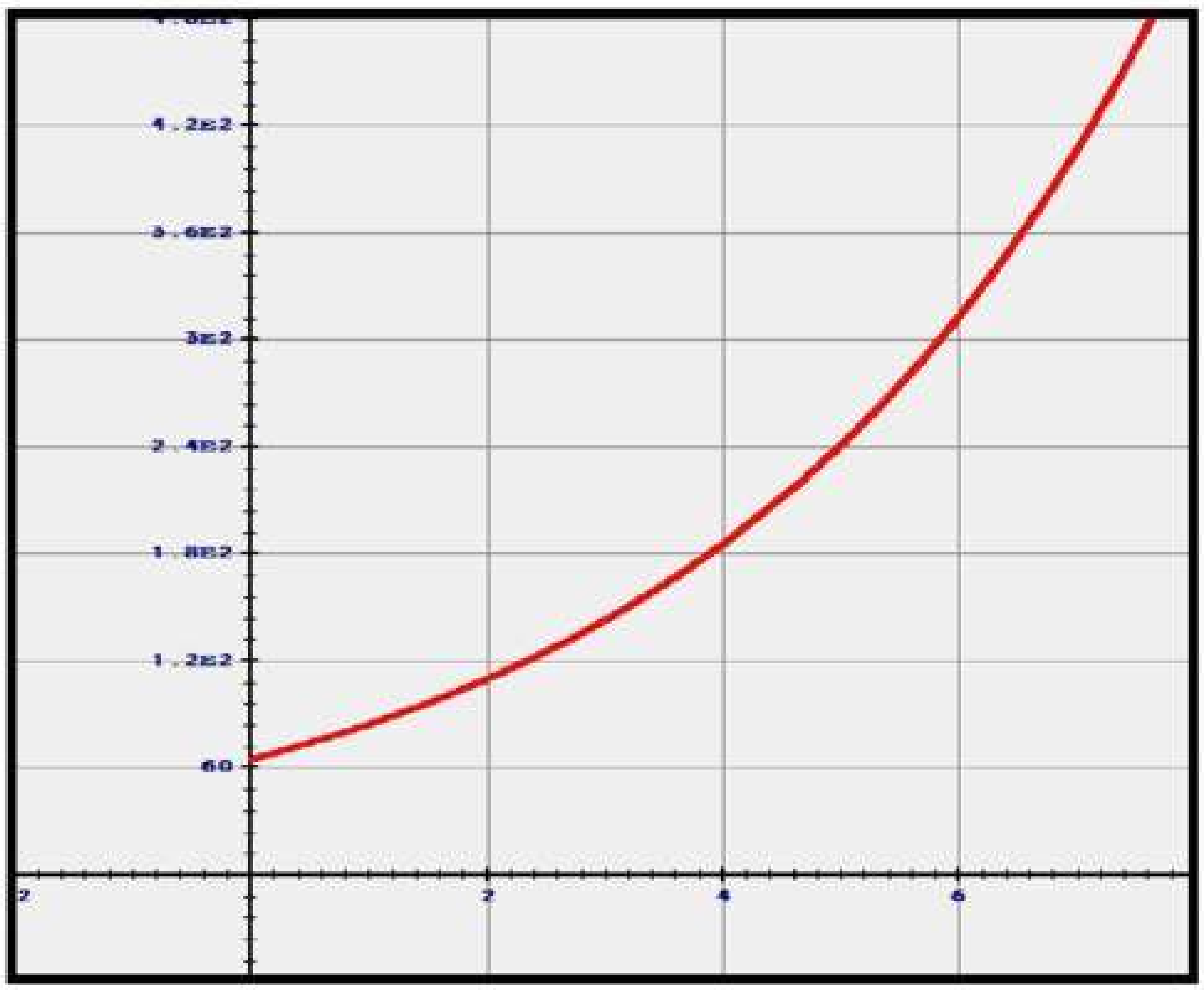
المجال: R

المدي: $\{y \mid y < 4\}$

(19) **علوم:**

المعادلة $y = 65(1.3)^t$

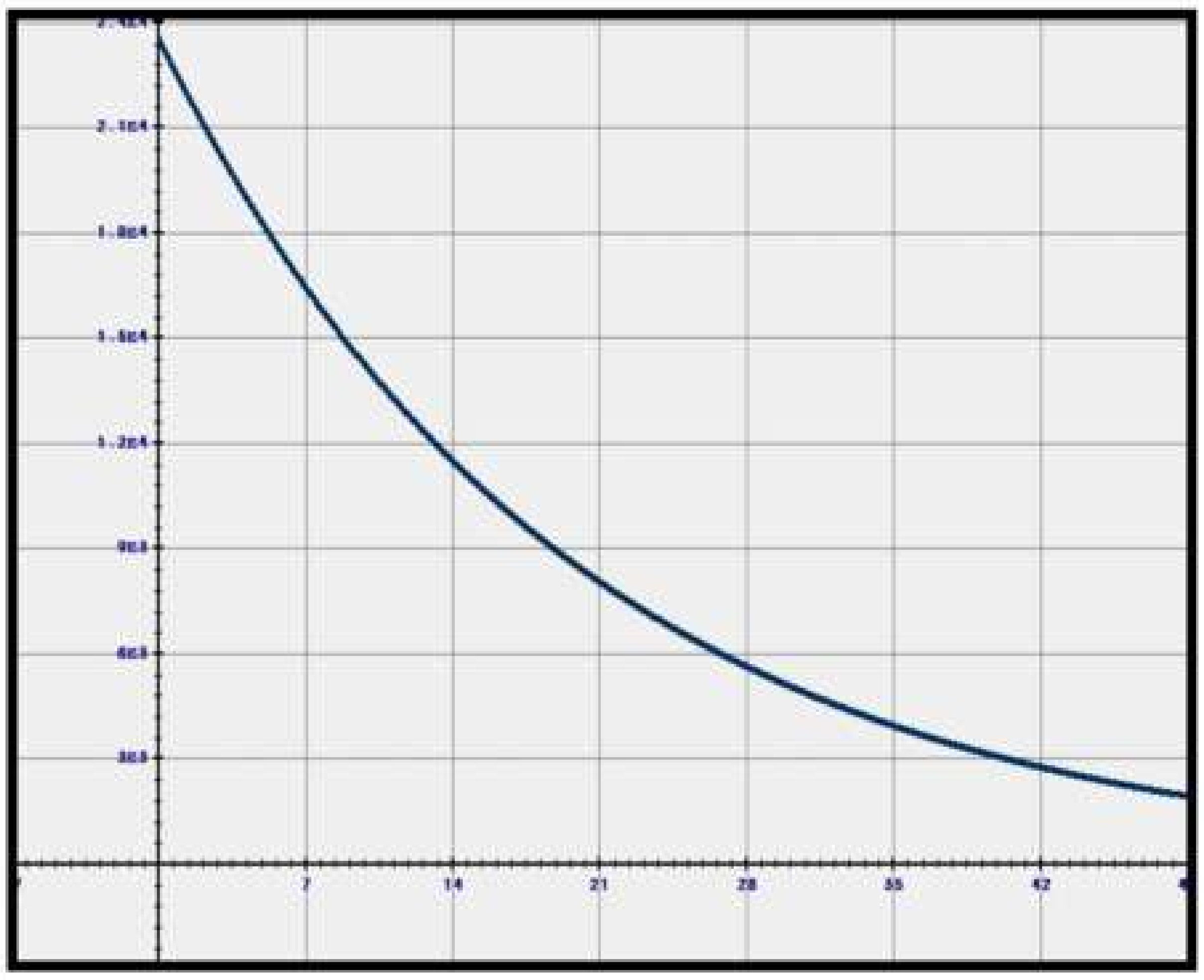
عدد النحل بعد 10 اسابيع 896 نحلة.



(20) **كرة سلة:**

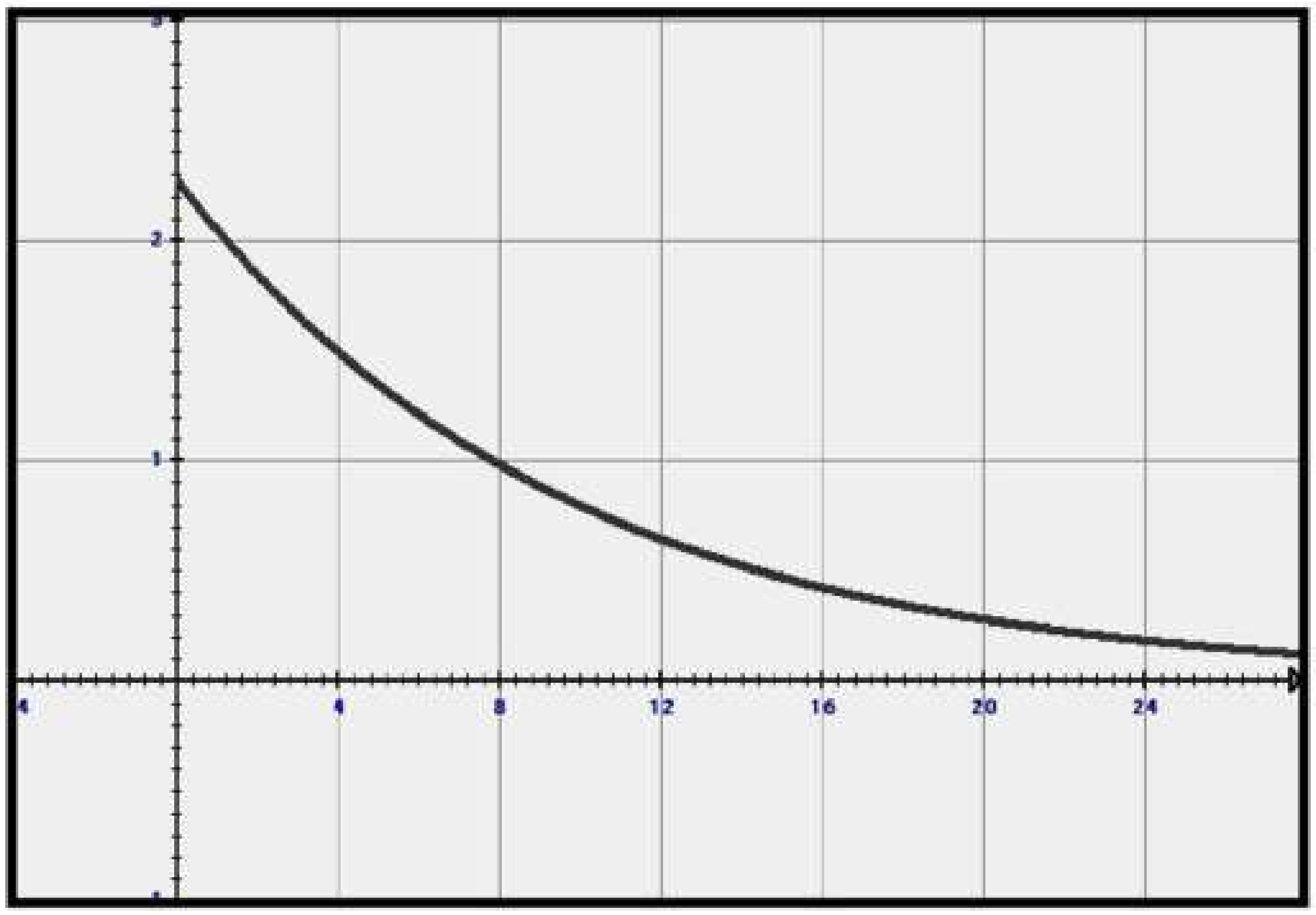
المعادلة $y = 23500(0.95)^t$

ويكون الحضور 10887 تقريباً في المباراة رقم 15



(21) **هواتف:**

(*a* **بيانيا:**



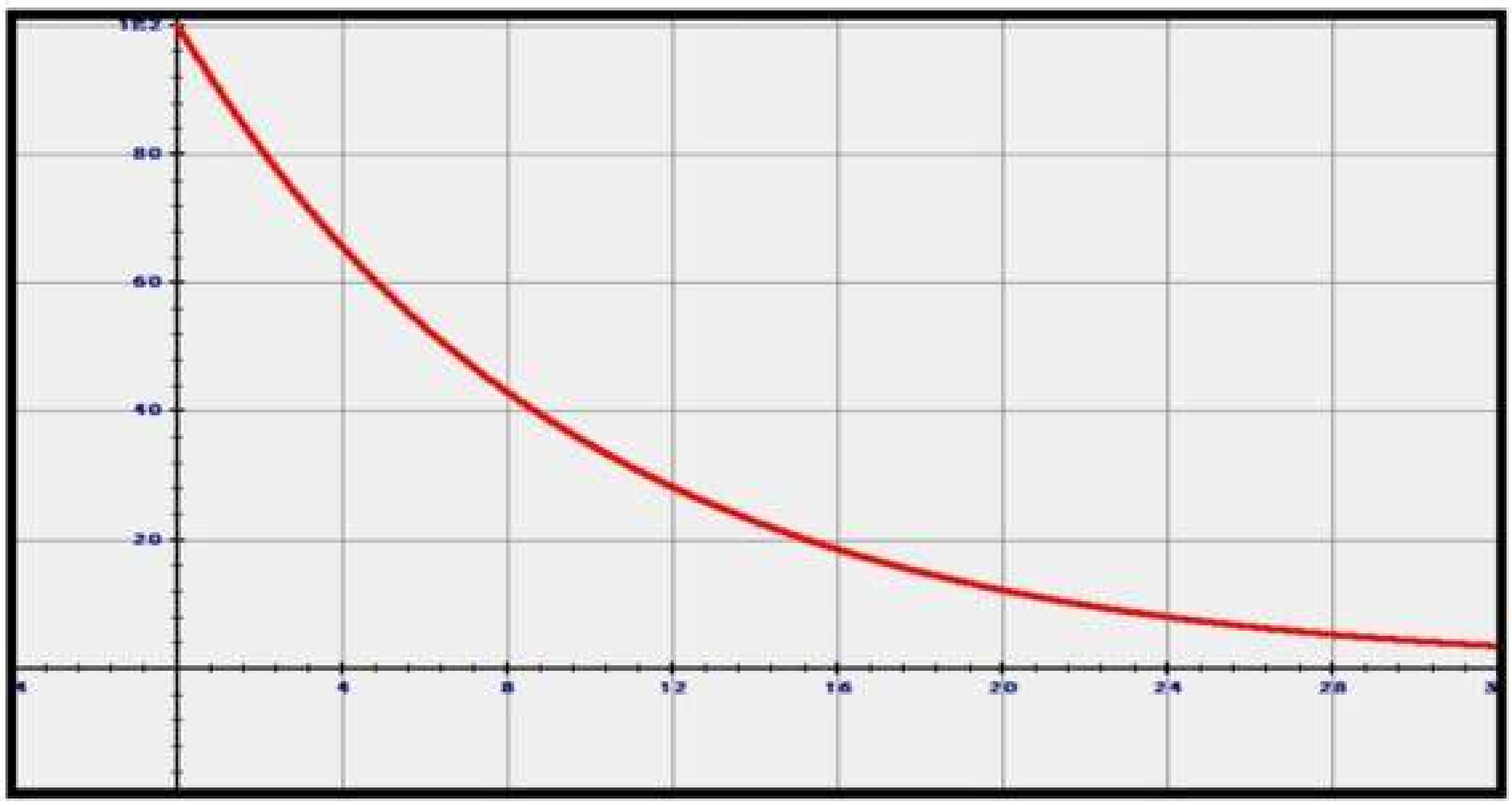
(*b* **لفظيا:**

يمثل المقطع $P(x)$ عدد الهواتف العمومية عام 1420 هـ وخط التقارب هو المحور x، ويتناقص عدد الهواتف العمومية ليقترب من 0 ولن يصل إلى 0، وذلك منطقي لأنة سيكون هناك حاجة دائما للهواتف العمومية.

---

(22) **صحة:**

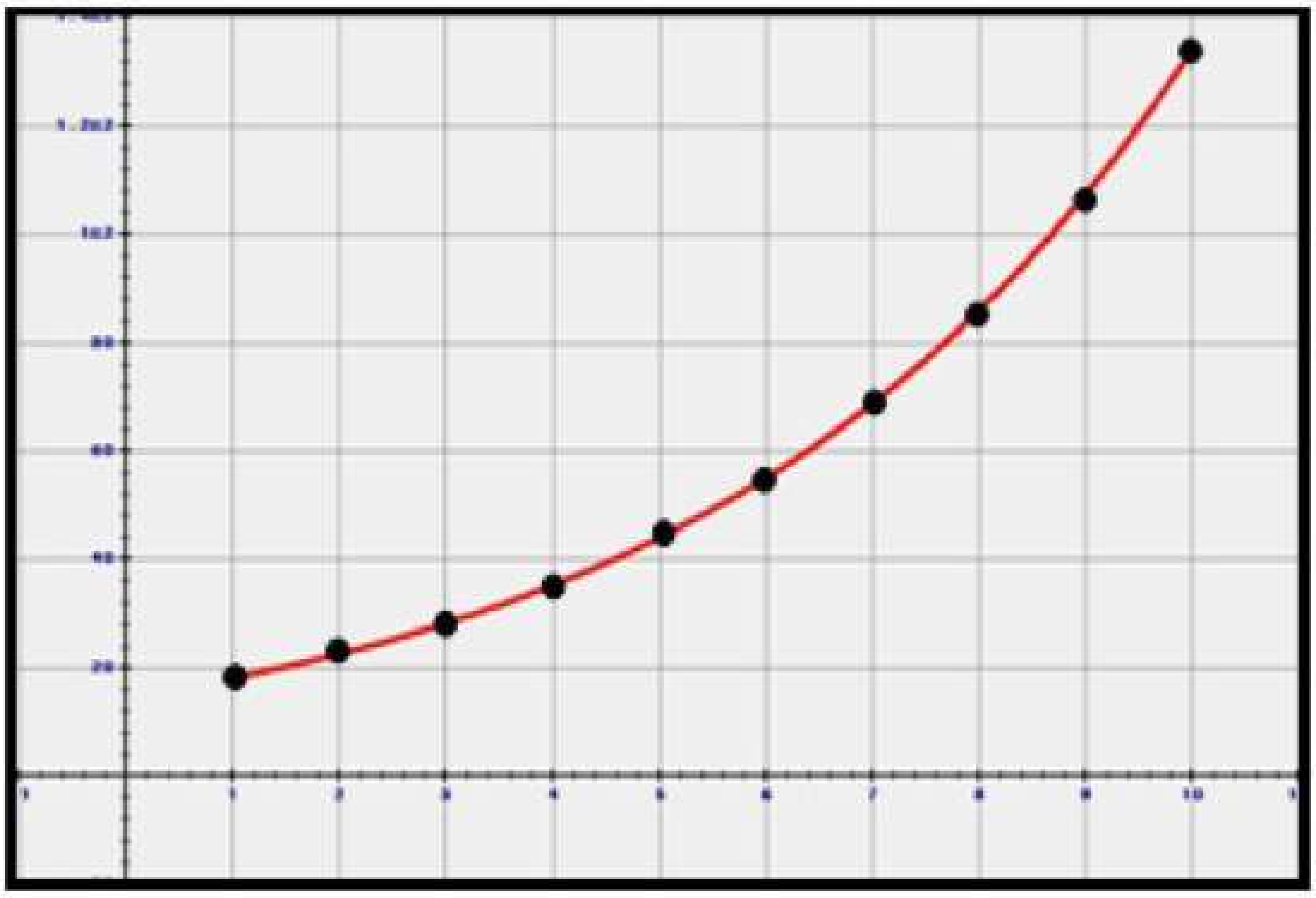
(*a* **بيانياً:**



(*b* **بعد اليوم السادس**

(*c* **أقل من 40Ä**

(23) نظرية الأعداد:



a) $f\left(x\right)=18\left(1.25\right)^{x-1}$

b) ⟵⟵⟵

c) الحد العاشر = **134**

إذا كانت $f\left(x\right)$ هي الدالة الرئيسية (الأم) لكل دالة ممثلة بيانياً أدناه، التمثيل البياني للدالة $g\left(x\right)$ هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f\left(x\right)$، فأوجد الدالة $g\left(x\right)$:

(24)

$$f\left(x\right)=2^{x}$$

$$g\left(x\right)=4\left(2\right)^{x-3}=\frac{1}{2}\left(2\right)^{x}$$

(25)

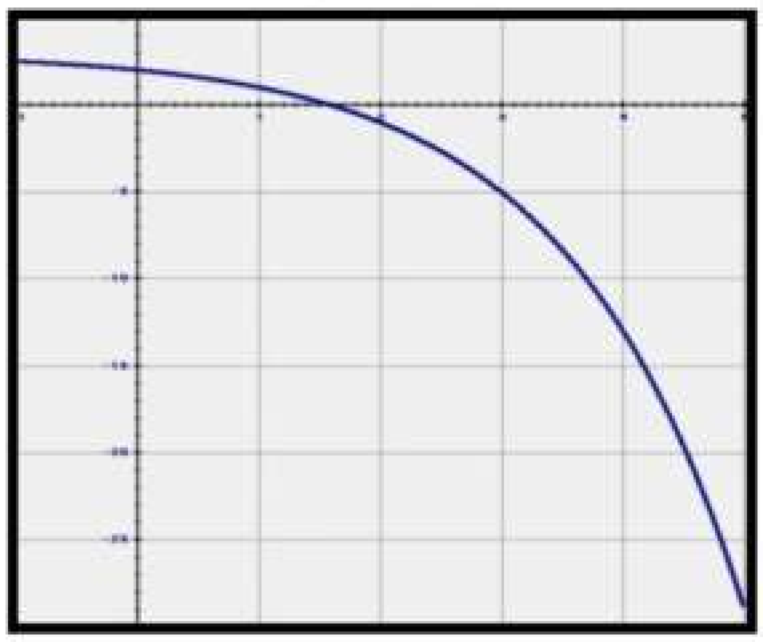
$$f\left(x\right)=4^{x}$$

$$g\left(x\right)=-2\left(4\right)^{x+1}+3$$

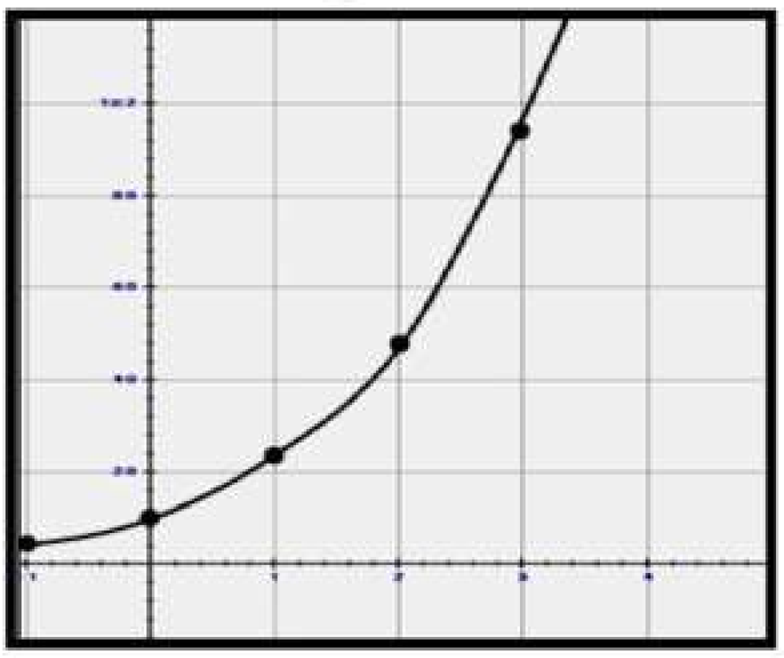
(26) تمثيلات متعددة:

a) بيانيا:

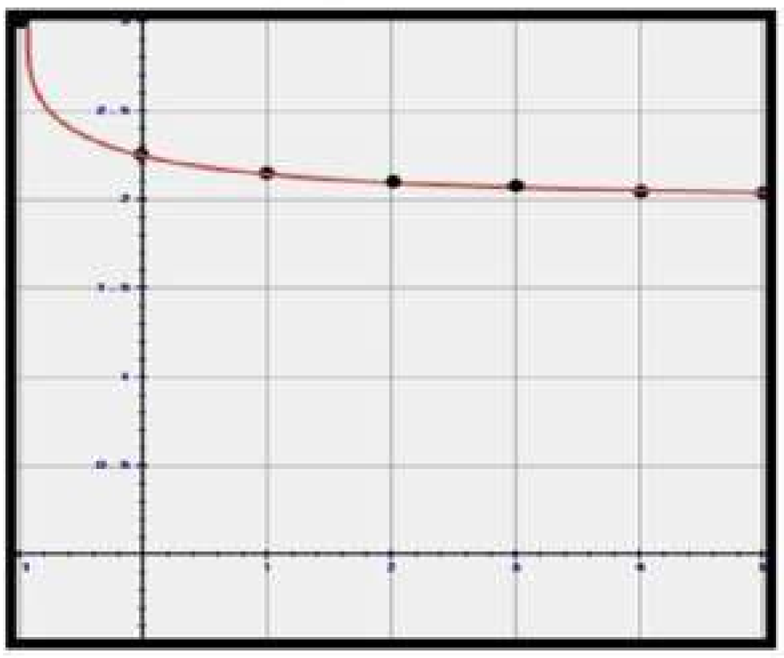
$f(x)$



$g(x)$



$h(x)$



b) لفظيا:

ثمثيل الدالة $f(x)$ البياني هو إنعكاس في المحور x وقيم المخرجات في الجدول سالبة.

c) تحليليا:

$h(x)$

d) تحليليا:

$f(x)$ و $g(x)$ دالتي نمو أسي على حين أن $h(x)$ دالة اضمحلال أسي والقيم المطلقة للمخرجات متزايدة لدوال النمو الأسي ومتناقصة لدوال الاضمحلال.

(27) مدارس:

$$1424-1335=89$$

$$N=110(1.055)^t$$

$$N=110(1.055)^{89}$$

$$N=12908$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

(28) تحد:

حيث ان المنحنى يمر بالنقطتين $(0,3)$ اذن مقطع المحور y وقيمة a هو 3

بالتعويض بقيم x و y من النقطة $(1,6)$ في قيم b

$y = ab^x$ دالة اسية

$6 = 3b^1$ بالتعويض عن x بـ 1 و عن y بـ 6 و عن a بـ 3

$6 = 3b^1$

$2 = b$

الدالة الاسية الي منحناها يمر بالنقطتين $(0,3)$ و $(1,6)$ هي $y = (3)(2)^x$

(29) تبرير:

$a)$ صحيحة دائماً، مجال الدالة الأسية هو مجموعة الأعداد الحقيقية لذا فإن $(0,y)$ دائماً موجودة.

$b)$ صحيحة أحياناً، التمثيل البياني للدالة الأسية يقطع المحور x عند $K < 0$

$c)$ صحيحة أحياناً، والدالة ليست أسية إذا كانت $b = 1$ أو $b = -1$

---

(30) اكتشف الخطأ:

ماجد، أهمل عمر الضرب في إشارة سالب.

---

(31) تحد:

حوالي $251\ mg$

---

(32) مسألة مفتوحة:

$b = 10$

---

(33) **أكتب:**

الدالة الرئيسية الأم هي $g(x)=b^x$ يتمدد تمثيلها البياني إذا كانت $|a|>1$ وتتقلص إذا كانت $|a|<1$، ثم تتبعها إنسحاب للتمثيل البياني k وحدة للأعلى إذا كانت k موجبة، وللأسفل إذا كانت سالبة، ثم يتبعها إنسحاب h وحدة يميناً إذا كانت h موجبة و h يساراً إذا كانت سالبة.

مراجعة تراكمية

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة أو ثابتة مقرباً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عددياً:

(34)

الدالة f تتزايد على $(-\infty,-2.7)$ وتتناقص على $(-2.7,0.7)$ وتتزايد على $(0.7,\infty)$

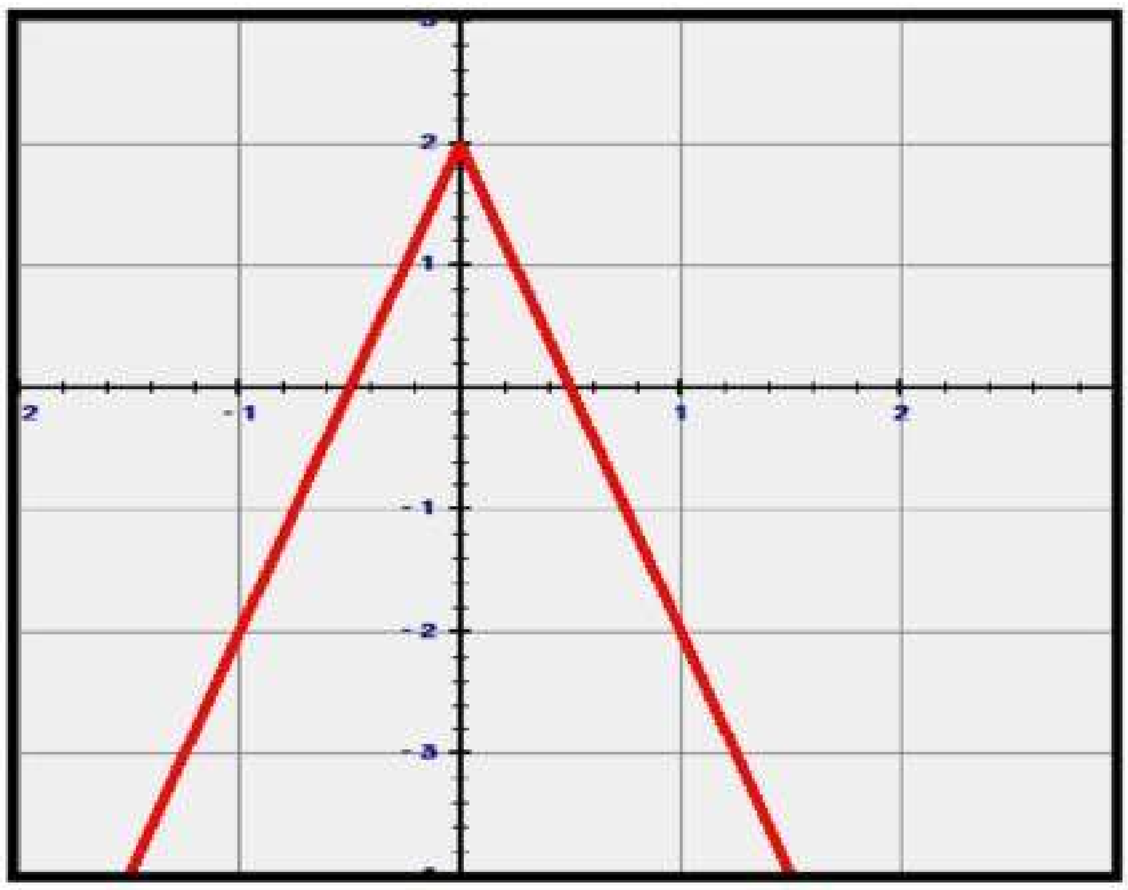
---

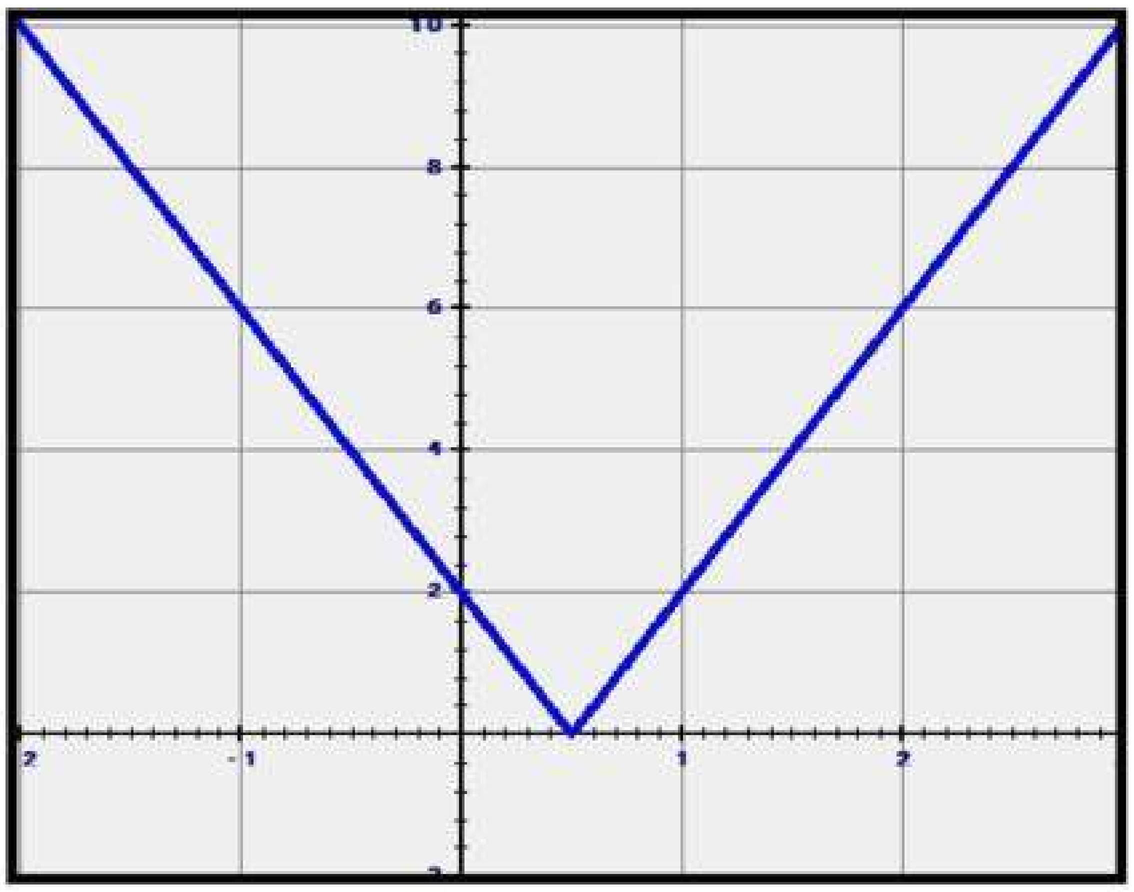
(35)

الدالة f تتزايد على $(-\infty,-4)$ ثم تتزايد على $(-4,\infty)$

استعمل منحنى $f(x)$ الدالة لتمثيل كل من الدالتين $h(x)=f(|x|)$ ، $g(x)=|f(x)|$

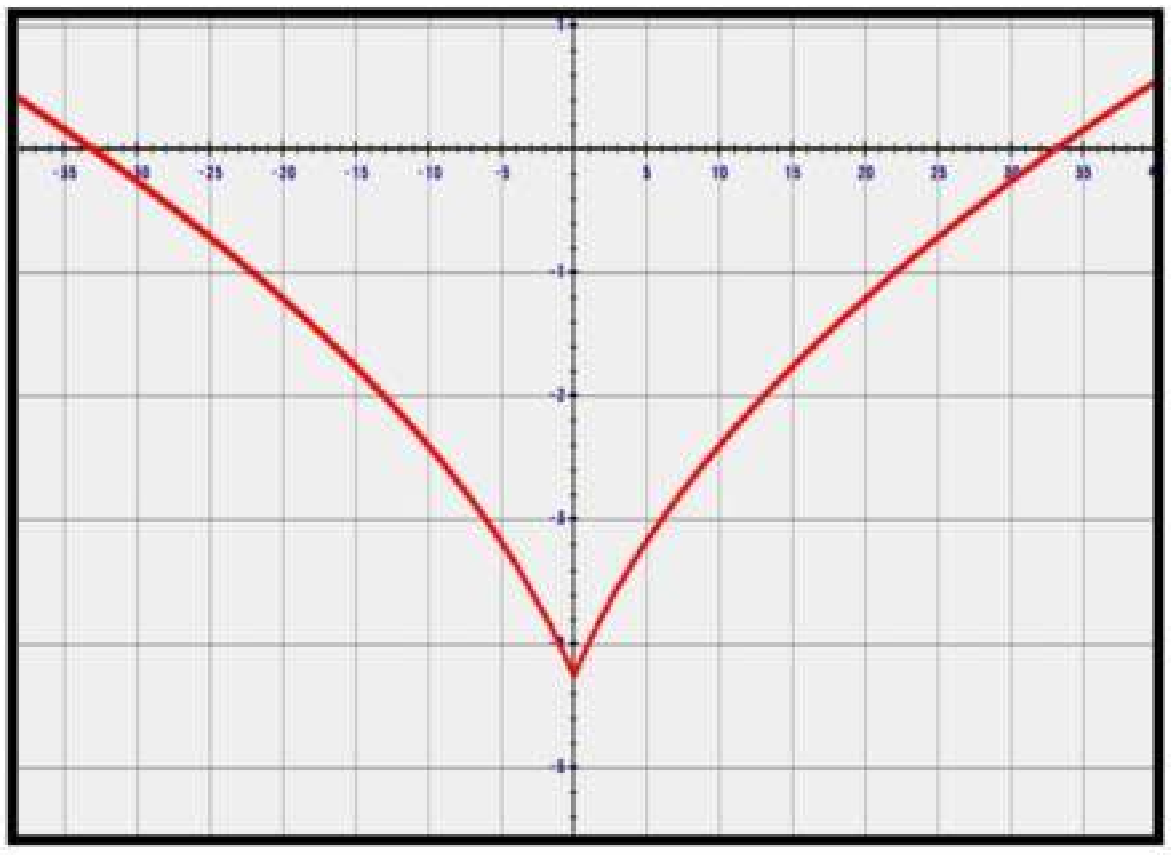
(36) $f(x)=-4x+2$

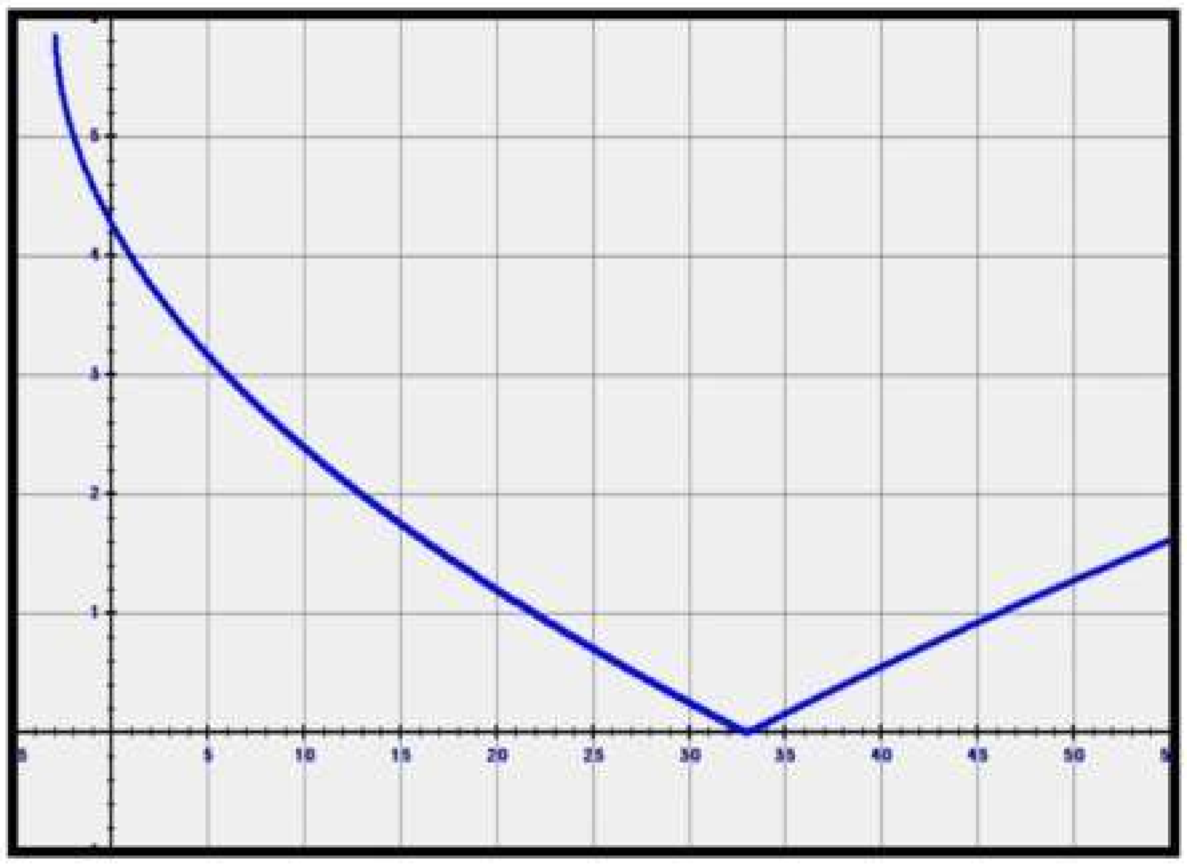




---

(37) $f(x)=\sqrt{x+3}-6$





أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f+g)(x)$ للدالتين $f(x)$، $g(x)$ في

<u>كل مما يأتي وحدد مجال كل من الدوال الناتجة:</u>

(38)

$(f+g)(x) = x^2 - x + 9$ المجال: $(-\infty,\infty)$

$(f-g)(x) = x^2 - 3x - 9$ المجال: $(-\infty,\infty)$

$(f \cdot g)(x) = x^3 + 7x^2 - 18x$ المجال: $(-\infty,\infty)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2-2x}{x+9}$ المجال: $\{x \mid x \neq -9 , x \in R\}$

(39)

$(f+g)(x) = \frac{x}{x+1}$ المجال: $\{x \mid x \neq -1 , x \in R\}$

$(f-g)(x) = \frac{x}{x+1}$ المجال: $\{x \mid x \neq -1 , x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = x^2 - 1$ المجال: $\{x \mid x \neq -1 , x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}$ المجال: $\{x \mid x \neq \pm 1 , x \in R\}$

تدرب على اختبار:

(40)

$A \quad \leftarrow\leftarrow\leftarrow \quad 3$

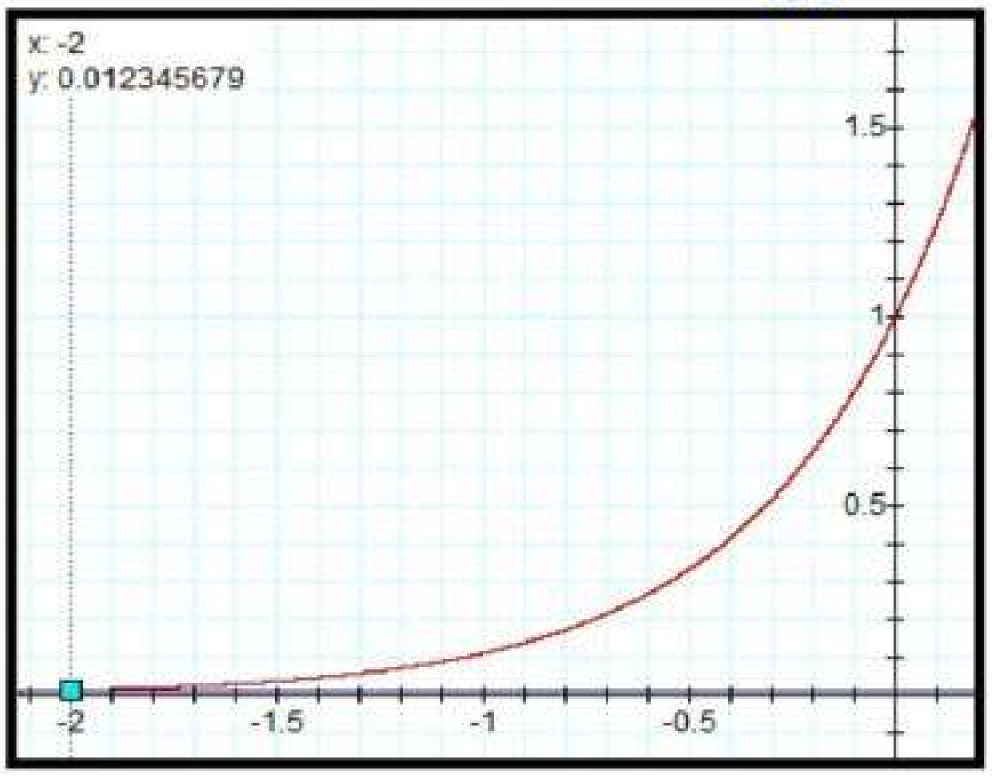
(41)

$C \quad \leftarrow\leftarrow\leftarrow \quad 4\sqrt{3}$

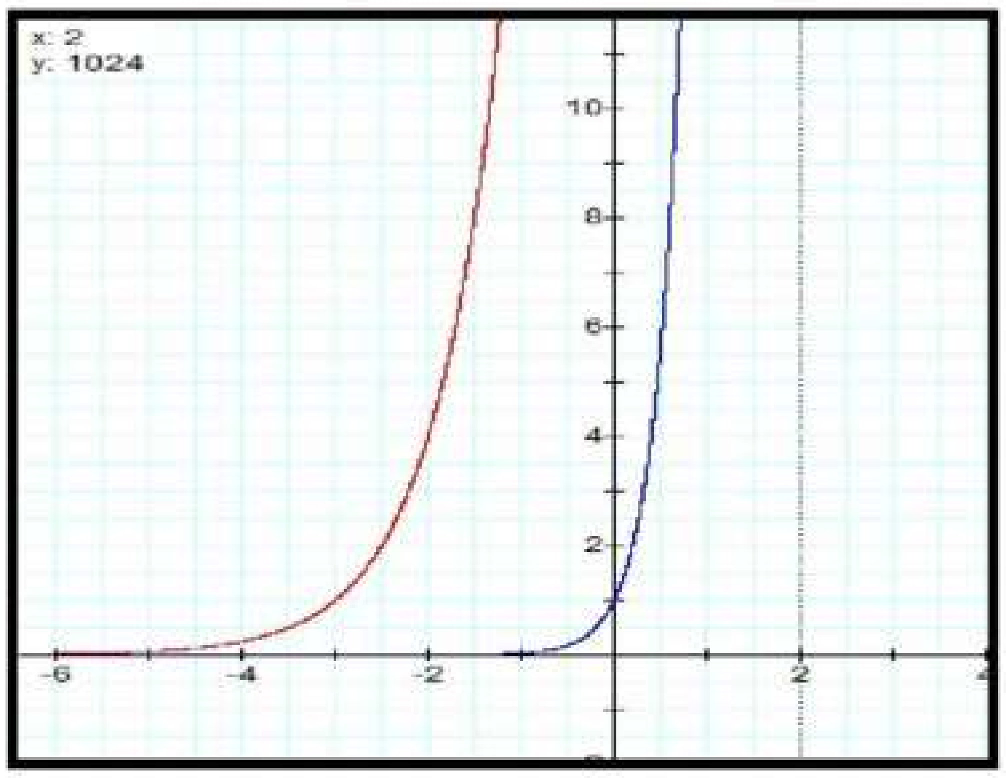
معمل الحاسبة البيانية:
حل المعادلات والمتباينات الأسية

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل معادلة مما يأتي:

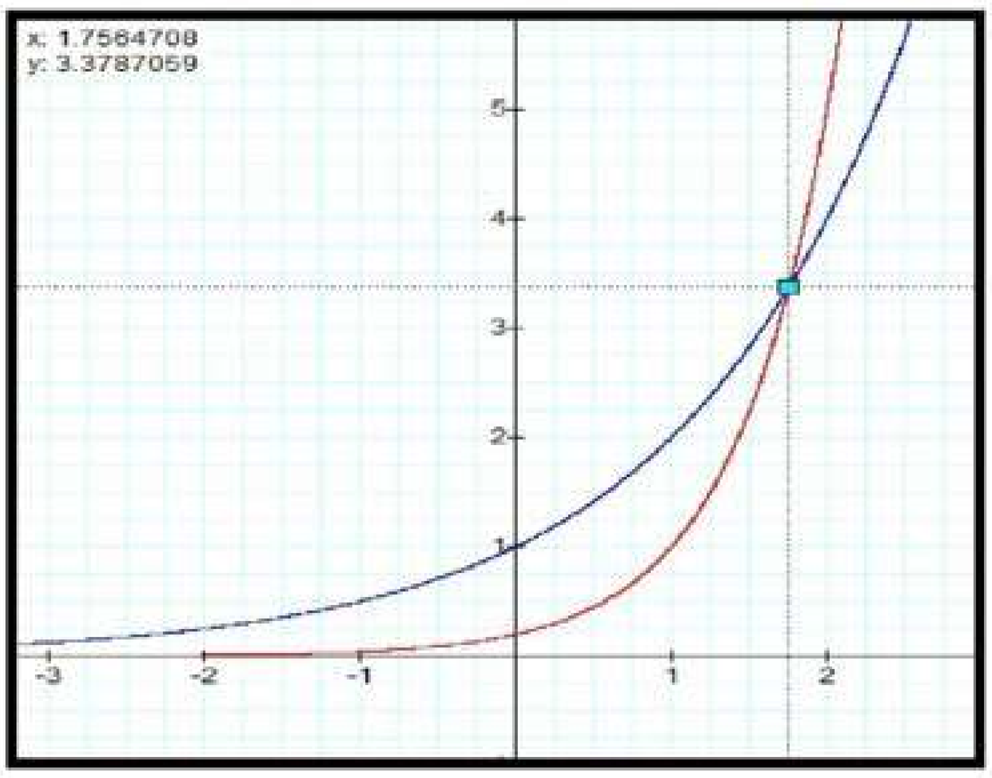
(1) $9^x = \dfrac{1}{81}$ $\quad (x = -2)$



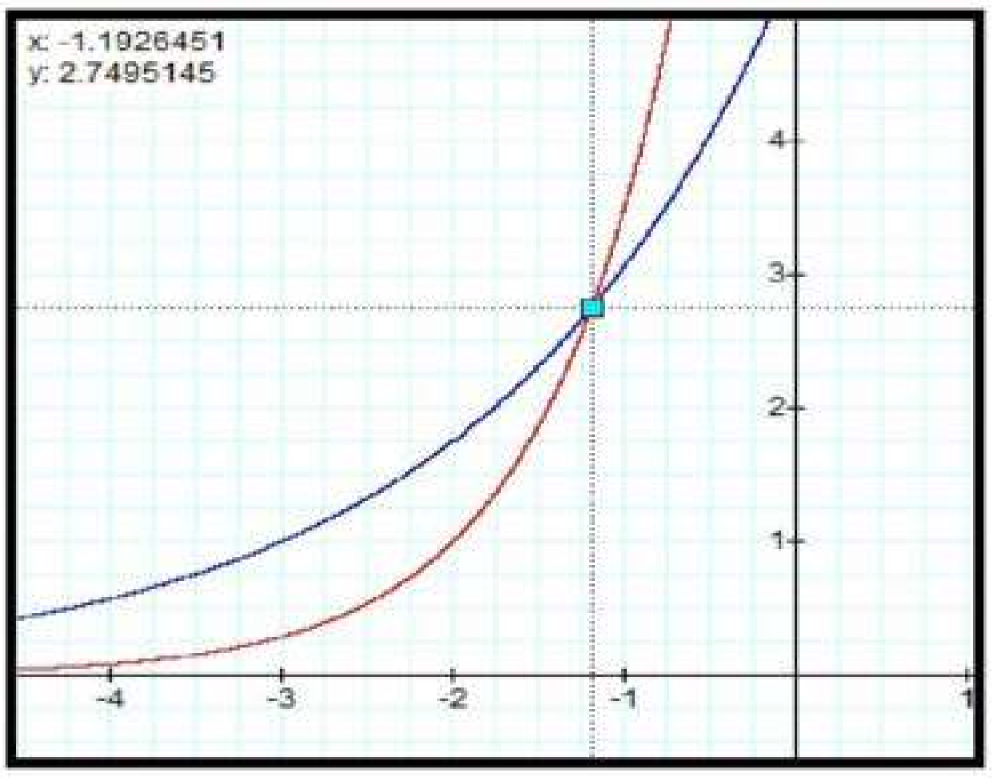
(2) $4^{x+3} = 2^{5x}$ $\quad (x = 2)$



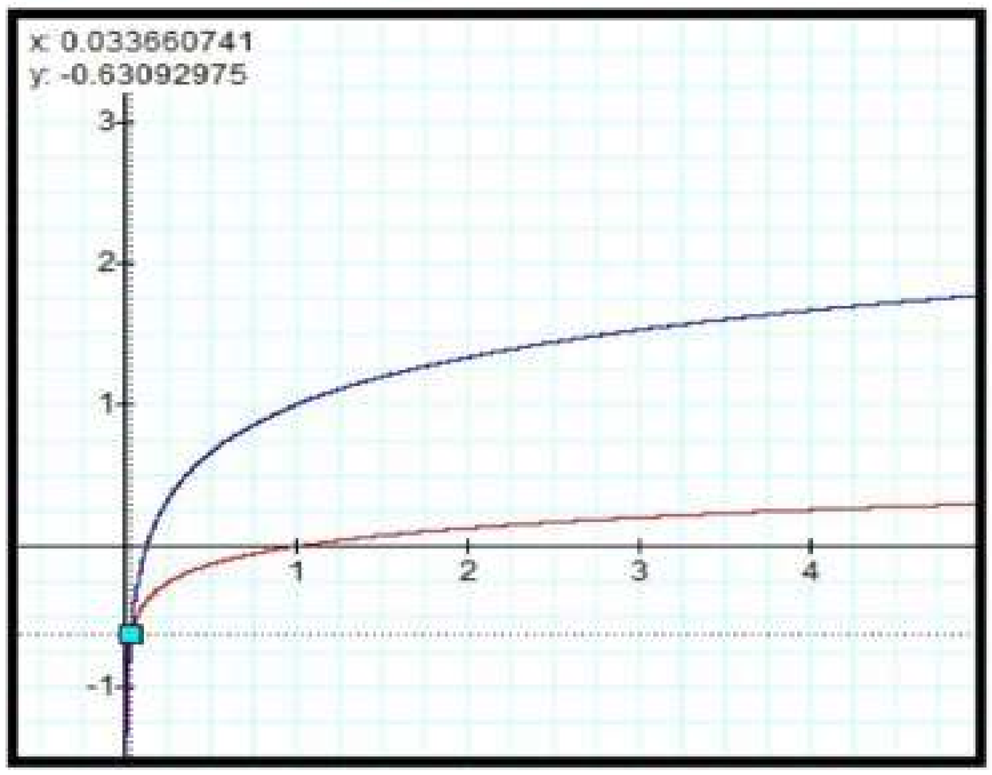
(3) $5^{x-1} = 2^x$ $\quad (x = 1.758)$



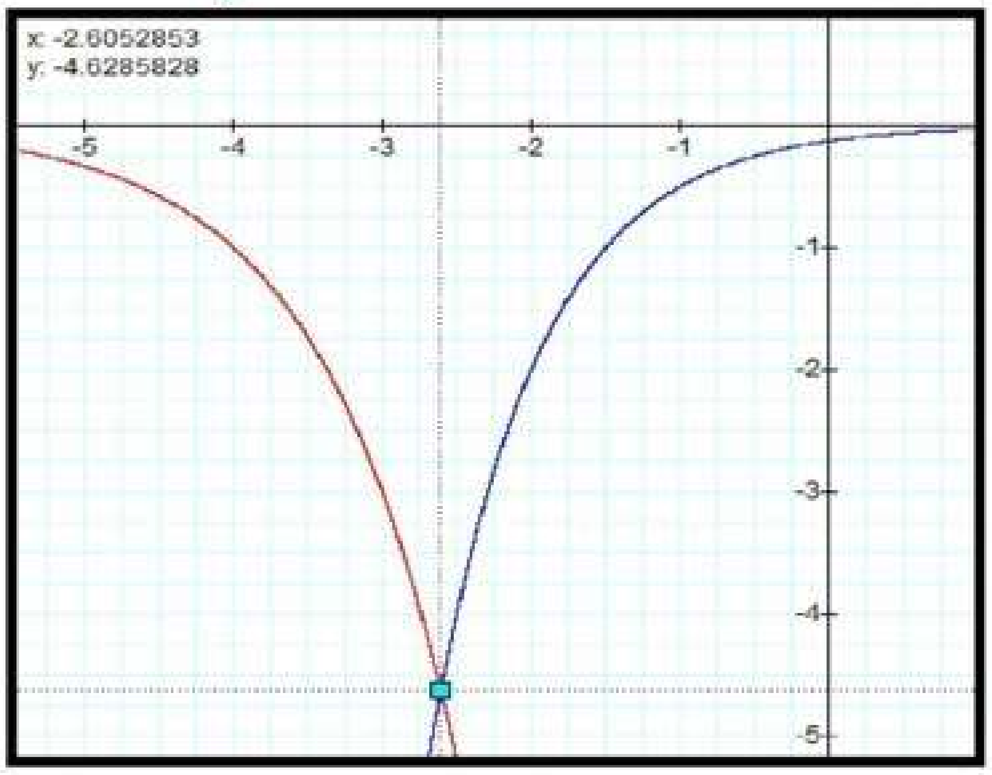
(4) $3.5^{x+2} = 1.75^{x+3}$ $\quad (x = -1.19)$



$(6)\quad 6^{3y} = 8^{y-1} \quad (y = -0.63)$



$(5)\quad -3^{x+4} = -0.5^{2x+3} \quad (x = -2.6)$

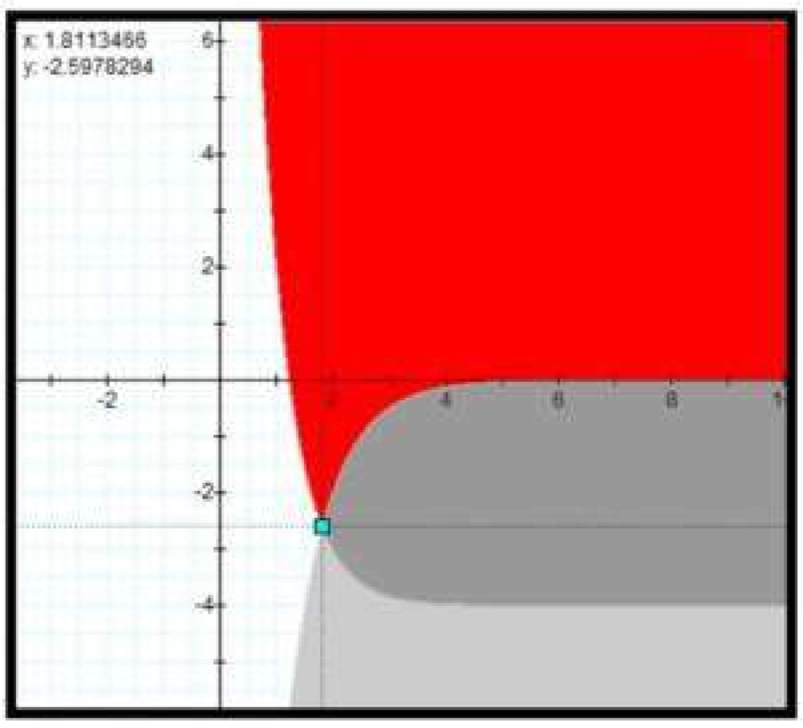


تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل متباينة مما يأتي:

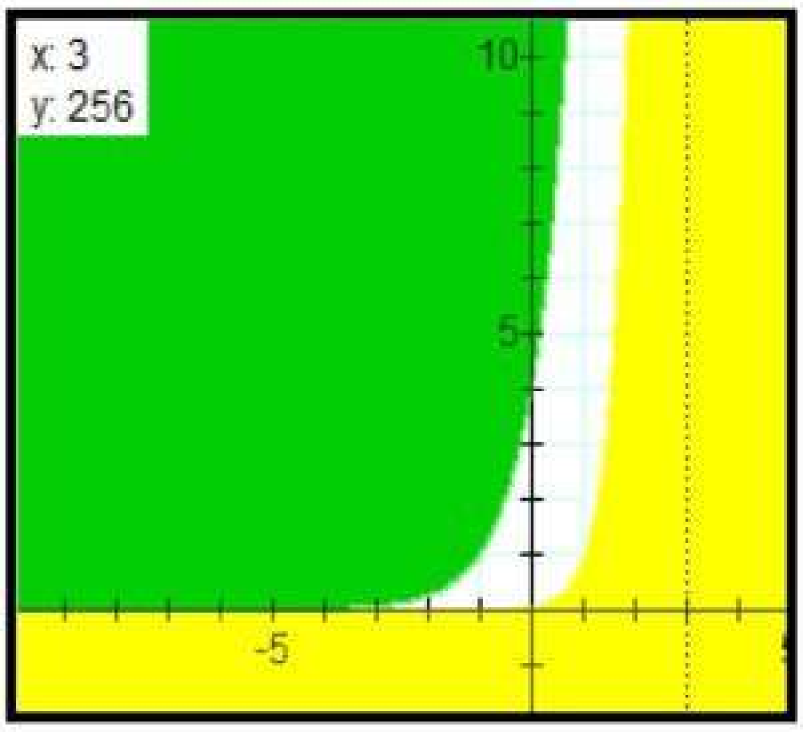
(7)

$\{x \mid x > 1.8\}$



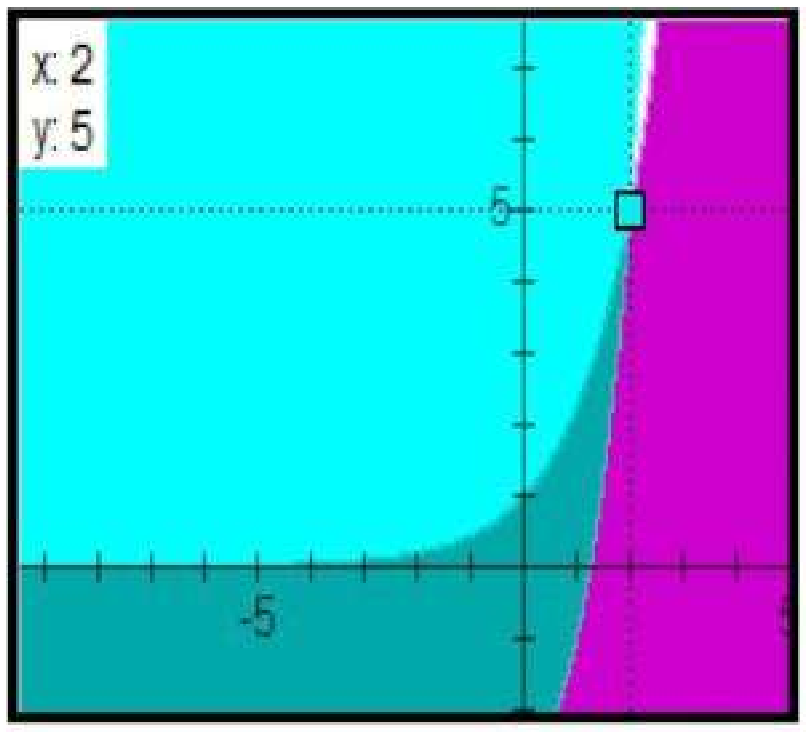
(8)

$\{x|x>3\}$



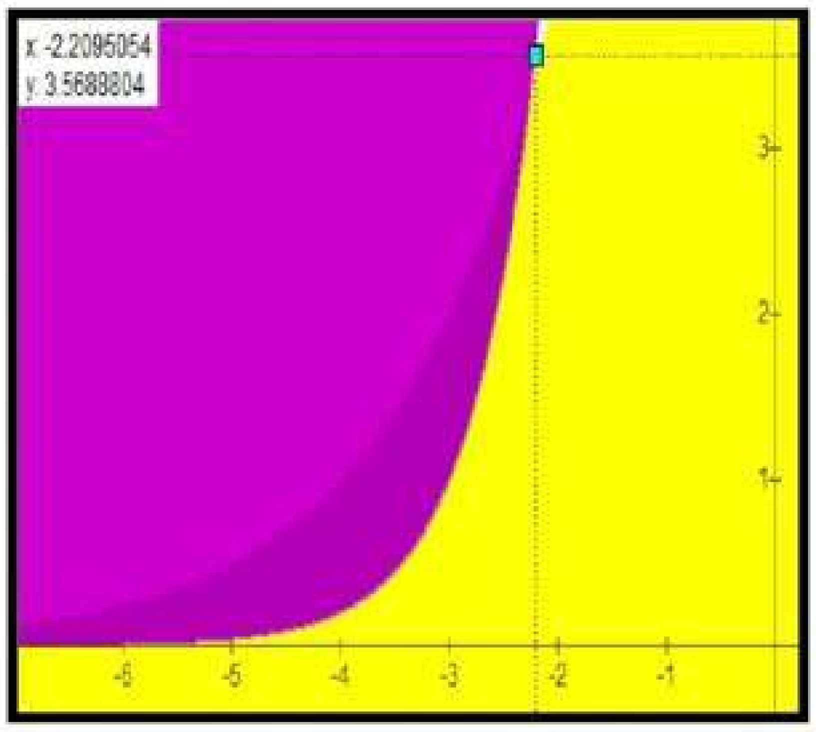
(9)

$\{x|x<2\}$

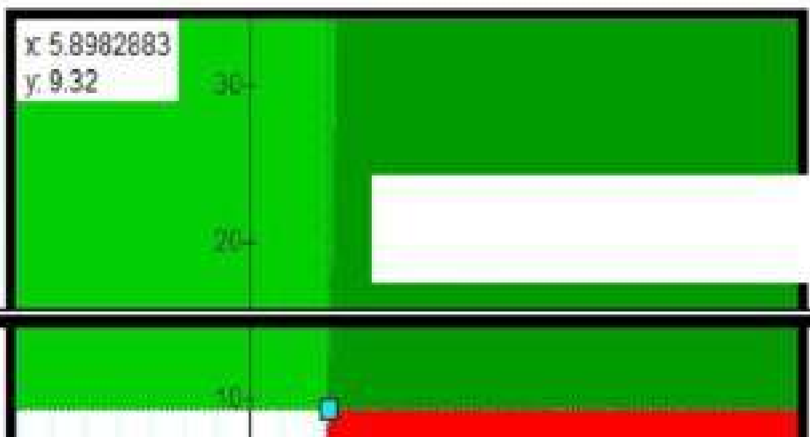


(10)

$\{x|x\leq -2.2\}$

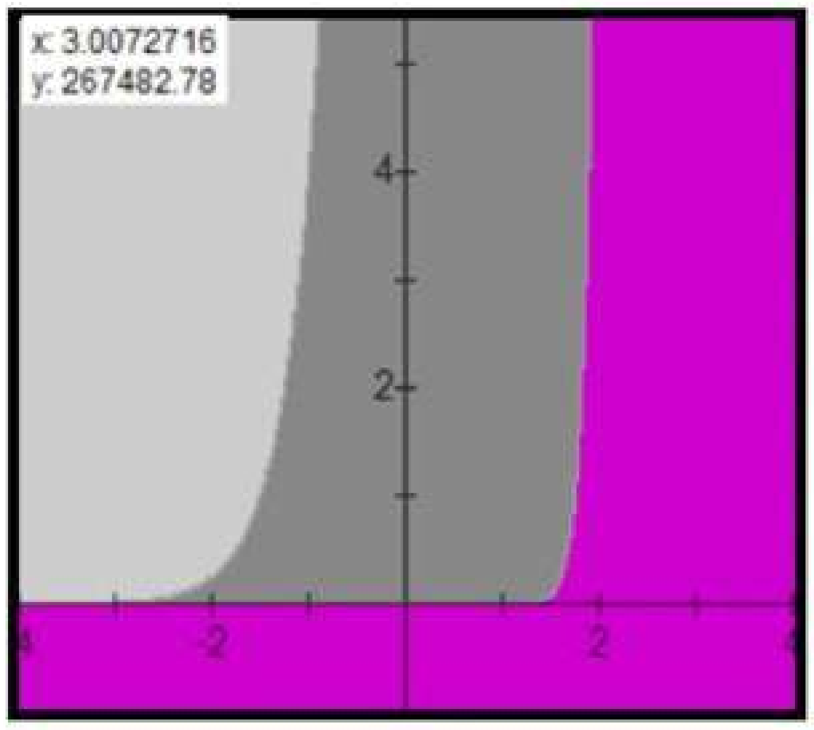


(11)



$\{x | x \geq 5.8983\}$

(12)



$\{x | x < 3.0072716\}$

(13) **أكتب:**

بما أن النظام يتكون من عبارات في كل من الطرفين، فمهما كانت قيم حلول النظام ستحقق أي من المعادلة أو المتباينة.

(2-2)حل المعادلات والمتباينات الأسية

■ **تحقق من فهمك:**

$(1A)$

$$4^{2n-1} = 64 = 4^3$$

$$\therefore\ 2n - 1 = 3$$

$$\therefore\ 2n = 4$$

$$\therefore\ n = 2$$

$(1B)$

$$5^{5x} = 125^{x+2} = 5^{3(x+2)}$$

$$\therefore\ 5x = 3x + 6$$

$$\therefore\ 2x = 6$$

$$\therefore\ x = 3$$

■ **تحقق من فهمك:**

(2) **إعادة تصنيع:**

(2A) $y = 3.2 \times 10^6 (0.6)^x$

(2B) لا شيء.

■ **تحقق من فهمك:**

(3)

$$100000\left(1 + \frac{0.12}{24}\right)^{24.5} = 127117.29$$ ريـــــــالاً

■ **تحقق من فهمك:**

(4)

(4A

$$3^{2x-1} \geq 3^{-5}$$

$$\therefore\ 2x - 1 \geq -5$$

$$\therefore\ 2x \geq -4$$

$$\therefore\ x \geq -2$$

(4B

$$2^{x+2} > 2^{-5}$$

$$\therefore\ x + 2 > -5$$

$$\therefore\ x > -5 - 2$$

$$\therefore\ x > -7$$

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي:

(1)

$$8^{4x+2} = 64 = 8^2$$

$$\therefore\ 4x + 2 = 2$$

$$\therefore\ 4x = 0$$

$$\therefore\ x = 0$$

---

(2)

$$5^{x-6} = 124 = 5^3$$

$$\therefore\ x - 6 = 3$$

$$\therefore\ x = 3 + 6$$

$$\therefore\ x = 9$$

---

(3)

$$3^{5x} = 27^{2x-4} = 3^{3(2x-4)}$$

$$\therefore\ 5x = 6x - 12$$

$$\therefore\ -x = -12$$

$$\therefore\ x = 12$$

(4)

$$16^{2y-3} = 4^{2(2y-3)} = 4^{y+1}$$

$$\therefore\ 4y - 6 = y + 1$$

$$\therefore\ 3y = 7$$

$$\therefore\ y = \frac{7}{3}$$

---

(5)

$$2^{6x} = 32^{x-2} = 2^{5(x-2)}$$

$$\therefore\ 6x = 5x - 10$$

$$\therefore\ x = -10$$

---

(6)

$$49^{x+5} = 7^{2(x+5)} = 7^{8x-6}$$

$$\therefore\ 2x + 10 = 8x - 6$$

$$\therefore\ 6x = 16$$

$$\therefore\ x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

(7)

$$81^{a+2} = 3^{4(a+2)} = 3^{3a+1}$$

$$\therefore\ 4a + 8 = 3a + 1$$

$$\therefore a = 1 - 8$$

$$\therefore\ x = -7$$

---

(8)

$$256^{b+2} = 4^{4(b+2)} = 4^{2-2b}$$

$$\therefore\ 4b + 8 = 2 - 2b$$

$$\therefore 6b = -6$$

$$\therefore\ b = -1$$

---

(9)

$$9^{3c+1} = 3^{2(3c+1)} = 27^{3c-1} = 3^{3(3c-1)}$$
$$\therefore\ 6c+2 = 9c-3$$
$$\therefore\ 3c = 5$$
$$\therefore\ c = \frac{5}{3}$$

---

(10)

$$8^{2y+4} = 16^{y+1}$$
$$\therefore\ 2^{3(2y+4)} = 2^{4(y+1)}$$
$$\therefore\ 6y+12 = 4y+4$$
$$\therefore\ 2y = -8$$
$$\therefore\ y = -4$$

(11) علوم:

a) $C = 2^{\frac{t}{15}}$

b) $C = 2^{\frac{60}{15}} = 2^4 = 16$ خلية

---

(12)

a) $y = 100000(1.045)^x$

b) $y = 100000(1.045)^{12} = 241171.4$ ريـــــال

---

(13)

$70000\left(1+\frac{0.043}{12}\right)^{12.7} = 94533.78$ تقريبا

---

(14)

$$50000\left(1+\frac{0.0225}{24}\right)^{24.6} = 57223.22$$ ريـــــــال

حل كل متباينة مما يأتي:

(15)

$$4^{2x+6} \geq 64^{2x-4}$$
$$\therefore 4^{2x+6} \geq 4^{3(2x-4)}$$
$$\therefore 2x+6 \geq 6x-12$$
$$\therefore 18 \geq 4x$$
$$\therefore 4.5 \geq x$$

(16)

$$25^{y-3} \leq \left(\frac{1}{125}\right)^{y+3}$$
$$\therefore 25^{y-3} \leq 25^{-2(y+3)}$$
$$\therefore y-3 \leq -2y-6$$
$$\therefore 3y \leq -3$$
$$\therefore y \leq -1$$

(17)

$$5^{4} \geq 5^{a+8}$$
$$\therefore 4 \geq a+8$$
$$\therefore -4 \geq a$$

(18)

$$10^{5b+2} > 10^3$$

$$\therefore 5b + 2 > 3$$

$$\therefore 5b > 1$$

$$\therefore b > \frac{1}{5}$$

---

(19)

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$$

$$\therefore 2^{-6(c-2)} < 2^{5(2c)}$$

$$\therefore -6c + 12 < 10c$$

$$\therefore 12 < 16c$$

$$\therefore \frac{12}{16} < c$$

$$\therefore \frac{3}{4} < c$$

---

(20)

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{2(3t+5)} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{5(t-6)}$$

$$\therefore 6t + 10 \geq 5t - 30$$

$$\therefore t \geq -40$$

أكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

(21) $y = 6.4(2.5)^x$

(22) $y = 256(0.75)^x$

(23) $y = 128(4.926)^x$

(24) $y = 144(3.5)^x$

---

(25) علوم:

a)
$$y(15) = 20 + 70(1.071)^{-15}$$
$$= 45.02\ \mathring{c}$$

b)
$$y(30) = 20 + 70(1.071)^{-30}$$
$$= 28.942\ \mathring{c}$$

c) أقل منهما

---

(26) أشجار:

$$d = 1.3h^{1.5}$$

حل كل معادلة أسية مما يأتي:

(27)

$$2^{-4x-1} = 8^{2x+1} = 2^{3(2x+1)}$$

$$\therefore\ -4x-1 = 6x+3$$

$$\therefore\ 10x = -4$$

$$\therefore\ x = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

(28)

$$5^{-x+5} = 25^{3x+2} = 5^{2(3x+2)}$$

$$\therefore\ -x+5 = 6x+4$$

$$\therefore\ 7x = 1$$

$$\therefore\ x = \frac{1}{7}$$

(29)

$$216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$$

$$\therefore\ 6^3 = 6^{-x-3}$$

$$\therefore\ 3 = -x-3$$

$$\therefore\ x = -6$$

(30)

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{3(3x+4)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2(-2x+4)}$$

$$\therefore\ 9x+12=-4x+8$$

$$\therefore\ 13x=-4$$

$$\therefore\ x=-\frac{4}{13}$$

---

(31)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1}=\left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3(x-4)}$$

$$\therefore\ 5x+1=-3x+12$$

$$\therefore\ 8x=11$$

$$\therefore\ x=\frac{11}{8}$$

(32)

$$\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$$

$$\therefore \left(\frac{5}{9}\right)^{2(2x+1)} = \left(\frac{5}{9}\right)^{-3(-3x+1)}$$

$$\therefore\ 4x + 2 = 9x - 3$$

$$\therefore\ 5x = 5$$

$$\therefore\ x = 1$$

---

(33) **سكان:**

a) $y = 2.556(1.0187)^x$

b) تقريباً 6.455 مليار

c) التقدير أكبر من العدد الحقيقي للسكان بمقدار 375 مليون.

b) تقريباً 9.3498 مليار وبما أن التنبؤ بعدد السكان عام 2000 كان أكبر من العدد الحقيقي، فقد يكون هذا التنبؤ أكبر مما يكون علية في الواقع في ذلك الوقت.

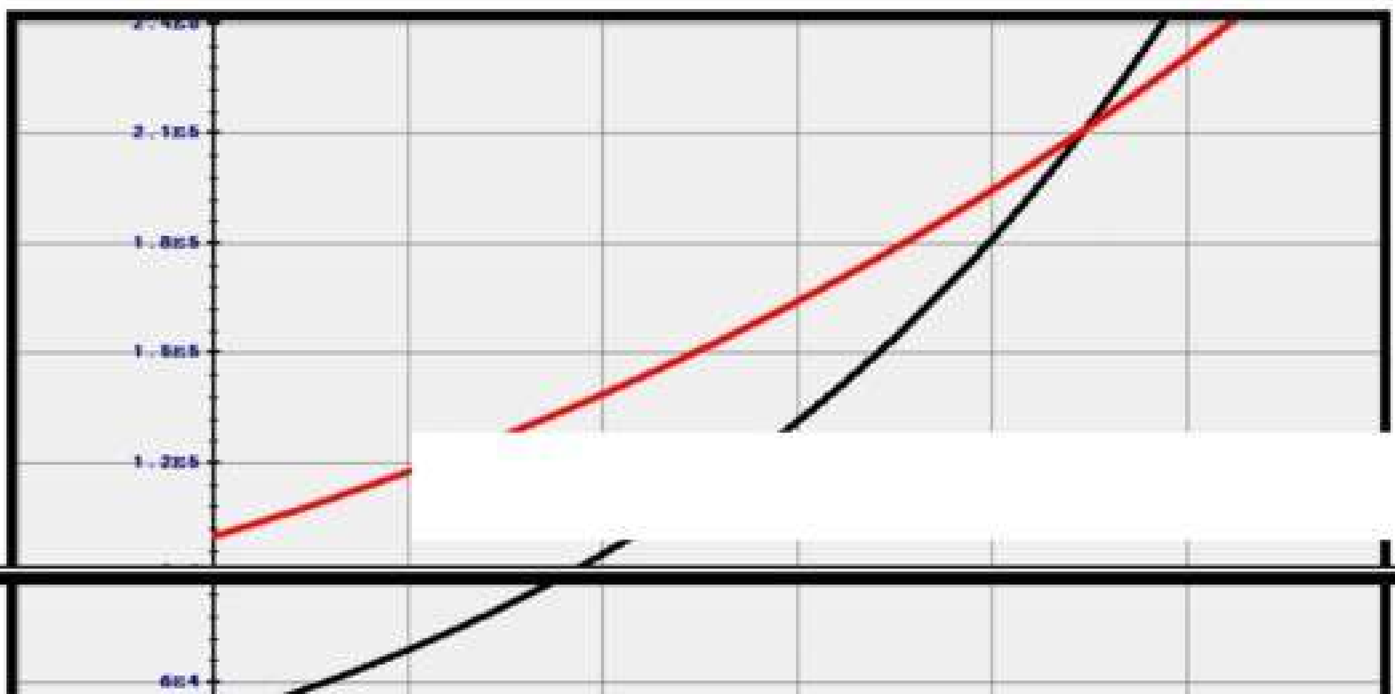
---

(34) **ثقافة مالية:**

a) $$A = 50000\left(\frac{4.065}{4}\right)^{4t}$$

$$B = 50000\left[(1.0035)^{12t} + (1.0004423)^{52t}\right]$$

b)



c) خلال أول 22 سنة يكون الخيار الثاني أفضل؛ لأن المبلغ المتجمع منه أكبر من المبلغ المتجمع من الخيار الأول.

(35) تمثيلات متعددة:

a) حسيّاً: بعد القص الأول 2 ، بعد القص الثاني 4 ، بعد القص الثالث 8 ، بعد القص الرابع 16

b) جدولياً:

عدد القص	1	2	3	4
عدد القطع	2	4	8	16

c) رمزياً: $y = 2^x$

d) تحليلياً: $y = 0.003(2)^x$

e) تحليلياً: 3221225.47 *in*

مسائل مهارات التفكير العليا:

(36) تحد:

$$16^{18}+16^{18}+16^{18}+16^{18}=4^{x}$$

$$\therefore 4\left(16^{18}\right)=4\left(4^{2(18)}\right)=4^{37}=4^{x}$$

$$\therefore \ x=37$$

---

(37) مسألة مفتوحة:

$$4^{x}=16$$

(38)

$$27^{2x}\cdot 81^{x+1}=3^{3(2x)}\cdot 3^{4(x+1)}$$

$$=3^{6x}\cdot 3^{4x+4}=3^{10x+4}$$

$$3^{2x+2}\cdot 9^{4x+1}=3^{2x+2}\cdot 3^{2(4x+1)}$$

$$=3^{2x+2}\cdot 3^{8x+2}=3^{10x+4}$$

B الطرفان متساويان، وهو المطلوب إثباتة.

(39) تبرير:

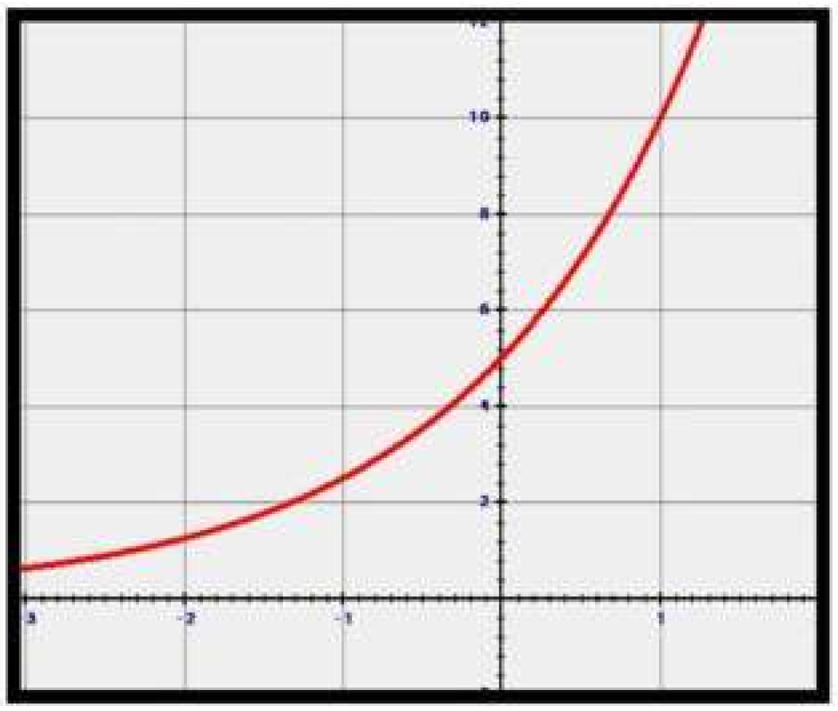
a) صحيحة دائماً، لأن 2^{x} موجبة لجميع قيم x، بينما $-(8)^{20x}$ سالبة لجميع قيم x.

مراجعة تراكمية

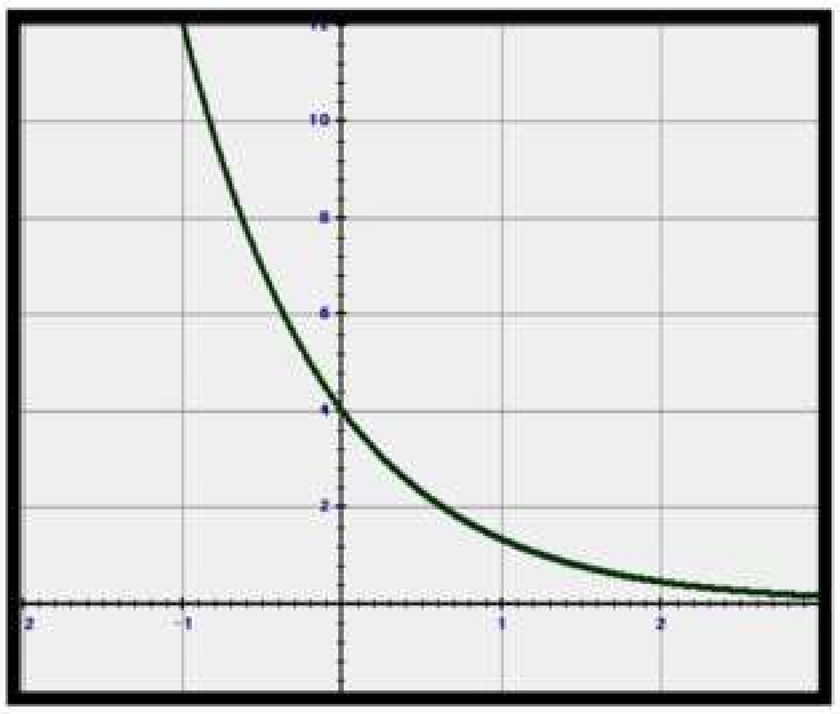
مثل كل دالة مما يأتي بيانياً:

(40)

(41)



(42)



حل كل معادلة مما يأتي:

(43)

$\sqrt{x+5}=3$

$\therefore x+5=9$

$\therefore x=4$

(44)

$\sqrt{3t-5}=7$

$\therefore 3t-5=49$

$\therefore 3t=54$

$\therefore x=18$

(45)

$2x-1=2^4=16$

$\therefore 2x=17$

$\therefore x=\frac{17}{2}$

(46)

$(5x+7)^{\frac{1}{5}}=2$

$\therefore 5x+7=2^5=32$

$\therefore 5x=25$

$\therefore x=5$

(47)

$$3x-2=(-1)^5=-1$$
$$\therefore 3x=1$$
$$\therefore x=\frac{1}{3}$$

(48)

$$7x-1=(-2)^3=-8$$
$$\therefore 7x=-7$$
$$\therefore x=-1$$

أوجد $(x)[g\circ h]$ ، $(x)[h\circ g]$ لكل زوج من الدوال الآتية:

(49)

$$[g\circ h](x)=6x+1$$
$$[h\circ g](x)=-6x+7$$

---

(50)

$$[g\circ h](x)=x+4$$
$$[h\circ g](x)=|x|+4$$

أوجد كل دالة مما يأتي:

(51)

(3-3) المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين و الفرق بينهما

■ تحقق من فهمك:

(1)

(1A

$$\sin(15) = \sin(60-45) = \sin 60 \cos 45 - \cos 60 \sin 45$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(1B

$$\cos(-15) = \cos(45-60) = \cos 60 \cos 45 + \sin 60 \sin 45$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

■ تحقق من فهمك:

(2)

(2A

$$2\sin(245\,t) = 2\sin(315\,t - 30\,t)$$

(2B

$$2\sin(245) = 2\sin(315-30) = 2\left(\sin 315\cos 30 - \cos 315\sin 30\right)$$
$$= \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

■ تحقق من فهمك:

(3)

(3A

$$\sin(90-\theta) = \sin 90\cos\theta - \cos 90\sin\theta$$
$$= 1\times\cos\theta = \cos\theta$$

(3B

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$$
$$= \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(1)

$$\cos 165 = \cos(120+45) = \cos 120 \cos 45 - \sin 120 \sin 45$$

$$= \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(2)

$$\cos 105 = \cos(60+45) = \cos 60 \cos 45 - \sin 60 \sin 45$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

(3)

$$\cos 75 = \cos(30+45) = \cos 30 \cos 45 - \sin 30 \sin 45$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(4)

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(45-30) = \cos 45 \cos 30 + \sin 45 \sin 30$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

(5)

$$\sin(-30) = \sin(60-90) = \sin 60 \cos 90 - \cos 60 \sin 90$$

$$= -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

(6)

$$\sin(-210) = \sin(60-270) = \sin 60 \cos 270 - \cos 60 \sin 270$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(7)

$$\cos(135) = \cos(180-45) = \cos 180 \cos 45 + \sin 180 \sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(8)

$$\tan 195 = \tan(90+105) = \frac{\tan 90 + \tan 105}{1-\tan 90\left(\tan 105\right)}$$

$$= \frac{\tan 90 + \left[\dfrac{\tan 60 + \tan 45}{1-\tan 60 \tan 45}\right]}{1-\tan 90\left[\dfrac{\tan 60 + \tan 45}{1-\tan 60 \tan 45}\right]} = 2-\sqrt{3}$$

(9) **كهرباء:**

(a

$$C = 2\sin\left[90t + 30t\right]$$

(b

$$C = 2\sin(90+30) = 2\left(\sin 90\cos 30 + \cos 90\sin 30\right)$$

$$= \cancel{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3}$$

أمبير

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

(10)

$$\sin(90+\theta) = \sin 90\cos\theta + \cos 90\sin\theta$$

$$= 1\times\cos\theta = \cos\theta$$

(11)

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{3\pi}{2}\sin\theta$$

$$= \sin\frac{3\pi}{2}\times\sin\theta = \sin\theta$$

(12)

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{2}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\cos\theta\times 1}{-\sin\theta\times 1} = -\cot\theta$$

(13)

$$\sin(\theta+\pi)=\sin\theta\cos\pi+\cos\theta\sin\pi$$
$$=\sin\theta\times -1=-\sin\theta$$

(14)

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta$$
$$=-1\times\sin\theta=-\sin\theta$$

(15)

$$\tan(\theta+45)=\frac{\tan\theta+\tan 45}{1-\tan\theta\,\tan 45}$$
$$=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

(16) **إلكترونيات:**

$$y_1+y_2=10\sin\left[2t+210+2t+30\right]$$
$$=10\sin\left[4t+240\right]=0$$

تداخل هدام أي أن كلاً من الموجتين تلاشي الأخرى.

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(17)

$$\tan 165 = \tan(120+45) = \frac{\tan 120 + \tan 45}{1 - \tan 120 \cdot \tan 45}$$
$$= -2 + \sqrt{3}$$

(18)

$$\sec 1275 = \frac{1}{\cos 1275} = \frac{1}{\cos 195} = \frac{1}{\cos(135+60)}$$
$$= \frac{1}{\cos 135 \cos 60 - \sin 135 \sin 60} = \sqrt{2} - \sqrt{6}$$

(19)

$$\sin 735 = \sin(360+375) = \sin 360 \cos 375 + \cos 360 \sin 375$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(20)

$$\tan\left(\frac{23\pi}{12}\right) = -2 + \sqrt{3}$$

(21)

$$\csc\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

(22)

$$\cot\left(\frac{113\pi}{12}\right) = \frac{\cos\left(\frac{113\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{113\pi}{12}\right)} = 2 - \sqrt{3}$$

(23)

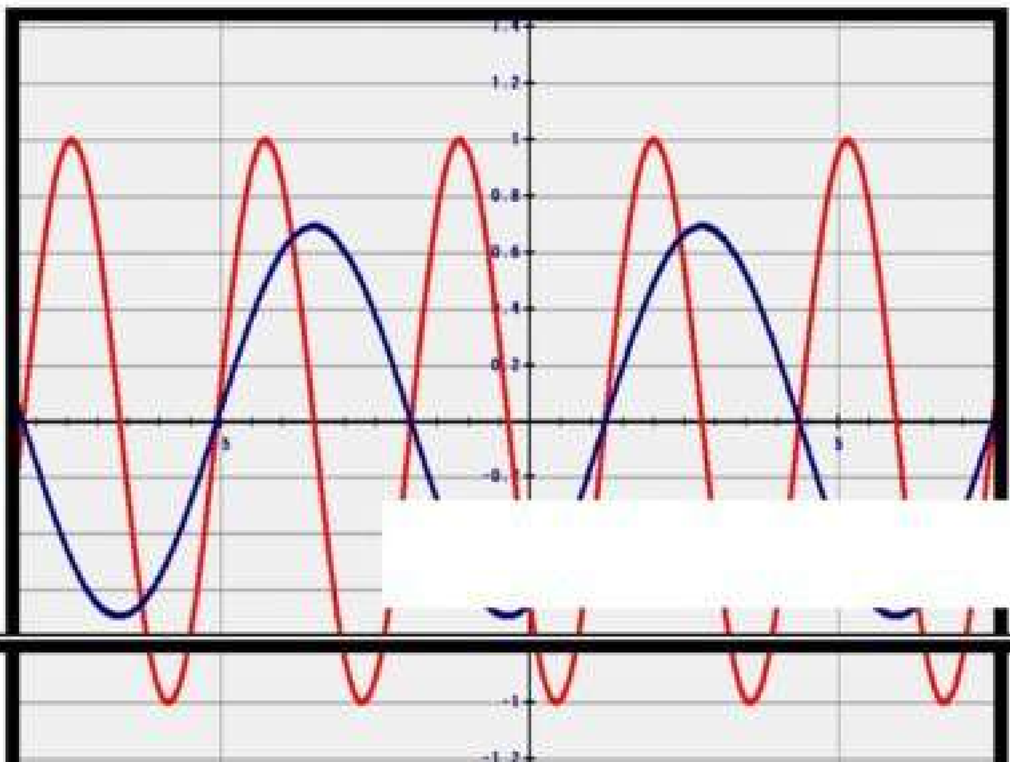
$$\frac{\sin A+\tan\theta\cos A}{\cos A-\tan\theta\sin A}$$
$$=\frac{\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\tan\theta\right)}{1-\tan\theta\frac{\sin A}{\cos A}}$$
$$=\frac{(\tan A+\tan\theta)}{1-\tan\theta\tan A}$$
$$=\tan(A+\theta)$$

(24) تمثيلات متعددة:

a) جدوليا:

A	B	$\sin A$	$\sin B$	$\sin(A+B)$	$\sin A+\sin B$
30	90	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$
45	60	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
90	30	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

b) بيانياً:



c) <u>تحليلياً</u>:

$$\sin(30+45)=\sin(30)+\sin(45)$$

الطرف الأيمن = $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ أي 1.21 تقريباً، وبما أن قيمة جيب أي زاوية لا يمكن أن يكون أكبر من 1 فإن هذة المعادلة خطأ.

<u>أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية</u>:

(25)

$$\frac{\tan A+\tan B}{\sec A\sec B}=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\square\frac{1}{\cos B}}$$

$$=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin\left(A+B\right)$$

(26)

$$\frac{1-\tan A\tan B}{\sec A\sec B}=\frac{1-\frac{\sin A}{\cos A}\square\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\square\frac{1}{\cos B}}$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos\left(A+B\right)$$

(27)

$$\frac{\sec A \sec B}{1+\tan A \tan B}=\frac{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}{1+\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}$$

$$=\frac{1}{\cos A \cos B+\sin A \sin B}$$

$$=\frac{1}{\cos(A-B)}=\sec(A-B)$$

(28)

$$\sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$=(\sin A \cos B+\cos A \sin B)(\sin A \cos B-\cos A \sin B)$$

$$=(\sin A \cos B)^2-(\cos A \sin B)^2$$

$$=\sin^2 A \cos^2 B-\sin^2 B \cos^2 A$$

$$=\sin^2 A \cos^2 B+\sin^2 A \sin^2 B-\sin^2 A \sin^2 B-\sin^2 B \cos^2 A$$

$$=\sin^2 A\left(\cos^2 B+\sin^2 B\right)-\sin^2 B\left(\sin^2 A+\cos^2 A\right)$$

$$=\sin^2 A \times 1-1\times \sin^2 B=\sin^2 A-\sin^2 B$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

(29) تبرير:

$$\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)\cos(\frac{\pi}{3}+\theta)-\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)\sin(\frac{\pi}{3}+\theta)$$

$$=\sin\left(\cancel{\frac{\pi}{3}}-\theta-\cancel{\frac{\pi}{3}}-\theta\right)=\sin(-2\theta)$$

(30) تحد:

$$\cot(A+B)=\frac{1}{\tan(A+B)}=\frac{1}{\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}}$$

$$=\frac{1-\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{1-\frac{1}{\cot A}\,\square\,\frac{1}{\cot B}}{\frac{1}{\cot A}+\frac{1}{\cot B}}$$

$$=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$$

(31) برهان:

$$d=\sqrt{(\cos A-\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2}$$

$$\therefore d^2=\cos^2 A-2\cos A\cos B+\cos^2 B+\sin^2 A-2\sin A\sin B+\sin^2 B$$

$$\therefore d^2=1+1-2\cos A\cos B-2\sin A\sin B$$

$$\therefore d^2=2-2[\cos A\cos B+\sin A\sin B]$$

$$\therefore d^2=2-2\cos(A+B)$$

(32) أكتب:

قد تختلف الإجابات من فرد لآخر تبعاً لوجهة نظره.

(33) مسألة مفتوحة:

$A = 35$, $B = 60$, $\mathrm{C} = 85$

$0.7002 + 1.7321 + 11.4301 = 13.86$

مراجعة تراكمية

بسط كل من العبارتين الآتيتين:

(34)

$$\sin\theta\csc\theta-\cos^2\theta$$
$$=\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}-\cos^2\theta$$
$$=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$$

(35)

$$\cos^2\theta\sec\theta\csc\theta$$
$$=\frac{\cos^{\cancel{2}}\theta}{\sin\theta\cancel{\cos\theta}}=\cot\theta$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(36) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(37) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

(38) $\frac{\sqrt{193}}{12}$

(39) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$

(40) $\frac{\sqrt{39}}{4}$

أثبت صحة كل من المتطابقتين الآتيتين:

(41)

$$\frac{\sin\theta}{\tan\theta}+\frac{\cos\theta}{\cot\theta}=\frac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}+\frac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$=\frac{\cos\theta\cancel{\sin\theta}}{\cancel{\sin\theta}}+\frac{\sin\theta\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\cos\theta}}$$

$$=\cos\theta+\sin\theta$$

(42)

$$\sec\theta(\sec\theta-\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)=\frac{1}{\cos^2\theta}-1$$

$$=\sec^2\theta=\tan^2\theta$$

تدرب على إختبار

(43)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \longleftarrow\!\!\!\longleftarrow\!\!\!\longleftarrow B$$

(44)

$$\cos\theta=-0.3 \qquad \therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{91}}{10} \qquad \longleftarrow\!\!\!\longleftarrow\!\!\!\longleftarrow$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{3\sqrt{91}}{91}$$

إختبار منتصف الفصل

بسط كل عبارة مما يأتي:

(1)

$$\cot\theta\sec\theta$$

$$=\frac{\cancel{\cos\theta}}{\sin\theta}\square\frac{1}{\cancel{\cos\theta}}=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$$

(2)

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=1$$

(3)

$$\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}=\cos\theta$$

(4)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta=\cancel{\sin\theta}\square\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}=1$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(5) $\frac{4}{5}$

---

(6) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

(7) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

(8) **إختيار من متعدد:**

$D \longrightarrow \sec\theta$

(9) **مدينة ألعاب:**

a) $\theta = 11.5^\circ$ تقريباً

b) $v = 4 \;\; m/\sec$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(10)

$$\frac{\cot\theta}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{\cancel{\cos\theta}}{\sin\theta\,\cancel{\cos\theta}\,\sin\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} = \csc^2\theta$$

(11)

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\cos\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} = \frac{\frac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\sin\theta}}}{\frac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\sin\theta}}} = 1$$

(12)

$$\frac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}}{1-\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\cos\theta)}=\frac{\cancel{(1-\cos\theta)}(1+\cos\theta)}{\cos\theta\cancel{(1-\cos\theta)}}$$

$$=\frac{(1+\cos\theta)}{\cos\theta}=(1+\cos\theta)\cdot\frac{1}{\cos\theta}=(1+\cos\theta)\cdot\sec\theta$$

(13)

$$\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}=\frac{\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cancel{\cos\theta}\sin\theta(1-\sin\theta)}{\cos^{\cancel{2}}\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1-\sin\theta)=\tan\theta(1-\sin\theta)$$

(14) حاسوب:

(a

$$h=\sqrt{225-144}=\sqrt{81}=9\ in$$

(b

$$\cot\theta=\frac{9}{12}$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{12}{15}\div\frac{9}{15}=\frac{12}{9}$$

$$\therefore\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(15)

$$\frac{\sin\theta\sec\theta(\sec\theta+1)}{(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)}=\frac{\sin\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}(\sec\theta+1)}{\sec^2\theta-1}$$

$$=\frac{\cancel{\tan\theta}(\sec\theta+1)}{\tan^{\cancel{2}}\theta}=\frac{\sec\theta+1}{\tan\theta}=(\sec\theta+1)\cot\theta$$

(16)

$$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$$

(17)

$$\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\cos\theta\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}=\frac{\cos\theta\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta\cancel{\sin\theta}(1-\cos\theta)}{\sin^{\cancel{2}}\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(1-\cos\theta)$$

$$=\cot\theta(1-\cos\theta)$$

دون استخدام الألة الحاسبة أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(18) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(19) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(20) $2-\sqrt{3}$

(21) $2-\sqrt{3}$

(22) **إختيار من متعدد:**

(C $\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(23)

$$\cos \mathbf{30} \cos\theta + \sin \mathbf{30} \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\sin \mathbf{60} \cos\theta + \cos \mathbf{60} \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$$

(3-4) المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

■ **تحقق من فهمك:**

(1)

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\square\frac{2\sqrt{2}}{3}\square\frac{-1}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

■ **تحقق من فهمك:**

(2)

(2A

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$= 1 - 2\square\frac{8}{9} = -\frac{7}{9}$$

(2B

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

■ **تحقق من فهمك:**

(3)

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$$

■ تحقق من فهمك:

(4)

(4A

$$g=978+5.17\sin^2 L-0.014\sin L\cos L$$
$$=978+5.17(1-\cos 2L)-0.014\left(\frac{\sin 2L}{2}\right)$$
$$=978+5.17-5.17\cos 2L-0.028\sin 2L$$
$$=g=983.17-5.17\cos 2L-0.028\sin 2L$$

(4B

$$g=983.17-5.17\cos 90-0.028\sin 90$$
$$g=983.17-0.028\sin 90$$
$$=983.142$$

■ تحقق من فهمك:

(5)

$$4\cos^2 x-\sin^2 2x$$
$$=4\cos^2 x-4\sin^2 x\cos^2 x=4\cos^2 x\left(1-\sin^2 x\right)$$
$$=4\cos^2 x\cos^2 x=4\cos^4 x$$

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الألة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل من $\cos\frac{\theta}{2}$ ، $\sin\frac{\theta}{2}$ ، $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ إذا كان:

(1)

$$\sin\theta=\frac{1}{4}\ ,\ \therefore \sin^2\theta=\frac{1}{16}\ ,\ \therefore \cos^2\theta=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}\ ,\ \therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\frac{1}{16}=\frac{7}{8}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{15}}{4}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{15}}{4}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}$$

(2)

$$\sin\theta = \frac{4}{5} \ , \ \therefore \sin^2\theta = \frac{16}{25} \ , \ \therefore \cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \ , \ \therefore \cos\theta = -\frac{3}{5}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2 \cdot \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{-3}{5} = -\frac{24}{25}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{-3}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{-3}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

(3)

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \ , \ \therefore \cos^2\theta = \frac{9}{25} \ , \ \therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \ , \ \therefore \sin\theta = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2 \cdot \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \cdot \frac{-4}{5} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{24}{25}$$

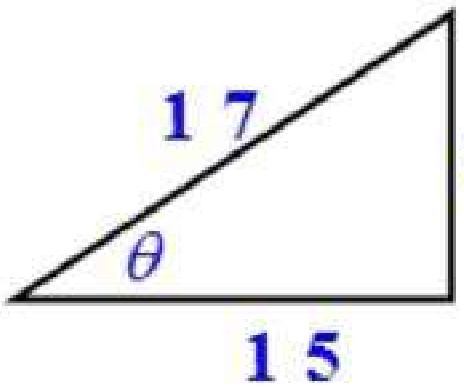
$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

(4)

$$\tan\theta = \frac{-8}{15} \quad \therefore \cos\theta = -\frac{15}{17} \quad , \therefore \sin\theta = \frac{8}{17} \quad , \quad \therefore \sin^2\theta = \frac{64}{289}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\times\frac{64}{289} = \frac{161}{289}$$



$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\times\frac{8}{17}\times\frac{-15}{17} = -\frac{240}{289}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{-15}{17}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{17}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{-15}{17}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

(5)

$$\sin\theta = \frac{2}{3} \quad , \quad \therefore \sin^2\theta = \frac{4}{9} \quad , \quad \therefore \cos^2\theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \quad , \quad \therefore \cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\times\frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\times\frac{2}{3}\times\frac{-\sqrt{5}}{3} = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{-\sqrt{5}}{3}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{-\sqrt{5}}{3}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$$

(6)

$$\sin\theta=-\frac{15}{17}\ ,\ \therefore\sin^2\theta=\frac{225}{289}\ ,\ \therefore\cos^2\theta=1-\frac{225}{289}=\frac{64}{289}\ ,\ \therefore\cos\theta=-\frac{8}{17}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\frac{225}{289}=-\frac{161}{289}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{-15}{17}\cdot\frac{-8}{17}=\frac{240}{289}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{-8}{17}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{9}{14}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{-8}{17}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{25}{14}}$$

(7)

$$\tan\theta=-2\ \therefore\ \tan^2\theta=4\ \therefore\ \sec^2\theta=5\ \therefore\ \sec\theta=-\sqrt{5}$$

$$\therefore\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\therefore\ \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\ ,\ \therefore\sin^2\theta=\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{-1}{\sqrt{5}}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{-1}{\sqrt{5}}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(8)

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(9)

$$\cos 15 = \sqrt{\frac{1+\cos 30}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

(10)

$$\sin 75 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

(11)

$$\sin 165 = \sqrt{3}-2$$

(12)

$\sin 165 = 2 + \sqrt{3}$

(13) <u>كرة قدم:</u>

(a
$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

(b $d = 81\ ft$ تقريباً

<u>أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:</u>

(14)

$$\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1 - \left(1 - 2\sin^2\theta\right)}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}}\theta}{\cancel{2}\cancel{\sin\theta}\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

(15)

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}} = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$$

(16)

$$\frac{2}{\cot\theta-\tan\theta}=\frac{2}{\cot\theta-\tan\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\tan\theta}=\frac{2\tan\theta}{\cot\theta\tan\theta-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta$$

(17)

$$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2}$$

$$=\frac{\sin 2(\frac{\theta}{2})}{2}=\frac{\sin\theta}{2}$$

(18) العدد ماخ:

(a

$$\frac{1}{M}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

(b $M=6$

(19) إلكترونيات:

$$P=I_{\circ}^{2}R\sin^2 t\theta=\frac{1}{2}I_{\circ}^{2}R-\frac{1}{2}I_{\circ}^{2}R\cos 2t\theta$$

(20) كرة قدم:

إذا كانت $\theta=45+\alpha$

$$d = \frac{v^2 \sin 2(45+\alpha)}{g} = \frac{v^2 \sin(90+2\alpha)}{g}$$

$$= \frac{v^2(\sin 90 \cos\alpha + \cos 90 \sin\alpha)}{g}$$

$$= \frac{v^2 \cos 2\alpha}{g}$$

إذا كانت $\theta = 45 - \alpha$

$$d = \frac{v^2 \sin 2(45-\alpha)}{g} = \frac{v^2 \sin(90-2\alpha)}{g}$$

$$= \frac{v^2(\sin 90 \cos\alpha - \cos 90 \sin\alpha)}{g}$$

$$= \frac{v^2 \cos 2\alpha}{g}$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل من $\tan 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ إذا كان:

(21)

$$\cos\theta = \frac{4}{5}\ ,\ \therefore \cos^2\theta = \frac{16}{25}\ ,\ \therefore \sin^2\theta = \frac{9}{25}\ ,\ \therefore \sin\theta = \frac{3}{5}\ ,\ \therefore \tan\theta = \frac{3}{4}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\square\frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{24}{7}$$

(22)

$$\sin\theta = \frac{1}{3}\ ,\ \therefore \sin^2\theta = \frac{1}{9}\ ,\ \therefore \cos^2\theta = \frac{8}{9}\ ,\ \therefore \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ ,\ \therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

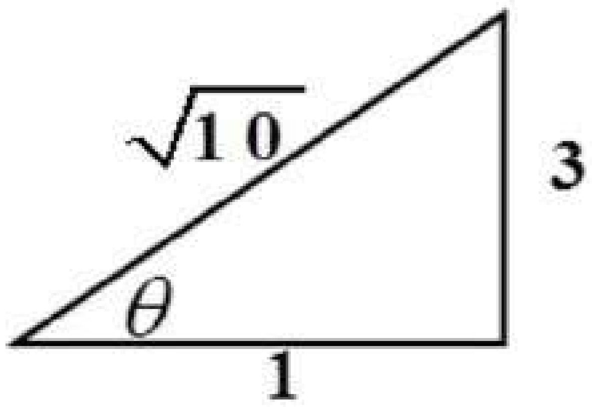
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}}{1-\frac{2}{16}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

(23)

$$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}\ ,\ \therefore \sin^2\theta = \frac{9}{10}\ ,\ \therefore \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ ,\ \therefore \tan\theta = -3$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\cdot\frac{9}{10} = -\frac{4}{5}$$



$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{10}} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot(-3)}{1-9} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

(24)

$$\cos\theta = -\frac{3}{4}\ ,\ \therefore \cos^2\theta = \frac{9}{16}\ ,\ \therefore \sin^2\theta = \frac{7}{16}\ ,\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}\ ,\therefore \tan\theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\cdot\frac{7}{16} = \frac{1}{8}$$

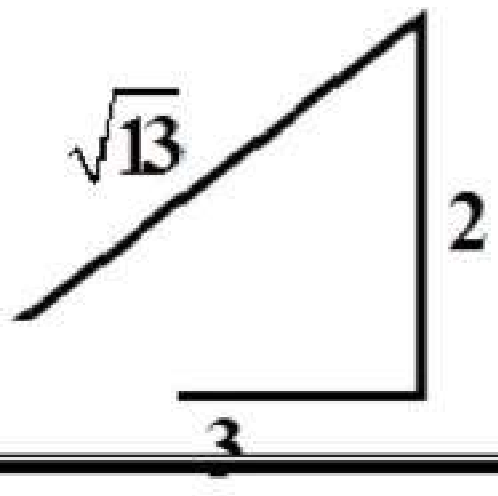
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{-3}{4} = \frac{-3\sqrt{7}}{8}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot\frac{-\sqrt{7}}{3}}{1-\frac{7}{9}} = -3\sqrt{7}$$

(25)

$$\sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}\ ,\ \therefore \sin^2\theta = \frac{4}{13}\ ,\ \therefore \cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}\ ,\ \therefore \tan\theta = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\cdot\frac{4}{13} = \frac{5}{13}$$



$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{12}{13}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{4}{9}} = \frac{12}{5}$$

(26) **تمثيلات متعددة:**

تختلف الإجابات من شخص لآخر حسب وجهة نظره.

مسائل مهارات التفكير العليا:

(27) **إكتشف الخطأ:**

كلاهما أخطأ، حيث طرح سعيد الجذور التربيعية بطريقة غير صحيحة، كما استعمل سلمان متطابقة نصف الزاوية، ولاكنة أخطأ في إيجاد قيمة $\cos 30$ في المتطابقة كلها فكتبها $\frac{1}{2}$ بدلاً من $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(28) **تحد:**

الزاوية $\angle PBD$ هي زاوية محيطية تقابل القوس نفسة الذي تقابلة الزاوية المركزية $\angle POD$ لذا فإن $m\angle(PBD) = \frac{1}{2}m\angle(PoD)$

وباستعمال المثلث القائم نجد أن

$$\tan\frac{\theta}{2} = \tan(\mathrm{PBA}) = \frac{PA}{BA} = \frac{PA}{1+OA}$$

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\frac{AP}{OP}}{1+\frac{OA}{OP}}=\frac{AP}{1+OA}$$

(29) أكتب:

إذا أعطيت فقط قيمة $\cos\theta$ فإن $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها.
وإذا أعطيت فقط قيمة $\sin\theta$ فإن $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها.
وإذا أعطيت كلا من $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ فإن $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها.

(30) برهان:

$$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta)$$
$$= \sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta)$$
$$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

(31) تبرير:

$$1-2\sin^2\theta = \cos 2\theta$$
$$\theta = \frac{A}{2} \quad \therefore 2\theta = A$$
$$\therefore \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$$
$$\therefore \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$$
$$\theta = \frac{A}{2} \quad \therefore 2\theta = A$$
$$\therefore 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \cos A$$
$$\therefore \cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}$$
$$\therefore \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

(32)

$$d = \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v^2\sin 2\theta}{g}$$

تكون أكثر قيمة لــ d عند $\sin 2\theta = 1$ ويكون هذا عند $2\theta = 90$ أو عند $\theta = 45$

مراجعة تراكمية

أثبت صحة كل ن المتطابقات الآتية:

(33)

$$\frac{\cos^2\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos^{\cancel{2}}\theta}{\sin\theta\,\cancel{\cos\theta}}+\frac{\cancel{\sin\theta}}{\cancel{\sin\theta}\,\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\cot\theta+\sec\theta$$

(34)

$$\left(1-\cos^2\theta\right)+\frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}=$$

$$\sin^2\theta+\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\sin^2\theta}}=\sin^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\sin^2\theta+\tan^2\theta$$

(35)

$$\left(\sin\theta-\cos\theta\right)^2=$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$$

$$=1-2\sin\theta\cos\theta$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(36) $\sin 135=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(37) $\cos 105=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(38) $\sin 285=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(39) $\cos\left(210\right)=-\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

(40) $\sin\left(-240\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos(-120) = -\frac{1}{2} \quad (41)$$

$$\cos 78 \cos 18 + \sin 78 \sin 18 = \cos(78-18) = \cos 60 = \frac{1}{2} \quad (42)$$

تدرب على إختبار

(43)

$\sqrt{3} - 2 \longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow \; B$

(44)

$y = \frac{1}{3} \cos 2B \longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow \; B$

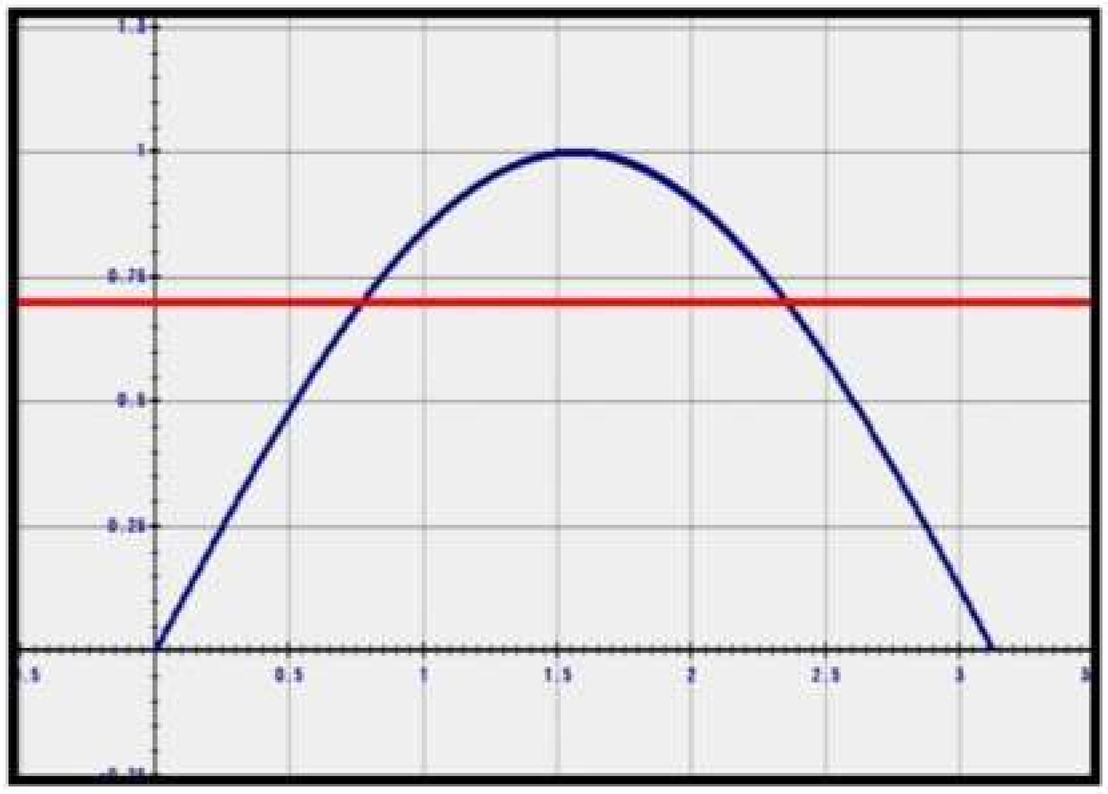
ستكشاف $(3-5)$ معمل الحاسبة البيانية

حل المعادلات المثلثية

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلات الآتية لقيم x جميعها الموضحة بجانب كل منها:

(1)

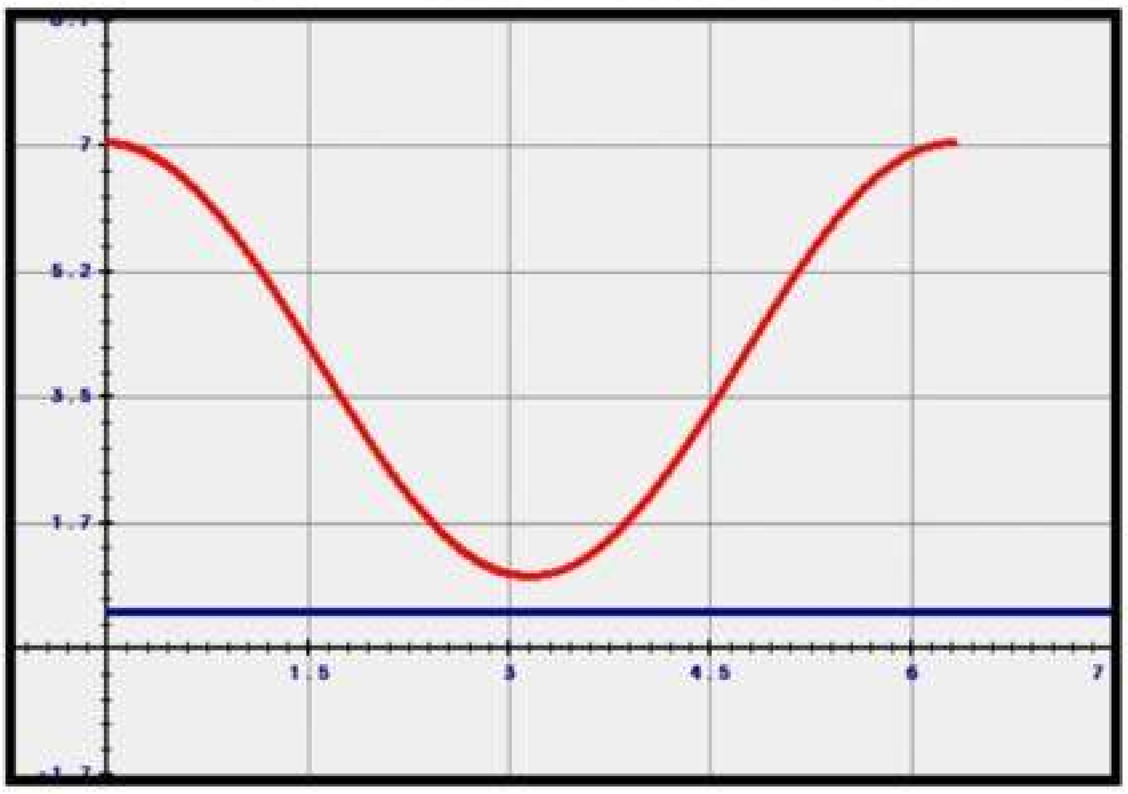
$x = 44.4 \quad , \quad x = 135.6$



(2)

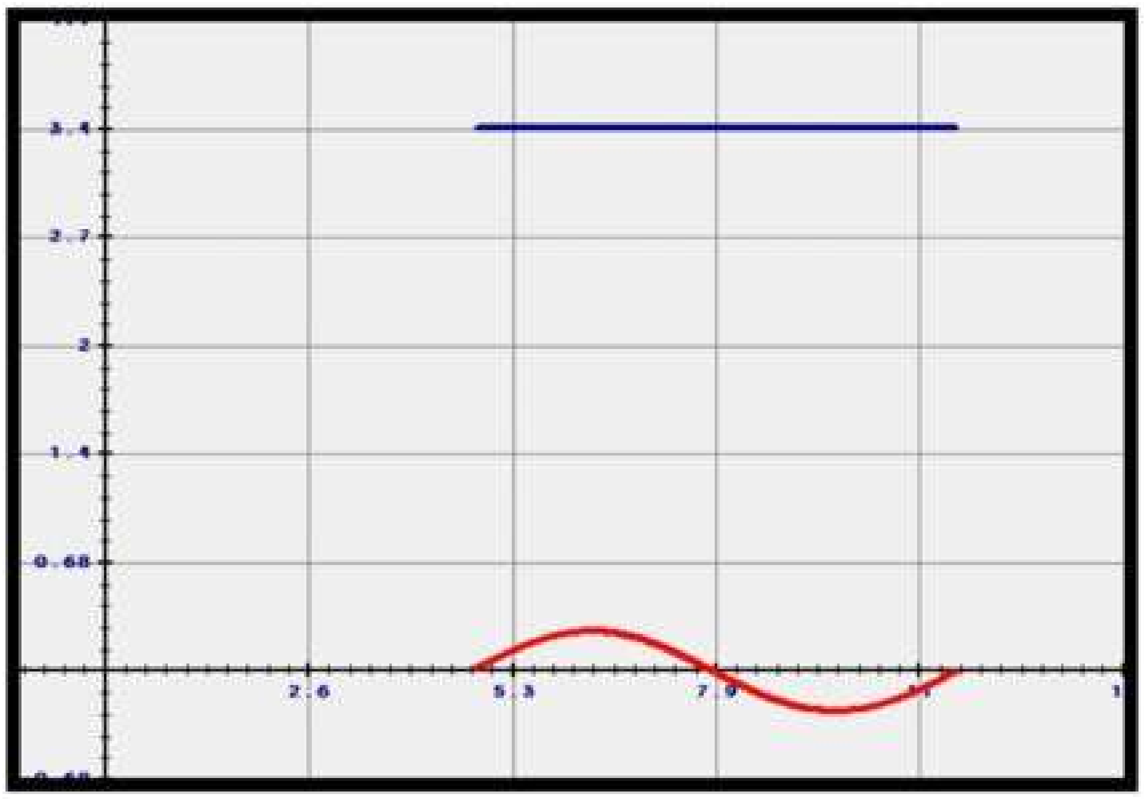
$x = \{53.43\ ,137.81\}$

(3)



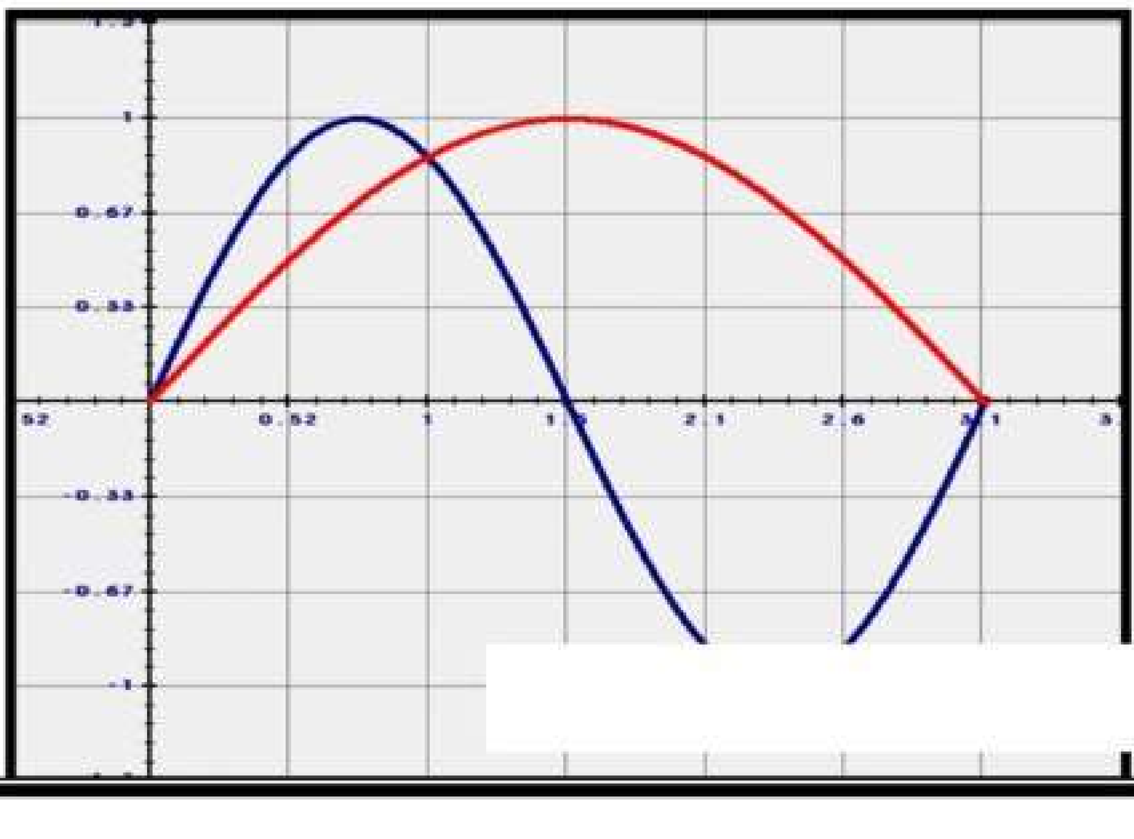
لا يوجد حل حقيقي

(4)



لا يوجد حل حقيقي

(5)



$x = \{0\ ,\ 115.38\}$

$$\log_2 (x+6) = 5$$
$$\therefore x + 6 = 5^2 = 25$$
$$\therefore x = 19$$

تدرب على اختبار

(64)

$A \longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow \log_5 2$

---

(65)

$C \longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow 1$

(2-5) حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية.

■ **تحقق من فهمك:**

(1)

$x = 9^{\frac{3}{2}} = 27$ (1A

$x = 16^{\frac{5}{2}} = 1024$ (1B

■ **تحقق من فهمك:**

(2)

$$x^2 - 15 = 2x$$
$$\therefore x^2 - 2x - 15 = 0$$
$$\therefore (x-5)(x+3) = 0$$
$$\therefore x = 5 \quad , \quad x = -3$$

تحقق عوض عن كل من القيمتين

$x = -3$

$\log_3 (9-15) \stackrel{?}{=} \log_3 2(-3)$

$\log_3(-4) = \log_3(-6)$ d

$x = 5$

$\log_3 (25-15) \stackrel{?}{=} \log_3 2(5)$

$\log_3 10 = \log_3 10$ c

الإجابة الصحيحة هي $5 \leftarrow C$

■ **تحقق من فهمك:**

(3)

(3A

$$2\log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$$

$$\therefore x^2 = 27 \times 3$$

$$\therefore x^2 = 81$$

$$\therefore x = 9 \qquad , \qquad x = -9$$

تحقق عوض عن كل من القيمتين

$x = 9$

$2\log_7 9 \stackrel{?}{=} \log_7 27 + \log_7 3$

$\log_3 81 = \log_3 81$ c

$x = -9$

$2\log_7(-9) \stackrel{?}{=} \log_7 27 + \log_7 3$ d

(3B

$$\log_6 x + \log_6 (x+5) = 2$$

$$\therefore \log_6 x(x+5) = \log_6 36$$

$$\therefore x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$\therefore (x+9)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -9 \qquad , \qquad x = 4$$

تحقق عوض عن كل من القيمتين

$x = -9$

$\log_6(-9) + \log_6(-9+5) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6(-9)(-4) = \log_6 36 = 2$ c

$x = 4$

$\log_6 4 + \log_6(4+5) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6(4\square 9) = \log_6 36 = 2$ c

■ **تحقق من فهمك:**

(4)

(4A

$$x \geq 4^3$$
$$\{x \mid x \geq 64\}$$

(4B

$$x < 2^4$$
$$\{x \mid 0 < x < 16\}$$

■ تحقق من فهمك:

(5)

$$2x + 1 \leq x + 4$$
$$\therefore x \leq 3$$
$$\left\{x \,\middle|\, \frac{-1}{2} < x \leq 3\right\}$$

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي:

(1) $x = 8^{\frac{4}{3}} = 16$

(2) $x = 16^{\frac{3}{4}} = 8$

(3) $x = 81^{\frac{4}{3}} = 27$

(4) $x = 25^{\frac{5}{2}} = 3125$

(5) $\frac{1}{2} = 8^x \quad \therefore x = -\frac{1}{3}$

(6) $\frac{1}{36} = 6^x \quad \therefore x = -2$

(7) $32 = x^{\frac{5}{2}} \quad \therefore x = 4$

(8) $27 = x^{\frac{3}{2}} \quad \therefore x = 9$

حل كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

(9)

$5\log_2 x = \log_2 32$

$\therefore x^5 = 32 \qquad \therefore x = 2$

للتحقق عوض عن $x = 2$

$x = 2$

$5\log_2 2 \stackrel{?}{=} \log_2 32$

$\log_2 2^5 = \log_2 32$ c

---

(10)

$3\log_2 x = \log_2 8$

$\therefore x^3 = 8 \qquad \therefore x = 2$

للتحقق عوض عن $x = 2$

$x = 2$

$3\log_2 2 \stackrel{?}{=} \log_2 8$

$\log_2 2^3 = \log_2 8$ c

(11)

$\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$

$\therefore \frac{48}{n} = 6 \qquad \therefore n = 8$

للتحقق عوض عن $n = 8$

$n = 8$

$\log_4 48 - \log_4 8 \stackrel{?}{=} \log_4 6$

$\log_4 \frac{48}{8} = \log_4 6$ c

---

(12)

$\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$

$\therefore 14x = 28 \qquad \therefore x = 2$

للتحقق عوض عن $x = 2$

$x = 2$

$\log_3 4 + \log_3 7 \stackrel{?}{=} \log_3 28$

$\log_3 (4 \square 7) = \log_3 28$ c

(13)

$\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40$

$\therefore 20x = 40 \qquad \therefore x = 2$

للتحقق عوض عن $x = 2$

$x = 2$

$\log_2 8 + \log_2 5 \stackrel{?}{=} \log_2 40$

$\log_2 (8□5) = \log_2 28$ c

(14)

$\log_4 a + \log_4 8 = \log_4 24$

$\therefore 8a = 24 \qquad \therefore a = 3$

للتحقق عوض عن $a = 3$

$a = 3$

$\log_4 3 + \log_4 8 \stackrel{?}{=} \log_4 24$

$\log_4 (3□8) = \log_4 24$ c

(15)

$\log_2 n = \frac{1}{3} \log_2 27 + \log_2 36$

$\therefore n = 3□36 \qquad \therefore n = 108$

للتحقق عوض عن $n = 108$

$n = 108$

$\log_2 108 \stackrel{?}{=} \log_2 27^{\frac{1}{3}} + \log_2 36$

$\log_2 108 = \log_2 (3□36)$ c

(16)

$3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2} \log_{10} 36 = \log_{10} x$

$\therefore x = \frac{512}{6} \qquad \therefore x = 85\frac{1}{3}$

للتحقق عوض عن $x = 85\frac{1}{3}$

$$x = 85\frac{1}{3}$$

$$3\log_{10} 8 - \frac{1}{2}\log_{10} 36 \stackrel{?}{=} \log_{10} 85\frac{1}{3}$$

$$\log_{10}(\frac{512}{6}) = \log_{10} 85\frac{1}{3}$$ C

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي ثم تحقق من صحة حلك:

(17)

$$x > 5^3$$

$$\{x \mid x > 125\}$$

(18)

$$x \le 8^{-2}$$

$$\left\{x \,\middle|\, 0 < x \le \frac{1}{64}\right\}$$

(19)

$$x < 6^{-3}$$

$$\left\{x \,\middle|\, 0 < x < \frac{1}{216}\right\}$$

(20)

$$x \ge 4^4$$

$$\{x \mid x \ge 256\}$$

(21)

$x \geq 3^{-4}$

$\left\{x \middle| x \geq \frac{1}{81}\right\}$

(22)

$x \leq 2^{-2}$

$\left\{x \middle| 0 < x \leq \frac{1}{4}\right\}$

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

(23)

$2x + 5 \leq 4x - 3$

$\therefore 8 \leq 2x \qquad \therefore x \geq 4$

$\{x \mid x \geq 4\}$

(24)

$2x > 6x - 8$

$\therefore 8 > 4x \qquad \therefore x < 2$

$\left\{x \middle| \frac{8}{6} < x < 2\right\}$

(25)

$4x - 6 > 2x + 8$

$\therefore 2x > 14$

$\therefore x > 7$

$\{x \mid x > 7\}$

(26)

$$x + 2 \geq 6x - 3$$
$$\therefore 5 \geq 5x$$
$$\therefore x \leq 1$$
$$\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2} < x \leq 1\right\}$$

(27) صوت:

$$L = 10\log_{10} R = 80$$
$$\therefore R = 10^8$$

---

(28) علوم:

a)
$$7 = 1 + \log_{10} x$$
$$6 = \log_{10} x$$
$$x = 10^6$$
$$\therefore x = 1000000$$

b) 1000 مرة أكبر.

---

(29) تمثيلات متعددة:

a) تحليلياً: التمثيلان البيانيان متشابهان وخط التقارب لكل منهما المحور y، ومقطع المحور x هو 1 لهما.

b) لفظياً: التمثيلان البيانيان يمثلان إنعكاساً لبعضهما في المحور x.

c) تحليلياً: التمثيلان البيانيان يمثلان إنعكاساً لبعضهما في المحور x،

المجال: $\{x | x > 0\}$ ، المدى: $\{R\}$

(30) علوم:

(a

$$\log_{10} d = \frac{\omega - 65}{93}$$

$$\therefore d = 10^{\frac{\omega - 65}{93}}$$

(b

$$\omega = 93 \log_{10} d + 65$$

$$= 93 \log_{10} 525 + 65$$

$$= 317.97 \quad mi/h$$

---

(31) صوت:

(a

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{1}{10^{-12}} = 120 \text{ واط}$$

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{10^{-2}}{10^{-12}} = 100 \text{ واط}$$

(b تتغير قوة اللوغاريتم بمقدار 2 وهذا يعني أن عدد وحدات الديسيبل تتغير بمقدار

$$10 \log_{10} 10^2 = 20$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

(32) أكتشف الخطأ:

ريم، لأن هناء حولت الصورة اللوغاريتمية إلى صورة أسية بشكل خاطئ.

(33) تحد:

$$\log_3 3^3 + \log_9 9^{\frac{3}{2}} + \log_{27} 27 + \log_{81} 81^{\frac{3}{4}} + \log_{243} 243^{\frac{3}{5}}$$

$$= 3 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{137}{20} = 6.85$$

(34) تبرير:

إذا كان $0 < b < 1$ فإن $\therefore \log_b x > \log_b y$ فقط إذا كان $x < y$، إنعكست إشارة المتباينة لأن الكسر الأصغر من 1 يكون أصغر عند رفعة لقوة أكبر.

---

(35) أكتب:

الدالة اللوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ هي الدلة العكسية للدالة الأسية من الصورة $y = b^x$، ومجال أحدهما يساوي مجال الأخرى.

---

(36) مسألة مفتوحة:

$$\log_3(x+4) = \log_3(3x+12)$$

---

(37) تبرير:

a) أصغر من

b) أصغر من

c) لا حل لها

d) لها عدد لانهائي من الحلول

---

(38) أكتب:

مقطع المحور y للدالة الأسية $y = b^x$ هو $(0, 1)$ وعند قلب الإحداثيات فإن المقطع y يتغير إلى مقطع المحور x عند النقطة $(1, 0)$. وبما أنة لا يوجدمقطع للمحور x عند النقطة $(0, 1)$ للدالة الأسية $y = b^x$ فإنه عند قلب الإحداثيات فلن يكون هناك نقطة تناظر عند النقطة $(0, 1)$ ولن يكون هناك مقطع المحور y للدالة.

مراجعة تراكمية:

حل كل مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

(39)

$3^{3x-2} > 3^4$

$\therefore 3x - 2 > 4$

$\therefore 3x > 6$

$\therefore x > 2$

---

(40)

$3^{4x-7} = 27^{2x+3} = 3^{3(2x+3)}$

$\therefore 4x - 7 = 6x + 9$

$\therefore 2x = -16$

$\therefore x = -8$

---

(41)

$8^{x-4} = 2^{4-x}$

$\therefore 2^{3(x-4)} = 2^{4-x}$

$\therefore 3x - 12 = 4 - x$

$\therefore 4x = 16$

$\therefore x = 4$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

(42)

$$\log_4 256$$

$$= \log_4 4^4 = 4\log_4 4 = 4$$

---

(43)

$$\log_2 \frac{1}{8}$$

$$= \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3$$

---

(44)

$$\log_6 216$$

$$= \log_6 6^3 = 3\log_6 6 = 3$$

---

(45)

$$\log_7 2401$$

$$= \log_7 7^4 = 4\log_7 7 = 4$$

بسط كلاً مما يأتي، مفترضاً أن أياً من المتغيرات لا يساوي الصفر:

(46)

$$x^5 \cdot x^3 = x^8$$

---

(47)

$$\left(2p^2 n\right)^3 = 4p^6 n^3$$

(48)

$$\frac{x^4 \cdot y^6}{xy^2} = x^3y^4$$

(49)

$$\left(\frac{c^9}{d^7}\right)^0 = 1$$

تدرب على اختبار:

(50)

$$f\left(x\right) = -10(2)^x \quad \leftarrow\leftarrow\leftarrow A$$

(51)

$$2 \quad \leftarrow\leftarrow\leftarrow D$$

(2-6) اللوغاريتمات العشرية

■ **تحقق من فهمك:**

(1)

$$Log_7 \approx 0.8451 \quad (1A)$$

$$Log_{0.5} \approx -0.3010 \quad (1B)$$

■ **تحقق من فهمك:**

(2) هزات أرضية:

$$Log\ E = 11.8 + 1.5M = 11.8 + 1.5 \times 9$$

$$Log\ E = 25$$

$$E = 10^{25}$$

■ **تحقق من فهمك:**

(3A)

$$xLog\ 3 = Log\ 15$$

$$x = \frac{Log\ 15}{Log\ 3} = 2.465$$

(3B)

$$xLog\ 6 = Log\ 42$$

$$x = \frac{Log\ 42}{Log\ 6} = 2.086$$

■ تحقق من فهمك:

(4A)

$$Log\,3^{2x} \geq Log\,6^{x+1}$$
$$2xLog\,3 \geq (x+1)Log\,6$$
$$2xLog\,3 \geq xLog\,6 + Log\,6$$
$$2xLog\,3 - xLog\,6 \geq Log\,6$$
$$x(2Log\,3 - Log\,6) \geq Log\,6$$
$$x \geq \frac{Log\,6}{2Log\,3 - Log\,6}$$
$$x \geq 4.419$$

(4B)

$$Log\,4 + Log y < Log\,5^{2y+1}$$
$$Log\,4 + Log y < (2y+1)Log\,5$$
$$Log\,4 + Log y \geq 2yLog\,5 + Log\,5$$
$$y \geq -0.8782$$

■ تحقق من فهمك:

(5)

$$\frac{Log_{10}8}{Log_{10}6} = 1.1606$$

■ تحقق من فهمك:

(6)

$$R = Log_2 n = Log_2 160$$
$$\frac{Log_{10}160}{Log_{10}2} = 7.32 \quad s$$

تدرب وحل المسائل

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

(1) 0.6990
(2) 1.3222
(3) –0.3979
(4) 0.4771
(5) 1.0414
(6) 0.5051
(7) 0.9138
(8) –0.0458
(9) –1.3979

(10) **علوم:**

$$Log\ E = 11.8 + 1.5M = 11.8 + 1.5 \times 8.5$$
$$Log\ E = 24.55$$
$$E = 10^{24.55}$$

(11) **صوت:**

a) حوالى 316227766
b) 19952623 مرة، النسبة 93.7Ä تقريباً

حل كل معادلة مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

(12)

$$xLog\,6 = Log\,40$$
$$x = \frac{Log\,40}{Log\,6} = 2.0588$$

(13)

$$(a+2)Log\,(2.1) = Log\,(8.25)$$

$$a = \frac{Log\,8.25}{Log\,2.1} - 2 = 0.8442$$

---

(14)

$$x^2 Log\,(7) = Log\,(20.42)$$

$$x = \sqrt{\frac{Log\,20.42}{Log\,7}} = \pm 1.2451$$

---

(15)

$$(b-3)Log\,(11) = bLog\,(5)$$

$$bLog\,(11) - 3Log\,(11) = bLog\,(5)$$

$$b\,(Log\,(11) - Log\,(5)) = 3Log\,(11)$$

$$b = \frac{3Log\,(11)}{Log\,(11) - Log\,(5)} = 9.1237$$

---

(16)

$$xLog\,8 = Log\,40$$

$$x = \frac{Log\,40}{Log\,8} = 1.7740$$

---

(17)

$$(b-1)Log\,(9) = bLog\,(7)$$

$$bLog\,(9) - Log\,(9) = bLog\,(7)$$

$$b\,(Log\,(9) - Log\,(7)) = Log\,(9)$$

$$b = \frac{3Log\,(9)}{Log\,(9) - Log\,(7)} = 8.7429$$

---

(18)

$$x^2 Log(15) = Log(110)$$

$$x = \sqrt{\frac{Log 110}{Log 15}} = \pm 1.3175$$

---

(19)

$$2y Log(2) = (y-1) Log(3)$$

$$y = \frac{-Log(3)}{2Log(2) - Log(3)} = -3.8188$$

حل كل مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

(20)

$$4n Log(5) > Log(33)$$

$$n > \frac{Log(33)}{4Log(5)}$$

$$n > 0.5431$$

(21)

$$(p-1)Log(6) = pLog(4)$$

$$p = \frac{Log(6)}{Log(6) - Log(4)}$$

$$p = 4.4190$$

(22)

$$(y-1)Log\,3 \le y\,Log\,4$$

$$y \le \frac{Log\,3}{Log\,3 - Log\,4}$$

$$y \le -3.81884$$

(23)

$$(p-2)Log\,5 \le p\,Log\,2$$

$$p \le \frac{2Log\,5}{Log\,5 - Log\,2}$$

$$p \le 3.5129$$

(24)

$$4xLog\,2 \le Log\,20$$

$$x \le \frac{Log\,20}{4\log 2}$$

$$x \le 1.0805$$

(25)

$$3nLog\,6 > Log\,36$$

$$n > \frac{Log\,36}{3\log 6}$$

$$n > 0.6667$$

أكتب كلاً مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمتة مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

(26 $3^{y-1} \leq 4^{y}$ (27 $5^{p-2} \leq 2^{p}$

(28 $2^{4x} \leq 20$ (29 $6^{3n} > 36$

(26) $\dfrac{\log 7}{\log 3} = 1.7712$

(27) $\dfrac{\log 16}{\log 2} = 4$

(28) $\dfrac{\log 9}{\log 4} = 1.5850$

(29) $\dfrac{\log 21}{\log 3} = 2.7712$

(30) $\dfrac{\log 7.29}{\log 5} = 1.2343$

(31) $\dfrac{\log \sqrt{5}}{\log 7} = 0.4135$

(32) شحن:

(a

$$t = \log_{(1-r)} \frac{v}{p}$$

$$t = \log_{(1-0.15)} \frac{120000}{168000} \approx 2$$ سنتان

(b

$t=\log_{(1-0.1)}\dfrac{102000}{168000}\approx 5$ خمس سنوات تقريباً

---

(33) **علوم بيئة:**

(a نعم، لأن: $10.9>9.5$

(b لا

(c حوالي 3.16×10^{-10}

(34) **هزات أرضية:**

(a $M=\dfrac{2}{3}\left(\log E-\log 10^{4.4}\right)$

(b $M=5$

(c $M=1.67$

(d $E=7.94\times10^{8}$ جول

---

(35) تمثيلات متعددة:

a) جدولياً: الحل يقع بين 1.8 ، 1.9

b) بيانيا : $(1.85,13)$

c) عددياً: نعم جميع الطرق تعطي النتيجة نفسها 1.8 ، لأنك بدأت من المعادلة نفسها وإن لم يكن كذلك فقد أخطأت.

مسائل مهارات التفكير العليا:

(36) أكتشف الخطأ:

بلال؛ لأن خالد نسي أن يضرب في العدد 3 عند أحد اللوغاريتمات.

(37) تحد:

$\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$	المعادلة الأصلية
$\dfrac{\log_a 3}{\log_a \sqrt{a}} = \log_a x$	صيغة تغيير الأساس
$\dfrac{\log_a 3}{\frac{1}{2}} = \log_a x$	$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
$2\log_a 3 = \log_a x$	بضرب كلاً من البسط والمقام في العدد2
$\log_a 3^2 = \log_a x$	خاصية لوغاريتم القوة
$3^2 = x$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$9 = x$	بالتبسيط

(38) أكتب:

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b} = \frac{1}{\log b}\log x$$

لذا اللوغاريتم ذو الأساس b هو حاصل ضرب ثابت في اللوغاريتم الطبيعي المناظر له.

---

(39) برهان:

$$\log_{27} 3 = \frac{1}{3} \ , \quad \log_3 27 = 3 \quad , \ \log_a b = 1/\log_b a$$

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

---

(40) أكتب:

اللوغاريتمات هي أسس ولحل معادلاتها أكتب كلاً من الطرفين بالصورة الأسية وحلها بإستعمال خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات.

ولحل معادلة أسية: بإستعمال خاصية المساواه للدوال اللوغاريتمية وخاصية القوة في اللوغاريتمات.

مراجعة تراكمية:

حل كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك:

(41)

$$\log_5(7\square 2) = \log_5 x$$

$$x = 14$$

---

(42)

$$\log_2\left(\frac{x^2}{x+3}\right) = \log_2 4$$

$$x^2 = 4x + 12$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x-6)(x+2) = 0$$

$$x = 6 \quad , \ x = -2$$

للتحقق

$x = -2$

$2\log_2(-2) - \log_2(-2+3) \stackrel{?}{=} 2$ d

$x = 6$

$2\log_2 6 - \log_2(6+3) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_2\left(\frac{36}{9}\right) = \log_2 4 = 2$ c

---

(43) $x = 15$

حل كل متباينة مما يأتي وتحقق من صحة حلك:

(44)

$$\log_8(3y-1) < \log_8(y+5)$$
$$3y-1 < y+5$$
$$2y < 6$$
$$y < 3$$
$$\left\{y \left| \frac{1}{3} < y < 3\right.\right\}$$

---

(45)

$$\log_9(9x+4) \le \log_9(11x-12)$$
$$9x+4 \le 11x-12$$
$$-2x \le -16$$
$$x \ge 8$$
$$\{x \mid x \ge 8\}$$

---

(46)

$C \leftarrow\leftarrow\leftarrow 3$ سنوات

تدرب على اختبار:

(47)

$B \quad \leftarrow\leftarrow\leftarrow x^2-6x+8$

---

(48)

$A \quad \leftarrow\leftarrow\leftarrow -4$

معمل الحاسبة البيانية

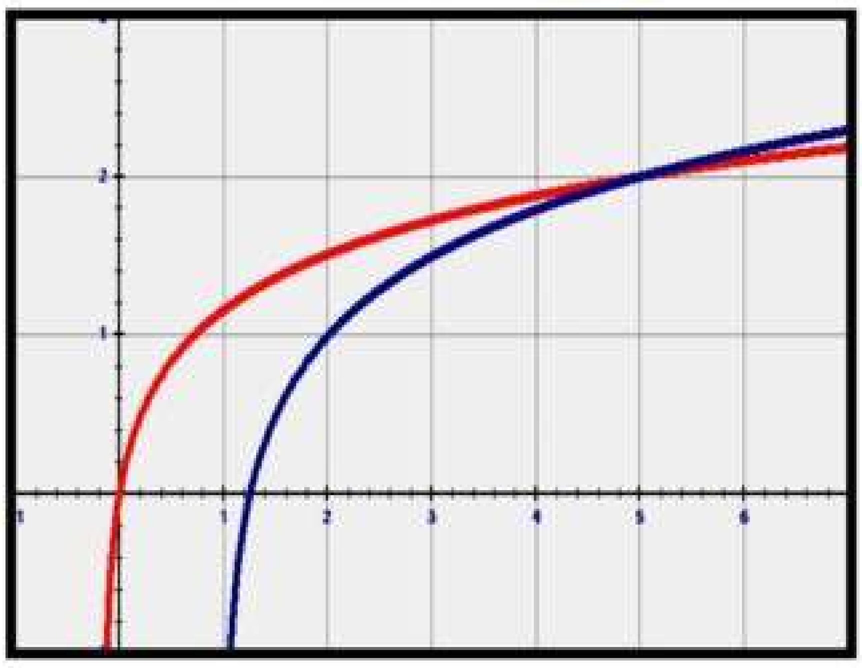
حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

تمارين:

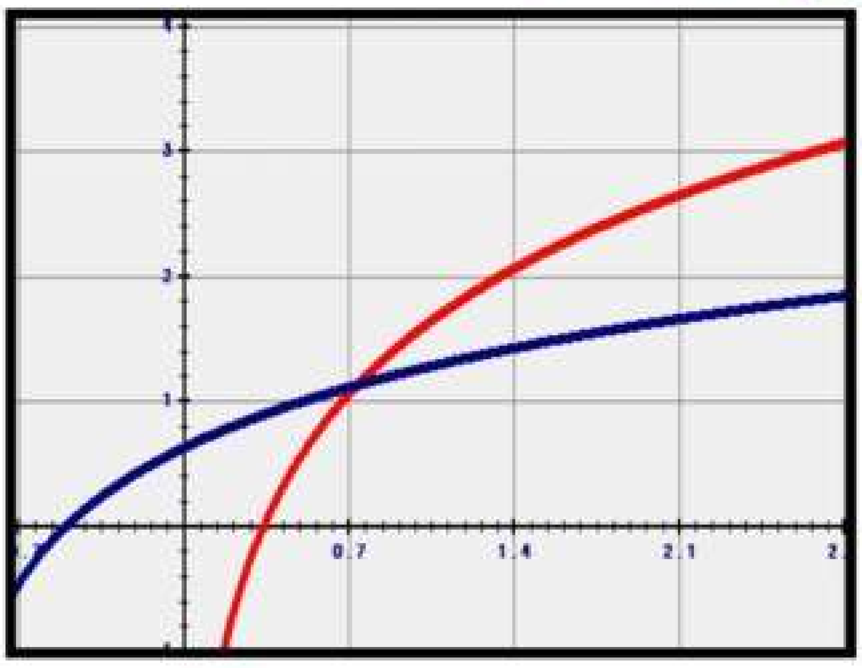
استعمل الحاسبة البيانية $TI - nspire$ لحل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

(1) $x = 2$, $x = 0$

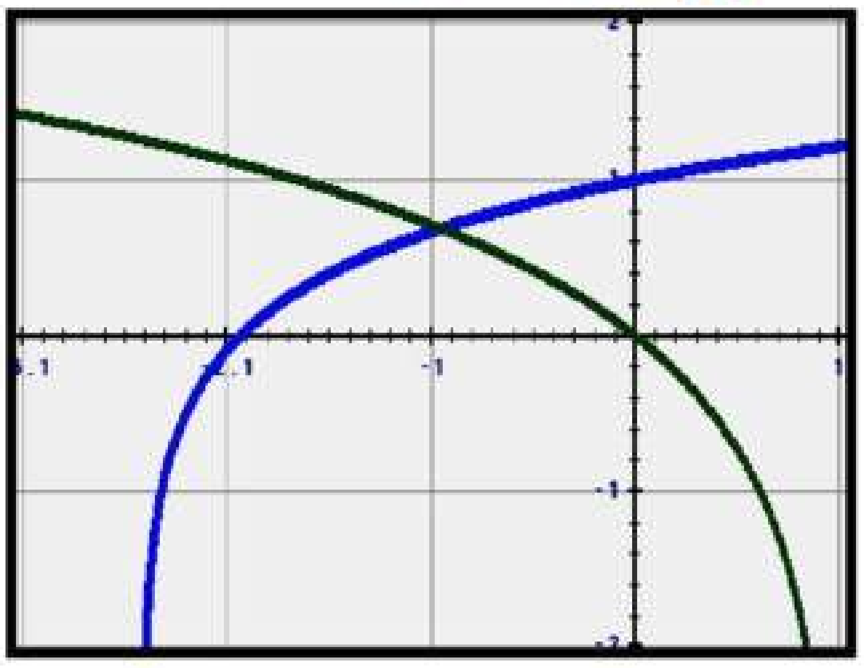
(2) $x = 5$



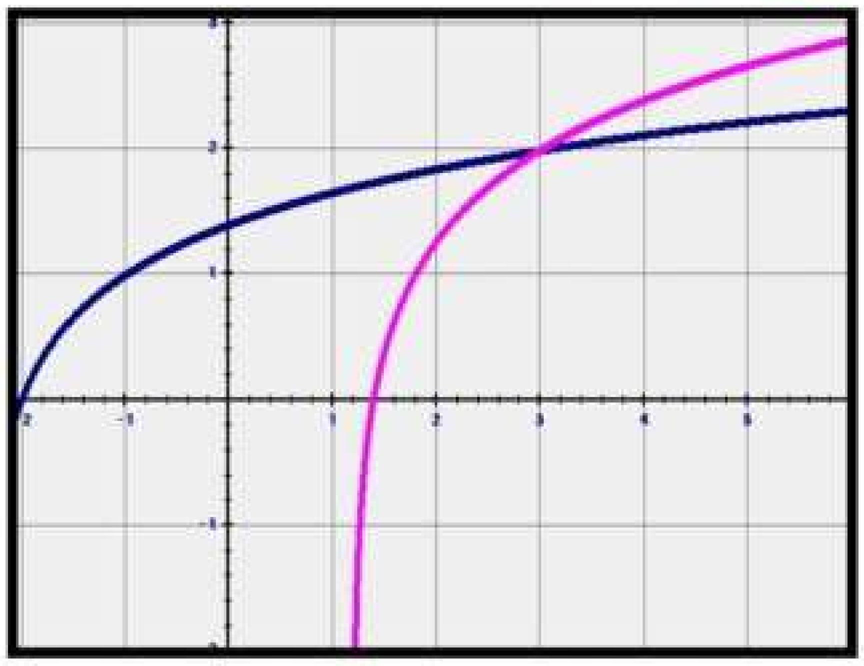
(3) $x = 0.7$



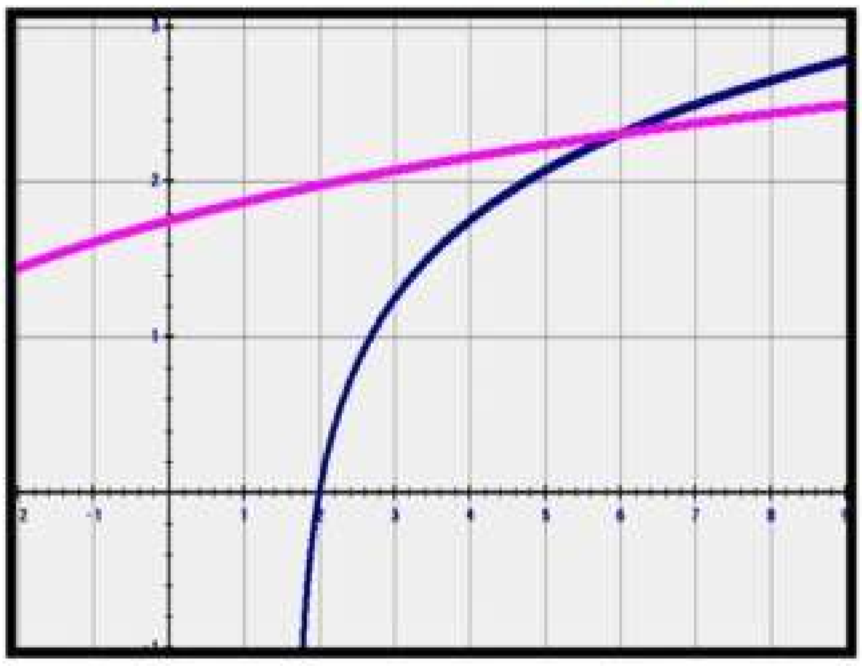
(4) $x = 1.5$



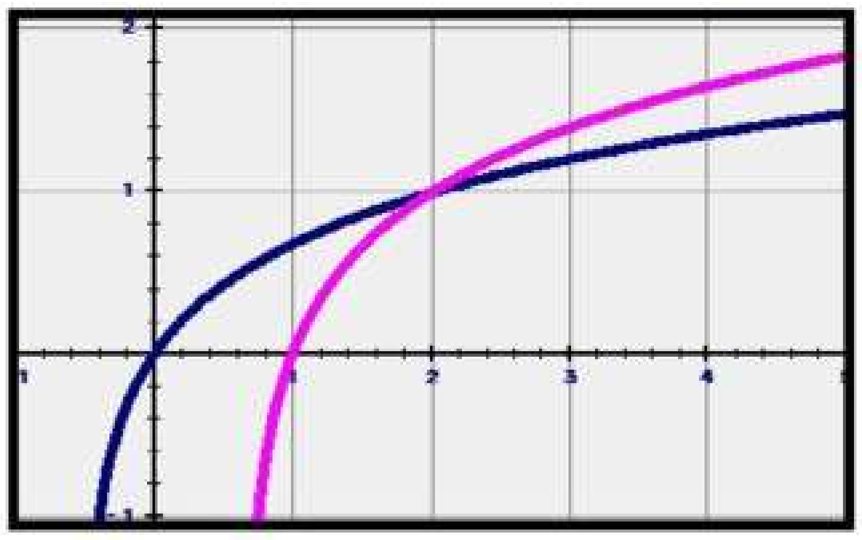
$x = 3$ **(5)**



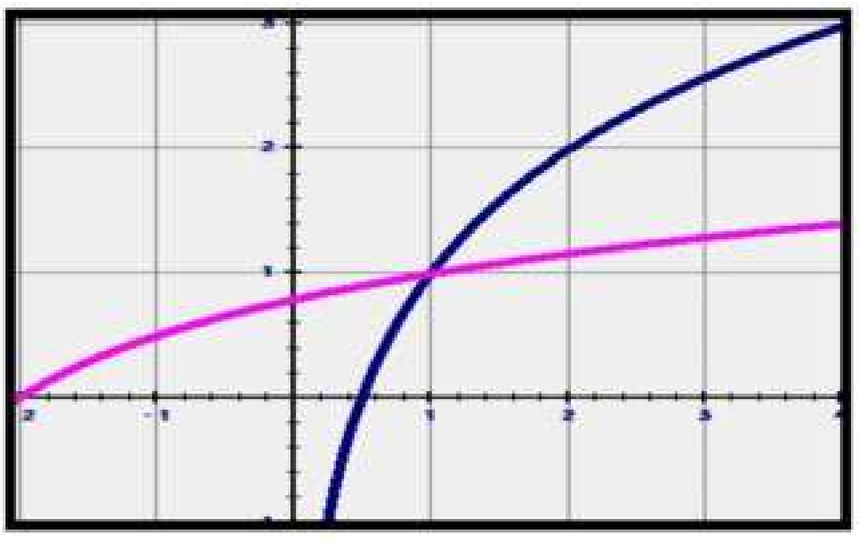
$x = 6$ **(6)**



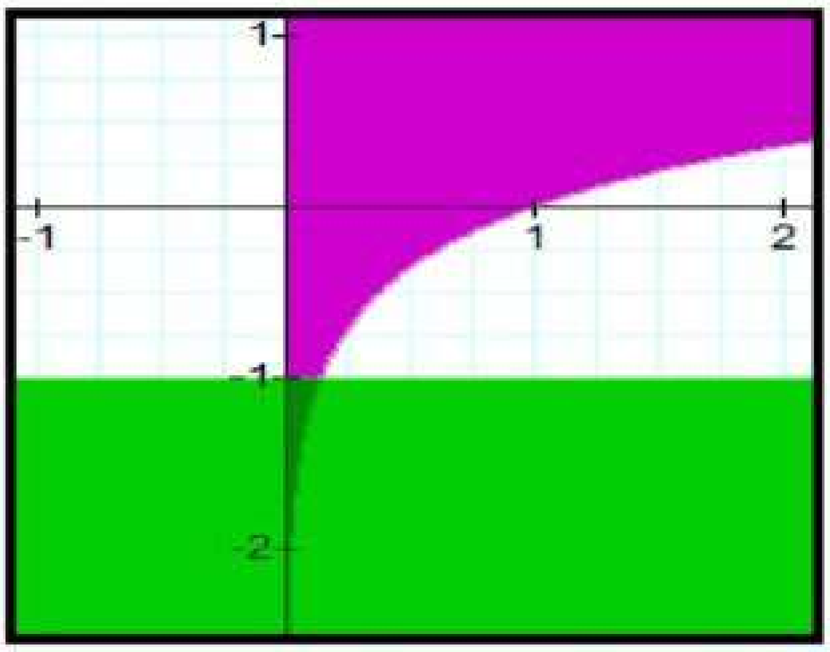
$x = 2$ **(7)**



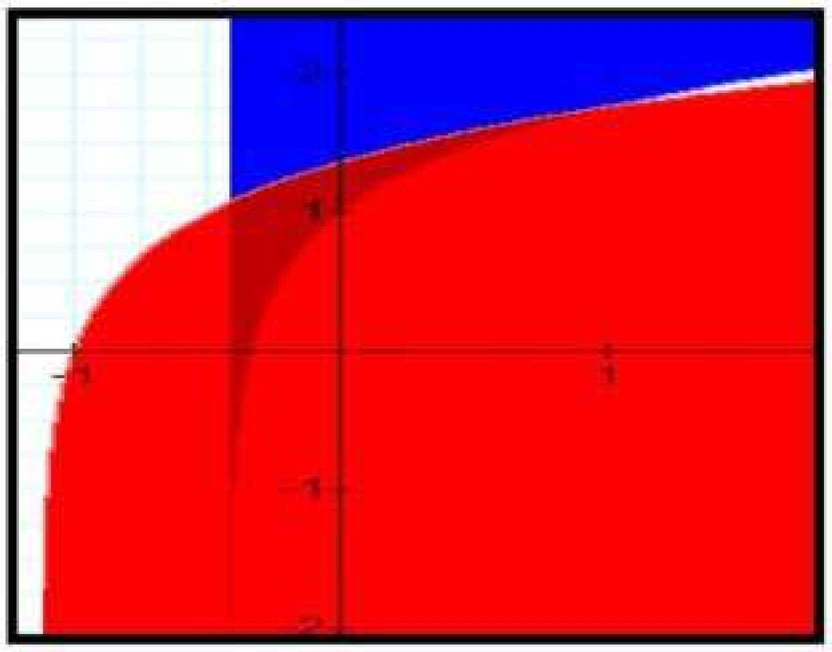
$x = 1$ **(8)**



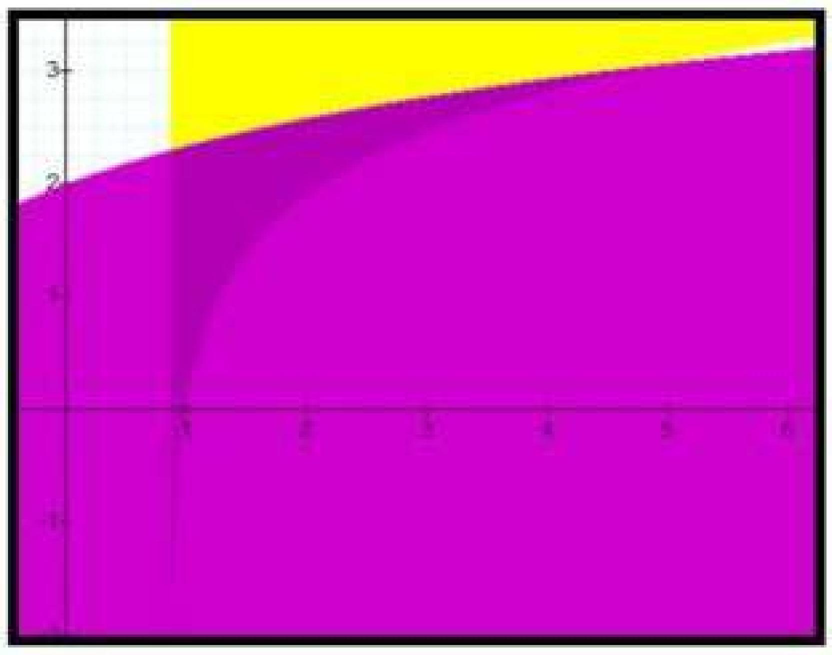
$\left\{x \middle| x < \frac{1}{7}\right\}$ **(9)**



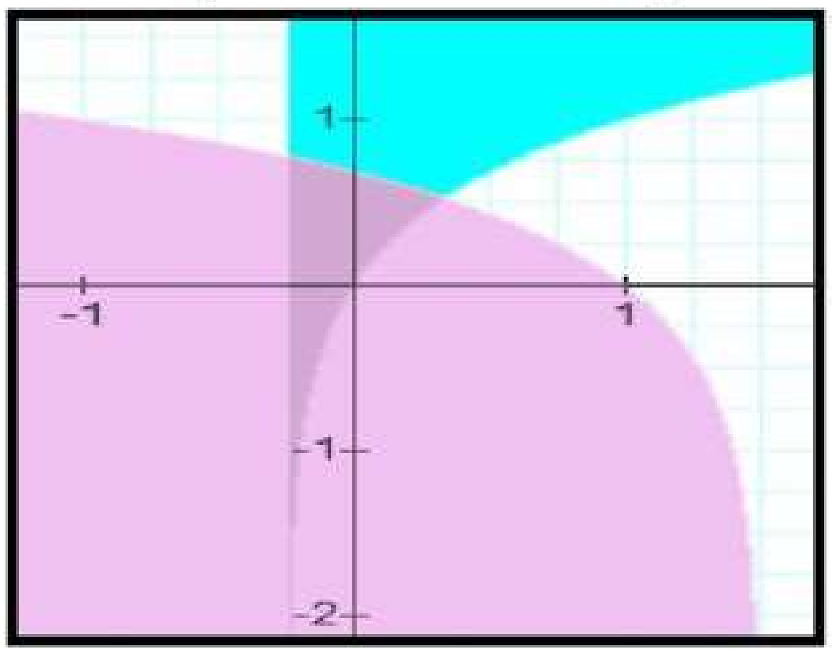
$\left\{x \middle| x \le 1\right\}$ **(10)**



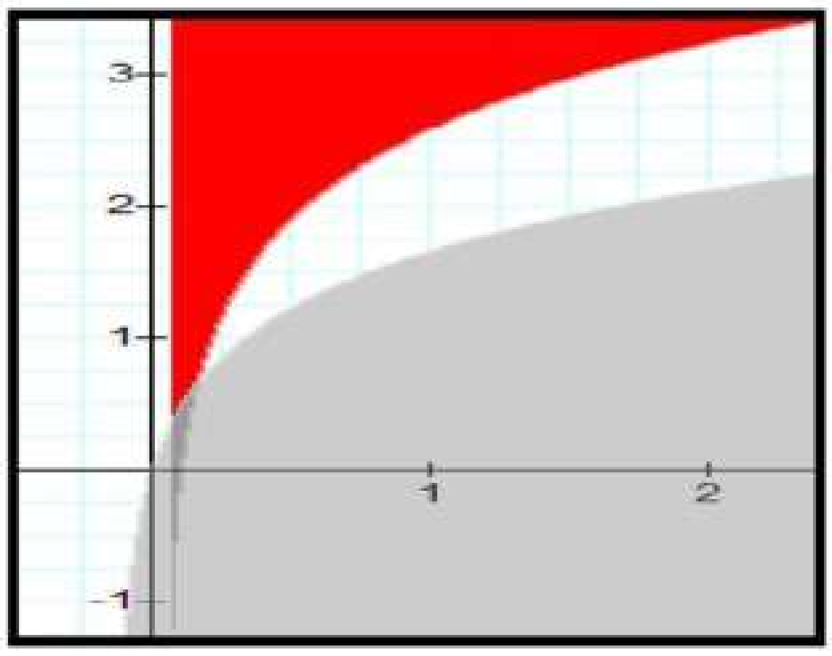
$\left\{x \middle| x < 5\right\}$ (11)



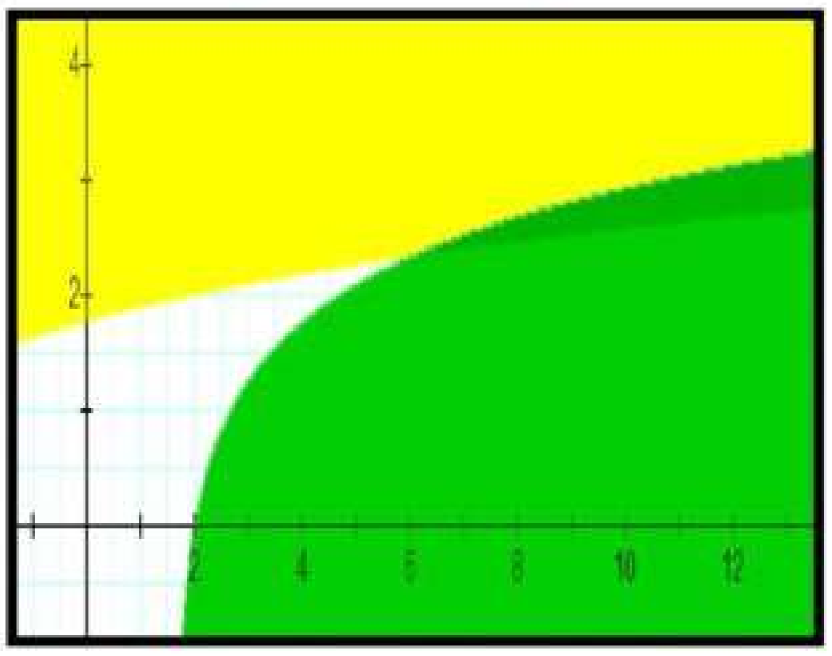
$\left\{x \middle| -\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{3}\right\}$ (12)



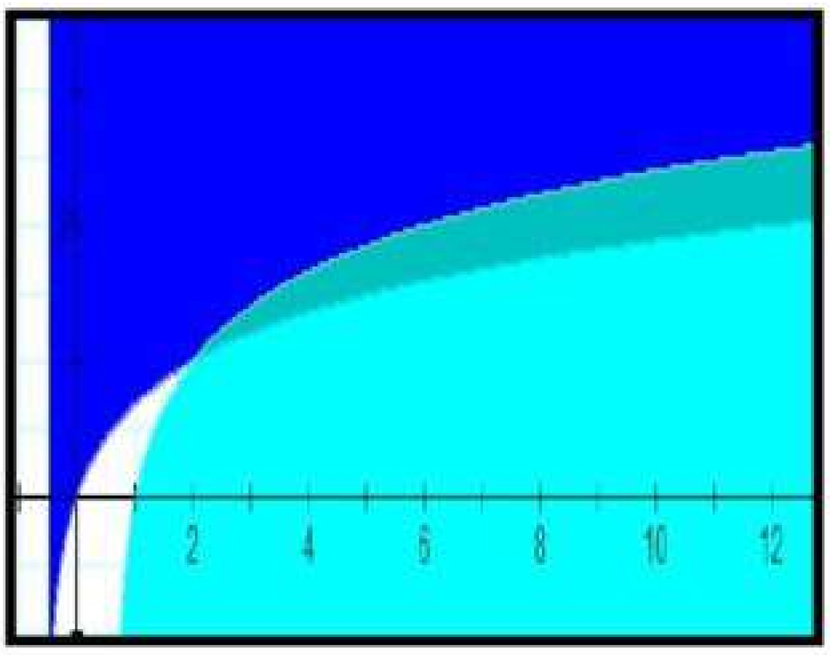
$\left\{x \middle| 0.06 < x < 0.17\right\}$ (13)



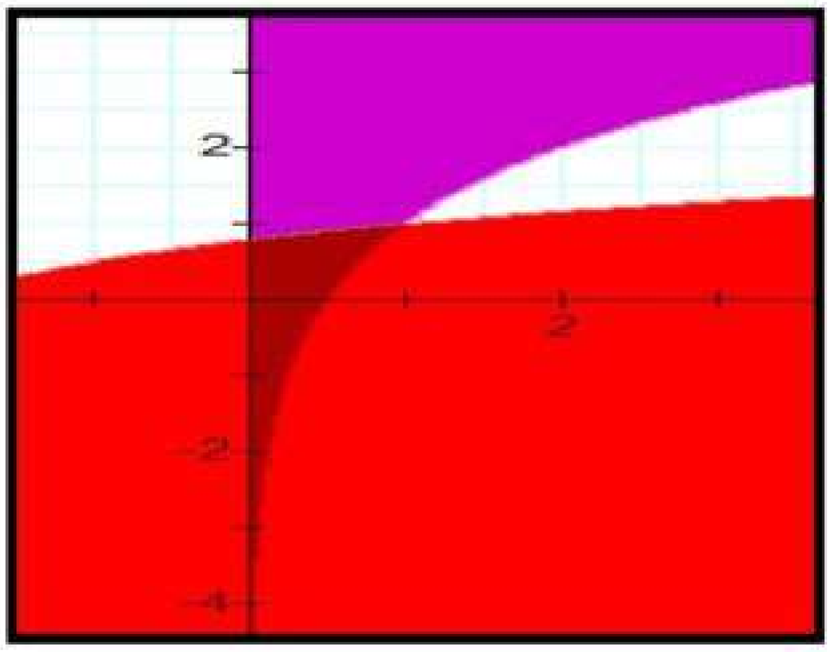
$\left\{x \middle| x \ge 6\right\}$ (14)



$\left\{x \middle| x \ge 2\right\}$ (15)



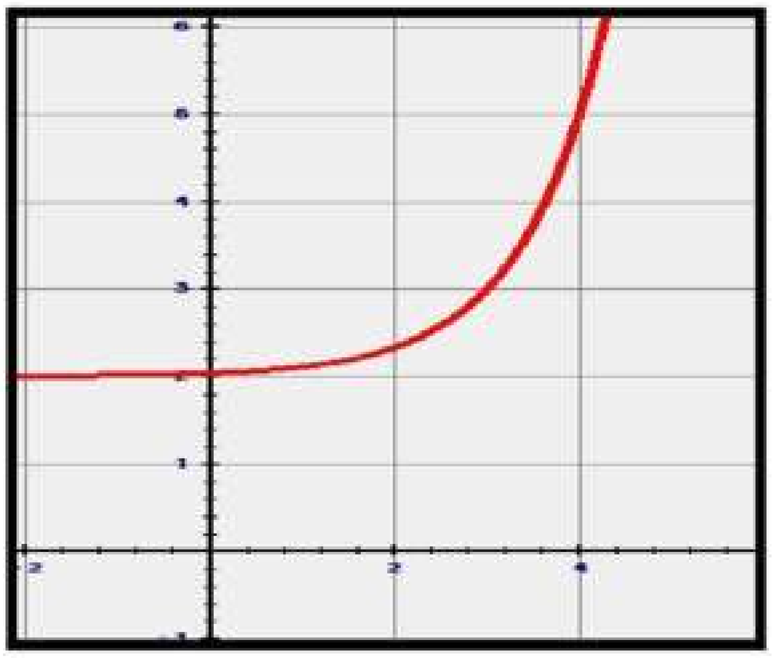
$\left\{x \middle| 0 < x \le 1\right\}$ (16)



دليل الدراسة و المراجعة

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً وحدد مجالها ومداها :

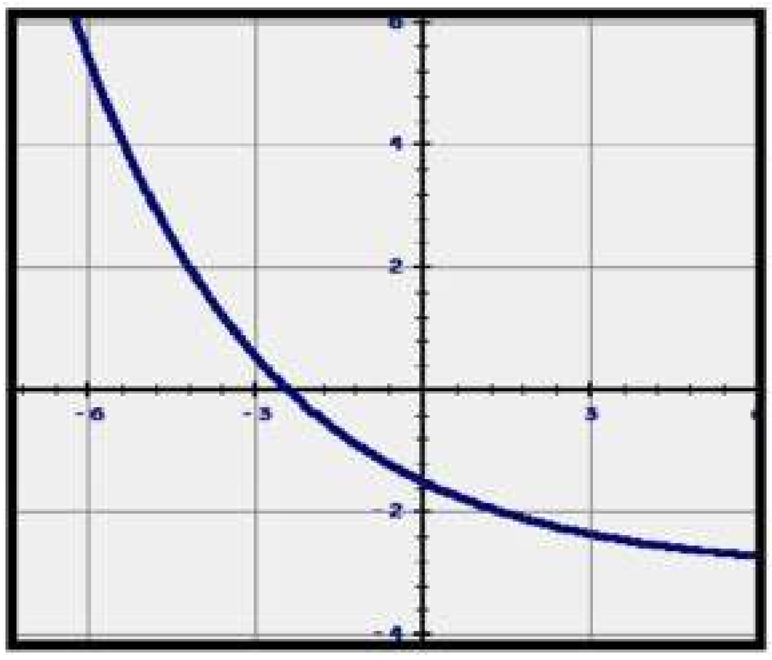
(1)



المجال: R

المدى: $\{f(x) | f(x) > 2\}$

(2)



المجال: R

المدى: $\{f(x) | f(x) \geq 3\}$

حل كل معادلة أو متباينة مما يلي، وقرب الناتج إلى أقرب أربع منازل عشرية كلما لزم ذلك :

(3)

$$2^{3(c+1)} = 2^{4(2c+3)}$$

$$\therefore 3c + 3 = 8c + 12$$

$$\therefore c = -\frac{9}{5} = -1.8$$

(4)

$$3^{2(x-2)} > 3^{-3x}$$
$$\therefore 2x - 4 > -3x$$
$$\therefore x > \frac{4}{5} \qquad \therefore x > 0.8$$

(5)

$$\log 2^{a+3} = \log 3^{2a-1}$$
$$\therefore a \log 2 + 3 \log 2 = 2a \log 3 - \log 3$$
$$\therefore a = \frac{-3 \log 2 - \log 3}{\log 2 - 2 \log 3}$$
$$\therefore a = 2.1130$$

(6)

$$x^2 - 7 = 6x$$
$$\therefore x^2 - 6x - 7 = 0$$
$$\therefore (x-7)(x+1) = 0$$
$$\therefore x = 7 \qquad , \quad x = -1$$

وبعد التحقق فإن $x = 7$

(7)

$$x > 5^2$$
$$\therefore x > 25$$

(8)

$$\log_3 x + \log_3 (x-3) = \log_3 4$$
$$\therefore \log_3 \left(x (x-3)\right) = \log_3 4$$
$$\therefore x^2 - 3x = 4$$
$$\therefore x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$\therefore (x-4)(x+1) = 0$$
$$\therefore x = 4 \quad , \quad x = -1$$

وبعد التعويض $x = 4$

---

(9)

$$6^{n-1} \le 11^n$$
$$\therefore \log 6^{n-1} \le \log 11^n$$
$$\therefore (n-1)\log 6 \le n \log 11$$
$$\therefore n \le \frac{\log 6}{\log 6 - \log 11}$$
$$\therefore n \le -2.9560$$

استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$ و $\log_5 11 \approx 1.4899$ لتقربديب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

(10)

$$\log_5 44 = \log_5 (2 \times 2 \times 11) = \log_5 2 + \log_5 2 + \log_5 11$$
$$= 0.4307 + 0.4307 + 1.4899 = 2.3513$$

---

(11)

$$\log_5 \frac{11}{2} = \log_5 11 - \log_5 2$$
$$= 1.4899 - 0.4307 = 1.0592$$

(12) سكان:

$y = 185000(1.0212)^x$ (a

$18500(1.0212)^{25} = 312566$ تقريبا (b

(13) $9^{\frac{3}{2}} = 27$

(14) $A \longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow -3$

(15) زراعة:

$b < 1$ (a

2Ä (b

2028 تقريبا (b

(16) نوفمبر:

8690 ريال تقريبا (a

2.31 سنة (b

3.2 سنة (b

(17) إختيار من متعدد:

$G \longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow 2$

(18) إختيار من متعدد:

$y = \log_{10}(x+5) \longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow C$

---

(19)

$$\log_3 \frac{t^2(z-2)^6}{x^2}$$

---

(20)

$$\left(3^3\right)^{3x} \le \left(3^2\right)^{2x-1}$$

$$(3)^{9x} \le (3)^{4x-2}$$

$$9x = 4x - 2$$

$$5x = -2$$

$$x = \frac{-2}{5}$$

---

(21)

(a

$$5000 = ab^0$$

$$5000 = a$$

$$28000 = 5000b^8$$

$$b^8 = 5.6$$

$$b = \sqrt[8]{5.6} = 1.24$$

$$y \approx 5000(1.24)^x$$

(b

$$y \approx 5000(1.24)^{32}$$

---

(22)

$$\frac{1}{16} = 2^{-4}$$

(23)

$$\log_{10} 100 = 2$$

(24)

$$\log_4 256$$

$$256 = 4^y$$

$$4^4 = 4^y$$

$$y = 4$$

$$\log_4 256 = 4$$

(25)

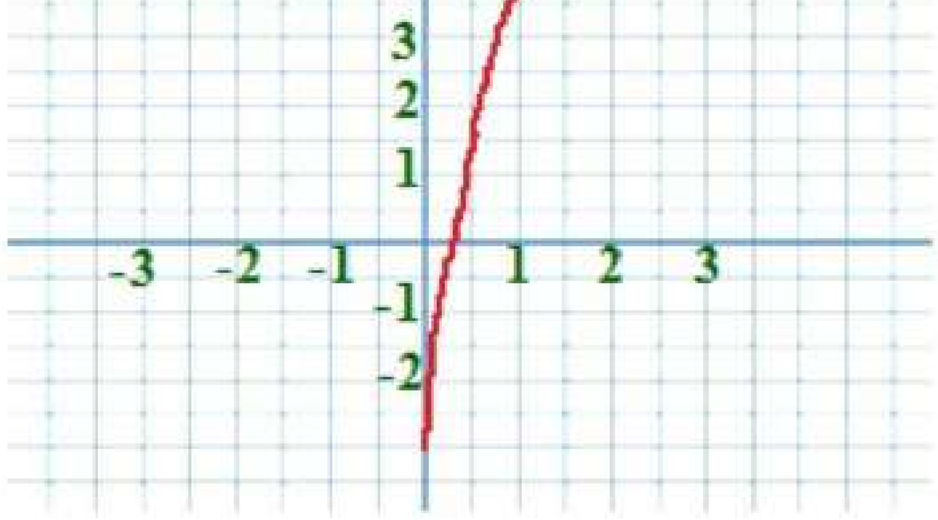
$$\log_2 \frac{1}{8} = -3$$

(26)

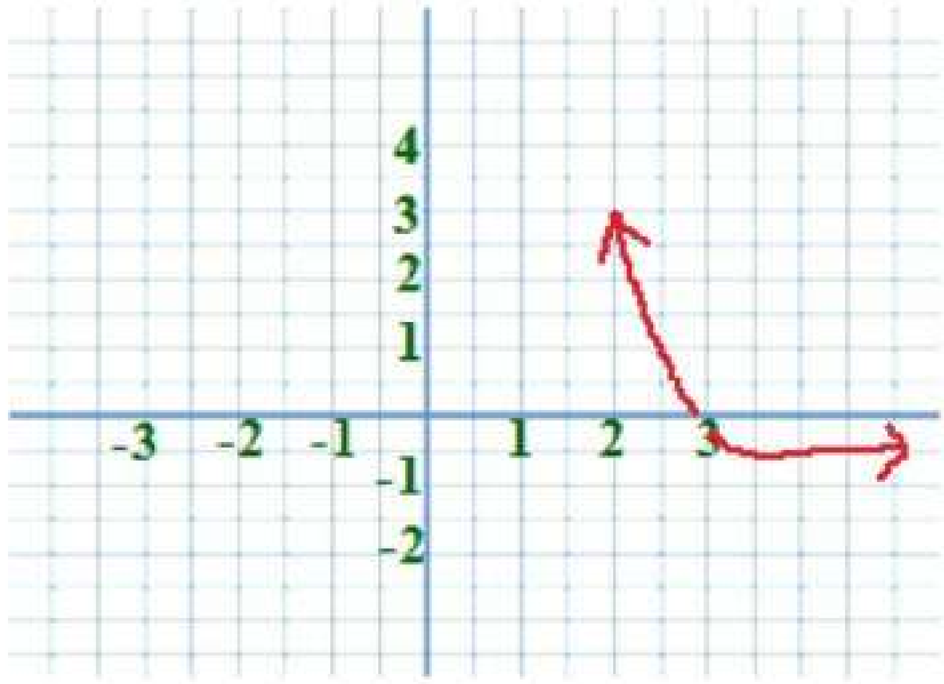
$$a = 2$$

$$h = 0$$

$$k = 4$$



(27)



(28)

$$\log_5 8 = \log_5 \left(\log_5 2 + \log_5 2 + \log_5 2\right)$$

$$\log_5 8 = \left(0.4307 + 0.4307 + 0.4307\right)$$

$$\log_5 8 \approx 1.3$$

(29)

$$\log_5 64 = \log_5 \left(16 \times 4\right) = \left(\log_5 16 + \log_5 2 + \log_5 2\right)$$

$$= \left(1.7227 + 0.4307 + 0.4307\right)$$

$$\log_5 64 \approx 2.6$$

(30)

$$\log_5 4 \approx 0.9$$

(31)

$$\log_5 \frac{1}{8} \approx -1.3$$

(32)

$$\log_5 \frac{1}{2} \approx -0.4$$

(33)

$$\log_3 2x^5 + \log_3 y^2 + \log_3 z^3$$

$$5\log_3 2x + 2\log_3 y + 3\log_3 z$$

(34)

$$\log_5 ab^{-3} + \log_5 c^4 + \log_5 d^{-2}$$

$$-3\log_5 ab + 4\log_5 c - 2\log_5 d$$

(35)

$$\log_2 \left(x^2\right)^3 - \log_2 (x-4)^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_2 \left(x^2\right)^3 - \log_2 \sqrt[3]{(x-4)}$$

$$\frac{\log_2 x^6}{\log_2 \sqrt[3]{(x-4)}}$$

(36)

$$2\log_2 (z-1) - \log_2 (2z-1)$$

$$\log_2 (z-1)^2 - \log_2 (2z-1)$$

$$\frac{\log_2 (z-1)^2}{\log_2 (2z-1)}$$

(37)

1000مرة

(38)

64

(39)

-6

(40)

$\log_4 x < 3$

$x < 4^3$

$x < 64$

(41)

$\log_5 x < -3$

$x < 5^{-3}$

$x < \frac{1}{125}$

(42) لا يوجد حل

(43) -6

(44) لا يوجد حل

(45) 361.6 مرة

(46) $x \approx 2.4650$

(47) $x \approx \pm 1.3637$

(48) $m \approx 0.6356$

(49) $r \approx 4.6102$

(50) $n \approx 0.5786$

(51) $x \approx -6.3013$

(52)

(a

$\frac{\log 11}{\log 4} \approx 1.7297$

(b

$$1.7297 \approx \frac{\log 15}{\log 2}$$

(53)

(a

$$A = p\left(1+\frac{0.5}{3}\right)^{3t}$$

8.2 سنة تقريباً

b) 13.9 سنة تقريبا

(54)

(a 3.43

(b 5.32 ريال

(55) سيارات:

(a 20Ä

(b بعد 11.3 سنة

(56) استثمار:

(a $A(t) = 250000(1.035)$

(b 1432

(57) كيمياء

(a 28 سنة

(b 18Ä

(58) زلزال

a)

$$R = 0.67\log(0.37\times 1000000) + 1.46$$
$$R = 5.2$$

b)

$$7.5 = 0.67\log(0.37E) + 1.46$$

$$6.04 = 0.67\log(0.37E)$$

$$\frac{6.04}{0.67} = \log(0.37E)$$

$$9.014925373 = \log(0.37E)$$

$$10^{9.014925373} = 0.37E$$

$E = 2797200834$ كيلو واط في الساعة

(59) احياء

$$G = \frac{t}{2.5\log_b d}$$

$$6 = \frac{t}{2.5\log_5(3125)}$$

$$6 = \frac{t}{2.5(5)}$$

$t = 75$ سنة

(60*a*)صوت

$$100 = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$100 = \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)^{10}$$

$$10^{100} = \left(\frac{I}{10^{-12}}\right)^{10}$$

$$I^{10} = 10^{-20}$$

$$I = 0.01$$

(*b*

$$50 = \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)^{10}$$

$$\log 10^{50} = \left(\frac{I}{10^{-12}}\right)^{10}$$

$$I^{10} = 10^{-70}$$

$$I = 10^{-7}$$

عند 50 ديسبل شدة الصوت الثاني %0.001 من شدة الصوت الاول

(c

$$d\left(I\right)=10\log\frac{I}{1\times10^{-12}}$$

$$d\left(I\right)=10\log\frac{1\times10^{-8}}{1\times10^{-12}}$$

$$d\left(I\right)=10\log\frac{2\left(1\times10^{-8}\right)}{1\times10^{-12}}$$

$$d\left(2\times10^{-8}\right)=43.01$$

مال(61a)

$$12000=8000e^{r(5)}$$

$$1.5=e^{5r}$$

$$\log1.5=\log e^{5r}$$

$$r\approx8.11\ \%$$

(b

$$12000=8000e^{5r}$$

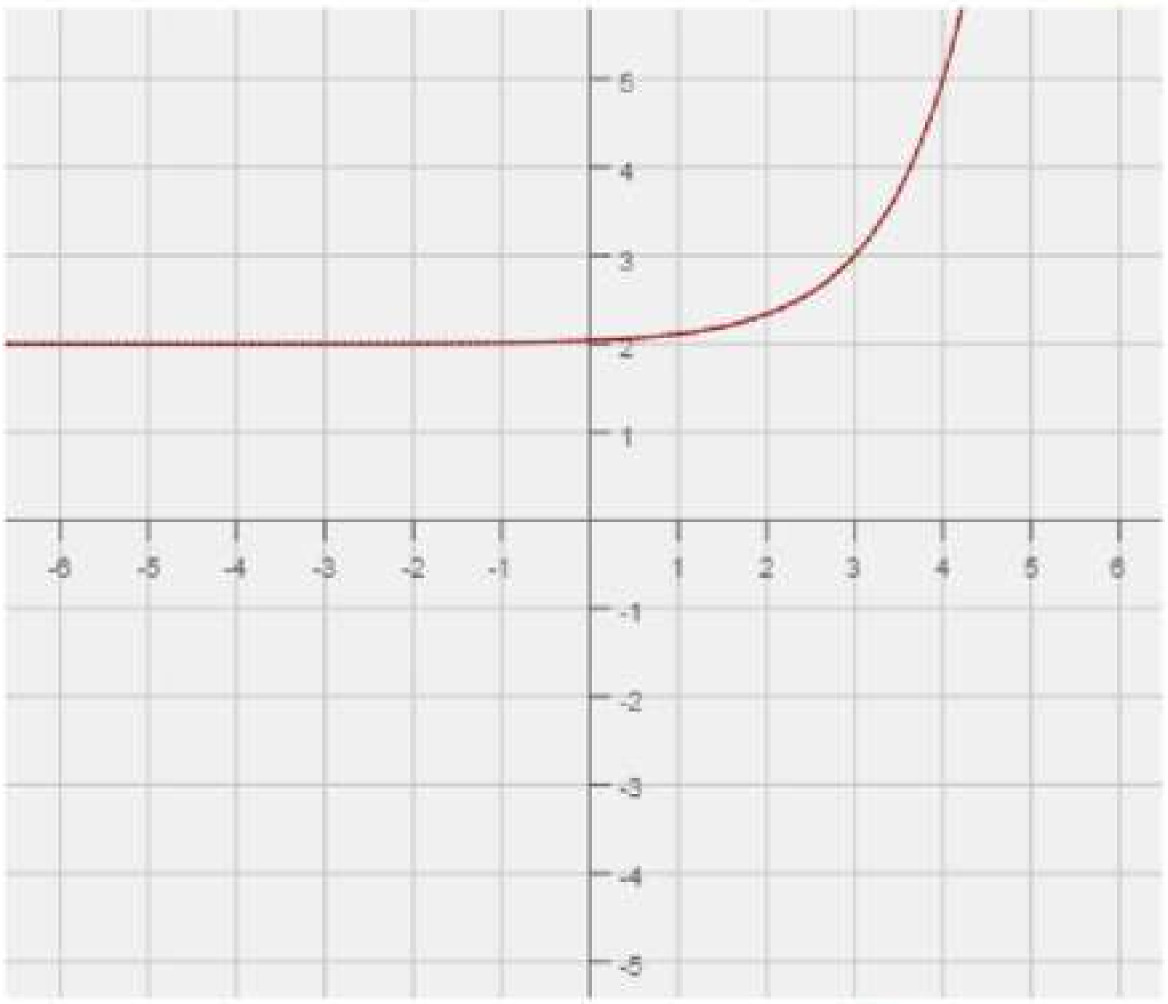
$$1.5=e^{5r}$$

$$r=\frac{\log1.5}{5}$$

$$r=8.1$$

اختبار الفصل الثاني

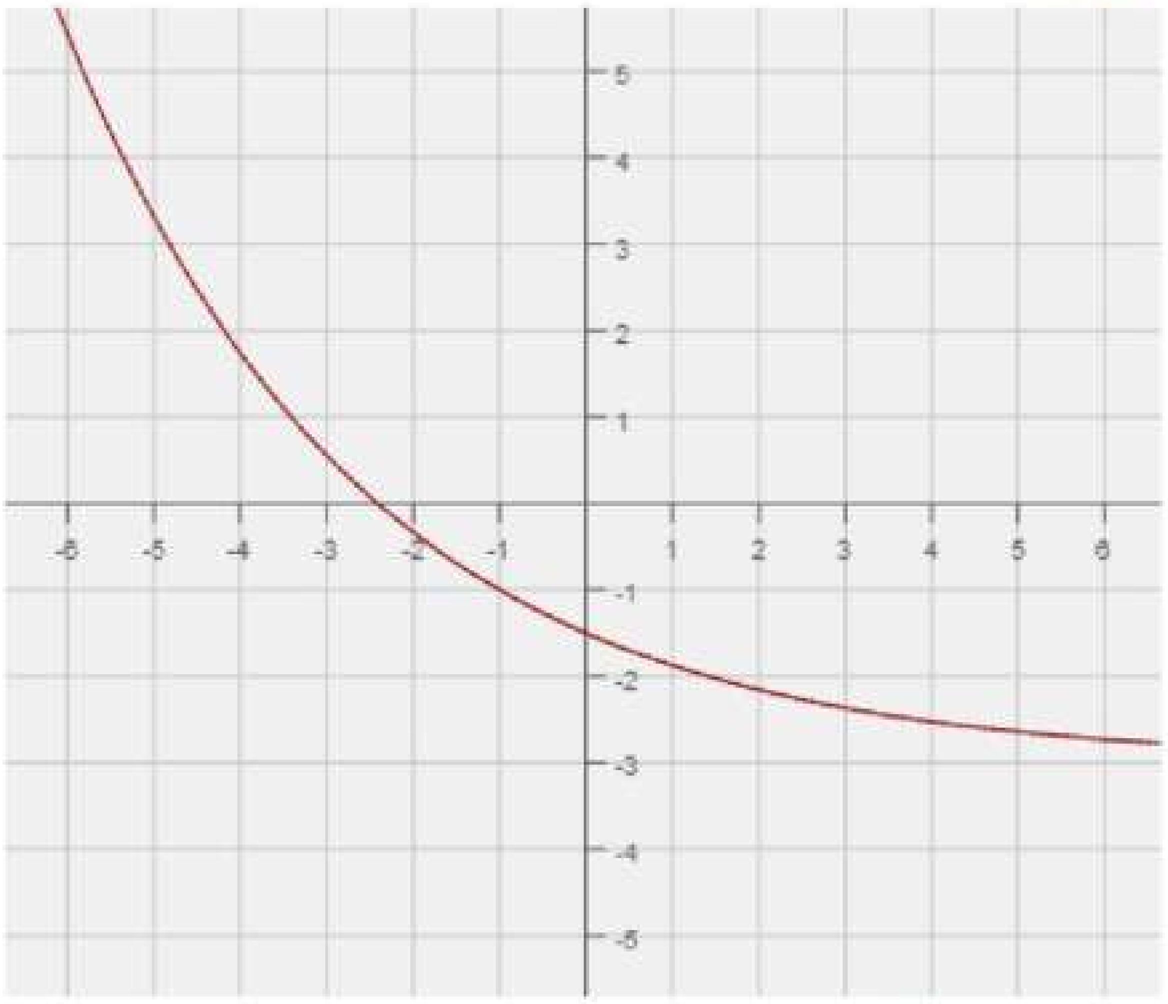
(1)



المجال: R

المدى: $\{y \mid y > 2\}$

(2)



المجال: R

المدى: $\{y \mid y > -3\}$

(3)

$$c = \frac{-9}{5}$$

(4)

$$x = \frac{4}{5}$$

(5)

$$a \approx 2.1130$$

(6)

$$x = 7$$

(7)

$$x = 25$$

(8)

$$x = 4$$

(9)

$$n = -2.9560$$

(10)

2.3513

(11)

1.0592

(12) سكان:

(a

$$y = 185000(1.0212)^x$$

(b

312566 تقريبا

(13)

$$9^{\frac{3}{2}} = 27$$

اختيار من متعدد:

(14) A

(15)

(a

$$b < 1$$

(b

2Ä تقريبا

(a

$$y = 185000(1.0212)^x$$

(c

2028 تقريبا

(16) توفير:

(a

8690 ريالاً تقريبا

(b

2.31 سنة تقريبا

(a

$$y = 185000(1.0212)^x$$

(c

3.2 سنوات تقريبا

اختيار من متعدد:

(17) C

اختيار من متعدد:

(18) C

(19)

$$\log_3 x^{-2} + \log_3 (z-2)^6 + \log_3 t^2$$

$$\log_3 x^{-2}.(z-2)^6.t^2$$

الفصل الثالث المتطابقات والمعادلات المثلثية

اختبار سريع:

حلل كل عبارة فيما يأتي تحليلاً تاماً، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فأكتب " أولية ".

(1) $-4a(4a-1)$

(2) $5(x+2)(x-2)$

(3) أولية

(4) $(2y+5)(y-3)$

(5) هندسة:

$$\frac{x^2+6x+8}{x+4}=\frac{(x+2)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=x+2$$

حل كلاً من المعادلات الآتية بإستعمال التحليل:

(6) $x^2+6x=0$

$$x^2+6x=0$$
$$\therefore\ x(x+6)=0$$
$$\therefore\ x=0\ ,\ x+6=0$$
$$\therefore\ x=0\ ,\ x=-6$$

(7) $x^2+2x-35=0$

$$x^2+2x-35=0$$
$$\therefore (x+7)(x-5)=0$$
$$\therefore\ x=-7\ ,\ x=5$$

(8) $x^2 - 9 = 0$

$$x^2 - 9 = 0$$
$$\therefore (x-3)(x+3) = 0$$
$$\therefore\ x = 3\ ,\ \ x = -3$$

(9) $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$
$$\therefore\ (x-3)(x-4) = 0$$
$$\therefore\ \ x = 3\ ,\ x = 4$$

---

(10) حدائق:

$$x(x+1) = 42$$
$$\therefore\ x^2 + x = 42$$
$$\therefore\ x^2 + x - 42 = 0$$
$$\therefore\ (x+7)(x-6) = 0$$
$$\therefore\ \ x = -7\ ,\ x = 6$$

قيمة x الممكنة هي ft $x = 6$ حيث لا يوجد طول بالسالب.

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

(11) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(12) $\dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

---

(13) $\frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

---

(14) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(15) **قصر المصمك:**

$$36\sin 30 = 36\times\frac{1}{2} = 18\,m$$

(3-1) المتطابقات المثلثية

■ **تحقق من فهمك:**

(1)

(1A

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\therefore \sin^2\theta+\frac{1}{3}=1$$

$$\therefore \sin^2\theta=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

وحيث θ تقع في الربع الرابع فإن $\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

(1B

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\therefore \frac{-2}{7}+\cos^2\theta=1$$

$$\therefore \cos^2\theta=1+\frac{2}{7}=\frac{9}{7}$$

$$\therefore \cos\theta=\pm\frac{3}{\sqrt{7}}$$

وحيث θ تقع في الربع الثالث فإن $\therefore \cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{7}}=-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

■ **تحقق من فهمك:**

(2)

(2A

$$\frac{\tan^2\theta\csc^2\theta-1}{soc^2\theta}=\frac{\frac{\cancel{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\cancel{\sin^2\theta}}-1}{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}\cdot\cancel{\cos^2\theta}=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$$

(2B

$$\frac{\sec\theta}{\sin\theta}\left(1-\cos^2\theta\right)=\frac{\sec\theta}{\cancel{\sin\theta}}\cdot\sin^{\cancel{2}}\theta$$

$$=\sec\theta\cdot\sin\theta=\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{1}=\tan\theta$$

■ **تحقق من فهمك:**

(3)

$$T=fr\sin\theta$$

$$\frac{T}{r\sin\theta}=\frac{fr\sin\theta}{r\sin\theta}$$

$$f=\frac{T}{r\sin\theta}$$

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية:

(1)

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} = \frac{1}{2}$$

(2)

$$csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

(3)

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\therefore\ \sin^2\theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{-12}{13}$$

(4)

$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$$

$$\therefore\ \sec^2\theta = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore\ \sec\theta = \sqrt{2}$$

(5)

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(6)

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

$$\therefore \frac{1}{16} + \frac{16}{16} = \csc^2\theta$$

$$\therefore \csc^2\theta = \frac{17}{16}$$

$$\therefore \csc\theta = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

(7)

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\therefore \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\therefore \cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{3}{5}$$

(8)

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$$

$$\therefore = \frac{2}{9}\sin^2\theta$$

$$\therefore \cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{\sqrt{27}}{9}$$

بسط كل عبارة مما يأتي:

(9)

$$\tan\theta\cos^2\theta = \frac{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}\cdot\cos^{\cancel{2}}\theta$$

$$= \sin\theta\cos\theta$$

(10)

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 1$$

(11)

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta\times\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\cot^2\theta$$

(12)

$$\sec\theta\tan^2\theta+\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^3\theta}=\frac{1}{\cos^3\theta}=\sec^3\theta$$

(13)

$$\sin\theta\left(1+\cot^2\theta\right)=\sin\theta\left(1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$$=\sin\theta\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)=\cancel{\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\cancel{^2}\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$$

(14)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sec\theta=\cancel{\cos\theta}\times\frac{1}{\cancel{\cos\theta}}=1$$

(15)

$$\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

(16)

$$(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$$

(17)

$$2-2\sin^2\theta$$
$$= 2(1-\sin^2\theta) = 2\cos^2\theta$$

(18)

$$\csc\theta - \cos\theta\cot\theta$$
$$= \frac{1}{\sin\theta} - \cos\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta} = \sin\theta$$

(19) بصريات:

a) $I = I_{\circ}\cos^2\theta$

b) $I = \frac{3}{4}I_{\circ}$ أي أن شدة الضوء تساوي ثلاث أرباع شدة الضوء قبل مرورها بالعدسة الثانية.

(20) الشمس:

a) $W = \frac{eAS}{\sec\theta} = eAS\cos\theta$

(b

$$W = eAS\cos\theta = 0.8\times 0.75\times 1000\times \cos 40^\circ$$
$$= 459.63w$$

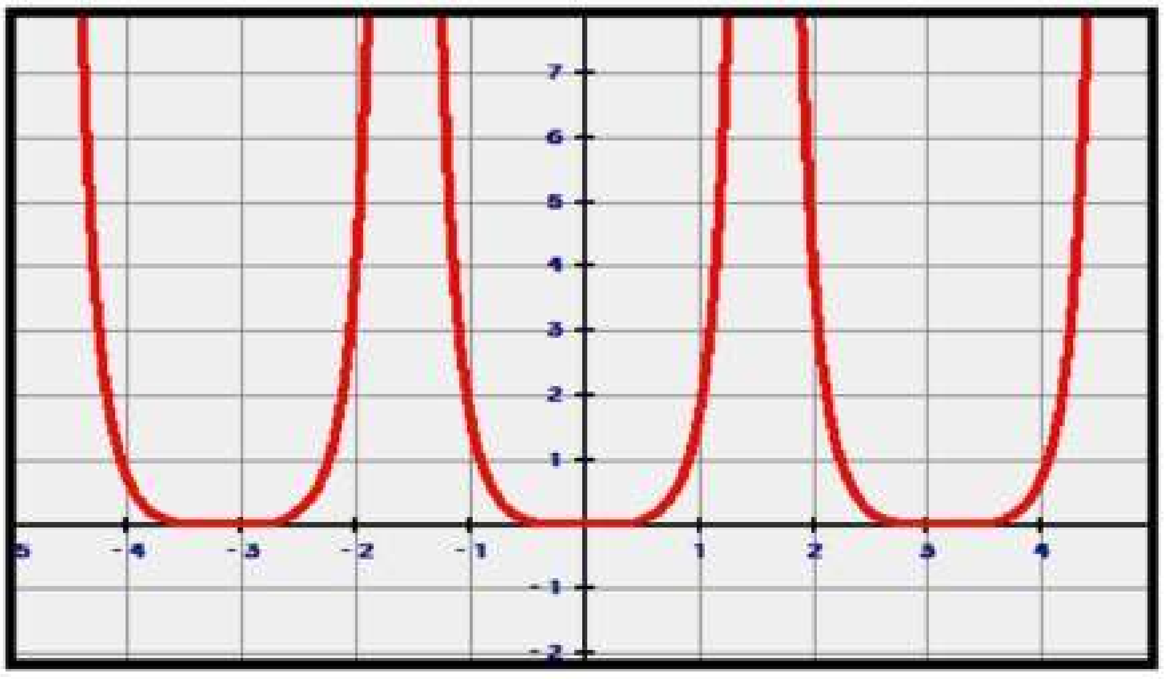
(21) تمثيلات متعددة:

(a جدولياً:

θ	0°	30°	45°	60°
$\tan^2\theta - \sin^2\theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
$\tan^2\theta\sin^2\theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$

(b بيانياً:

متطابقان



(c تحليلياً:

نعم التمثيلان متطابقان.

(d تحليلياً:

نعم تمثل متطابقة.

---

(22) التزلج على الجليد:

$$\mu_k = \frac{mg\sin\theta}{F_n} = \frac{\cancel{mg}\ \sin\theta}{\cancel{mg}\ \cos\theta} = \tan\theta$$

بسط كلاً مما يأتي:

(23)

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}=\frac{\sin\theta-1}{1-\sin\theta}=-1$$

(24)

$$\frac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}=\frac{\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta+\sin\theta}{1+\frac{1}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+1}=\frac{\sin\theta\cancel{(1+\cos\theta)}}{\cancel{\cos\theta+1}}=\sin\theta$$

(25) إكتشف الخطأ:

أحمد،

لم يبرهن سعيد صحة المتطابقة عند جميع قيم θ ، وقد يكون هناك قيم أخرى لا تحقق المعادلة.

(26) تحد:

ليست متطابقة عند $x = 45^\circ$

(27) تبرير:

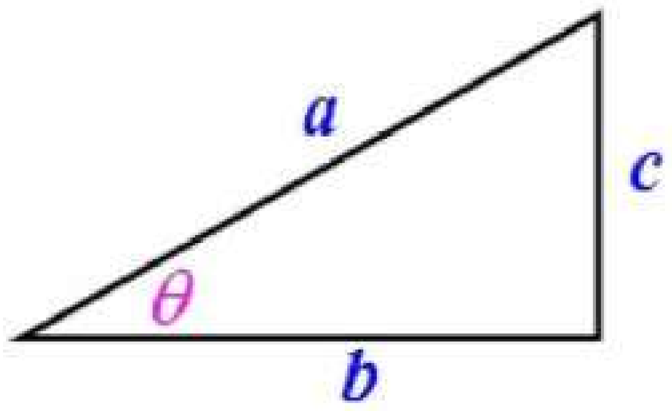
$$\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$$

$$\therefore \frac{1}{\cos\theta} = \frac{I}{ER^2}$$

$$\therefore I\cos\theta = ER^2$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{ER^2}{I}$$

(28) **أكتب:**



$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 + b^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2}{a^2} = 1$$

(29) **برهان:**

$$\tan\theta(-a) = \frac{\sin(-a)}{\cos(-a)} = \frac{-\sin a}{\cos a} = -\tan a$$

(30) **مسألة مفتوحة:**

$$\tan\theta\sin\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin^2\theta\sec\theta$$

(31) **تبرير:**

أقسم جميع الحدود على $\sin^2\theta$

(32) **إكتشف الخطأ:**

إجابة سامي هي الصحيحة: لأن علاء إستخدم علاقة خاطئة.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل مما يأتي، اكتب قياس الزاوية بالراديان، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا:

(33) 2.09

(34) 0.60

0.50 (35)

0.80 (36)

(37)

$$K + x^2 = 3x + 2$$
$$\therefore K + 25 = 15 + 2$$
$$\therefore K = 17 - 25 = -8$$

(38)

$$2^x = 32^{x-2}$$
$$\therefore 2^x = 2^{5x-10}$$
$$\therefore x = 5x - 10$$
$$\therefore 10 = 4x$$
$$\therefore x = 2.5$$

تدرب على إختبار

(39)

$A \rightarrow 5$

(40)

$B \rightarrow \dfrac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

(3-2) إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

■ تحقق من فهمك:

(1)

$$\cot^2\theta-\cos^2\theta$$
$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-\cos^2\theta=\cos^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)$$
$$=\cos^2\theta\left(\csc^2\theta-1\right)=\cos^2\theta\cot^2\theta$$

■ **تحقق من فهمك**:

(2) $c \leftarrow \cos^2\theta$

$$\tan^2\theta\left(\cot^2\theta-\cos^2\theta\right)$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-\cos^2\theta\right)=\frac{\cancel{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta}\left(\frac{\cos^2\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta}{\cancel{\sin^2\theta}}\right)$$

$$=\mathbf{1}-\sin^2\theta=\cos^2\theta$$

■ **تحقق من فهمك**:

(3)

$$\csc^2\theta-\cot^2\theta$$

$$=\left(\frac{\mathbf{1}}{\sin^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)=\left(\frac{\mathbf{1}-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=\mathbf{1}$$

$$\cot\theta\tan\theta$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\square\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\mathbf{1}$$

تدرب وحل المسائل

اثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة.

(1)

$$\cos^2\theta+\tan^2\theta\cos^2\theta$$

$$=\cos^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}\square\cancel{\cos^2\theta}$$

$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=\mathbf{1}$$

(2)

$$\cot\theta\left(\cot\theta+\tan\theta\right)$$

$$=\cot^2\theta+\cot\theta\tan\theta=\cot^2\theta+1$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+1=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}=\csc^2\theta$$

(3)

$$1+\sec^2\theta$$

$$=1+\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\sin^2\theta$$

$$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$$

(4)

$$\sin\theta\cdot\sec\theta\cdot\cot\theta$$

$$=\sin\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta\sin\theta}=1$$

(5)

$$(\sec\theta-\cot\theta)^2$$

$$=\sec^2\theta-2\sec\theta\cot\theta+\cot^2\theta$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}-2\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1-2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}=\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\cancel{(1-\cos\theta)}\,(1-\cos\theta)}{\cancel{(1-\cos\theta)}\,(1+\cos\theta)}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

(6)

$$\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{(1-\cos^2\theta)-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\tan\theta\cot\theta$$

(7)

$$\frac{\sec\theta}{\csc\theta}$$

$$=\frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

(8)

$$\sin\theta\cot\theta$$

$$=\cancel{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\cancel{\sin\theta}}=\cos\theta$$

(9)

$$\left(\sin\theta-1\right)\left(\tan\theta+\sec\theta\right)$$
$$=\sin\theta\tan\theta+\sin\theta\sec\theta-\tan\theta-\sec\theta$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\cancel{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}-\cancel{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}-\frac{1}{\cos\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta-1}{\cos\theta}=\frac{\cos^{\cancel{2}}\theta}{\cancel{\cos\theta}}=\cos\theta$$

(10)

$$\cos\theta\cos\left(-\theta\right)-\sin\theta\sin\left(-\theta\right)$$
$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

(11) **إختيار من متعدد:**

$$\csc^2\theta \leftarrow D$$

اثبت أن كل معادلة مما يأتى تمثل متطابقة.

(12)

$$\sec\theta-\tan\theta$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

(13)

$$\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=\frac{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\cancel{\cos\theta+\sin\theta}}{\cos\theta\cancel{\left(\sin\theta+\cos\theta\right)}}$$

$$\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

(14)

$$\sec\theta\csc\theta$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}\square\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$\tan\theta+\cot\theta$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

---

(15)

$$\frac{2\sin^2\theta-1}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin^2\theta-\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\cancel{(\sin\theta-\cos\theta)}(\sin\theta+\cos\theta)}{\cancel{\sin\theta-\cos\theta}}$$

$$=\sin\theta+\cos\theta$$

(16)

$$\frac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$$

$$=\frac{2+\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}}{\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}}=2\cos\theta\sin\theta+1$$

$$=2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)^2$$

(17)

$$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\square\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$=\frac{\cos\cancel{^2}\theta}{\cancel{\cos\theta}(1-\sin\theta)}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

(18)

$$\frac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$$

$$=\frac{\csc^2\theta-1}{\csc\theta+1}=\frac{(\csc\theta-1)\cancel{(\csc\theta+1)}}{\cancel{\csc\theta+1}}$$

$$=\csc\theta-1$$

(19)

$$\csc^2\theta-\cot^2\theta$$

$$=1$$

$$\sec^2\theta-\tan^2\theta$$

$$=1$$

(20)

$$\sin\theta\cos\theta\tan\theta+\cos^2\theta$$

$$=\sin\theta\cos\theta\square\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\cos^2\theta$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

(21)

$\sec\theta - \cos\theta$

$= \dfrac{1}{\sin\theta} - \cos\theta = \dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

$\sec\theta - \cos\theta$

$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \sin\theta$

$= \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

(22)

$\cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

$= \cot^2\theta + \sin\theta \square \dfrac{1}{\sin\theta}$

$= \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

(23)

$\dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

$= \dfrac{1}{\csc\theta} - \dfrac{1}{\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

(24) <u>ألعاب</u>:

$$L = \frac{g\tan\theta}{w^2\sin\theta} = \frac{g\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{w^2\sin\theta} = \frac{g\frac{1}{\cos\theta}}{w^2} = \frac{g\sec\theta}{w^2}$$

نعم الصيغة $L = \frac{g\tan\theta}{w^2\sin\theta}$ تمثل علاقة بين L ، θ

(25) جري:

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\therefore \cos\theta = 0.968 \quad \therefore \tan\theta = 0.258$$

$$v^2 = gR\tan\theta = 9.8 \times 16.7 \times 0.258 = 42.22$$

$$\therefore v = 6.5 \quad m/s$$

بسط كلاً من العبارات الآتية لتحصل على الناتج 1 أم -1.

(26) 1

(27) -1

(28) 1

(29) 1

(30) 1

(31) -1

(32) 1

(33) -1

بسط كل مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

(**34**)

$$\frac{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\cancel{\csc\theta}}{\csc^{\cancel{2}}\theta}=\frac{\cot\theta}{\csc\theta}=\frac{\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\dfrac{1}{\sin\theta}}=\cos\theta$$

(**35**)

$$\frac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}=\frac{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}=\frac{\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

(**36**)

$$\frac{\sec^2\theta-\tan^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1}{1}=1$$

(**37**)

$$\tan\theta\cos\theta$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}\cdot\cancel{\cos\theta}=\sin\theta$$

$$\cot\theta\tan\theta=1$$ (**38**)

(**39**)

$$\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\cancel{\cos\theta}}\cdot\cancel{\cos\theta}=1$$

(40)

$$\left(\sec^2\theta+\csc^2\theta\right)-\left(\tan^2\theta+\cot^2\theta\right)=\left(\sec^2\theta-\tan^2\theta\right)+\left(\csc^2\theta-\cot^2\theta\right)$$
$$=1+1=2$$

(41) **فيزياء:**

$$y=\frac{-gx^2}{2w_\circ^2}\left(1+\tan^2\theta\right)+x\tan\theta$$

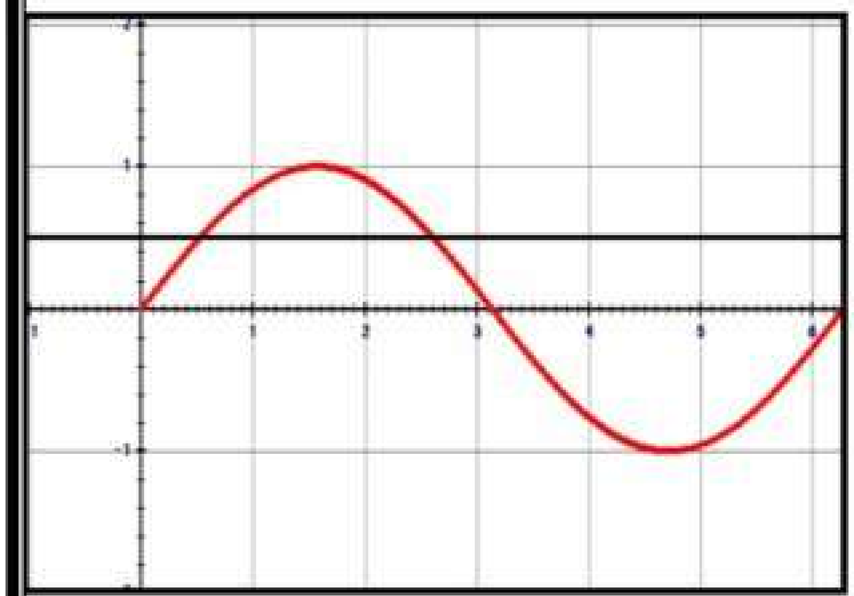
(42) **إلكترونيات:**

(a
$$P=I_\circ^2R\left(1-\cos^2 2\pi ft\right)$$

(b
$$P=\frac{I_\circ^2R}{\csc^2 2\pi ft}$$

(43) **تمثيلات متعددة:**

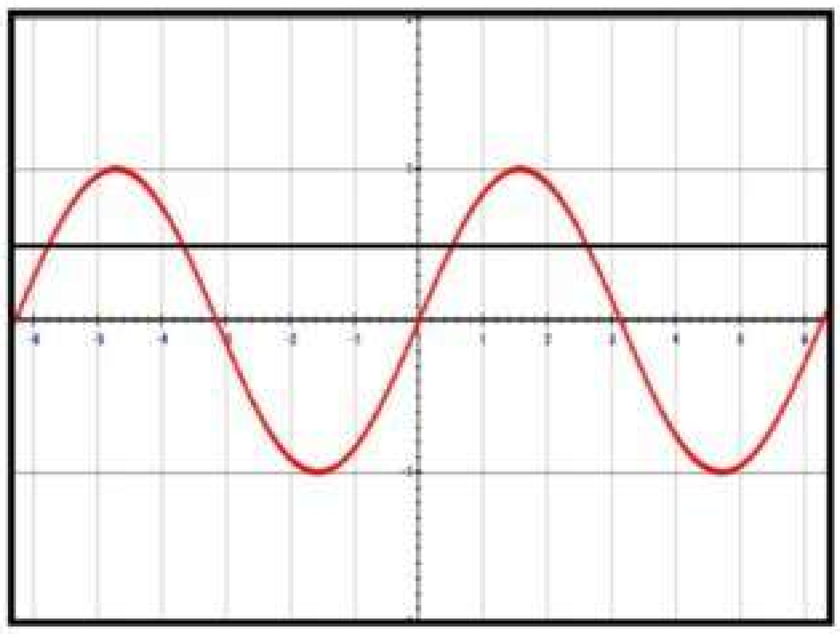
(a جبريا: $\sin x=0.5$



(b بيانيا:

يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y=\sin x$ ، $y=0.5$

عند النقاط $x=\frac{5\pi}{6}$ ، $x=\frac{\pi}{6}$ على الفترة $\left[0,2\pi\right)$



(c بيانيا:

يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y=\sin x$ ، $y=0.5$

عند النقاط $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{-7\pi}{6}$ ، $\frac{-11\pi}{6}$

على الفترة $\left[-2\pi,2\pi\right)$

(d بما أن الجيب دالة دورية تكون حلول المعادلة هي $x=\frac{\pi}{6}+2n\pi$ ، $x=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$

حيث عدد n صحيح.

(44) **إكتشف الخطأ:**

$\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2\sin^2\theta$ ، باقي المعادلات هي متطابقة فيثاغورس ولكن هذة المعادلة ليست منها.

(45) **تبرير:**

لأن $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ هي متطابقة فيثاغورس أما الدالة $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos\theta}$ فليست منها

(46) **أكتب سؤالاً:**

هل استعملت المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$؟

(47) **أكتب:**

لأنهما أكثر دالتين مثلثيتين شيوعاً في الإستخدام.

(48) **تحد:**

α , β زاويتين متتامتين لذا فإن

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

(49) **تبرير:**

$$1+\tan^2\theta = 1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$$

$$1+\cot^2\theta = 1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} = \csc^2\theta$$

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(50) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(51) $\frac{5}{4}$

(52) $\frac{3}{5}$

(53) **هندسة معمارية:**

$\theta = 30^\circ$

بسط العبارتين الآتيتين:

(54)

$$\sin\theta\cos\theta(1+\cot^2\theta) = \sin\theta\cos\theta\csc^2\theta = \cancel{\sin\theta}\cos\theta\frac{1}{\sin^{\cancel{2}}\theta} = \cot\theta$$

(55)

$$\frac{\sin^4\theta-\cos^4\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\frac{\cancel{\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)}\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)}{\cancel{\sin^2\theta-\cos^2\theta}}$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=\mathbf{1}$$

تدرب على إختبار

(56)

$\tan\theta\csc\theta$ ***D***

(57) <u>**سؤال ذو إجابة قصيرة:**</u>

$$\sin^3\theta\cos\theta-\cos^3\theta\sin\theta=\sin\theta\cos\theta\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)$$

$$=\sin\theta\cos\theta\times\mathbf{1}=\sin\theta\cos\theta$$

(3-3) المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين و الفرق بينهما

■ تحقق من فهمك:

(1)

(1A

$$\sin(15) = \sin(60-45) = \sin 60 \cos 45 - \cos 60 \sin 45$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(1B

$$\cos(-15) = \cos(45-60) = \cos 60 \cos 45 + \sin 60 \sin 45$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

■ تحقق من فهمك:

(2)

(2A

$$2\sin(245\,t) = 2\sin(315\,t - 30\,t)$$

(2B

$$2\sin(245) = 2\sin(315-30) = 2\left(\sin 315 \cos 30 - \cos 315 \sin 30\right)$$

$$= \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

■ تحقق من فهمك:

(3)

(3A

$$\sin(90-\theta) = \sin 90 \cos\theta - \cos 90 \sin\theta$$

$$= 1\times\cos\theta = \cos\theta$$

(3B

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$$

$$= \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(1)

$$\cos 165 = \cos(120+45) = \cos 120 \cos 45 - \sin 120 \sin 45$$

$$= \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(2)

$$\cos 105 = \cos(60+45) = \cos 60 \cos 45 - \sin 60 \sin 45$$

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

(3)

$$\cos 75 = \cos(30+45) = \cos 30 \cos 45 - \sin 30 \sin 45$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(4)

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos(45-30) = \cos 45 \cos 30 + \sin 45 \sin 30$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

(5)

$$\sin(-30) = \sin(60-90) = \sin 60 \cos 90 - \cos 60 \sin 90$$

$$= -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

(6)

$$\sin(-210) = \sin(60-270) = \sin 60 \cos 270 - \cos 60 \sin 270$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(7)

$$\cos(135) = \cos(180-45) = \cos 180 \cos 45 + \sin 180 \sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(8)

$$\tan 195 = \tan(90+105) = \frac{\tan 90 + \tan 105}{1 - \tan 90 \left(\tan 105\right)}$$

$$= \frac{\tan 90 + \left[\dfrac{\tan 60 + \tan 45}{1 - \tan 60 \tan 45}\right]}{1 - \tan 90 \left[\dfrac{\tan 60 + \tan 45}{1 - \tan 60 \tan 45}\right]} = 2 - \sqrt{3}$$

(9) **كهرباء:**

(a

$$C = 2\sin\left[90t + 30t\right]$$

(b

$$C = 2\sin(90+30) = 2\left(\sin 90\cos 30 + \cos 90\sin 30\right)$$

$$= \cancel{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3}$$

أمبير

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

(10)

$$\sin(90+\theta) = \sin 90\cos\theta + \cos 90\sin\theta$$

$$= 1\times\cos\theta = \cos\theta$$

(11)

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{3\pi}{2}\sin\theta$$

$$= \sin\frac{3\pi}{2}\times\sin\theta = \sin\theta$$

(12)

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{2}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\cos\theta\times 1}{-\sin\theta\times 1} = -\cot\theta$$

(13)

$$\sin(\theta+\pi)=\sin\theta\cos\pi+\cos\theta\sin\pi$$
$$=\sin\theta\times -1=-\sin\theta$$

(14)

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta$$
$$=-1\times\sin\theta=-\sin\theta$$

(15)

$$\tan(\theta+45)=\frac{\tan\theta+\tan 45}{1-\tan\theta\cdot\tan 45}$$
$$=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

(16) <u>**إلكترونيات:**</u>

$$y_1+y_2=10\sin\left[2t+210+2t+30\right]$$
$$=10\sin\left[4t+240\right]=0$$

تداخل هدام أي أن كلاً من الموجتين تلاشي الأخرى.

<u>دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:</u>

(17)

$$\tan 165 = \tan(120+45) = \frac{\tan 120 + \tan 45}{1 - \tan 120 \square \tan 45}$$

$$= -2 + \sqrt{3}$$

(18)

$$\sec 1275 = \frac{1}{\cos 1275} = \frac{1}{\cos 195} = \frac{1}{\cos(135+60)}$$

$$= \frac{1}{\cos 135 \cos 60 - \sin 135 \sin 60} = \sqrt{2} - \sqrt{6}$$

(19)

$$\sin 735 = \sin(360+375) = \sin 360 \cos 375 + \cos 360 \sin 375$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(20)

$$\tan(\frac{23\pi}{12}) = -2 + \sqrt{3}$$

(21)

$$\csc(\frac{5\pi}{12}) = \frac{1}{\sin(\frac{5\pi}{12})} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

(22)

$$\cot(\frac{113\pi}{12}) = \frac{\cos(\frac{113\pi}{12})}{\sin(\frac{113\pi}{12})} = 2 - \sqrt{3}$$

(23)

$$\frac{\sin A+\tan\theta\cos A}{\cos A-\tan\theta\sin A}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\tan\theta\right)}{1-\tan\theta\frac{\sin A}{\cos A}}$$

$$=\frac{(\tan A+\tan\theta)}{1-\tan\theta\tan A}$$

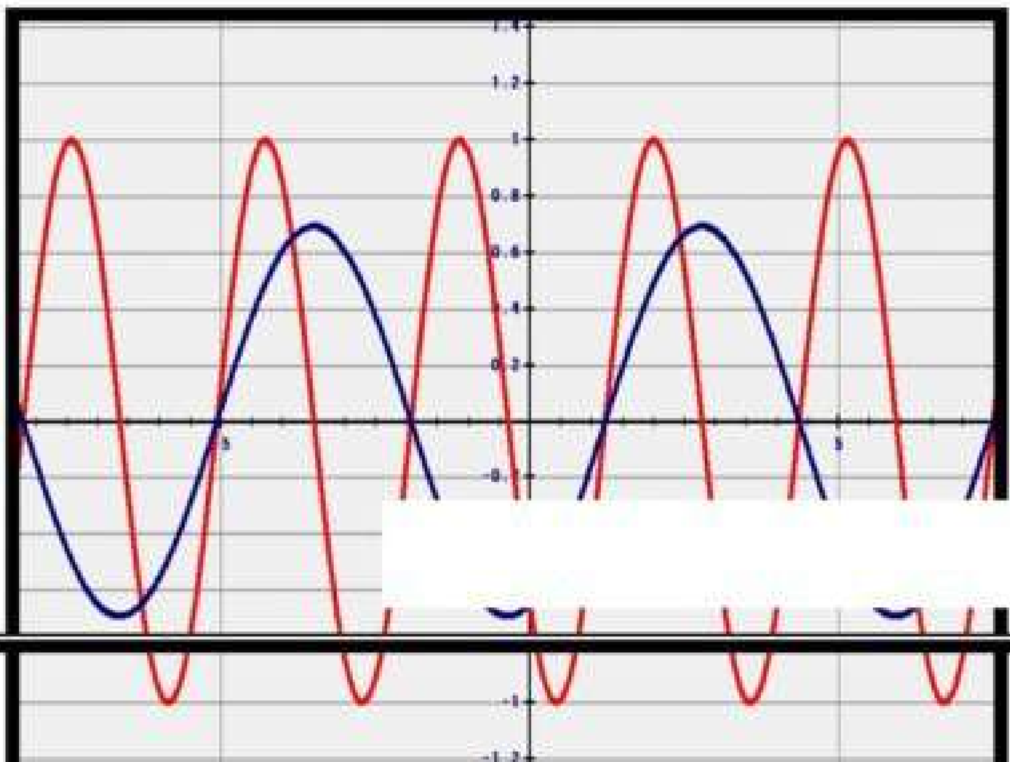
$$=\tan(A+\theta)$$

(24) تمثيلات متعددة:

a) جدوليا:

A	B	$\sin A$	$\sin B$	$\sin(A+B)$	$\sin A+\sin B$
30	90	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$
45	60	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
90	30	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

b) بيانياً:



c) **تحليلياً:**

$$\sin(30+45)=\sin(30)+\sin(45)$$

الطرف الأيمن = $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ **أي** 1.21 **تقريباً، وبما أن قيمة جيب أي زاوية لا يمكن أن يكون أكبر من** 1 **فإن هذه المعادلة خطأ.**

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(25)

$$\frac{\tan A+\tan B}{\sec A\sec B}=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\square\frac{1}{\cos B}}$$

$$=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin\left(A+B\right)$$

(26)

$$\frac{1-\tan A\tan B}{\sec A\sec B}=\frac{1-\frac{\sin A}{\cos A}\square\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\square\frac{1}{\cos B}}$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos\left(A+B\right)$$

(27)

$$\frac{\sec A \sec B}{1+\tan A \tan B} = \frac{\frac{1}{\cos A} \square \frac{1}{\cos B}}{1+\frac{\sin A}{\cos A} \square \frac{\sin B}{\cos B}}$$

$$= \frac{1}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$$

$$= \frac{1}{\cos(A-B)} = \sec(A-B)$$

(28)

$$\sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$= (\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B)$$

$$= (\sin A \cos B)^2 - (\cos A \sin B)^2$$

$$= \sin^2 A \cos^2 B - \sin^2 B \cos^2 A$$

$$= \sin^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 B \cos^2 A$$

$$= \sin^2 A \left(\cos^2 B + \sin^2 B\right) - \sin^2 B \left(\sin^2 A + \cos^2 A\right)$$

$$= \sin^2 A \times 1 - 1 \times \sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

(29) **تبرير:**

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$$

$$=\sin\left(\cancel{\frac{\pi}{3}}-\theta-\cancel{\frac{\pi}{3}}-\theta\right)=\sin(-2\theta)$$

(30) **تحد:**

$$\cot(A+B)=\frac{1}{\tan(A+B)}=\frac{1}{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}}$$

$$=\frac{1-\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{1-\dfrac{1}{\cot A}\square\dfrac{1}{\cot B}}{\dfrac{1}{\cot A}+\dfrac{1}{\cot B}}$$

$$=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$$

(31) **برهان:**

$$d=\sqrt{(\cos A-\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2}$$

$$\therefore d^2=\cos^2 A-2\cos A\cos B+\cos^2 B+\sin^2 A-2\sin A\sin B+\sin^2 B$$

$$\therefore d^2=1+1-2\cos A\cos B-2\sin A\sin B$$

$$\therefore d^2=2-2[\cos A\cos B+\sin A\sin B]$$

$$\therefore d^2=2-2\cos(A+B)$$

(32) **أكتب:**

قد تختلف الإجابات من فرد لآخر تبعاً لوجهة نظره.

(33) مسألة مفتوحة:

$A = 35 \;,\; B = 60 \;,\; \mathrm{C} = 85$

$0.7002 + 1.7321 + 11.4301 = 13.86$

مراجعة تراكمية

بسط كل من العبارتين الآتيتين:

(34)

$$\sin\theta\csc\theta-\cos^2\theta$$
$$=\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}-\cos^2\theta$$
$$=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$$

(35)

$$\cos^2\theta\sec\theta\csc\theta$$
$$=\frac{\cos^{\cancel{2}}\theta}{\sin\theta\cancel{\cos\theta}}=\cot\theta$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(36) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(37) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

(38) $\frac{\sqrt{193}}{12}$

(39) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$

(40) $\frac{\sqrt{39}}{4}$

أثبت صحة كل من المتطابقتين الآتيتين:

(41)

$$\frac{\sin\theta}{\tan\theta}+\frac{\cos\theta}{\cot\theta}=\frac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}+\frac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$=\frac{\cos\theta\cancel{\sin\theta}}{\cancel{\sin\theta}}+\frac{\sin\theta\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\cos\theta}}$$

$$=\cos\theta+\sin\theta$$

(42)

$$\sec\theta(\sec\theta-\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)=\frac{1}{\cos^2\theta}-1$$

$$=\sec^2\theta=\tan^2\theta$$

تدرب على إختبار

(43)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\longleftarrow\!\!\!\longleftarrow\!\!\!\longleftarrow\!\!\!\longleftarrow B$$

(44)

$$\cos\theta=-0.3\qquad\therefore\sin\theta=\frac{\sqrt{91}}{10}$$

$$\longleftarrow\!\!\!\longleftarrow\!\!\!\longleftarrow\!\!\!\longleftarrow$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{3\sqrt{91}}{91}$$

إختبار منتصف الفصل

بسط كل عبارة مما يأتي:

(1)

$$\cot\theta\sec\theta$$

$$=\frac{\cancel{\cos\theta}}{\sin\theta}\square\frac{1}{\cancel{\cos\theta}}=\frac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$$

(2)

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=1$$

(3)

$$\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}=\cos\theta$$

(4)

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)\csc\theta=\cancel{\sin\theta}\square\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}=1$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(5) $\frac{4}{5}$

---

(6) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

(7) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

(8) **إختيار من متعدد:**

$D \longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow \sec\theta$

(9) **مدينة ألعاب:**

a) $\theta = 11.5^\circ$ تقريباً

b) $v = 4 \ m/\sec$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(10)

$$\frac{\cot\theta}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{\cancel{\cos\theta}}{\sin\theta\,\cancel{\cos\theta}\,\sin\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} = \csc^2\theta$$

(11)

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\cos\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} = \frac{\frac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\sin\theta}}}{\frac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\sin\theta}}} = 1$$

(12)

$$\frac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}}{1-\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\cos\theta)}=\frac{\cancel{(1-\cos\theta)}(1+\cos\theta)}{\cos\theta\cancel{(1-\cos\theta)}}$$

$$=\frac{(1+\cos\theta)}{\cos\theta}=(1+\cos\theta)\cdot\frac{1}{\cos\theta}=(1+\cos\theta)\cdot\sec\theta$$

(13)

$$\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}=\frac{\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cancel{\cos\theta}\sin\theta(1-\sin\theta)}{\cos^{\cancel{2}}\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1-\sin\theta)=\tan\theta(1-\sin\theta)$$

(14) حاسوب:

(a

$$h=\sqrt{225-144}=\sqrt{81}=9\ in$$

(b

$$\cot\theta=\frac{9}{12}$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{12}{15}\div\frac{9}{15}=\frac{12}{9}$$

$$\therefore\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(15)

$$\frac{\sin\theta\sec\theta(\sec\theta+1)}{(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)}=\frac{\sin\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta}(\sec\theta+1)}{\sec^2\theta-1}$$

$$=\frac{\cancel{\tan\theta}(\sec\theta+1)}{\tan^{\cancel{2}}\theta}=\frac{\sec\theta+1}{\tan\theta}=(\sec\theta+1)\cot\theta$$

(16)

$$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta=\frac{\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$$

(17)

$$\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\cos\theta\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}=\frac{\cos\theta\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta\cancel{\sin\theta}(1-\cos\theta)}{\sin^{\cancel{2}}\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(1-\cos\theta)$$

$$=\cot\theta(1-\cos\theta)$$

دون استخدام الألة الحاسبة أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(18) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(19) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(20) $2-\sqrt{3}$

(21) $2-\sqrt{3}$

(22) **إختيار من متعدد:**

(C $\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(23)

$$\cos 30 \cos\theta + \sin 30 \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\sin 60 \cos\theta + \cos 60 \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$$

(3-4) المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

■ **تحقق من فهمك:**

(1

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{-1}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

■ **تحقق من فهمك:**

(2

(2A

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$= 1 - 2\left(\frac{8}{9}\right) = -\frac{7}{9}$$

(2B

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

■ **تحقق من فهمك:**

(3

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$$

■ تحقق من فهمك:

(4)

(4A

$$g=978+5.17\sin^2 L-0.014\sin L\cos L$$
$$=978+5.17(1-\cos 2L)-0.014\left(\frac{\sin 2L}{2}\right)$$
$$=978+5.17-5.17\cos 2L-0.028\sin 2L$$
$$=g=983.17-5.17\cos 2L-0.028\sin 2L$$

(4B

$$g=983.17-5.17\cos 90-0.028\sin 90$$
$$g=983.17-0.028\sin 90$$
$$=983.142$$

■ تحقق من فهمك:

(5)

$$4\cos^2 x-\sin^2 2x$$
$$=4\cos^2 x-4\sin^2 x\cos^2 x=4\cos^2 x\left(1-\sin^2 x\right)$$
$$=4\cos^2 x\cos^2 x=4\cos^4 x$$

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الألة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل من $\cos\frac{\theta}{2}$ ، $\sin\frac{\theta}{2}$ ، $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ إذا كان:

(1)

$$\sin\theta=\frac{1}{4}\ ,\ \therefore \sin^2\theta=\frac{1}{16}\ ,\ \therefore \cos^2\theta=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}\ ,\ \therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\frac{1}{16}=\frac{7}{8}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{15}}{4}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{15}}{4}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}$$

(2)

$$\sin\theta = \frac{4}{5} \quad , \quad \therefore \sin^2\theta = \frac{16}{25} \quad , \quad \therefore \cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \quad , \quad \therefore \cos\theta = -\frac{3}{5}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2 \times \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{-3}{5} = -\frac{24}{25}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{-3}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{-3}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

(3)

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \quad , \quad \therefore \cos^2\theta = \frac{9}{25} \quad , \quad \therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad , \quad \therefore \sin\theta = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2 \times \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \times \frac{-4}{5} \times \frac{3}{5} = -\frac{24}{25}$$

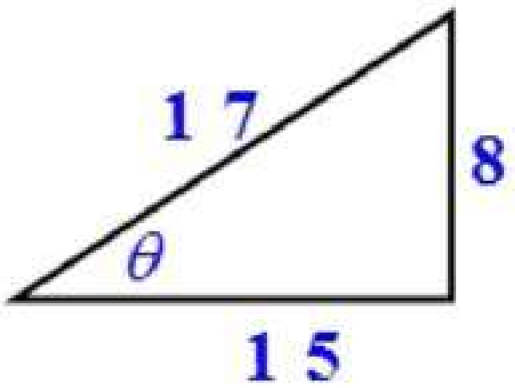
$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

(4)

$$\tan\theta=\frac{-8}{15}\quad\therefore\cos\theta=-\frac{15}{17}\quad,\therefore\sin\theta=\frac{8}{17}\quad,\quad\therefore\sin^2\theta=\frac{64}{289}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\frac{64}{289}=\frac{161}{289}$$



$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{8}{17}\times\frac{-15}{17}=-\frac{240}{289}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{-15}{17}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{17}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{-15}{17}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{16}{17}}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

(5)

$$\sin\theta=\frac{2}{3}\quad,\quad\therefore\sin^2\theta=\frac{4}{9}\quad,\quad\therefore\cos^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\quad,\quad\therefore\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{2}{3}\times\frac{-\sqrt{5}}{3}=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{-\sqrt{5}}{3}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{-\sqrt{5}}{3}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$$

(6)

$$\sin\theta=-\frac{15}{17}\ ,\ \therefore\sin^2\theta=\frac{225}{289}\ ,\ \therefore\cos^2\theta=1-\frac{225}{289}=\frac{64}{289}\ ,\ \therefore\cos\theta=-\frac{8}{17}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\frac{225}{289}=-\frac{161}{289}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{-15}{17}\cdot\frac{-8}{17}=\frac{240}{289}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{-8}{17}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{9}{14}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{-8}{17}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{25}{14}}$$

(7)

$$\tan\theta=-2\ \therefore\ \tan^2\theta=4\ \therefore\ \sec^2\theta=5\ \therefore\ \sec\theta=-\sqrt{5}$$

$$\therefore\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\therefore\ \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\ ,\ \therefore\sin^2\theta=\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{-1}{\sqrt{5}}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{-1}{\sqrt{5}}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(8)

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(9)

$$\cos 15 = \sqrt{\frac{1+\cos 30}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

(10)

$$\sin 75 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

(11)

$$\sin 165 = \sqrt{3}-2$$

(12)

$\sin 165 = 2 + \sqrt{3}$

(13) كرة قدم:

(a $d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$

(b $d = 81\ ft$ تقريباً

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(14)

$$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1-\left(1-2\sin^2\theta\right)}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}}\theta}{\cancel{2}\cancel{\sin\theta}\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

(15)

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

(16)

$$\frac{2}{\cot\theta-\tan\theta}=\frac{2}{\cot\theta-\tan\theta}\square\frac{\tan\theta}{\tan\theta}=\frac{2\tan\theta}{\cot\theta\tan\theta-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta$$

(17)

$$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2}$$

$$=\frac{\sin 2(\frac{\theta}{2})}{2}=\frac{\sin\theta}{2}$$

(18) العدد ماخ:

(a

$$\frac{1}{M}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

(b $M=6$

(19) إلكترونيات:

$$P=I_\circ^2R\sin^2 t\,\theta=\frac{1}{2}I_\circ^2R-\frac{1}{2}I_\circ^2R\cos 2t\,\theta$$

(20) كرة قدم:

إذا كانت $\theta=45+\alpha$

$$d = \frac{v^2 \sin 2(45+\alpha)}{g} = \frac{v^2 \sin(90+2\alpha)}{g}$$

$$= \frac{v^2(\sin 90 \cos\alpha + \cos 90 \sin\alpha)}{g}$$

$$= \frac{v^2 \cos 2\alpha}{g}$$

إذا كانت $\theta = 45-\alpha$

$$d = \frac{v^2 \sin 2(45-\alpha)}{g} = \frac{v^2 \sin(90-2\alpha)}{g}$$

$$= \frac{v^2(\sin 90 \cos\alpha - \cos 90 \sin\alpha)}{g}$$

$$= \frac{v^2 \cos 2\alpha}{g}$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل من $\tan 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ إذا كان:

(21)

$$\cos\theta = \frac{4}{5} \;,\; \therefore \cos^2\theta = \frac{16}{25} \;,\; \therefore \sin^2\theta = \frac{9}{25} \;,\; \therefore \sin\theta = \frac{3}{5} \;,\; \therefore \tan\theta = \frac{3}{4}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\square\frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{24}{7}$$

(22)

$$\sin\theta = \frac{1}{3}\ ,\ \therefore \sin^2\theta = \frac{1}{9}\ ,\ \therefore \cos^2\theta = \frac{8}{9}\ ,\ \therefore \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ ,\ \therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

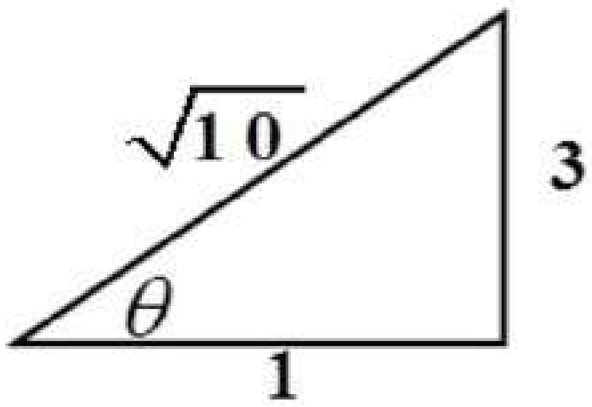
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}}{1-\frac{2}{16}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

(23)

$$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}\ ,\ \therefore \sin^2\theta = \frac{9}{10}\ ,\ \therefore \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ ,\ \therefore \tan\theta = -3$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\cdot\frac{9}{10} = -\frac{4}{5}$$



$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{10}} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot(-3)}{1-9} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

(24)

$\cos\theta = -\frac{3}{4}$, $\therefore \cos^2\theta = \frac{9}{16}$, $\therefore \sin^2\theta = \frac{7}{16}$, $\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\therefore \tan\theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\cdot\frac{7}{16} = \frac{1}{8}$$

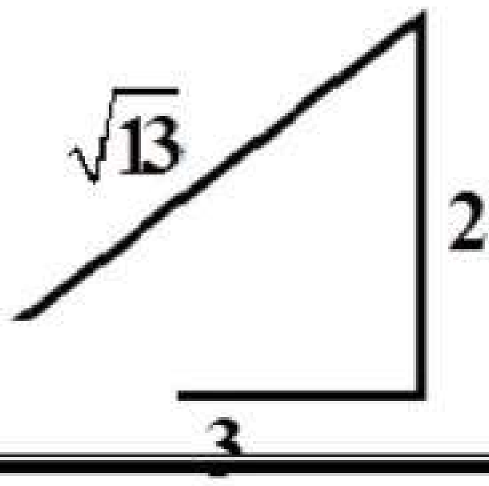
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{-3}{4} = \frac{-3\sqrt{7}}{8}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot\frac{-\sqrt{7}}{3}}{1-\frac{7}{9}} = -3\sqrt{7}$$

(25)

$\sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\therefore \sin^2\theta = \frac{4}{13}$, $\therefore \cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\therefore \tan\theta = \frac{2}{3}$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\cdot\frac{4}{13} = \frac{5}{13}$$



$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{12}{13}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{4}{9}} = \frac{12}{5}$$

(26) تمثيلات متعددة:

تختلف الإجابات من شخص لآخر حسب وجهة نظره.

مسائل مهارات التفكير العليا:

(27) إكتشف الخطأ:

كلاهما أخطأ، حيث طرح سعيد الجذور التربيعية بطريقة غير صحيحة، كما استعمل سلمان متطابقة نصف الزاوية، ولاكنة أخطأ في إيجاد قيمة $\cos 30$ في المتطابقة كلها فكتبها $\frac{1}{2}$ بدلاً من $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(28) تحد:

الزاوية $\angle PBD$ هي زاوية محيطية تقابل القوس نفسة الذي تقابلة الزاوية المركزية $\angle POD$ لذا فإن $m\angle(PBD) = \frac{1}{2} m\angle(PoD)$

وباستعمال المثلث القائم نجد أن

$$\tan\frac{\theta}{2} = \tan(\text{PBA}) = \frac{PA}{BA} = \frac{PA}{1+OA}$$

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\frac{AP}{OP}}{1+\frac{OA}{OP}}=\frac{AP}{1+OA}$$

(29) أكتب:

إذا أعطيت فقط قيمة $\cos\theta$ فإن $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها.
وإذا أعطيت فقط قيمة $\sin\theta$ فإن $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها.
وإذا أعطيت كلا من $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ فإن $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها.

(30) برهان:

$$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta)$$
$$= \sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta)$$
$$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

(31) تبرير:

$$1-2\sin^2\theta = \cos 2\theta$$
$$\theta = \frac{A}{2} \quad \therefore 2\theta = A$$
$$\therefore \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$$
$$\therefore \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$$
$$\theta = \frac{A}{2} \quad \therefore 2\theta = A$$
$$\therefore 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \cos A$$
$$\therefore \cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}$$
$$\therefore \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

(32)

$$d = \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v^2\sin 2\theta}{g}$$

تكون أكثر قيمة لـــ d عند $\sin 2\theta = 1$ ويكون هذا عند $2\theta = 90$ أو عند $\theta = 45$

مراجعة تراكمية

أثبت صحة كل ن المتطابقات الآتية:

(33)

$$\frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^{\cancel{2}}\theta}{\sin\theta\,\cancel{\cos\theta}} + \frac{\cancel{\sin\theta}}{\cancel{\sin\theta}\,\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \cot\theta + \sec\theta$$

(34)

$$\left(1-\cos^2\theta\right)+\frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}=$$

$$\sin^2\theta+\frac{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\sin^2\theta}}=\sin^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\sin^2\theta+\tan^2\theta$$

(35)

$$\left(\sin\theta-\cos\theta\right)^2=$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$$

$$=1-2\sin\theta\cos\theta$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(36) $\sin 135=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(37) $\cos 105=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(38) $\sin 285=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(39) $\cos\left(210\right)=-\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

(40) $\sin\left(-240\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(41) $\cos(-120) = -\frac{1}{2}$

(42) $\cos 78 \cos 18 + \sin 78 \sin 18 = \cos(78-18) = \cos 60 = \frac{1}{2}$

تدرب على إختبار

(43)

$\sqrt{3} - 2 \longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow\; B$

(44)

$y = \frac{1}{3}\cos 2B \longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow\; B$

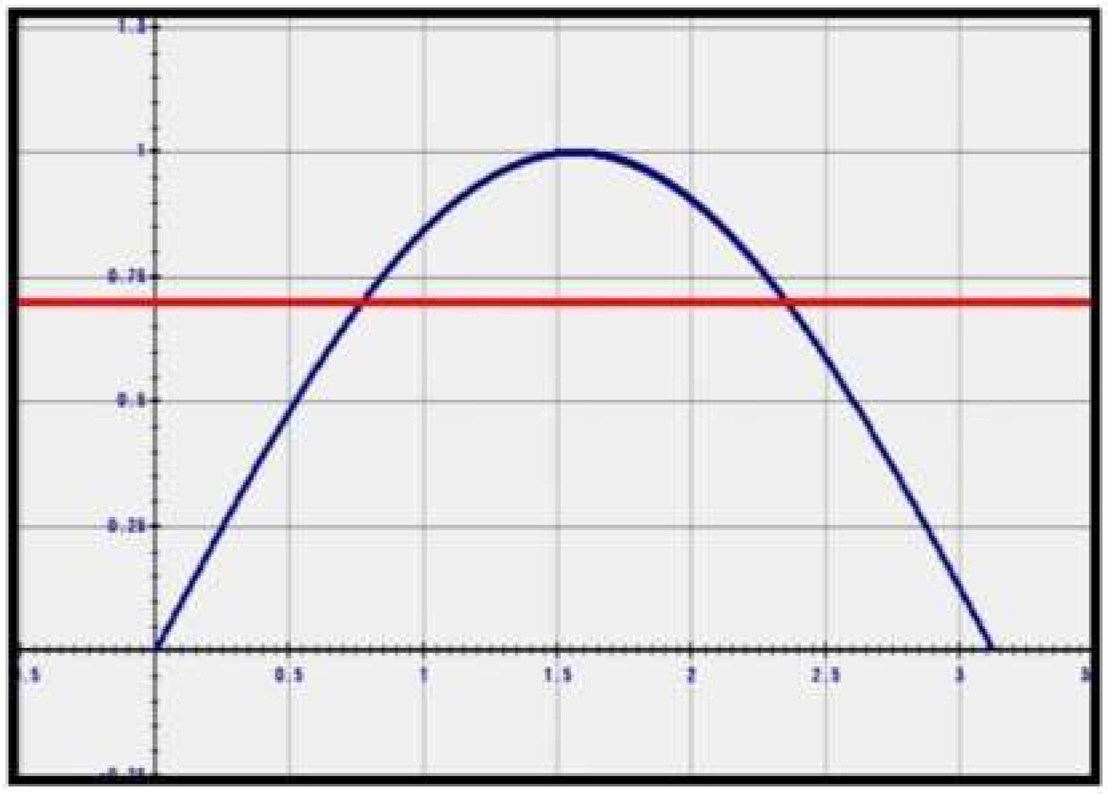
استكشاف $(3-5)$ معمل الحاسبة البيانية

حل المعادلات المثلثية

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلات الآتية لقيم x جميعها الموضحة بجانب كل منها:

(1)

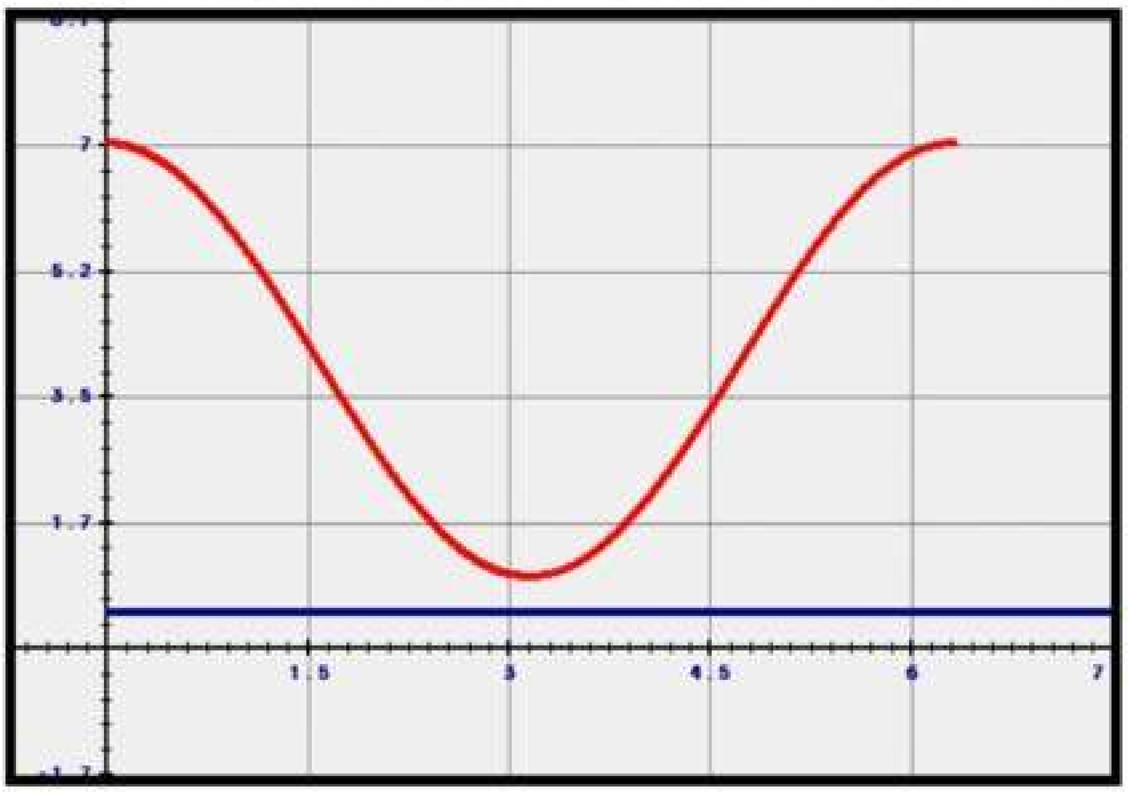
$x = 44.4 \quad , \quad x = 135.6$



(2)

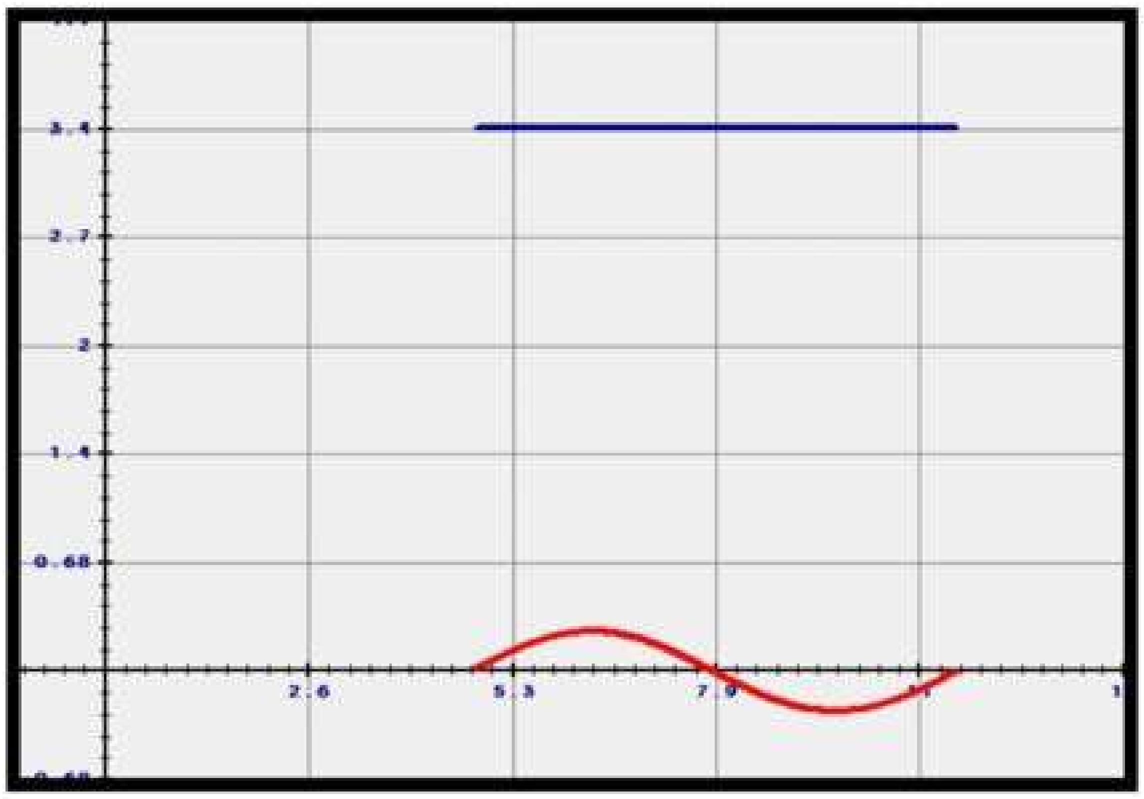
$x = \{53.43\ ,137.81\}$

(3)



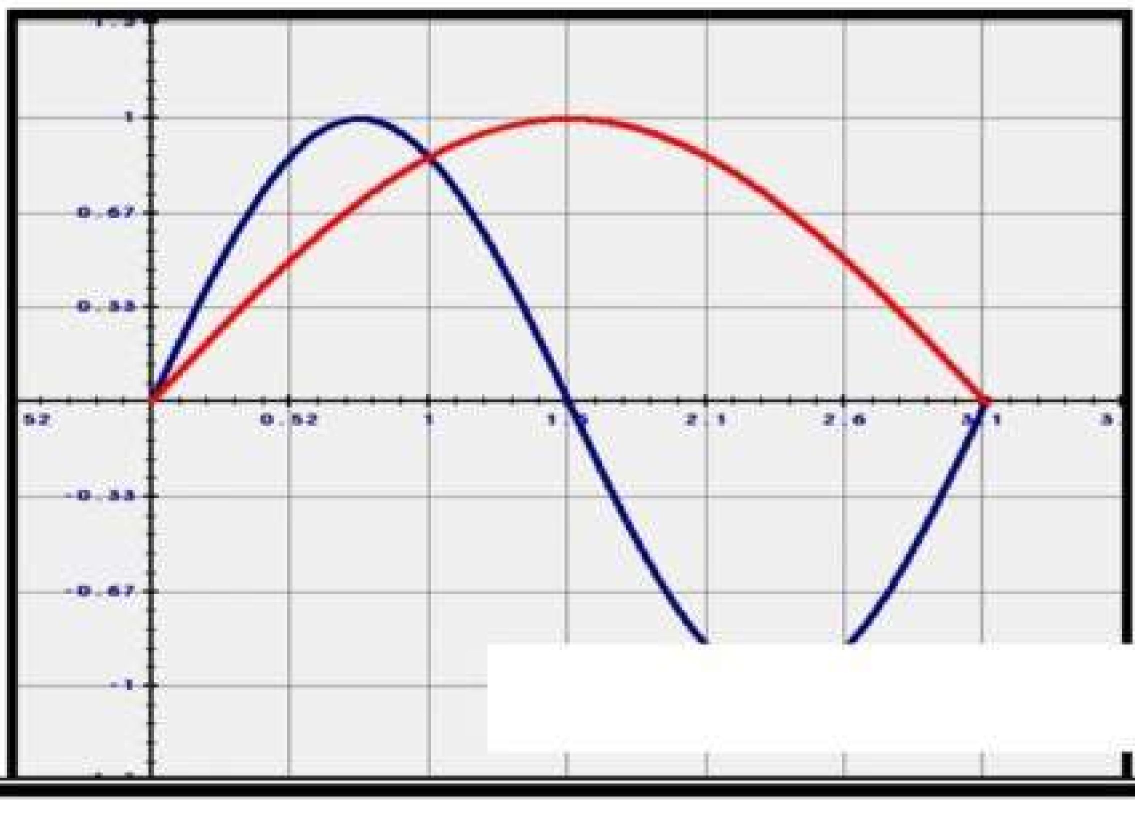
لا يوجد حل حقيقي

(4)



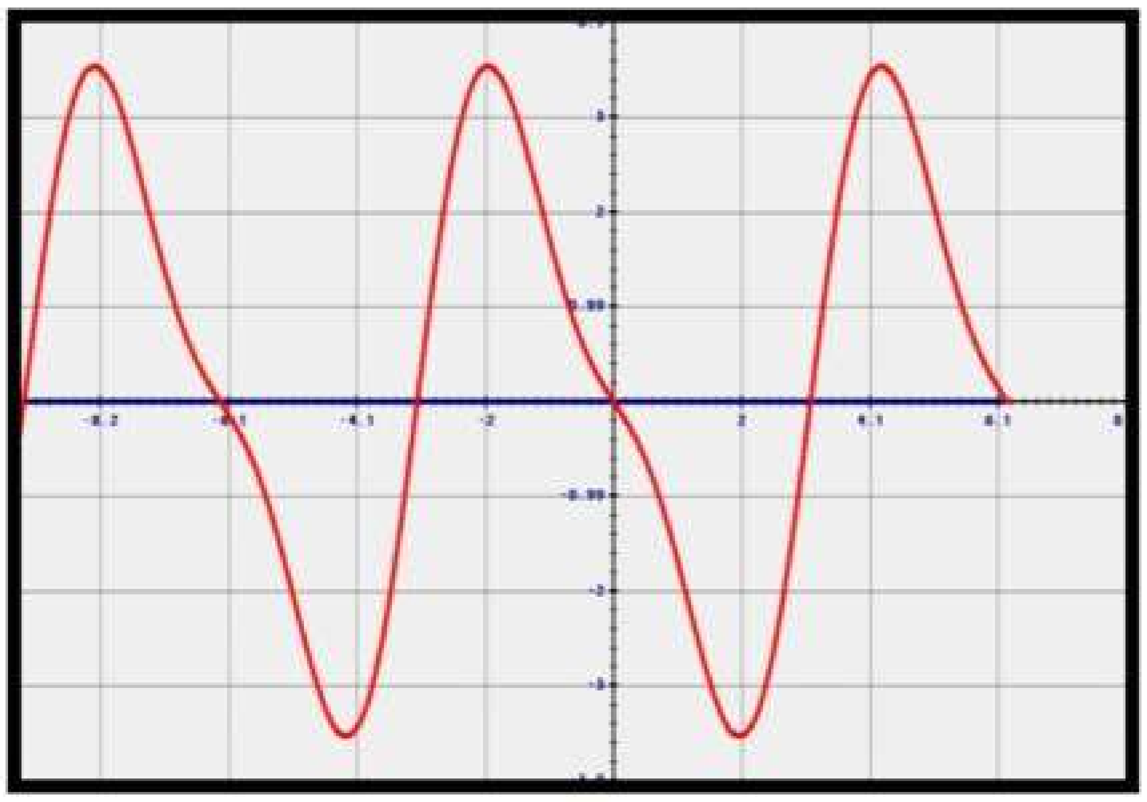
لا يوجد حل حقيقي

(5)



$x = \{0\ ,\ 115.38\}$

(6)



$$x = \{-360\ ,-180,\ 0\ ,180\}$$

(3-5)حل المعادلات المثلثية

■ **تحقق من فهمك**:

(1)

(1A

$$\cos x \sin x = 3\cos x$$

$$\therefore \cos x \sin x - 3\cos x = 0$$

$$\therefore \cos x(\sin x - 3) = 0$$

$\therefore \cos\theta = 0 \quad , \quad (\sin\theta - 3) = 0 \rightarrow$ ى لها حل

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \left\{ \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} \right\}$$

(1*B*

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\sin^2\theta + \left(1 - \sin^2\theta\right) + 2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$2\sin\theta\cos\theta = 1$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 30^\circ \quad , \quad \theta = 60^\circ$$

■ **تحقق من فهمك:**

(2*A*

$$4\sin x = 2\sin + \sqrt{2}$$
$$\therefore 4\sin x - 2\sin x = \sqrt{2}$$
$$\therefore 2\sin x = \sqrt{2}$$
$$\therefore \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x = 45^\circ$$

(2B

$$2\sin\theta = -1$$
$$\therefore \sin\theta = -\frac{1}{2}$$
$$\therefore \theta = \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \;\; , \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

■ **تحقق من فهمك:**

(3)

$$h = 21 - 20\cos 3\pi t$$
$$\therefore 41 = 21 - 20\cos 3\pi t$$
$$\therefore 20\cos 3\pi t = -20$$
$$\therefore \cos 3\pi t = -1$$
$$\therefore 3\cancel{\pi}t = (2k+1)\cancel{\pi}$$
$$\therefore t = \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}$$
$$\therefore t = 20\ s$$

■ **تحقق من فهمك:**

4) متطابقة، ولها عدد لانهائي من الحلول

$$\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta + 3 = \left(1 - \sin^2\theta\right) + 3 = 4 - \sin$$

■ **تحقق من فهمك:**

(5)

5A) **لا يوجد لها حل حيث:**

$$\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$$

$$\therefore \cancel{\sin\theta}\,\frac{\cos\theta}{\cancel{\sin\theta}} - \cos^2\theta = 0$$

$$\therefore \cos\theta - \cos^2\theta = 0$$

$$\therefore \cos\theta\left(1 - \cos\theta\right) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = 0 \quad or \quad \cos\theta = 1$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

(5B

$$\frac{\cos\theta}{\cot\theta}+2\sin^2\theta=0$$

$$\therefore \frac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\sin^2\theta=0$$

$$\therefore \sin\theta+\sin^2\theta=0$$

$$\therefore \sin\theta\left(1+\sin\theta\right)=0$$

$$\therefore \sin\theta=0 \quad or \quad \sin\theta=-1$$

$$\therefore \theta=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad or \quad \theta=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$$

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ الموضحة بجانب كل منها.

(1)

$$\cos^2\theta+2\cos\theta+1=0$$

$$\therefore \left(\cos\theta+1\right)^2=0$$

$$\therefore \cos\theta=-1$$

$$\therefore \theta=80^\circ$$

(2)

$$2\cos^2\theta + \cos\theta = 1$$

$$\therefore \left(\cos\theta + 1\right)(2\cos\theta - 1) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = -1 \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 180^\circ, 60^\circ, 300^\circ$$

(3)

$$-2\sin^2\theta = 7 - 15\sin\theta$$

$$\therefore 2\sin^2\theta - 15\sin\theta + 7 = 0$$

$$\therefore (2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 7) = 0$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \sin\theta = 7$$

$$\therefore \theta = 150^\circ, 30^\circ$$

(4)

$$\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 150^\circ, 30^\circ$$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان.

(5)

$$4\sin^2\theta - 1 = 0$$

$$\therefore \sin^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \left\{ \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

(6)

$$2\cos^2\theta = 1$$

$$\therefore \cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2} \right\}$$

(7)

$$\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 0$$

$$\sin\frac{\theta}{2}(1 - 2\sin\frac{\theta}{2}) = 0$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = 0 \qquad 1 - 2\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

$$\frac{\theta}{2} = 0,180 \qquad \sin\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = 0^\circ, 360^\circ \qquad \frac{\theta}{2} = 30$$

$$\theta = 60^\circ$$

(8)

$$\therefore 2\cos^2\theta + 4\cos\theta = -2$$
$$\therefore \cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$$
$$\therefore (\cos\theta + 1)^2 = 0$$
$$\therefore \cos\theta = -1$$
$$\therefore \theta = \{\pi + 2k\pi\}$$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

(9)

$$\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$$
$$\therefore 1 - 2\sin^2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$$
$$\therefore 3 - 3\sin^2\theta = 0$$
$$\therefore \sin^2\theta = 1$$
$$\therefore \sin\theta = 1$$
$$\therefore \theta = \{90^\circ + k\,180^\circ\}$$

(10)

$$\sin^2\theta - \sin\theta = 0$$
$$\therefore \sin\theta(1 - \sin\theta) = 0$$
$$\therefore \sin\theta = 0 \quad , \quad \sin\theta = 1$$
$$\therefore \theta = \{k\,180^\circ ,\ 90^\circ + k\,360^\circ\}$$

(11)

$$2\sin^2\theta - 1 = 0$$

$$\therefore \sin^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \left\{ 45^\circ + k\,90^\circ \right\}$$

(12)

$$\theta = \left\{ 30^\circ + k\,360^\circ \,,\ 150^\circ + k\,360^\circ \,,\ 90^\circ + k\,180^\circ \right\}$$

(13) اللیل والنهار:

a) عدد ساعات النهار 10.5 ساعة، ویكون ذلك بعد 213 أو 335 یوماً بعد یوم 21 مارس. وهذا یعني أن ساعات النهار ستكون في 20 اكتوبر أو 19 اكتوبر. ستكون عدد ساعات النهار 10.5 ساعة.

b) كل یوم منذ 19 فبرایر إلى 20 اكتوبر. بما أن أطول نهار في السنة یحدث تقریباً یوم 22 یونیو، لذا فإن الأیام بین 19 فبرایر إلى 20 اكتوبر تتزاید في الطول حتى یوم 22 یونیو، ثم یبدأ النهار بالنقصان إلى یوم 20 اكتوبر.

حل كل معادلة مما یأتي:

(14)

$$\sin^2 2\theta + \sin^2\theta = 0$$

$$\therefore 4\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^2\theta = 0$$

$$\therefore \sin^2\theta\left(4\cos^2\theta + 1\right) = 0$$

$$\therefore \sin\theta = 0 \quad , \quad \cos^2\theta = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \theta = \left\{ 90^\circ + k\left(180^\circ\right) \right\}$$

(15)

$$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$$

$$\therefore 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$$

$$\therefore \cos\theta\left(2\sin\theta - 1\right) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = 0 \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \left\{ k(180^\circ),\ 30^\circ + k\left(360^\circ\right),\ 150^\circ + k\left(360^\circ\right) \right\}$$

(16)

$$\tan\theta = 1$$

$$\therefore \theta = \left\{ 45^\circ + k180^\circ\ ,\ 45^\circ + k\left(180^\circ\right) \right\}$$

(17)

$$\cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \left\{ 60^\circ , 120^\circ , 240^\circ , 300^\circ , 135^\circ , 225^\circ \right\}$$

(18)

$$2\sin^2\theta = 1$$

$$\therefore \sin^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \left\{ 135^\circ , 225^\circ \right\}$$

(19)

$$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$$

$$\therefore 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$$

$$\therefore \cos\theta\left(2\sin\theta - 1\right) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = 0 \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

(20)

$$4\sin^2\theta - 1 = 0$$

$$\therefore \sin^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \left\{210^\circ \ , 330^\circ \right\}$$

(21)

$$\tan\theta - \sin\theta = 0$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \sin\theta = 0$$

$$\therefore \frac{\sin\theta - \cos\theta\sin\theta}{\cos\theta} = 0$$

$$\therefore \sin\theta - \cos\theta\sin\theta$$

$$\therefore \sin\theta\left(1 - \cos\theta\right) = 0$$

$$\therefore \sin\theta = 0 \ , \cos\theta = 1$$

$$\therefore \theta = \left\{0^\circ + k\ 180^\circ \right\}$$

(22)

$$\theta = \left\{30^\circ + k\ 360^\circ, 150^\circ + k\ 360^\circ \right\}$$

(23) <u>ناطحات سحاب:</u>

$$\tan\theta = \frac{876}{685} = 1.28$$

$$\therefore \theta = 21^\circ$$

(24) أنهار:

(a $y = 11\ m$

b) في الساعة 7 صباحاً، 7 مساءً.

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان.

(25)

$$\cos\theta \sin 2\theta - 2\sin\theta + 2 = 0$$

$$\therefore \cos\theta\left(2\sin\theta\cos\theta\right) - 2\sin\theta + 2 = 0$$

$$\therefore 2\sin\theta\cos^2\theta - 2\sin\theta + 2 = 0$$

$$\therefore \sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta + 1 = 0$$

$$\therefore \sin\theta\left(\cos^2\theta - 1\right) + 1 = 0$$

$$\therefore \sin\theta\left(-\sin^2\theta\right) + 1 = 0$$

$$\therefore -\sin^3\theta = -1$$

$$\therefore \sin\theta = 1$$

$$\therefore \theta = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$$

(26)

$$\theta = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

(27)

$2\sin\theta = \sin 2\theta$

$\therefore\ 2\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\therefore\ 2\sin\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta = 0$

$\therefore\ 2\sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right) = 0$

$\therefore\ \sin\theta = 0 \quad , \quad \therefore\ \sin\theta = 1$

$\therefore\ \theta = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\,\pi\ ,\ \frac{7\pi}{4} + 2k\,\pi\right\}$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

(28)

$\theta = \left\{30^\circ + 360^\circ k\ ,\ 150^\circ + 360^\circ k\ ,\ 330^\circ + 360^\circ k\right\}$

(29)

$\theta = \left\{120^\circ + 360^\circ k\ ,\ 240^\circ + 360^\circ k\right\}$

(30) الماس:

a) حوالي 13.71°

b) بقياس زاوية السقوط للضوء وإنعكاساتها لتحديد معامل إنكسار الضوء، فإذا كان معامل الإنكسار يساوي 2.42 يكون ماساً نقياً.

مسائل مهارات التفكير العليا:

(31) اكتشف الخطأ:

قسمت **حلا** كلاً من الطرفين على $\sin\theta$ وهذا خطأ، بينما طرحت **شهد** $\sin\theta$ من الطرفين بشكل خطأ أيضاً.

(32) تحد:

$$\sin 2x < \sin x$$

$$\therefore \sin 2x - \sin x < 0$$

$$\therefore 2\sin x \cos x - \sin x < 0$$

$$\therefore \sin x\left(2\cos x - 1\right) < 0$$

$$\therefore \sin x < 0 \quad , \quad \cos x > \frac{1}{2}$$

$$or \quad \sin x > 0 \quad , \quad \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi \quad or \quad \frac{\pi}{3} < x < \pi$$

(33) أكتب:

كل نوع من المعادلات يحتاج إما إلى جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة كل طرف على العدد نفسة تحل المعادلات التربيعية والمثلثية على الأغلب بإستعمال التحليل ولا تحتاج المعادلات الخطية والتربيعية إلى متطابقات لحلها، ويمكن حلها جبرياً في حين يمكن تمثيل بعض المعادلات المثلثية بيانياً بسهولة باستعمال الحاسبة البيانية، أما المعادلات الخطية فلها على الأكثر حل وحيد.
والمعادلة التربيعية لها على الأكثر حلان. أما المعادلات المثلثية فلها عادة عدد لانهائى من الحلول إلا إذا كانت قيم المتغير مقيدة أو مشروطة.

(34) تبرير:

لأن الدوال المثلثية دورية، فإضافة دورة كاملة لأي حل للمعادلة ينتج حلاً لها.

(35) مسألة مفتوحة:

المعادلة هي: $2\cos\theta = 0$ والحلان هما $\theta = 90^\circ \;,\; 270^\circ$

(36) تحد:

نعم لأن

$$\cot x + 1 = 2$$

$$\therefore \sec^2 x = 2 \quad \therefore \sec x = \sqrt{2}$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

$$\csc x = \sqrt{2}$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{\csc x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(37) $\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(38) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(39) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(40) $\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتى متطابقة:

(41)

$$\sin(270-\theta)$$
$$= \sin 270 \cos\theta - \cos 270 \sin\theta$$
$$= -1 \times \cos\theta - 0 = -\cos\theta$$

(42)

$$\cos(90+\theta)$$
$$= \cos 90 \cos\theta - \sin 90 \sin\theta$$
$$= 0 - 1 \times \sin\theta = -\sin\theta$$

(43)

$$\cos(90-\theta)$$
$$= \cos 90 \cos\theta + \sin 90 \sin\theta$$
$$= 0 + 1 \times \sin\theta = \sin\theta$$

(44)

$$\sin(90-\theta)$$
$$=\sin 90\cos\theta-\cos 90\sin\theta$$
$$=1\times\cos\theta-0=\cos\theta$$

(45)

(a $$\frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta}=\frac{v^2\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{2g\dfrac{1}{\cos^2\theta}}=\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$$

(b $$h=\frac{(110)^2\sin^2 80}{2\times 9.8}=598.73\ m$$

(46)

المجال: $[-5\ ,\infty)$

المـــــدى: $[-2\ ,\infty)$

تدرب على إختبار

(47)

A $\longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow$ $\frac{5\pi}{2}$

(48)

D $\longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow$ 300° أو 240°

دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك:

اكتب المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) متطابقة الزاويتين المتتامتين
2) المتطابقات النسبية
3) المتطابقة المثلثية
4) متطابقات ضعف الزاوية
5) المتطابقات
6) المتطابقات المثلثية لجمع زاويتين أو الفرق بينهما
7) متطابقات المقلوب
8) متطابقات مجموع زاويتين
9) متطابقات فيثاغورث

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية:

(10

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$= (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \sin^2\theta = 1$$

$$\frac{2}{4} + \sin^2\theta = 1$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(11

$$\sec\theta = \sqrt{\frac{6}{2}}$$

(12

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}$$

(13

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta + \frac{9}{25} = 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{16}{25}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

(14

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

$$\frac{16}{25} + 1 = \csc^2\theta$$

$$\csc^2\theta = \frac{41}{25}$$

$$\csc\theta = \frac{\sqrt{41}}{5}$$

(15 كرة قدم:

$$\sin\theta = \frac{75}{133}$$

بسط كل عبارة مما يأتي:

(16

$$1-\tan\theta\sin\theta\cos\theta$$

$$1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta\cos\theta$$

$$1-\sin^2\theta$$

$$=\cos^2\theta$$

(17

$$\tan\theta\csc\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=\sec\theta$$

(18

$$\sin\theta+\cos\theta\cot\theta$$

$$=\sin\theta+\cos\theta\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=\sec\theta$$

(19

$$\cos\theta(1+\tan^2\theta)$$

$$=\cos\theta(\sec^2\theta)$$

$$=\cos\theta\times\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$=\sec\theta$$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

(20

$$\tan\theta\cos\theta+\cot\theta$$
$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\cos\theta+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\sin\theta$$
$$=\sin\theta+\cos\theta$$

(21

$$\frac{\cos\theta}{\cot\theta}+\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$$
$$=\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\sin\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\sin\theta+\cos\theta$$

(22

$$\sec^2\theta-1$$
$$=\tan^2\theta$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$

23) **هندسة:**

$$\cos\theta = \frac{3}{4}, \sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{4}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{7}{9}$$

$$\tan\theta + 1 = \frac{16}{9}$$

$$\sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{16}{9}$$

دون التعمال الألة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتى:

(24

$$\cos(-135) = \cos(45 - 180)$$

$$= \cos 45 \cos 180 + \sin 45 \sin 180$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(25

$$\cos(15) = \cos(45-30)$$
$$= \cos 45 \cos 30 + \sin 45 \sin 30$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(26

$$\sin(210) = \sin(180+30)$$
$$= \sin 180 \cos 30 + \cos 180 \sin 30$$
$$= 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

(27

$$\sin(105) = \sin(60+45)$$
$$= \sin 60 \cos 45 + \cos 60 \sin 45$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(28

$$\tan(75) = \tan(45+30)$$
$$= \frac{\tan 45 + \tan 30}{1 - \tan 45 \tan 30}$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

(29

$$\cos(105) = \cos(60+45)$$
$$= \cos 60 \cos 45 - \sin 60 \sin 45$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

(30

$$\sin(\theta+90)$$
$$= \sin\theta \cos 90 + \cos\theta \sin 90$$
$$= \sin\theta \times 0 + \cos\theta \times 1$$
$$= \cos\theta$$

(31

$$\sin(\frac{3\pi}{2}+\theta)$$
$$=\sin\frac{3\pi}{2}\cos\theta+\cos\frac{3\pi}{2}\sin\theta$$
$$=-1\times\cos\theta-0\times\sin\theta$$
$$=-\cos\theta$$

(32

$$\tan(\theta-\pi)$$
$$=\frac{\tan\theta-\tan\pi}{1+\tan\theta\tan\pi}$$
$$=\frac{\tan\theta-0}{1+0}$$
$$=\tan\theta$$

أوجد القيم الدقيقة لكل من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}$ إذا علمت أن:

(33

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{9}{25}$$

$$\sin\theta = \frac{12}{13}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2(\frac{4}{5} \times \frac{3}{5})$$

$$\sin 2\theta = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 2(\frac{16}{25})^2 - 1$$

$$= \frac{7}{25}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

(34

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{9}{25}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{16}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2(-\frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{15}}{4})$$

$$\sin 2\theta = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 2(\frac{15}{16})^2 - 1$$

$$= \frac{14}{16}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = 2 - \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = 2 + \frac{\sqrt{15}}{4}$$

(35

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{5}{9}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\times-\frac{2}{3}\right)$$

$$\sin 2\theta = \frac{-4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1$$

$$= -\frac{1}{9}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

36) ملاعب:

a) طول القطر = 127 ft

b) $\cos 45 = \frac{90}{127}$

c) $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{74}{127}}$$

$$\frac{\theta}{2} = 22.5$$

<u>**حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:**</u>

37)

$$\begin{aligned} &2\cos\theta - 1 = 0 \\ &\cos\theta = \frac{1}{2} \\ &\theta = 60^\circ, 300^\circ \end{aligned}$$

38)

$$\begin{aligned} &4\cos^2\theta - 1 = 0 \\ &\cos\theta = \frac{1}{2} \\ &\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

39)

$$\begin{aligned} &\cos 2\theta + \cos\theta = 0 \\ &\cos\theta = \frac{1}{2} \\ &\theta = 90^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ \end{aligned}$$

(40

$$\theta = 270$$

(41

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

(42

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{145}}{145}$$
$$\cos\theta = \frac{12\sqrt{145}}{145}$$

(43

$$I = I_0\left(\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)$$

(44

$$r = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$
$$= \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \bullet \frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$
$$= \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$$
$$= \frac{1+\cos\alpha}{\sin}$$

45) موجات:

$$y_1 + y_2 = 0$$

إذن التداخل هدام

46) هندسة:

$$\sin 2 = 2\sin N \cos N$$

$$= 2\frac{n}{m}\square\frac{l}{m}$$

$$\underline{= 2nl}$$
$$m^2$$

أثبت أن كل من المعادلتين الآتيتين تمثل متطابقة:

(47

$$\frac{\sin 2\theta}{2\sin^2\theta} = \cot\theta$$

$$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin^2\theta} = \cot\theta$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

(48

$$1+\cos^2\theta=\frac{2}{1+\tan^2\theta}$$

$$1+2\cos^2\theta-1=\frac{2}{\sec^2\theta}$$

$$2\cos^2\theta=2\cos^2\theta$$

49) <u>مقذوفات:</u>

الزاوية التي قذفت بها الكرة = 60

اختبار الفصل

(1) <u>إختيار من متعدد</u>:

$\cos\theta \leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow D$

(2)

$$\cos(30-\theta)$$
$$=\cos 30\cos\theta+\sin 30\sin\theta$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\sin(60+\theta)$$
$$=\sin 60\cos\theta+\cos 60\sin\theta$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$$

(3)

$$\cos(\theta-\pi)$$
$$=\cos\theta\cos\pi+\sin\theta\sin\pi$$
$$=-1\cdot\cos\theta+0$$
$$=-\cos\theta$$

(4) **إختيار من متعدد:**

$$\frac{4}{5}\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow D$$

بدون استعمال الألة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(5) $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

(6) $-\sqrt{3}$

(7) $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$

(8) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي متطابقة:

(9)

$$\sin\theta(\cot\theta+\tan\theta)$$
$$=\sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$
$$=\cos\theta+\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

(10)

$$\frac{\cos\theta}{\sec\theta-\tan\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\cos\theta}{\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$$

(11)

$$(\tan\theta+\cot\theta)^2$$

$$=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2=\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$$

$$=\sec^2\theta\csc^2\theta$$

(12)

$$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta}=\frac{1}{\sec\theta}+\frac{\sec\theta}{\sec\theta}=\cos\theta+1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}\times\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\cancel{\sin^2\theta}\,(1+\cos\theta)}{\cancel{\sin^2\theta}}=1+\cos\theta=\cos\theta+1$$

(13) إختيار من متعدد:

$$\sqrt{2}-1\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow B$$

(14) تاريخ:

a) بفرض أن إرتفاع المثلث يساوي a

$$a^2+9^2=18^2$$
$$\therefore a^2=18^2-9^2$$
$$\therefore a=\sqrt{243}=9\sqrt{3}$$

b)

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$\therefore \sin 2(30)=2\sin 30\cos 30=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(15)

$$\cos(-225)$$
$$=\cos(-225+360)=\cos 135=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(16)

$$\sin 480$$
$$=\sin(480-360)=\sin 120=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(17)

$$\cos 75$$

$$= \cos(120 - 45) = \cos 120 \cos 45 + \sin 120 \sin 45 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(18)

$$\sin 165$$

$$= \sin(120 + 45) = \sin 120 \cos 45 + \cos 120 \sin 45 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

حل كل من المعادلتين الآتيتين لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

(19)

$$\frac{\pi}{6} + k\pi$$

(20)

$$\frac{\pi}{18} + k\,\frac{2\pi}{3}$$

حل كل من المعادلتين الآتيتين حيث $0 \le \theta \le 360$:

(21)

$$\theta = \left\{0^\circ \ , \ 360^\circ\right\}$$

(22)

$$\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$$

$$\therefore \sin\theta\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\therefore \sin\theta = 0 \quad , \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \left\{0^\circ , 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ, 360^\circ\right\}$$

الفصل الرابع: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

اختبار سريع:

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي:

(1)

محور التماثل $x = 1$

المقطع y $(0, -12)$

الرأس $(1, -13)$

(2)

محور التماثل $x = -1$

المقطع y $(0, 6)$

الرأس $(-1, 5)$

(3)

محور التماثل $x = -1$

المقطع y $(0, -8)$

الرأس $(-1, -10)$

(4)

محور التماثل $x = 3$

المقطع y $(0, 3)$

الرأس $(3, -15)$

(5)

محور التماثل $x = 2$

المقطع y $(0, -4)$

الرأس $(2, -16)$

(6)

محور التماثل $x = -1$

المقطع y $(0\ ,\ -1)$

الرأس $(-1,\ -5)$

---

(7) أعمال:

محور التماثل $x = 25$ ، المقطع y $(0\ ,\ 550)$ ، الرأس $(25,\ 543.75)$

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

(8)

$b^2 - 4ac = 25 - 4\square 2\square 3 = 25 - 24 = 1$

(9)

$b^2 - 4ac = 108$

(10)

$b^2 - 4ac = -8$

(11) $b^2 - 4ac = 100$

(12)

$b^2 - 4ac = 121$

(13)

$b^2 - 4ac = -172$

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن:

(14)

$$(x^2 + 8x + 16) - 16 = 0$$

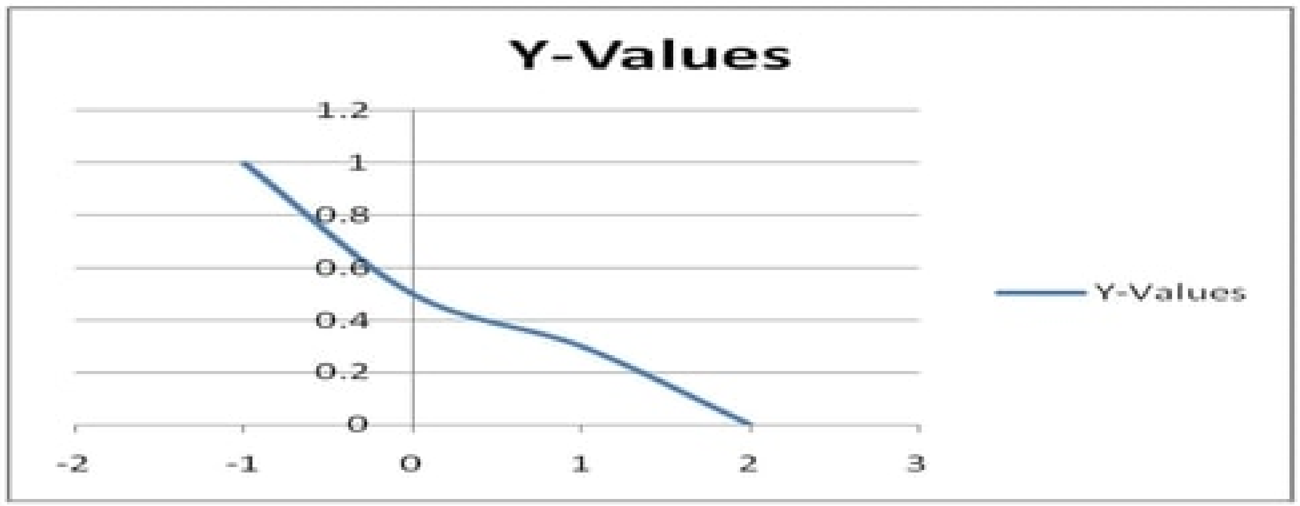
---

(15)

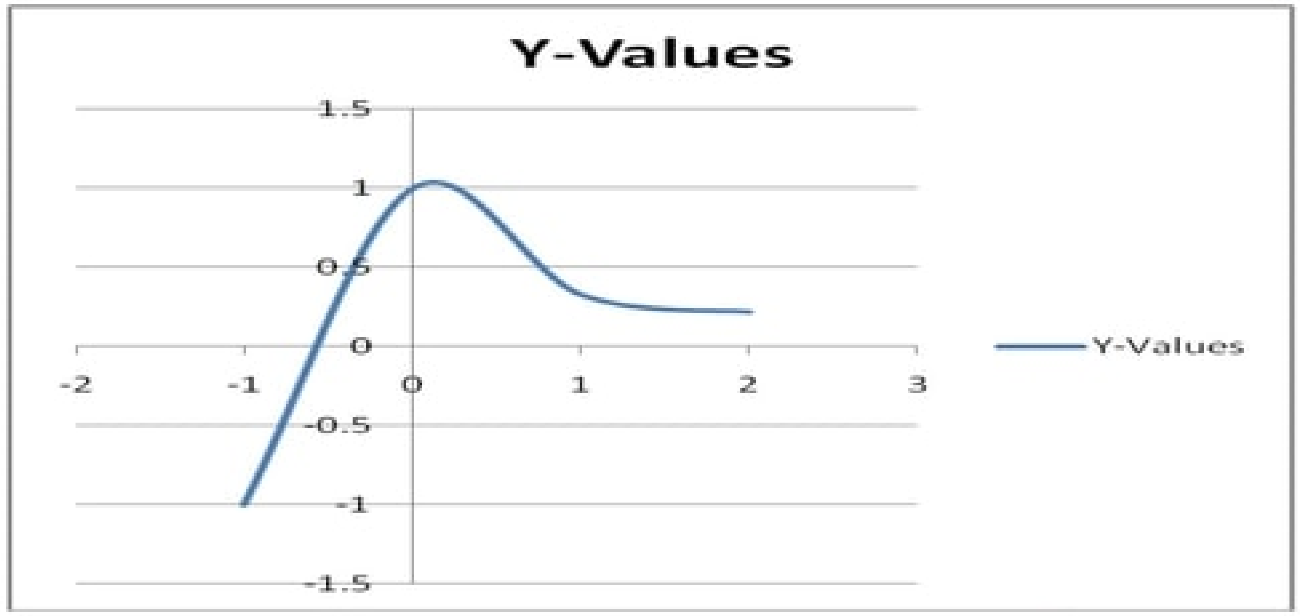
$$(x^2 - 18x - 81) + 81 = 0$$

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا

(16)

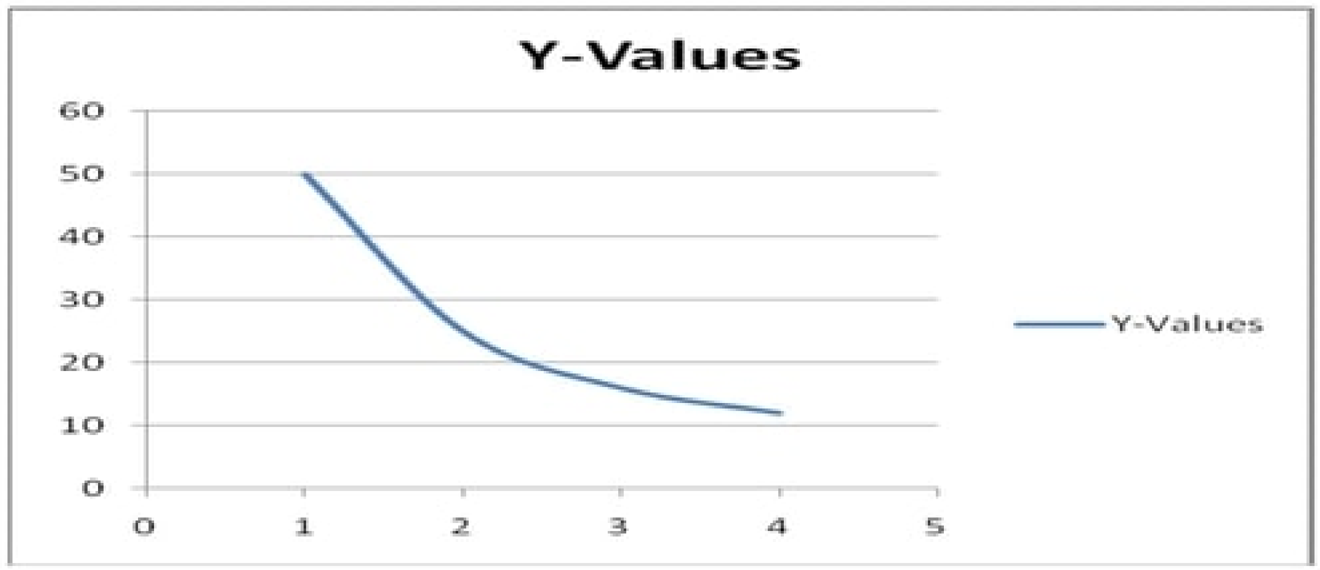


(17)



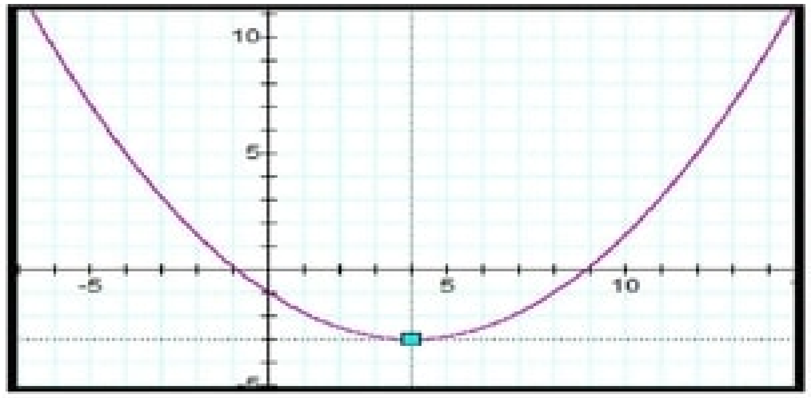
(18) هدية:

F(x)= 50/x



(4-1)القطوع المكافئة.

■ تحقق من فهمك:



(1)

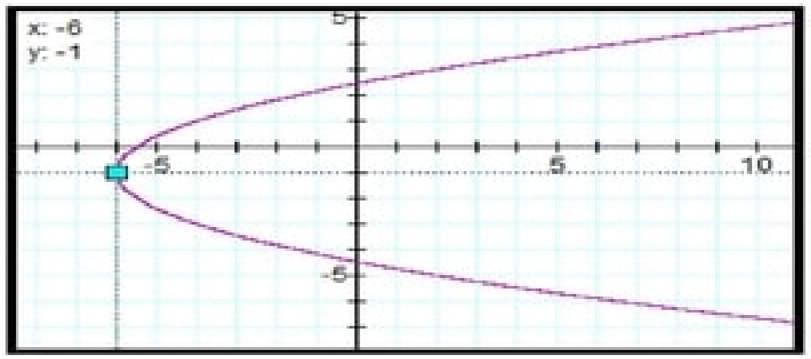
1A) المنحني مفتوح رأسيا إلى أعلى

الرأس $(4, -3)$

البؤرة $(4, -1)$

الدليل $y = -5$

معادلة محور التماثل $x = 4$



1B) المنحني مفتوح أفقيا إلى اليمين

الرأس $(-6, -1)$

البؤرة $(-5.5, -1)$

الدليل $y = -6.5$

معادلة محور التماثل $x = -6$

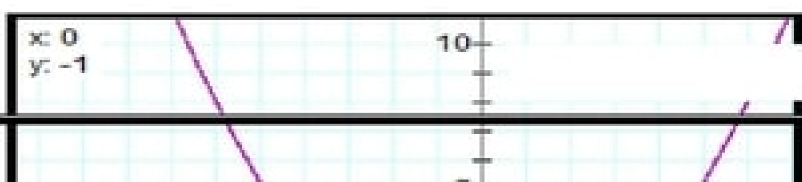
■ تحقق من فهمك:

(2) فلك:

$$-5 \leq x \leq 5 \qquad x^2 = 44.8(y - 6)$$

أقصر مسافة هي $11.2\ ft$

■ تحقق من فهمك:



(3)

(3A $x^2 = 4(y+1)$

الرأس $(0,-1)$

البؤرة $(0,0)$

الدليل $y=-2$

معادلة محور التماثل $x=0$

طول الوتر البؤري $= 4$

(3B $(y+1)^2 = 4(x-1)$

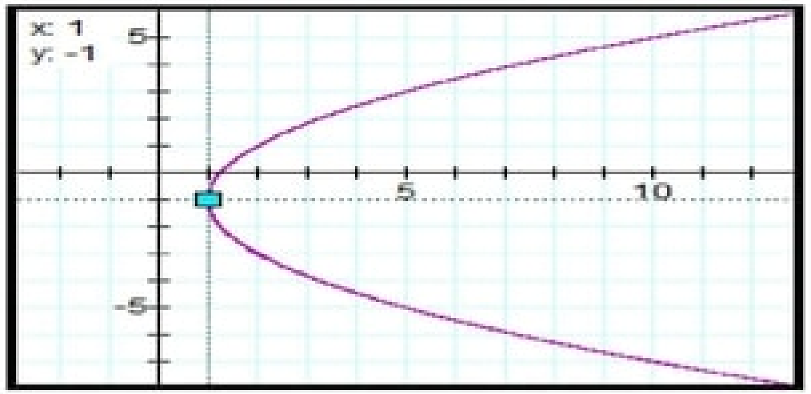
الرأس $(1,-1)$

البؤرة $(2,-1)$

الدليل $x=0$

معادلة محور التماثل $y=-1$

طول الوتر البؤري $= 4$



■ تحقق من فهمك:

(4)

(4A

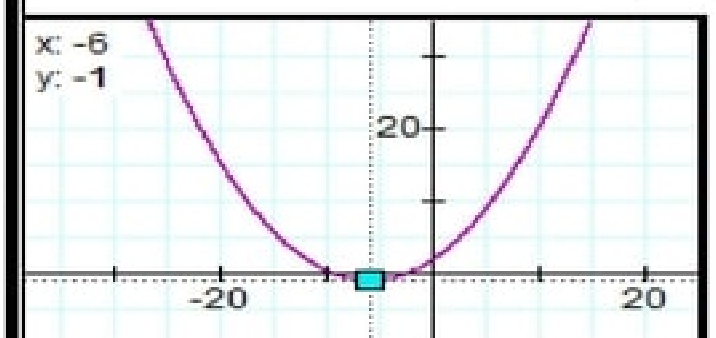
بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي x فإن المنحني مفتوح رأسياً

البؤرة $(h, k+p) = (-6, 2)$ ، الرأس $(h, k) = (-6, -1)$

لذا فإن $h = -6$ ، $k = -1$ ، $p = 2+1 = 3$

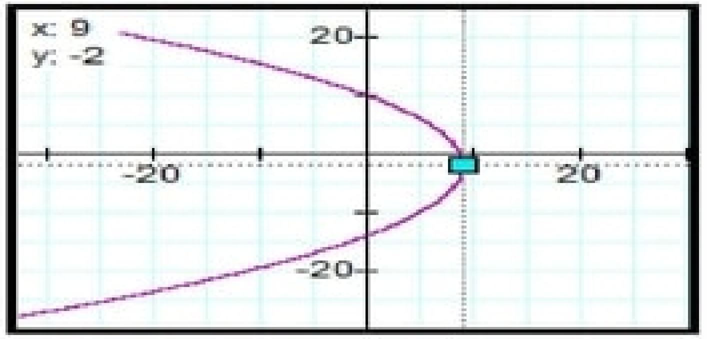
إذن معادلة القطع المكافئ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

هي $(x+6)^2 = 12(y+2)$



(4B

يما أن الدليل مستقيم أفقيا فإن المنحني مفتوح أفقياً
$h = x - c$



البؤرة $(5,-2)$ $= (h+p,k)$ ، الرأس $(9,-2) = (h,k)$

لذا فإن $h=9$ ، $k=-2$ ، $p = 5-9 = -4$

إذن معادلة القطع المكافئ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

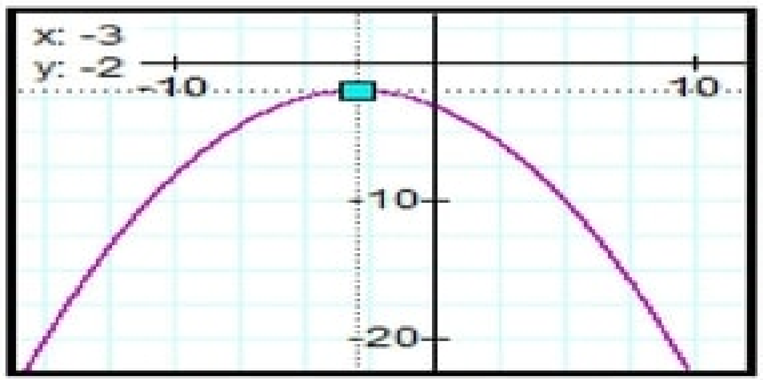
هي $(y+2)^2 = -16(x-9)$

(4C

المنحني مفتوح لأسفل

البؤرة $(-3,-4) = (h,k+p)$ لذا $h=-3$ ، $k=-4-p$

المنحني يمر بالنقطة $(5,-10)$ إذن:



$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$\therefore (5+3)^2 = 4p(-10+4+p)$$

$$\therefore 64 = 4p^2 - 24p$$

$$\therefore p^2 - 6p - 16 = 0$$

$$\therefore (p-8)(p+2) = 0$$

$$\therefore p = 8 \quad , \quad p = -2$$

المنحنى مفتوحاً لأسفل $p=-2$ إذن $k=-2$

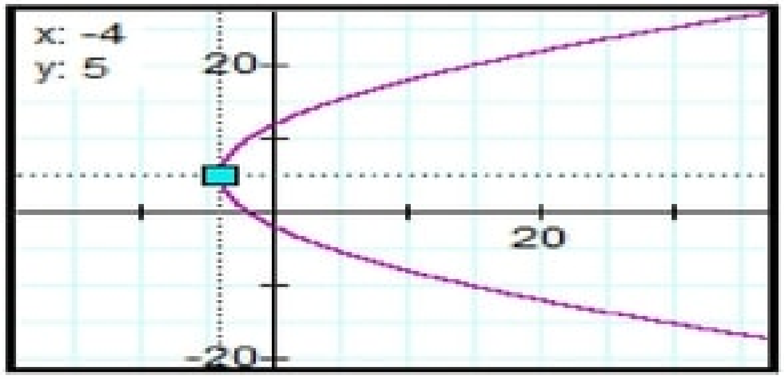
إذن معادلة المنحنى هي $(y+2)$ $(x+3)^2 = -8(y+2)$

(4D

المنحني مفتوح الي اليمين

البؤرة $(-1,5)$ $(h+p\ ,k\ )=$ لذا $k=5$ ، $h=-1-p$

المنحني يمر بالنقطة $(8,-7)$ إذن:



$$(y-k)^2=4p\,(x-h)$$

$$\therefore (-7-5)^2=4p\,(8+1+p)$$

$$\therefore 144=4p^2+36p$$

$$\therefore p^2+9p-36=0$$

$$\therefore (p+12)(p-3)=0$$

$$\therefore p=-12 \quad , \ p=3$$

المنحنى مفتوحاً لليمين $p=3$ إذن $h=-4$

إذن معادلة المنحنى هي $(y-5)^2=12(x+4)$

■ تحقق من فهمك:

(5

(5A

$$y=4x^2+4 \quad , \ (-1\ ,\ 8)$$

$$(x-0)^2=\frac{1}{4}(y-4)$$

$$h=0\ ,\ k=4\ ,\ p=\frac{1}{16}=0.0625$$

البؤرة $=(0\ ,\ 4.0625)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(-1-0)^2+(8-4.0625)^2}=4.0625$$
$$A=(0\ ,4.0625-4.0625)=(0,0)$$
$$m=\frac{8-0}{-1-0}=-8$$
$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-8=-8(x+1)$$
$$y=-8x$$

(5B

$$x=5-\frac{y^2}{4}\quad ,\ (1\ ,-4)$$
$$(y-0)^2=-4(x-5)$$
$$h=5\ ,\ k=0\ ,\ p=-1$$
البؤرة $=(4\ ,\ 0)$
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(1-4)^2+(-4-0)^2}=5$$
$$A=(4-5\ ,0)=(-1,0)$$
$$m=\frac{-4-0}{1+1}=-2$$
$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y+4=-2(x-1)$$
$$y=-2x-2$$

تدرب وحل المسائل.

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلتة في كل مما يأتي ، ثم مثل منحناه بيانياً:

(1) المنحنى مفتوح رأسيا لأعلى

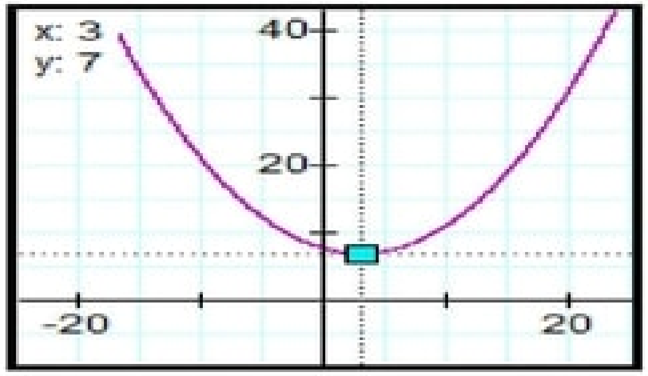
الرأس $(3,7)$

البؤرة $(3,10)$

الدليل $y=4$

معادلة محور التماثل $x=3$

طول الوتر البؤري $=12$



(2) المنحنى مفتوح رأسيا لأسفل

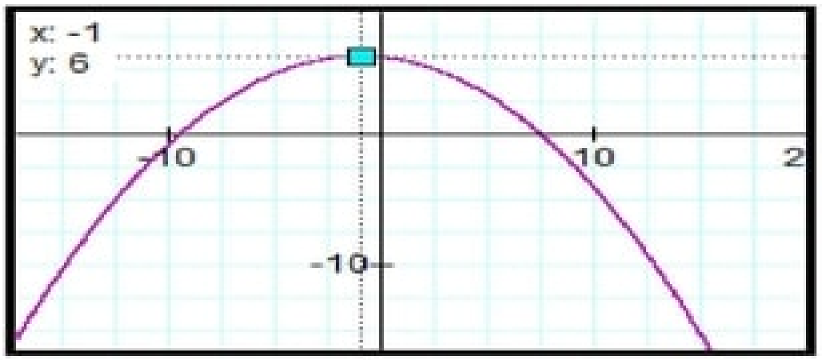
الرأس $(-1,6)$

البؤرة $(-1,3)$

الدليل $y=9$

معادلة محور التماثل $x=-1$

طول الوتر البؤري $=12$



(3) المنحنى مفتوح أفقيا لليمين

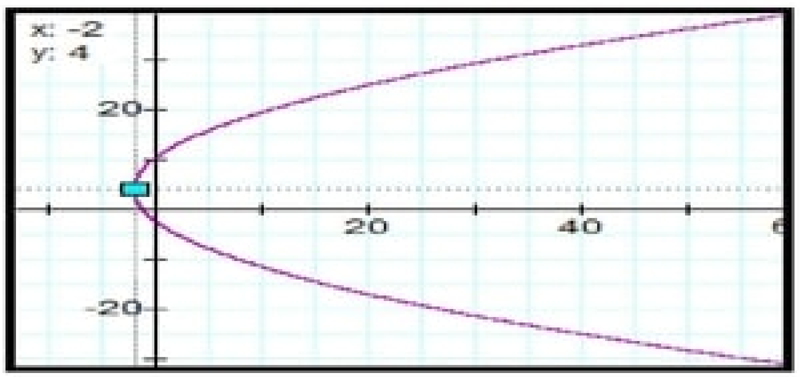
الرأس $(-2,4)$

البؤرة $(3,4)$

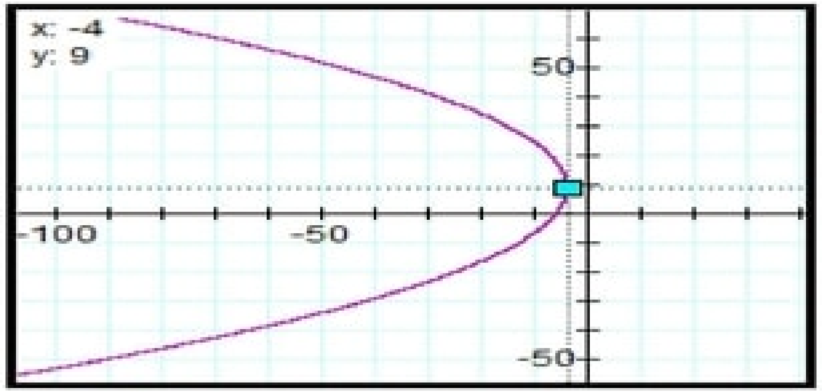
الدليل $x=-7$

معادلة محور التماثل $y=4$

طول الوتر البؤري $=20$



(4) المنحنى مفتوح أفقيا لليسار



الرأس $(-4,9)$

البؤرة $(-14,9)$

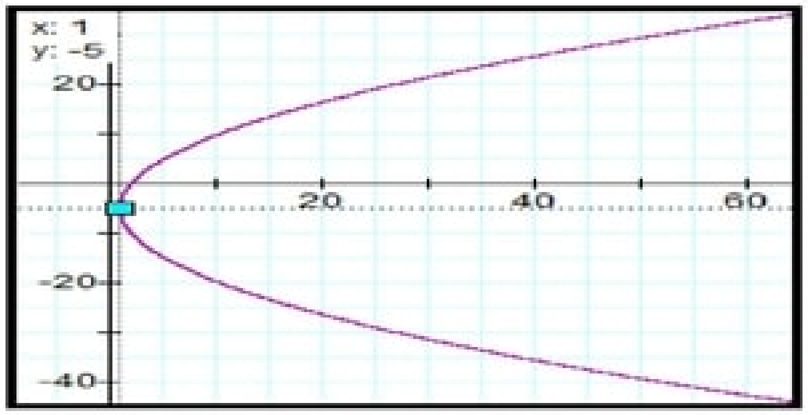
الدليل $x=6$

معادلة محور التماثل $y=9$

طول الوتر البؤري $=40$

---

(5) المنحنى مفتوح أفقيا لليمين



الرأس $(1,-5)$

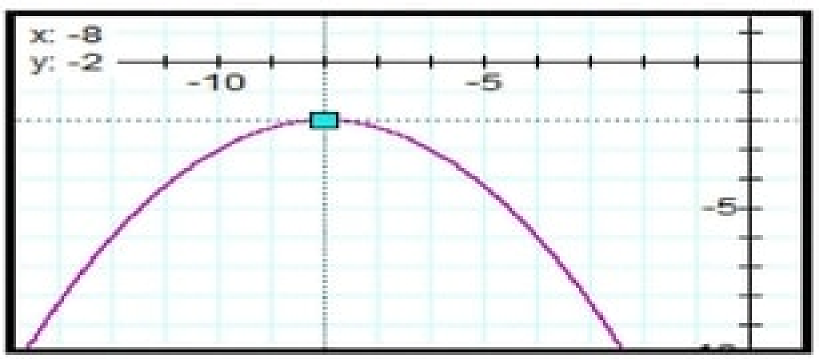
البؤرة $(7,-5)$

الدليل $x=-5$

معادلة محور التماثل $y=-5$

طول الوتر البؤري $=24$

(6) المنحنى مفتوح رأسيا لأسفل



الرأس $(-8,-2)$

البؤرة $(-8,-3)$

الدليل $y=-1$

معادلة محور التماثل $x=-8$

طول الوتر البؤري $=4$

(7) لوح تزلج:

$x^2 = 8(y-2)$ طول البعد البؤري $= 4\ ft$

(8) قوارب:

(a

$$y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$$

$$(y-5)^2 = 180(x-3)$$

(b طول الحبل = طول الوتر البؤري $= 45\ ft$

أكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ ، ثم حدد خصائصه ، و مثل منحناه بيانياً:

(9) $x^2 = 8(y+7)$

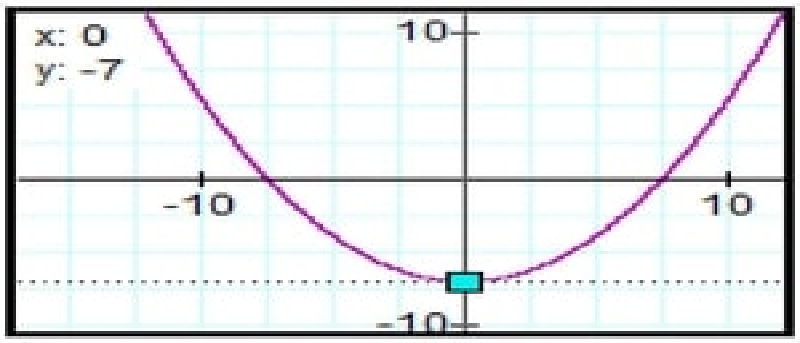
الرأس $(0,-7)$

البؤرة $(0,-5)$

الدليل $y = -9$

معادلة محور التماثل $x = -8$

طول الوتر البؤري $= 8$



(10)

$y^2 = -8(x+7)$

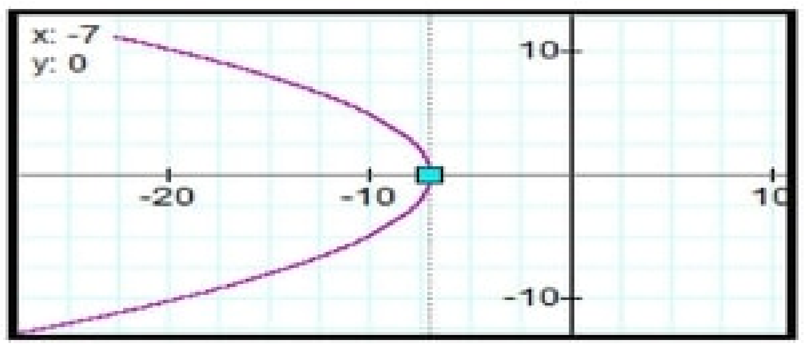
الرأس $(-7,0)$

البؤرة $(-9,0)$

الدليل $x = -5$

معادلة محور التماثل $y = 0$

طول الوتر البؤري $= 8$



(11) $x^2 = -24(y+1)$

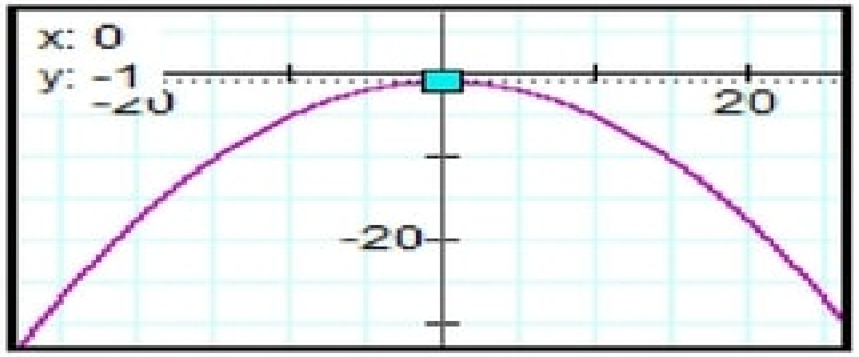
الرأس $(0,-1)$

البؤرة $(0,-7)$

الدليل $y=5$

معادلة محور التماثل $x=0$

طول الوتر البؤري $= 24$



(12) $y^2 = 20(x-3)$

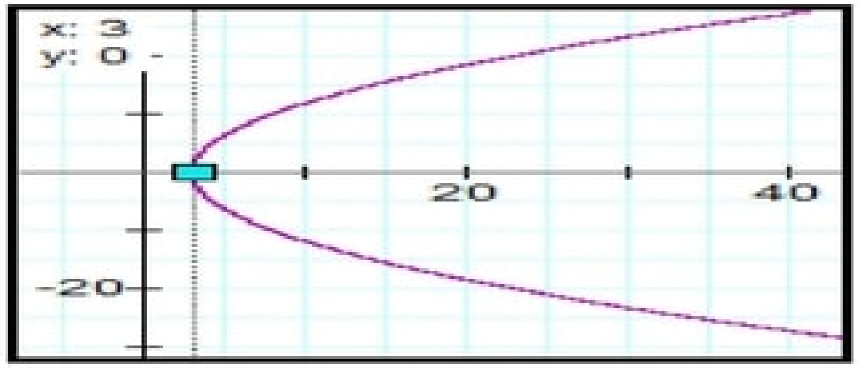
الرأس $(3,0)$

البؤرة $(8,0)$

الدليل $x=-2$

معادلة محور التماثل $y=0$

طول الوتر البؤري $= 20$



(13) $(x-3)^2 = -12(y-2)$

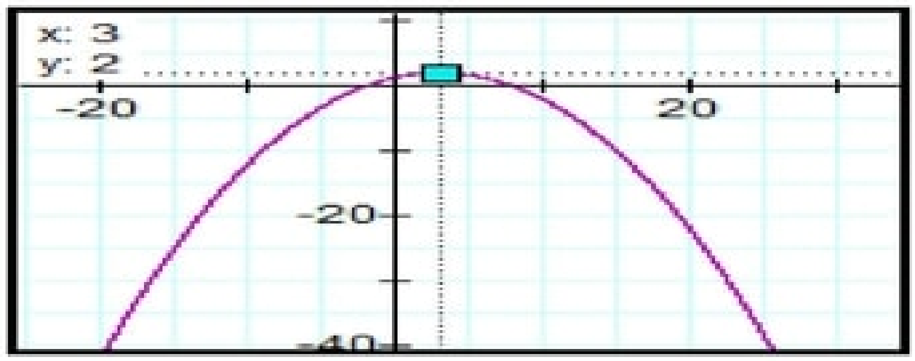
الرأس $(3,2)$

البؤرة $(3,5)$

الدليل $y=-1$

معادلة محور التماثل $x=3$

طول الوتر البؤري $= 12$



(14) $(y-4)^2 = 10(x-2)$

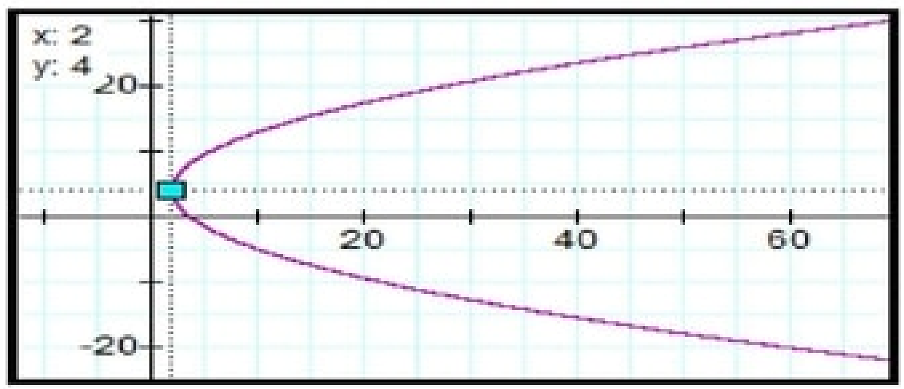
الرأس $(2,4)$

البؤرة $(4.5,4)$

الدليل $x=-\frac{1}{2}$

معادلة محور التماثل $y=4$

طول الوتر البؤري $= 10$



أكتب القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(15) بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي x فإن المنحني مفتوح رأسيا

البؤرة $(h, k+p) = (-9, -7)$ ، الرأس $(h, k) = (-9, -4)$

لذا فإن $h = -9$ ، $k = -4$ ، $p = -7+4 = -3$

إذن معادلة القطع المكافئ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

هي $(x+9)^2 = -12(y+4)$

---

(16)

المنحني مفتوح لأعلى

البؤرة $(h, k+p) = (3, 3)$ لذا $h = 3$ ، $k = 3-p$

المنحني يمر بالنقطة $(23, 18)$ إذن:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$\therefore (23-3)^2 = 4p(18-3+p)$$

$$\therefore 400 = 4p^2 + 60p$$

$$\therefore p^2 + 15p - 100 = 0$$

$$\therefore (p-5)(p+20) = 0$$

$$\therefore p = 5 \qquad , \quad p = -20$$

المنحنى مفتوحا لأعلى $p = 5$ إذن $k = -2$

إذن معادلة المنحنى هي $(x-3)^2 = 10(y+2)$

---

(17) بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y فإن المنحني مفتوح أفقيا

البؤرة $(h+p, k) = (2, -1)$ ، الرأس $(h, k) = (-4, -1)$

لذا فإن $h = -4$ ، $k = -1$ ، $p = 2+4 = 6$

إذن معادلة القطع المكافئ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

هي $(y+1)^2 = 24(x+4)$

(18) المنحني مفتوح إلى اليمين

البؤرة $(11,4)=(h+p,k)$ لذا $k=4$ ، $h=11-p$

المنحني يمر بالنقطة $(20,16)$ إذن:

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$
$$\therefore (16-4)^2=4p(20-11+p)$$
$$\therefore 144=4p^2+36p$$
$$\therefore p^2+9p-36=0$$
$$\therefore (p+12)(p-3)=0$$
$$\therefore p=-12 \qquad , \; p=3$$

المنحنى مفتوحا لليمين $p=3$ إذن $h=8$

إذن معادلة المنحنى هي $(y-4)^2=12(x-8)$

---

(19) بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y فإن المنحني مفتوح أفقيا

البؤرة $(-3,-2)=(h+p,k)$ ، الرأس $(1,-2)=(h,k)$

لذا فإن $h=1$ ، $k=-2$ ، $p=-3-1=-4$

إذن معادلة القطع المكافئ $(y-k)^2=4p(x-h)$

هي $(y+2)^2=-16(x-1)$

(20) المنحني مفتوح رأسيا إذن معادلتة الأساسية $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

المنحني يمر بالنقطة $(6,-5)$ إذن:

$$\therefore (6-h)^2 = 4p(-5-k)$$

$$\therefore h^2 - 12h + 36 = -20p - 4pk \quad \rightarrow (1)$$

المنحني يمر بالنقطة $(0,-2)$ إذن:

$$\therefore (0-h)^2 = 4p(-2-k)$$

$$\therefore h^2 = -8p - 4pk \quad \rightarrow (2)$$

المنحني يمر بالنقطة $(-12,-14)$ إذن:

$$\therefore (-12-h)^2 = 4p(-14-k)$$

$$\therefore h^2 + 24h + 144 = -56p - 4pk \quad \rightarrow (3)$$

بحل الثلاث معادلات ينتج أن $h=0$ ، $k=-2$ ، $p=-3$

إذن معادلة المنحنى هي $x^2 = -12(y+2)$

---

(21) بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي x فإن المنحني مفتوح رأسياً

البؤرة $(h,k+p) = (-3,4)$ ، الرأس $(h,k) = (-3,2)$

لذا فإن $h=-3$ ، $k=2$ ، $p = 4-2 = 2$

إذن معادلة القطع المكافئ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

هي $(x+3)^2 = 8(y-2)$

---

(22) الرأس $(h,k) = (-3,2)$ لذا $k=2$ ، $h=-3$

طول الوتر البؤري $8 = |4p|$ لذا فإن $p=2$

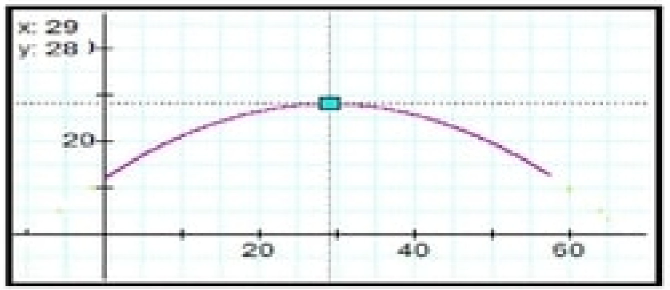
محور التماثل $y=2$ إذن المنحني مفتوح أفقياً

إذن معادلة المنحنى هي $(y-2)^2 = 8(x+3)$

(23) **عمارة:**

(a $(x-29)^2=-52.5(7-28)$

(b



اكتب كل معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يلي عند النقطة المعطاة:

(24) $(-5\ ,-5)\ ,\ (x+7)^2=-\frac{1}{2}(y-3)$

$h=-7\ ,\ k=3\ ,\ p=-\frac{1}{8}=-0.125$

البؤرة $=(-7\ ,\ 2.875)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=\sqrt{(-5+7)^2+(-5-2.875)^2}=8.125$

$A=(-7\ ,2.875-8.125)=(-7,-5.25)$

$m=\frac{-5+5.25}{-5+7}=\frac{1}{8}$

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y+5=\frac{1}{8}(x+5)$

$y=\frac{1}{8}x-\frac{35}{8}$

$$y^2 = \frac{1}{5}(x-4) \quad , \; (24\;,\;2) \quad (25)$$

$$(y-0)^2 = \frac{1}{5}(x-4)$$

$$h = 4\;,\; k = 0\;,\; p = \frac{1}{20} = 0.05$$

البؤرة $= (4.05\;,\;0)$

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(24-4.05)^2 + (2-0)^2} = 20.05$$

$$A = (4.05 - 20.05\;,0) = (-16,0)$$

$$m = \frac{2-0}{24+16} = \frac{1}{20} = 0.05$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{20}(x-24)$$

$$y = \frac{1}{20}x + \frac{4}{5}$$

$$(x+6)^2 = 3(y-2) \quad , \; (0\;,\;14) \quad (26)$$

$$h = -6\;,\; k = 2\;,\; p = \frac{3}{4} = 0.75$$

البؤرة $= (-6\;,\;2.75)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(0+6)^2+(14-2.75)^2}=12.75$$
$$A=(-6\ ,2.75-12.75)=(-6,-10)$$
$$m=\frac{14+10}{0+6}=4$$
$$y-y_1=m\,(x-x_1)$$
$$y-14=4(x-0)$$
$$y=4x+14$$

$$-4x=(y+5)^2\ ,\ (0\ ,-5)\quad (27)$$

$$(y+5)^2=-4(x-0)$$
$$h=0\ ,\ k=-5\ ,\ p=-1$$
البؤرة $=(-1\ ,-5)$
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(0+1)^2+(-5+5)^2}=1$$
$$A=(-1-1\ ,-5)=(-2,-5)$$
$$m=\frac{-5+5}{0+2}=0$$
$$y-y_1=m\,(x-x_1)$$
$$y+5=0(x-0)$$
$$x=0$$

حدد إتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ في كل مما يأتي:

(28) مفتوح إلى الأسفل

(29) مفتوح إلى اليسار

(30) مفتوح إلى الأعلى

(31) مفتوح إلى اليمين

---

(32) جسور:

a) $x^2 = -180.3(y+20)$

b) $30.35\ m$

أكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته، ويمس المستقيم المعطى منحناه في كل مما يأتي:

الحـــــــــل: يوجد عدد لانهائي من المعادلات يتوقف ذلك على نقطة التماس بين المنحنى والمماس

(33) المنحني مفتوح رأسيا

البؤرة $(0,3)$ $(h,k+p)=$ لذا $h=0$ ، $k=3-p$

المنحني يمر بالنقطة $(4,6)$ إذن:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$\therefore (4-0)^2 = 4p(6-3+p)$$

$$\therefore 16 = 4p^2 + 12p$$

$$\therefore p^2 + 3p - 4 = 0$$

$$\therefore (p-1)(p+4) = 0$$

$$\therefore p = 1 \quad , \quad p = -4$$

المنحنى مفتوحا لأعلى $p=1$ إذن $k=2$

إذن معادلة المنحنى هي $x^2 = 4(y-2)$

(34) المنحني مفتوح الي اليمين

البؤرة $(1,0)$ $(h+p\ ,k)=(1,0)$ لذا $k=0$ ، $h=1-p$

المنحني يمر بالنقطة $(4,4)$ إذن:

$$(y-k)^2=4p\,(x-h)$$

$$\therefore (4-0)^2=4p\,(4-1+p)$$

$$\therefore 16=4p^2+12p$$

$$\therefore p^2+3p-4=0$$

$$\therefore (p+4)(p-1)=0$$

$$\therefore p=-4 \quad , \quad p=1$$

المنحنى مفتوحا لليمين $p=1$ إذن $h=0$

إذن معادلة المنحنى هي $y^2=4x$

---

(35) تمثيلات متعددة:

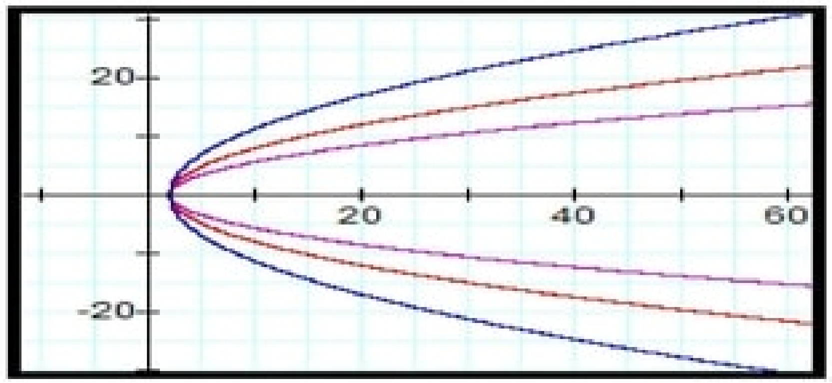
a) هندسياً:

i) وحدة

ii) وحدتين

iii) أربع وحدات

b) بيانيا:



c) لفظياً:

عندما تتحرك البؤرة بعيداً عن الرأس يزداد توسع منحنى القطع المكافئ رأسيا

---

d) تحليلياً:

$$(x+1)^2 = 4(y+7)$$

---

e) تحليلياً:

جميع القطوع لها نفس الرأس $(0\ ,\ -1)$ ومنحنياتها مفتوحة إلى أسفل ومنحنى المعادلة $x^2 = 2(y+1)$ هو الأضيق، لكن منحنى المعادلة $x^2 = -12(y+1)$ هو الأوسع.

مسائل مهارات التفكير العليا

(36) إكتشف الخطأ:

بما أن $p = 1$ فإن منحنى القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى.

(37) تبرير:

كل نقطة على المنحنى للقطع المكافئ بعدها عن البؤرة يساوي بعدها عن الدليل. ولأن الرأس يقع مباشرة بين البؤرة والدليل على محور التماثل فإنها هي الأقرب إلى البؤرة.

(38) تبرير:

الربعان الأول والرابع ، الرأس $(-2, 5)$ وتقع الرأس على يسار المحور y والمنحنى مفتوح إلي اليسار لذا فإنة لا يوجد نقاط للمنحنى على يمين المحور y أو في الربعين الأول والرابع .

(39) تحد:

$$y^2 = \frac{15}{8}x$$

(40) أكتب:

إذا كان للبؤرة والرأس الإحداثي x نفسه فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى أعلى أو إلى أسفل وإذاكان الإحداثي y للرأس أصغر من الإحداثي y للبؤرة فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى الأعلى. أما إذا كان أكبر من الإحداثي y للبؤرة فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى أسفل.

وإذا كان للبؤرة والرأس الإحداثي y نفسه فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى اليمين أو إلى اليسار وإذاكان الإحداثي x للرأس أصغر من الإحداثي x للبؤرة فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى اليمين. أما إذا كان أكبر من الإحداثي x للبؤرة فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى اليسار.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

$\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ (41)

$\log_4 16^x = 4x$ (42)

$\log_3 27^x = 3x$ (43)

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي. ثم تحقق من صحة حلك:

(44)

$$8^{2x-1} = 2\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 2^{3(2x-1)} = 2^3$$

$$\therefore 6x - 3 = 3$$

$$\therefore 6x = 6 \qquad \therefore\ x = 1$$

---

(45)

$$\log_3(-x) + \log_3(6-x) = 3$$

$$\therefore \log_3\left(x^2 - 6x\right) = 3$$

$$\therefore x^2 - 6x = 3^3 = 27$$

$$\therefore x^2 - 6x - 27 = 0$$

$$\therefore (x-9)(x+3) = 0$$

$$\therefore\ x = 9 \ ,\ x = -3$$

للتحقق عوض عن قيمة x

$x = -3$

$$\log_3(3) + \log_3(6+3) \stackrel{?}{=} 3$$

$$\log_3(3 \square 9) = \log_3 27 = 3 \qquad \text{c}$$

$x = 9$

$$\log_3(-9) + \log_3(6-9) \stackrel{?}{=} 3$$

$$\log_3(-9) + \log_3(-3) \qquad \text{d}$$

إذن $x = -3$

(46)

$\log_3 x \leq -3$

$\therefore x \leq 3^{-3}$

$\therefore x \leq \frac{1}{27}$

$\therefore \left\{ x \middle| 0 < x \leq \frac{1}{27} \right\}$

---

(47) أوجد كل مما يأتي:

a) $h(-3) = 20$

---

b) $h(6x) = 16 - \frac{4}{4x+1}$

---

b) $h(10-2c) = 16 - \frac{12}{23-4c}$

---

(48)

$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 1 \quad \therefore \quad 2\theta = 90 \quad \therefore \quad \theta = 45$

$\therefore \quad \sin\theta + \cos\theta = \sin 45 + \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

تدرب على إختبار

(49)

$\sqrt{x^3} \longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow G$

(50)

$y = x^2 \longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow D$

(4 – 2) القطوع الناقصة والدوائر

■ تحقق من فهمك:

(1)

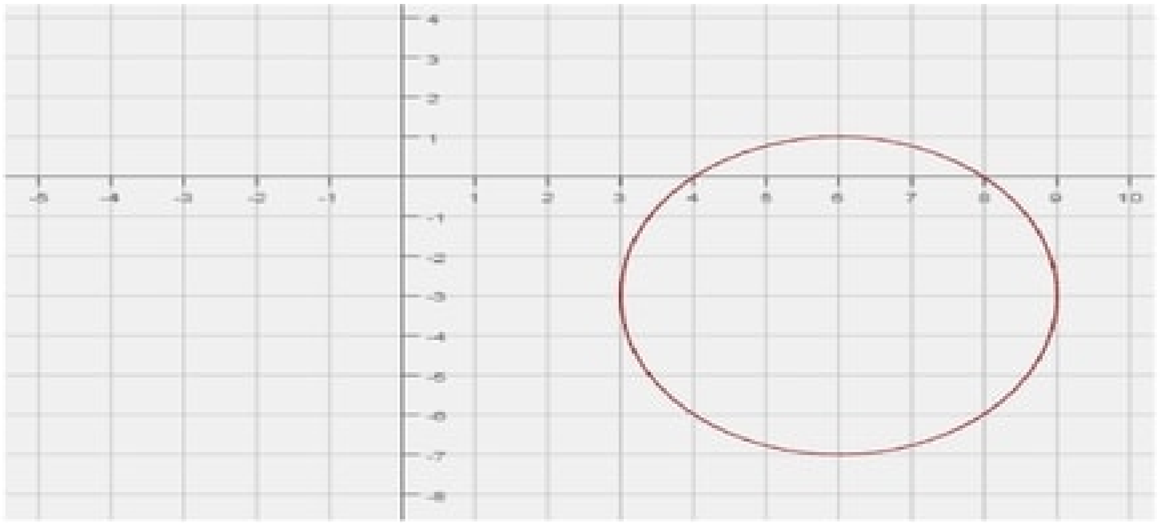
(1A) الاتجاه: رأسي، المركز: $(6,3)$

البؤرتان: $(6,-3\pm\sqrt{7})$

الرأسان: $(9,-3)$ ، $(3,-3)$

المحور الأكبر: $x=6$

المحور الأصغر: $y=-3$



(1B) الاتجاه: أفقي، المركز: $(-2,5)$

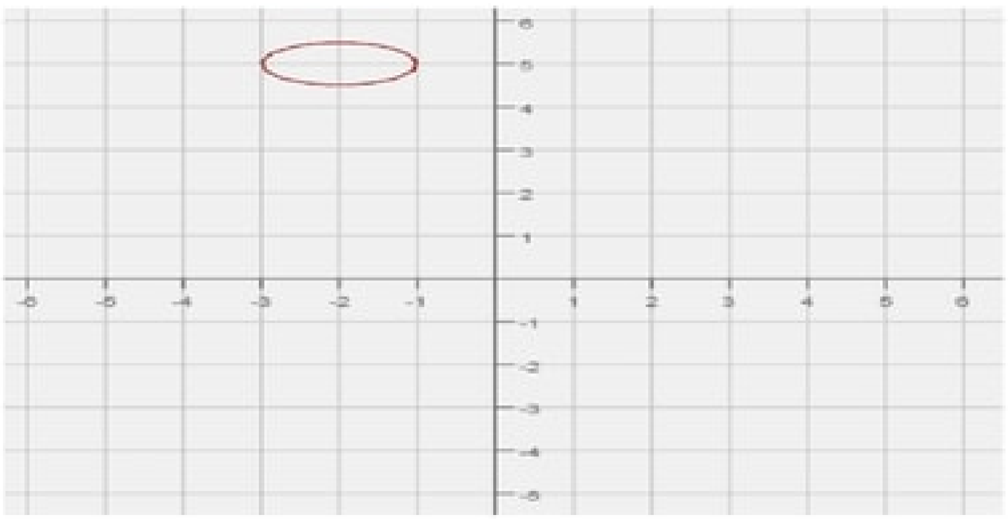
البؤرتان: $(-2\pm\frac{\sqrt{3}}{2},5)$

الرأسان: $(-1,5)$ ، $(-3,5)$

الرأسان المرافقان: $(-2,5.5)$ ، $(-2,4.5)$

المحور الأكبر: $y=5$

المحور الأصغر: $x=-2$



■ تحقق من فهمك:

(2)

$$\frac{(x-6)^2}{2.25}+\frac{(y-3)^2}{56}=1 \quad (2A)$$

$$\frac{(x=2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{36}=1 \quad (2B)$$

■ تحقق من فهمك:

(3)

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{48-18}}{\sqrt{48}}=0.79 \qquad (3A$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{19-17}}{\sqrt{19}}=0.32 \qquad (3B$$

■ تحقق من فهمك:

(4)

$$e=\frac{c}{a}$$

$$\therefore 0.39=\frac{c}{12.5}$$

$$\therefore c=4.875$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{12.5^2-4.875^2}=11.51$$

$$\therefore\ 2b=23.02\ mm$$

■ تحقق من فهمك:

(5)

$$x^2+y^2=9 \qquad (5A$$

$(x-5)^2+y^2=25$ (5B

■ تحقق من فهمك:

(6)

$$(h,k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{3+1}{2},\frac{-3+5}{2}\right)=(2,1)$$

$$\therefore h=2 \quad , k=1$$

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(2-1)^2+(1-5)^2}=\sqrt{17}$$

إذن معادلة الدائرة هي $(x-2)^2+(y-1)^2=17$

تدرب وحل المسائل.

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلتة في كل مما يأتي ، ثم مثّل منحناه بيانياً:

(1) الإتجاه: رأسي

المركز: $(-2,0)$

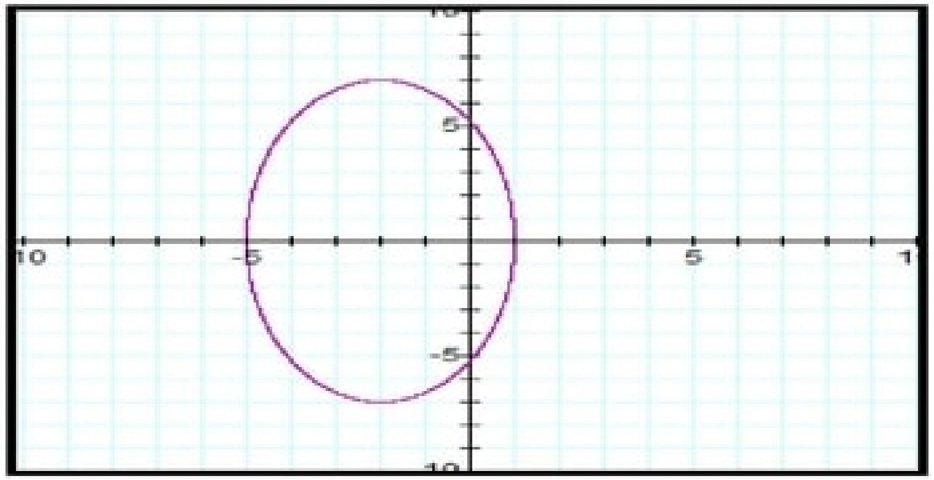
البؤرتان: $(-2,\pm 2\sqrt{10})$

الرأسان: $(-2,\pm 7)$

الرأسان المرافقان: $(-5,0)$ ، $(1,0)$

المحور الأكبر: $x=-2$

المحور الأصغر: $y=0$



---

(2) الإتجاه: أفقي

المركز: $(-4,-3)$

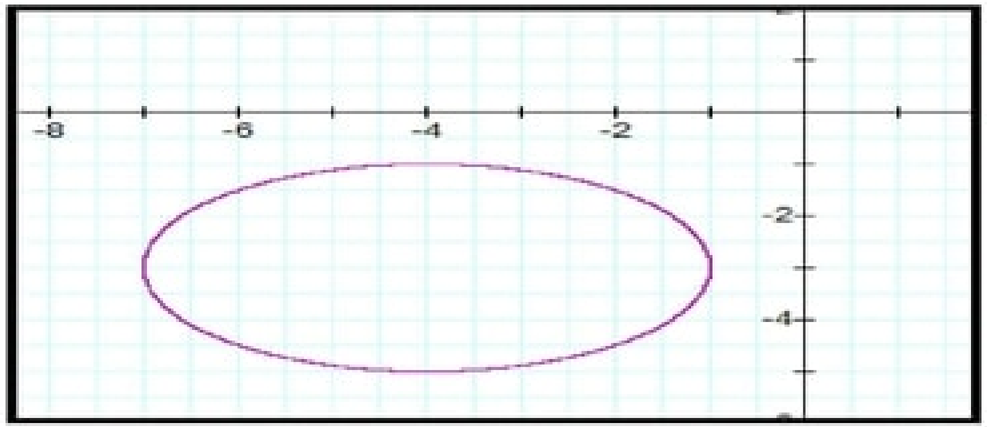
البؤرتان: $(-4\pm\sqrt{5},-3)$

الرأسان: $(-7,-3)$ ، $(-1,-3)$

الرأسان المرافقان: $(-4,-1)$ ، $(-4,-5)$

المحور الأكبر: $y=-3$

المحور الأصغر: $x=-4$



---

(3) الإتجاه: أفقي

المركز: $(7,2)$

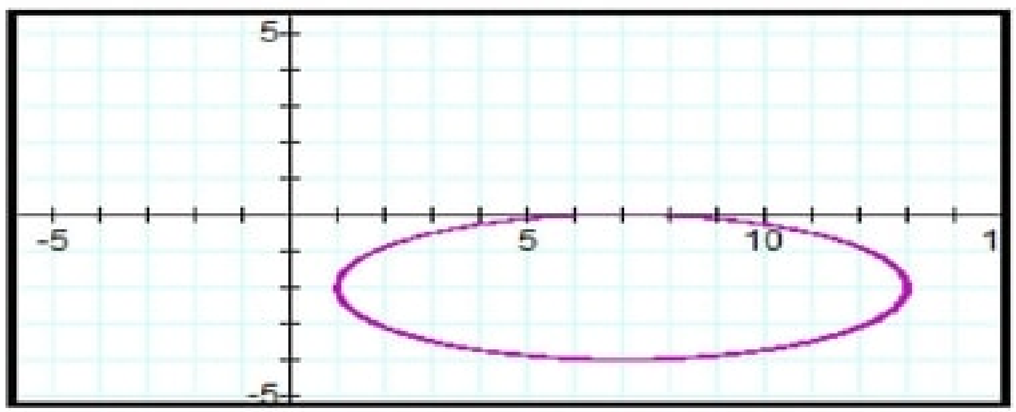
البؤرتان: $(7\pm 4\sqrt{2},-2)$

الرأسان: $(1,-2)$ ، $(13,-2)$

الرأسان المرافقان: $(7,0)$ ، $(7,-4)$

المحور الأكبر: $y=-2$

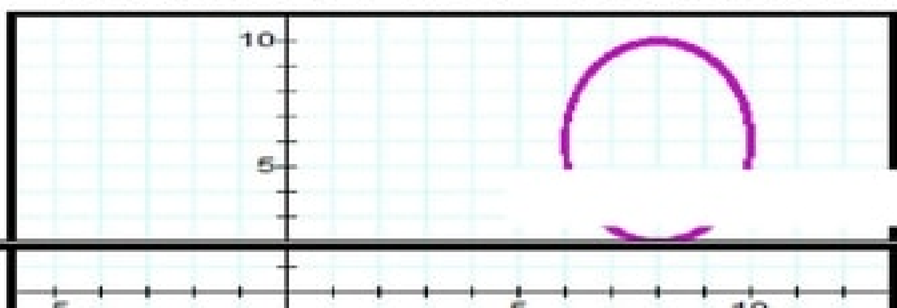
المحور الأصغر: $x=7$



---

(4) الإتجاه: رأسي

المركز: $(8,6)$



البؤرتان: $(8,\pm 2\sqrt{3})$

الرأسان: $(8,10)$ ، $(8,2)$

الرأسان المرافقان: $(10,6)$ ، $(6,6)$

المحور الأكبر: $x=8$

المحور الأصغر: $y=6$

<u>أكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:</u>

(5)

بما أن الرأسان $(h+a,k)=(13,-3)$ ، $(h-a,k)=(-7,-3)$

لذا فإن $k=-3$ ، $h=3$ ، $a=10$

بما أن البؤرتان $(h+c,k)=(11,-3)$ ، $(h-c,k)=(-5,-3)$

لذا فإن $c=8$ وبالتالي فإن $b=\sqrt{100-64}=6$

وبالتالي فإن معادلة القطع الناقص تكون $\frac{(x-3)^2}{100}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$

---

(6)

بما أن الرأسان $(h,k+c)=(4,3)$ ، $(h,k-c)=(4,-9)$

لذا فإن $k=-3$ ، $h=4$ ، $c=6$

بما أن طول المحور الأصغر $2b=8$ فإن $b=4$

وبالتالي فإن $a=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}$

وبالتالي فإن معادلة القطع الناقص تكون $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{20}=1$

---

(7)

نستخدم نهايتي المحور الأكبر في إيجاد a حيث $a = \frac{1-(-13)}{2} = 7$

نستخدم نهايتي المحور الأصغر في إيجاد b حيث $b = \frac{4-0}{2} = 2$

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر $(h,k) = \left(\frac{-13+1}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (-6,2)$

وبما أن الإحداثي y لنهايتي المحور الأكبر متساويان فإن المحور الأكبر أفقي، ومعادلة القطع الناقص هي $\frac{(x+6)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

---

(8)

بما أن البؤرتان $(h, k+c) = (-6,9)$ ، $(h, k-c) = (-6,-3)$

لذا فإن $h = -6$ ، $k = 3$ ، $c = 6$

بما أن طول المحور الأكبر $2a = 20$ فإن $a = 10$

وبالتالي فإن $b = \sqrt{100-36} = 8$

وبما أن الإحداثي x لنهايتي البؤرتان متساويان فإن المحور الأكبر رأسي ، ومعادلة القطع الناقص هي $\frac{(x+6)^2}{64} + \frac{(y-3)^2}{100} = 1$

---

(9)

بما أن الرأسان المرافقان $(h+b, k) = (-3,7)$ ، $(h-b, k) = (-13,7)$

لذا فإن $k = 7$ ، $h = -8$ ، $b = 5$

بما أن طول المحور الأكبر $2a = 16$ فإن $a = 8$

وبما أن الإحداثي x للرأسان المرافقان متساويان فإن المحور الأكبر رأسي ، ومعادلة القطع الناقص هي $\frac{(x+8)^2}{25} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$

<u>حدد الإختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاه معادلته في كل مما يأتي:</u>

(10) $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{72 - 54}}{\sqrt{72}} = 0.5$

(11) $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{40 - 12}}{\sqrt{40}} = 0.837$

(13) $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{33 - 27}}{\sqrt{33}} = 0.426$

---

(14) سباق:

(a

$e = \frac{c}{a}$, $\therefore 0.75 = \frac{c}{500}$

$\therefore c = 375$

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{500^2 - 375^2} = 330.72$

$\therefore 2b = 661.44\ ft$

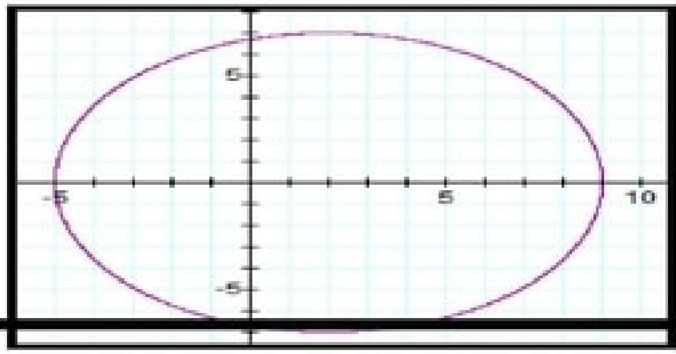
(b

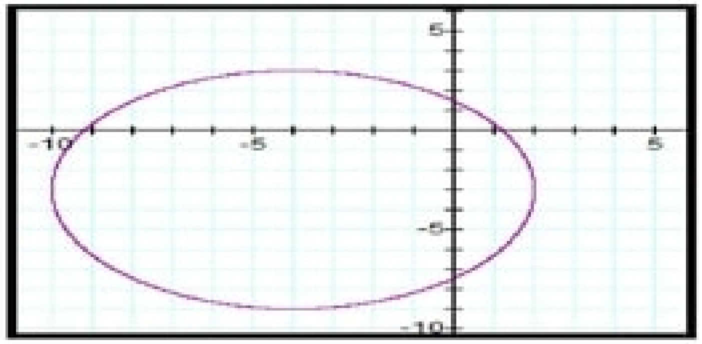
$\frac{x^2}{25000} + \frac{y^2}{109375} = 1$

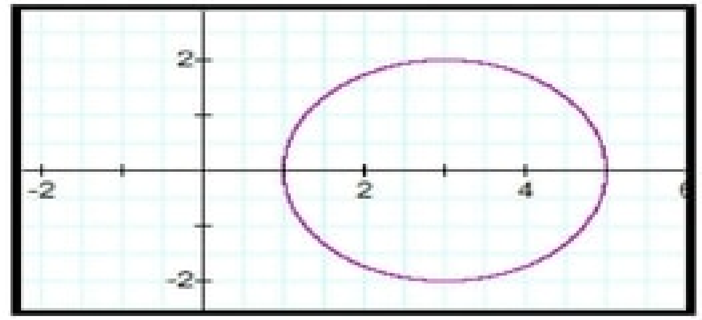
أكتب معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي ، ثم مثّل منحناها بيانياً:

(15) (16) (17)

$(x-2)^2 + y^2 = 49$ $\quad$ $(x+6)^2 + (y+3)^2 = 36$ $\quad$ $(x-3)^2 + y^2 = 4$







أكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي:

(18) $(x-2)^2 + (y+1.5)^2 = \frac{25}{4}$

(19) $x^2 + (y+10)^2 = 16$

(20) $(x-1.5)^2 + (y+8)^2 = \frac{53}{4}$

(21) $(x+1)^2 + (y+6)^2 = 29$

(22) معادلات:

إفرض أن $p(x,y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ وإحداثيات بؤرته ورؤوسه موضحه بإستعمال تعريف القطع الناقص والبعد بين أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت .

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}+\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2a$$
$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2a-\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$
$$x^2+y^2-2cy+c^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}+x^2+y^2+2cy+c^2$$
$$4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}=4a^2+4cy$$
$$a^2\left(x^2+y^2+2cy+c^2\right)=a^4+2a^2cy+c^2y^2$$
$$a^2x^2+a^2y^2+2a^2cy+a^2c^2=a^4+2a^2cy+c^2y^2$$
$$a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2=a^4+c^2y^2$$
$$a^2x^2+a^2y^2-c^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$a^2-c^2=b^2 \quad \to\to \quad a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

---

(23)

(a) طول المحور الأصغر 71.35 مليون ميل

(b) $e=0.203$

أوجد المركز و البؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

(24)

المركز: $(-5,0)$

البؤرتين: $(-2,0)$ ، $(-8,0)$

الرأسين: $(-1,0)$ ، $(-9,0)$

---

(25)

المركز: $(-2,1)$

البؤرتين: $(-2,-3)$ ، $(-2,5)$

الرأسين: $(-2,-4)$ ، $(-2,6)$

(26)

المركز: $(-1,0)$

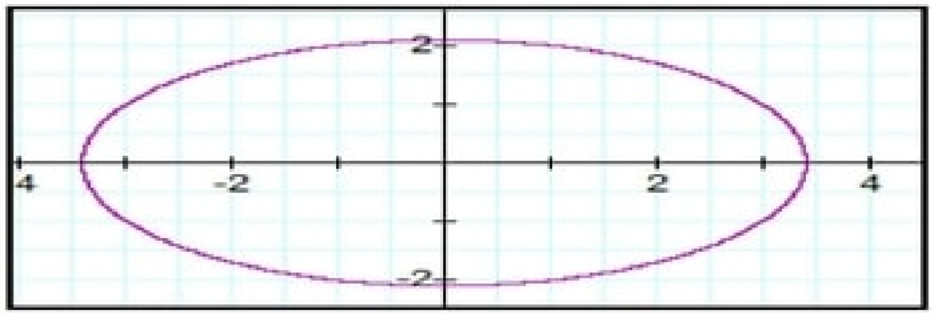
البؤرتين: $(-1,7)$ ، $(-1,-7)$

الرأسين: $(-1,\sqrt{65})$ ، $(-1,-\sqrt{65})$

---

(27) شاحنات:

(a)



(b) $\frac{x^2}{11.56}+\frac{y^2}{4.41}=1$

(c) $e=0.79$

أكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(28) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

(29) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$

(30) $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+4)^2}{36}=1$

$$\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(y-2)^2}{48}=1 \quad (31)$$

(32) هندسة:

$$(x-6.5)^2+(y-4.5)^2=32.5$$

اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التى تمر بالنقاط المعاطة فى كل مما ياتى:

(33) $(x-5)^2+(y-3)^2=9$

(34) $(x-1)^2+(y+7)^2=16$

(35) $x^2+(y-6)^2=9$

(36) $(x+1)^2+(y-4)^2=64$

مسائل مهارات التفكير العليا

(37) إكتشف الخطأ:

كلاهما إجابة صحيحة، المحور الأكبر في الشكل الأيسر الأفقي، في حين هو رأسي في الشكل الأيمن

(38) تبرير:

لا، فإذا كان $a^2 = p + r$ ، $b^2 = p$ فإن $c = \pm\sqrt{r}$ والبؤرتين للقطع $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 1$ هما $(0, \sqrt{r})$ ، $(0, -\sqrt{r})$ بينما البؤرتان للقطع $\frac{x^2}{p+r} + \frac{y^2}{p} = 1$ هما $(\sqrt{r}, 0)$ ، $(-\sqrt{r}, 0)$

تحد:

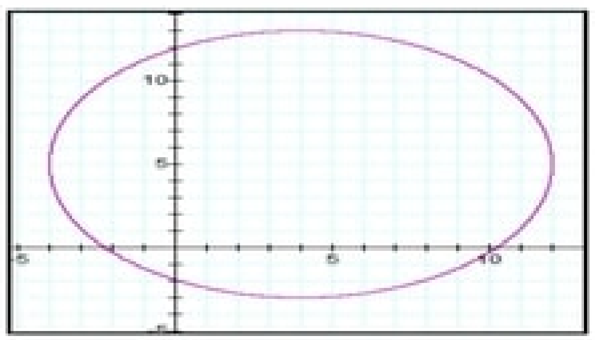
(39) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$

(40) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1$

(41) مسألة مفتوحة:

المجال: $[h - r \ , h + r]$

مجال $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 8^2$ هو: $[-4 \ , 12]$



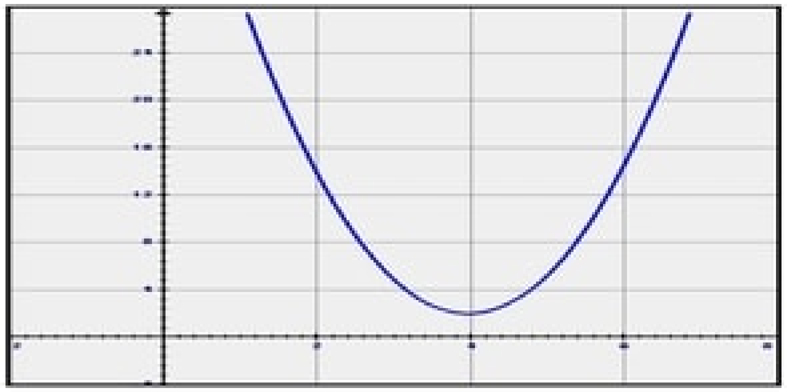
(42) اكتب:

بما أن $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ فعندما تقترب قيمة a من قيمة b فإن قيمة c تقترب من الصفر ويقترب الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$ من الصفر وتقترب البؤرتان من المركز، وبذلك يقترب شكل القطع الناقص من الدائرة

مراجعة تراكمية

حدد خصائص القطع المكافيء المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

(43)



القطع المكافيء مفتوح لأعلى

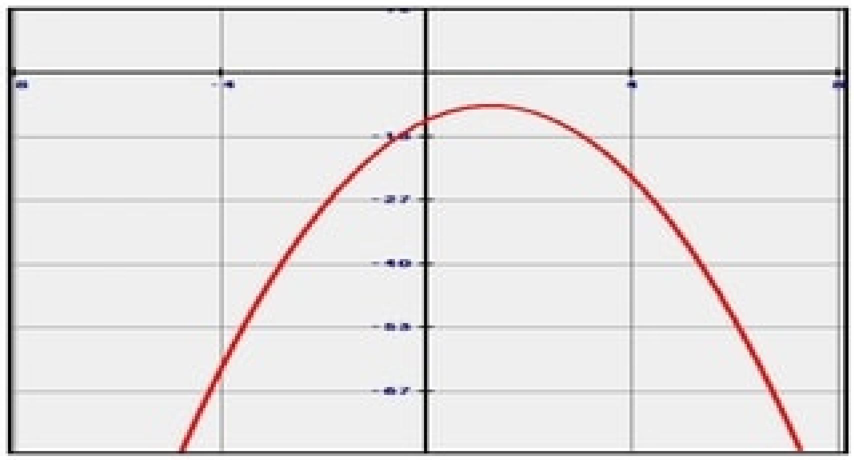
الرأس: $(4, 2)$

البؤرة: $(4, 2.08)$

الدليل: $y = 1.92$

محور التناظر: $x = 4$

(44)



القطع المكافيء مفتوح لأسفل

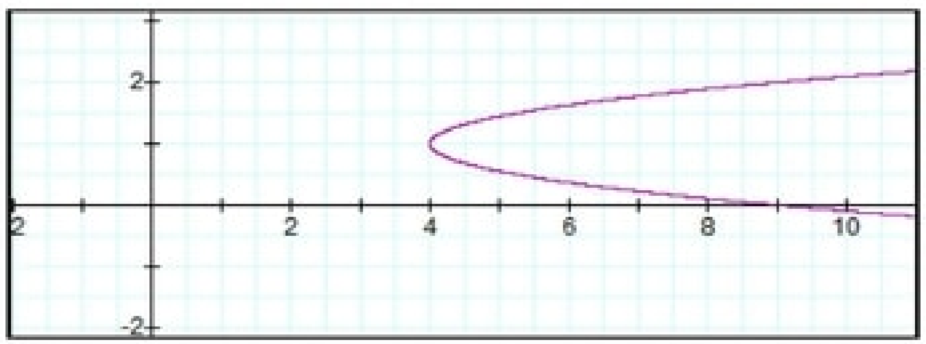
الرأس: $(\frac{5}{4}, \frac{-55}{8})$

البؤرة: $(\frac{5}{4}, \frac{56}{8})$

الدليل: $y = \frac{-27}{4}$

محور التناظر: $x = \frac{5}{4}$

(45) القطع المكافيء مفتوح الى اليمين



الرأس: $(4, 1)$

البؤرة: $(4.05, 1)$

الدليل: $x = 3.95$

محور التناظر: $y = 1$

حدد كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، حيث $0 \le \theta \le 2\pi$:

(46) $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ، $\theta = \frac{\pi}{4}$

(47) $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\theta = \pi$

(48) $\theta = \frac{11\pi}{6}$ ، $\theta = \frac{7\pi}{6}$ ، $\theta = \frac{3\pi}{2}$

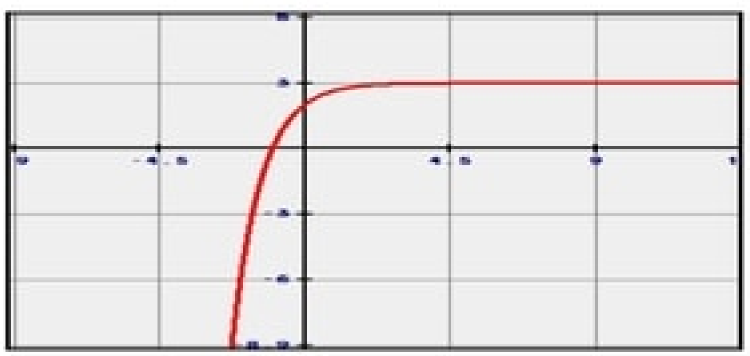
لكل دالة مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن ، وحدد مجالها :

(49) $f^{-1}(x) = \frac{-3x-2}{x-1}$ $\longleftarrow$ **المجال:** $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

(50) $f^{-1}(x) = -x^2 + 5$ $\longleftarrow$ **المجال:** $[0, \infty)$

(51) **لا يمكن إيجاد** f^{-1}

(52) **المدى:** $(-\infty, 3)$



تدريب على اختبار

(53) B 8

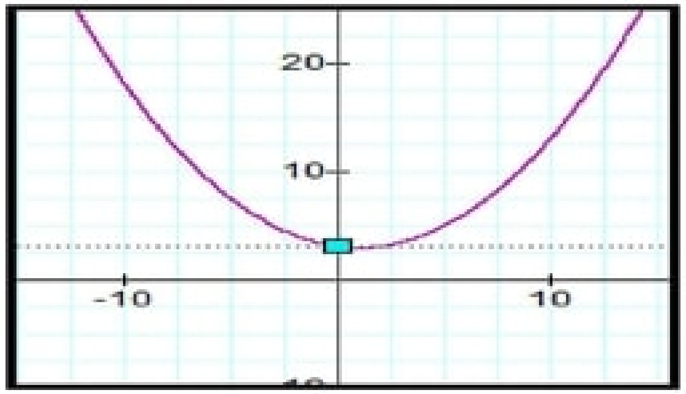
(54) c $\frac{x^2}{182.25}+\frac{y^2}{56.25}=1$

إختبار منتصف الفصل

اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين المعطاة بعض خصائصهما فيما يأتي ، ثم مثل منحناهما بيانياً:

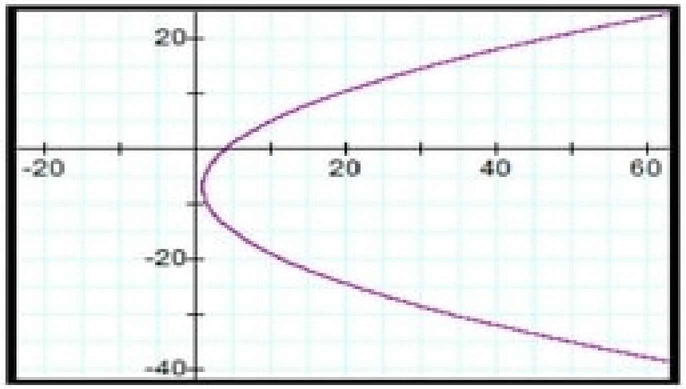
(1)

$$(x-1)^2 = 8(y-3)$$



(2)

$$(y+7)^2 = 16(x-1)$$



(3) إختيار من متعدد:

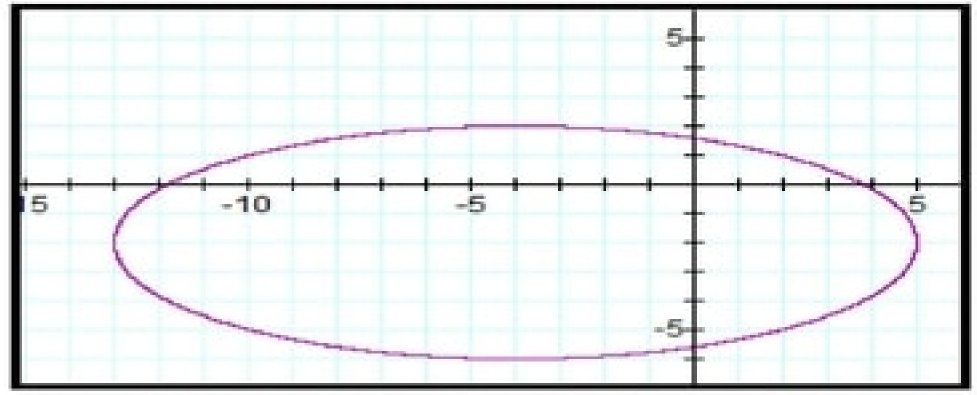
D

(4) تصميم:

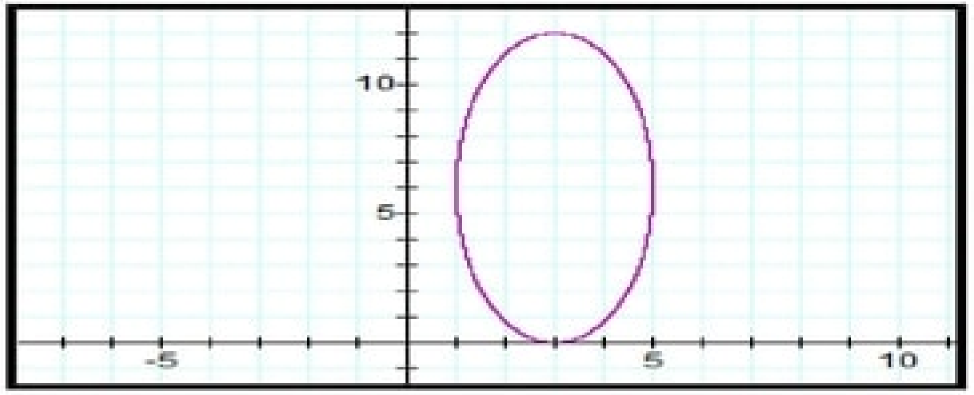
$$y = \frac{2}{625}x^2$$

مثل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي بيانياً:

(5)



(6)



اكتب معادلة كل من القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي :

(7) $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+3)^2}{20}=1$

(8) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{25}=1$

(9) $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+7)^2}{36}=1$

(10) $\frac{(x-8)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{49}=1$

---

(11) سباحة:

a) حوالي $22\ ft$

b) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{121}=1$

---

(12) اختيار من متعدد:

$C \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow 1$

(3 – 4) القطوع الزائدة

■ تحقق من فهمك:

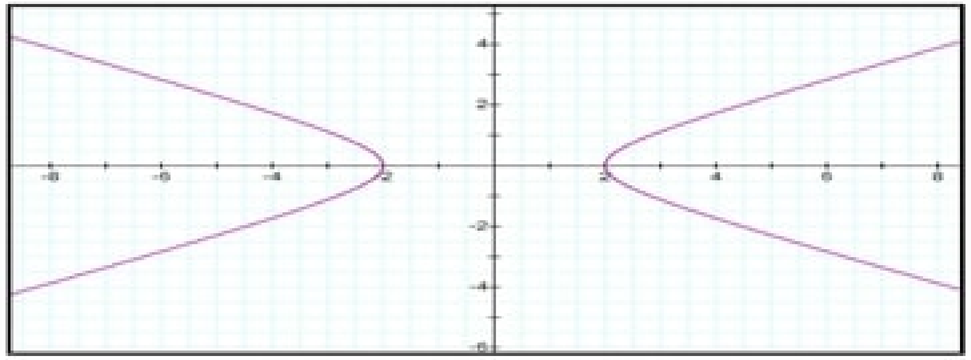
(1)

(1A) الاتجاه: أفقي، المركز: $(0,0)$

البؤرتان: $(\pm\sqrt{5},0)$

الرأسان: $(2,0)$ ، $(-2,0)$

خط التقارب: $y=\pm\frac{1}{2}x$

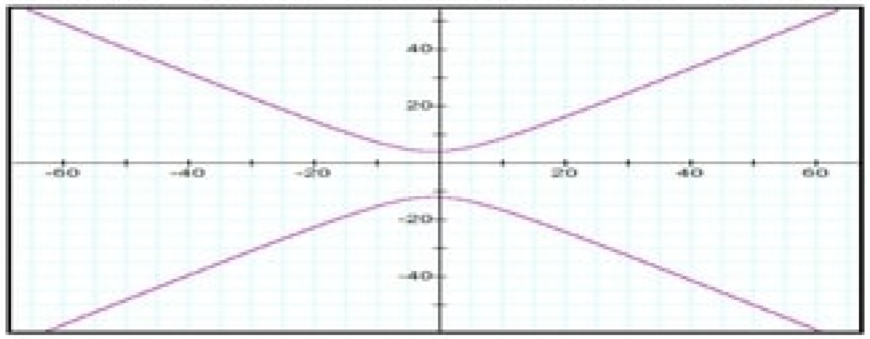


(1B) الاتجاه: رأسي، المركز: $(-1,-4)$

البؤرتان: $(-1,-4\pm\sqrt{145})$

الرأسان: $(-1,-12)$ ، $(-1,4)$

خط التقارب : $y+4=\pm\frac{8}{9}(x+1)$



■ تحقق من فهمك:

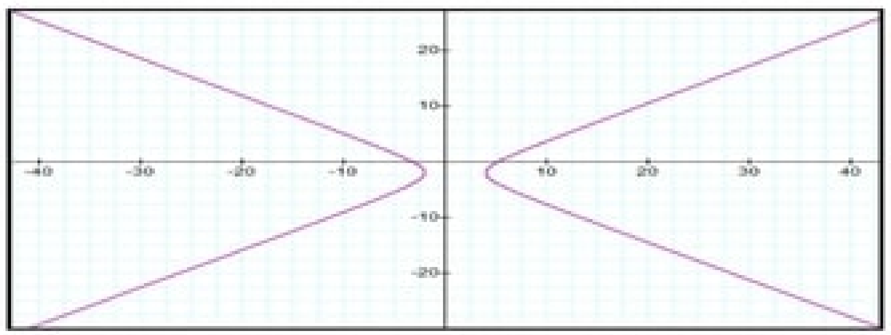
(2)

(2A) الاتجاه: أفقي، المركز: $(1,-2)$

البؤرتان: $(1\pm\sqrt{13},-2)$

الرأسان: $(-2,-2)$ ، $(4,-2)$

خط التقارب: $x+2=\pm\frac{2}{3}(y-1)$

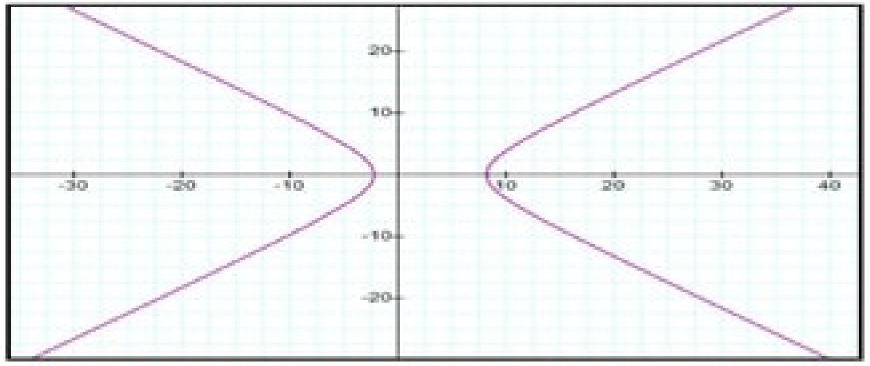


(2B) الاتجاه: أفقي، المركز: $(3,0)$

البؤرتان: $(3 \pm 3\sqrt{5}, 0)$

الرأسان: $(3 \pm 3\sqrt{3}, 0)$

خط التقارب: $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}(x-3)$



■ تحقق من فهمك:

(3)

(3A) $\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$

(3B) $\frac{(x-7)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

■ تحقق من فهمك:

(4)

(4A) $e = \frac{c}{a} = 1.5$

(4B) $e = \frac{c}{a} = 2.45$

■ تحقق من فهمك:

(5) ملاحة بحرية:

(4A) $\dfrac{x^2}{1600} - \dfrac{y^2}{8400} = 1$

(4B) $(40, 0)$

تدرب وحل المسائل.

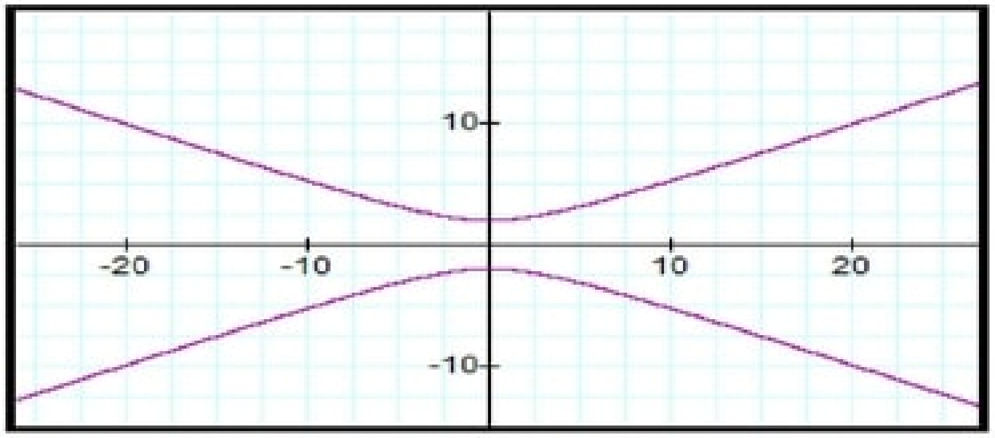
حدد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلتة في كل مما يأتي ، ثم مثل منحناه بيانياً:

(1) الاتجاه: رأسي، المركز: $(0, 0)$

الرأسان: $(0, -2)$ ، $(0, 2)$

البؤرتان: $(0, -\sqrt{21})$ ، $(0, \sqrt{21})$

خط التقارب: $y = \pm \dfrac{2\sqrt{17}}{17} x$



---

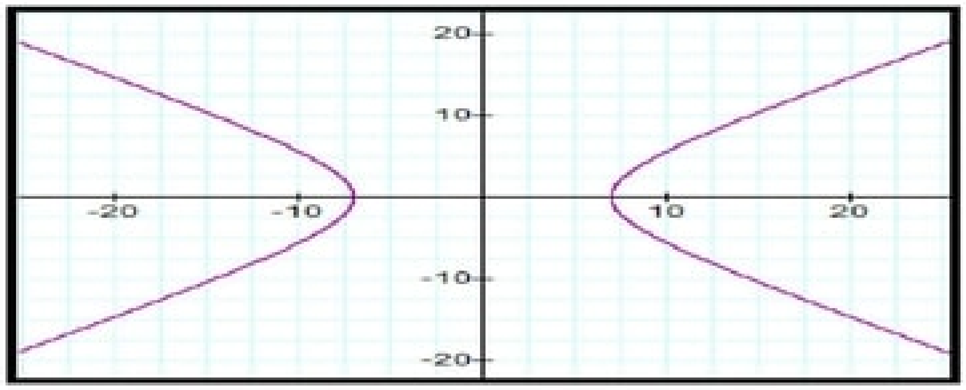
(2) الاتجاه: أفقي

المركز: $(0, 0)$

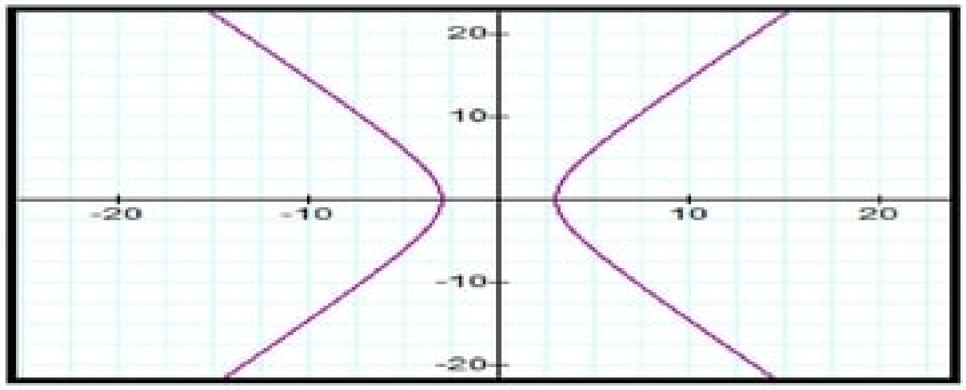
الرأسان: $(\pm 7, 0)$

البؤرتان: $(\mp\sqrt{79}, 0)$

خط التقارب: $y = \mp \dfrac{\sqrt{30}}{7} x$



(3)



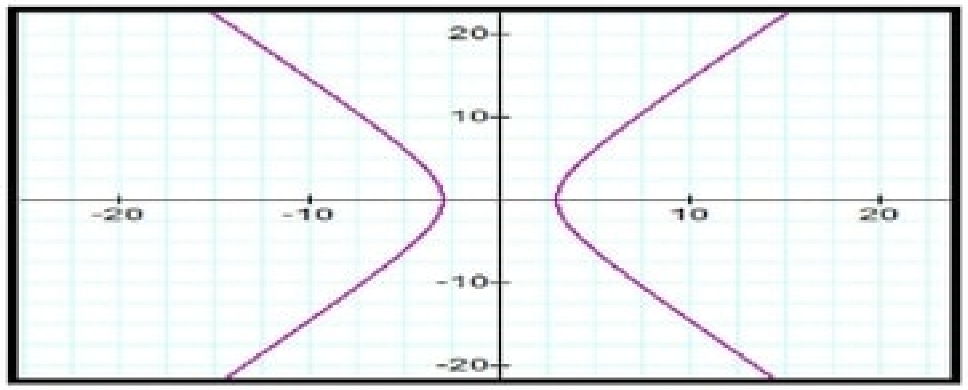
الاتجاه: أفقي

المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(\pm 3,0)$

البؤرتان: $(\mp\sqrt{30},0)$

خط التقارب: $y = \mp\dfrac{\sqrt{21}}{3}x$



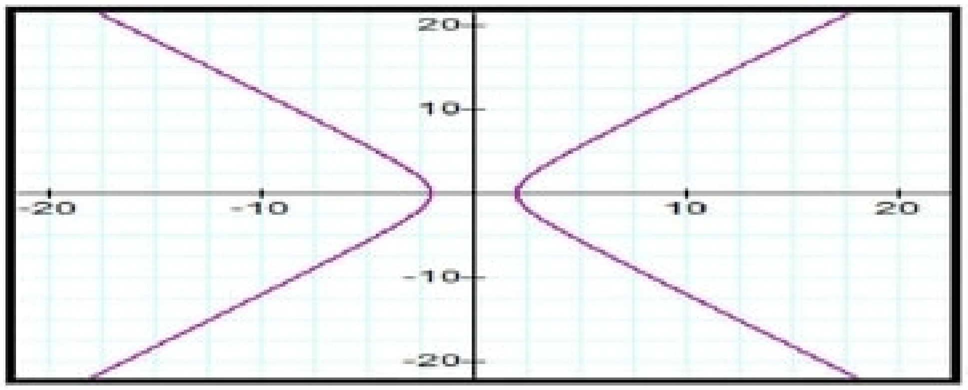
(4) الاتجاه: أفقي

المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(0,\mp 5)$

البؤرتان: $(0,\pm\sqrt{39})$

خط التقارب: $y = \pm\dfrac{5\sqrt{14}}{14}x$



(5) الاتجاه: أفقي

المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(\pm 2,0)$

البؤرتان: $(\mp\sqrt{10},0)$

خط التقارب: $y = \mp\dfrac{\sqrt{6}}{2}x$

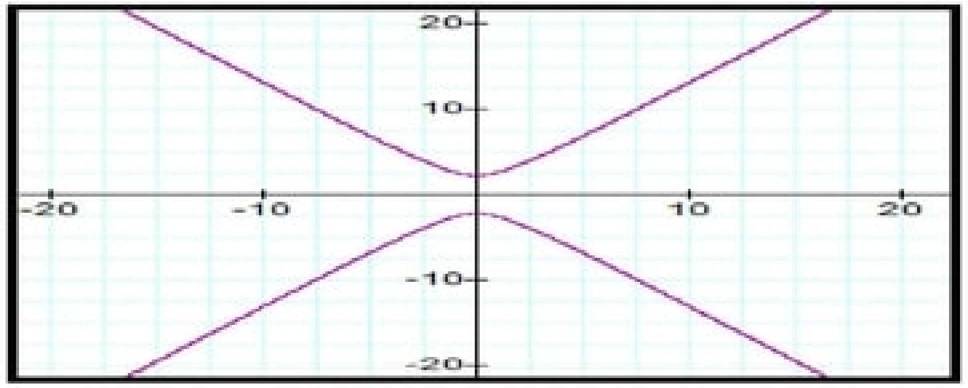
(6) الاتجاه: رأسي

المركز: $(0,0)$

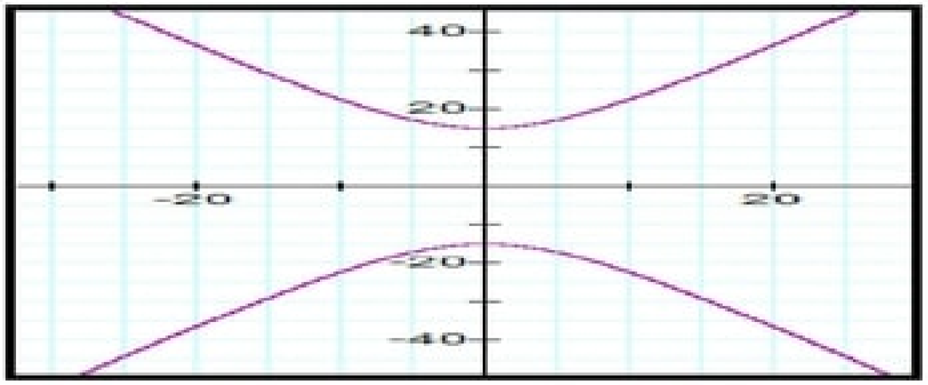
الرأسان: $(0,\mp\sqrt{5})$

البؤرتان: $(0,\pm 2\sqrt{2})$

خط التقارب: $y=\mp\frac{\sqrt{15}}{3}x$



(7) **إضاءة:**



اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية ثم حدد خصائصه ثم مثل منحناه بيانياً

(8) $\frac{(x-3)^2}{32}-\frac{(y+1)^2}{8}=1$

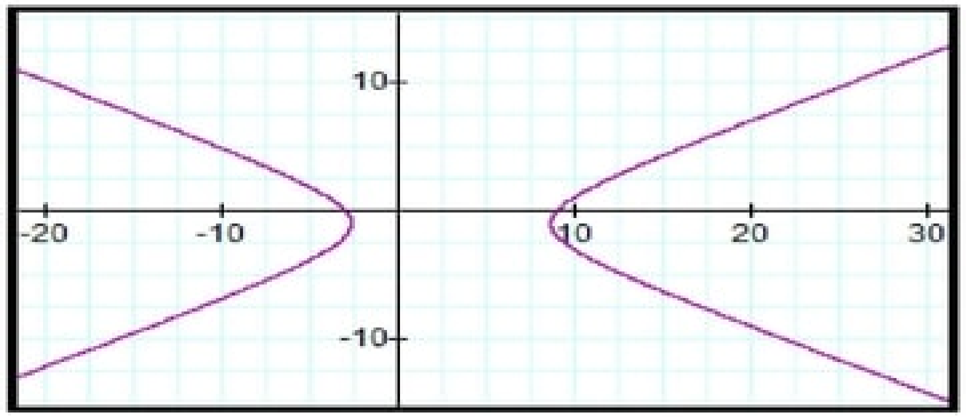
الاتجاه: أفقي

المركز: $(3,-1)$

الرأسان: $(3\pm 4\sqrt{2},-1)$

البؤرتان: $(3\pm 2\sqrt{10},-1)$

خطا التقارب: $y+1=\mp\frac{2\sqrt{19}}{19}(x-3)$



$$(9)\quad \frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{27} = 1$$

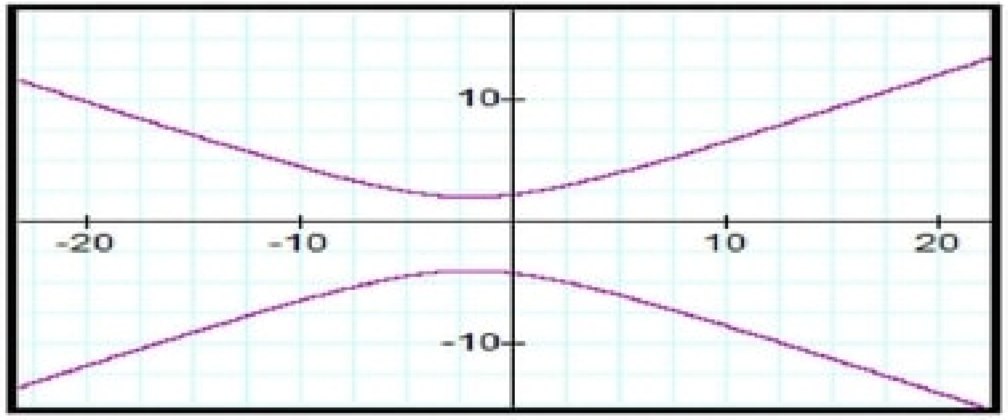
الاتجاه: رأسي

المركز: $(-2,-1)$

الرأسان: $(-2,-4)$ ، $(-2,2)$

البؤرتان: $(-2,-7)$ ، $(-2,5)$

خطا التقارب: $y+1 = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$



$$(10)\quad \frac{(y-2)^2}{25} - \frac{(x+7)^2}{10} = 1$$

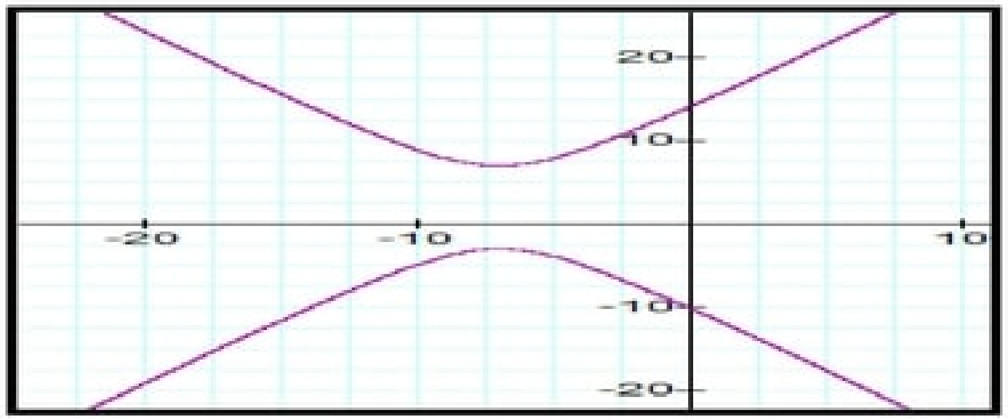
الاتجاه: رأسي

المركز: $(-7,2)$

الرأسان: $(-7,7)$ ، $(-7,-3)$

البؤرتان: $(-7,2\mp\sqrt{35})$

خطا التقارب: $y+2 = \mp\frac{\sqrt{10}}{2}(x+7)$



$$(11)\quad \frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$$

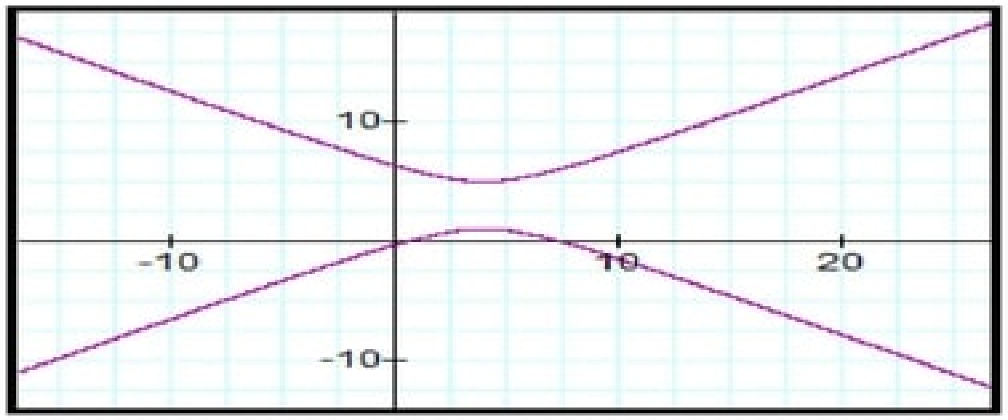
الاتجاه: رأسي

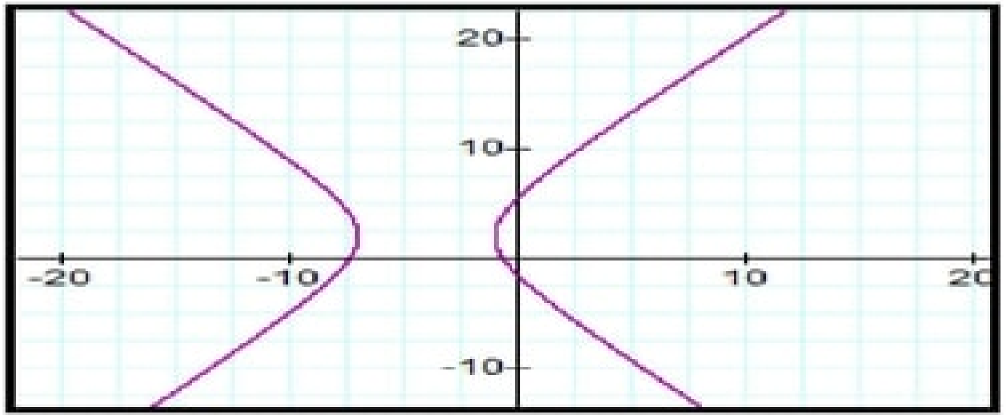
المركز: $(4,3)$

الرأسان: $(4,5)$ ، $(4,1)$

البؤرتان: $(4,3\mp\sqrt{13})$

خطا التقارب: $y-3 = \mp\frac{2}{3}(x-4)$





$$\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1 \quad (12)$$

الاتجاه: أفقي

المركز: $(-4, 2)$

الرأسان: $(-7, 2)$ ، $(-1, 2)$

البؤرتان: $(1, 2)$ ، $(-9, -2)$

خطا التقارب: $y - 2 = \mp \frac{4}{3}(x + 4)$

أكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

$$\frac{(y-1)^2}{15} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1 \quad (13)$$

$$\frac{(x-1)^2}{39} - \frac{(y-5)^2}{64} = 1 \quad (14)$$

$$\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1 \quad (15)$$

$$\frac{(x+4)^2}{144} - \frac{(y-7)^2}{25} = 1 \quad (16)$$

$$\frac{(x+7)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1 \quad (17)$$

$$\frac{(y-4)^2}{36} - \frac{(x-2)^2}{64} = 1 \quad (18)$$

$$\frac{(x-6)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{13} = 1 \quad (19)$$

---

(20) هندسة معمارية:

a) $\frac{(y-4)^2}{9}-\frac{7(x-5)^2}{225}=1$

b) $90\ ft$ تقريبا

حدد الإختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاه معادلته في كل مما يأتي:

(21) $e=1.52$

(22) $e=1.27$

(23) $e=1.06$

(24) $e=1.33$

(25) $e=1.58$

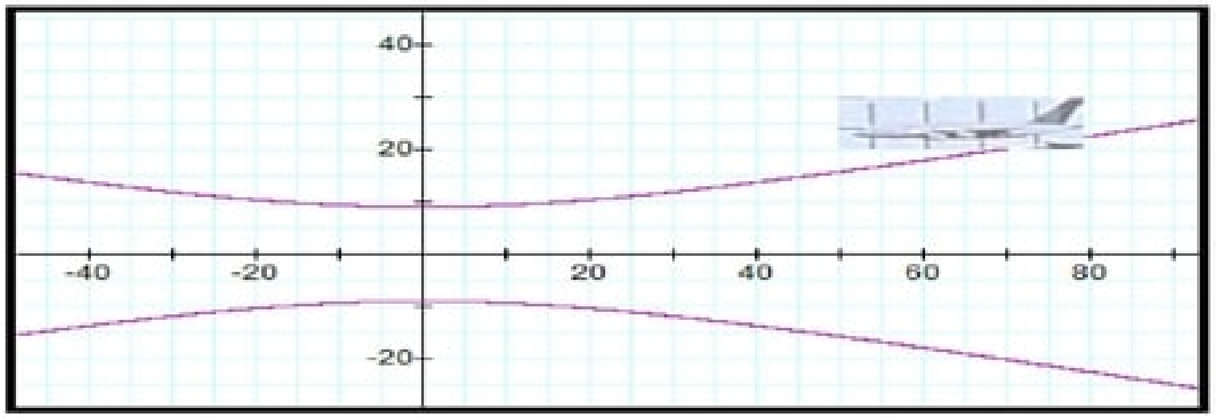
(26) $e=2.83$

---

(27) طيران:

a) $\frac{y^2}{81}-\frac{x^2}{1215}=1$

b)



c) $(40,13.7)$

(28) هندسة معمارية :

(a $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5760} = 1$

(b نصف قطر القمة $4.3\ m$ تقريبا

نصف قطر القاعدة $5.7\ m$ تقريبا

أكتب معادلة القطع الزائد الممثل بيانياً في كل مما يأتي:

(29) $\frac{y^2}{10} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$

(30) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

---

(31) طقس:

$$\frac{x^2}{2722500} - \frac{y^2}{1277500} = 1$$

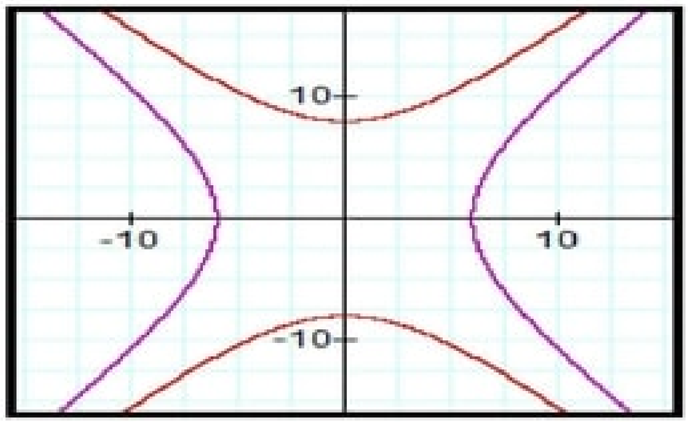
(32)

$$\frac{2x^2}{121} - \frac{2y^2}{121} = 1$$

---

(33) تمثيلات متعددة:

(a بيانياً:



b) تحليلياً:

البؤرتان للمنحنى الأول هما: $(-10,0)$ ، $(10,0)$.والبؤرتان للمنحنى الثاني هما: $(0,-10)$ ، $(0,10)$ ، والرأسان للمنحنى الأول هما: $(-6,0)$ ، $(6,0)$.والرأسان للمنحنى الثاني هما: $(0,-6)$ ، $(0,6)$ والمنحنيان لهما نفس خطي التقارب.

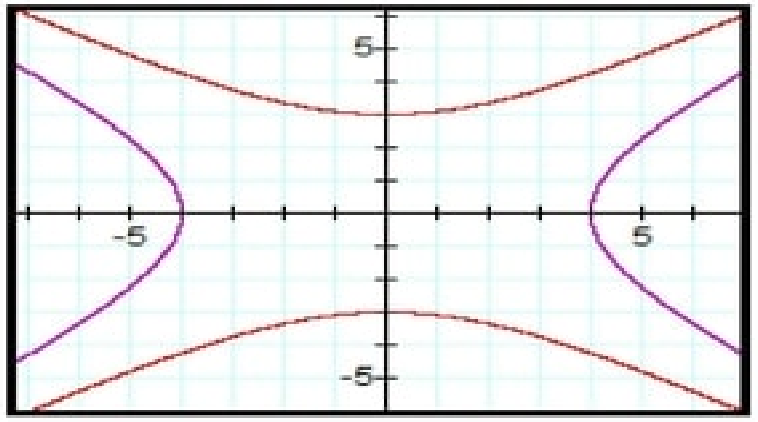
---

c) تحليلياً:

معادلة القطع الزائد المرافق له هو $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

---

d) بيانياً:



---

e) لفظياً:

القطعان الزائدان المرافقان لهما نفس خطي التقارب ولهما نفس البعد بين المركز والبؤرتين.

مسائل مهارات التفكير العليا

(34) مسألة مفتوحة:

$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{15} = 1$$

---

(35) تبرير:

(a

قطع مكافئ، إذا كان $rs = 0$ فإن $r = 0$ أو $s = 0$. لذا فإما أن الحد x^2 يساوي صفر، أو أن الحد y^2 يساوي صفر. وبما أن المعادلة لها فقط حد مربع وحيد فإنها ستكون معادلة قطع مكافئ.

(b

قطع ناقص، إذا كان $rs > 0$ فإن r و s كلاهما أكبر من صفر أو كلاهما أقل من صفر. وفي كلتا الحالتين فإن الحدين المربعين لهما نفس الإشارة. لذا ستكون معادلة قطع ناقص.

(c

دائرة؛ إذا كان $r = s$ فإن معاملي الحدين التربيعيين المضافين متساويان، ويمكن إعادة كتابة المعادلة بحيث يصبح معامل كل منها هو 1 ، لذا فالمعادلة تمثل دائرة.

(d

قطع زائد، إذا كان $rs < 0$ فإن r و s مختلفان في الإشارة. أي أن الحدين التربيعيين مختلفان في الإشارة. لذا فالمعادلة تمثل قطعاً زائداً.

---

(36) تبرير:

أحيانا، ومثال ذلك عندما تكون إحداثيات الرأسين والبؤرتين معلومة فإنه يمكن كتابة معادلة القطع الزائد، وعندما يكون كل من الرأسين والمحور القاطع معلوماً فقط فإن من غير الممكن كتابة معادلة القطع الزائد.

---

(37) تحد:

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{72}=1$$

---

(38) برهان:

بما أن القطع الزائد متساوي الساقين فإن $a=b$ وبما أن

$$\because c^2=a^2+b^2$$

$$\therefore c^2=a^2+a^2 \qquad a=b$$

$$\therefore c^2=2a^2$$

$$\therefore c=a\sqrt{2}$$

$$\because e=\frac{c}{a}$$

$$\therefore e=\frac{\cancel{a}\sqrt{2}}{\cancel{a}}=\sqrt{2}$$

لذا فإن الإختلاف المركزي للقطع الزائد متساوي الساقين هو $\sqrt{2}$.

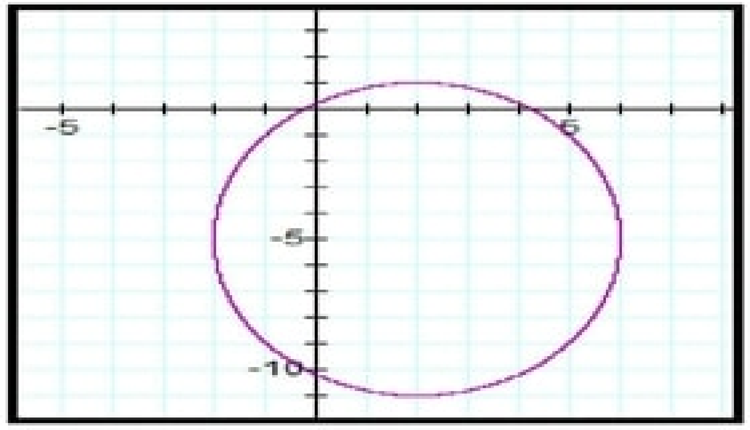
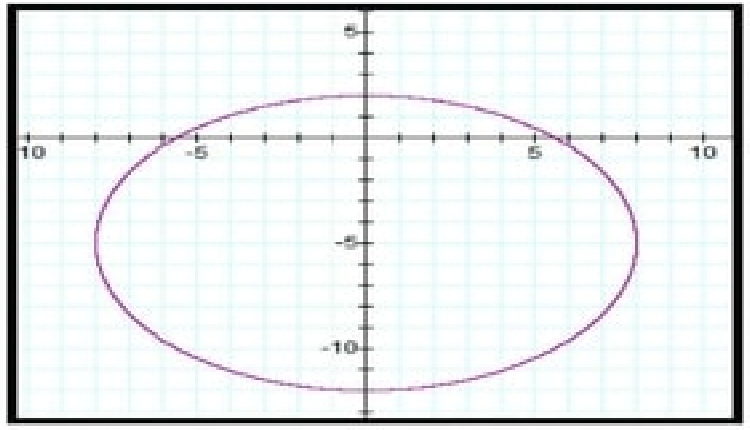
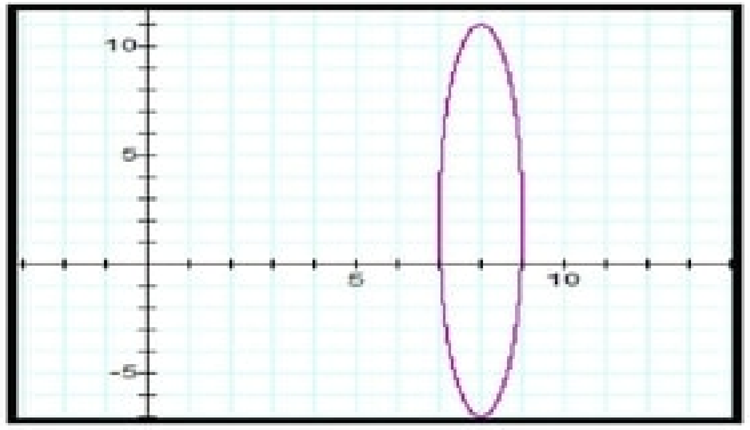
---

(39) اكتب:

إجابة ممكنة: أولا حدد إن كان اتجاة القطع الزائد رأسياً أو أفقياً. ثم استعمل البؤرتين لتعيين مركز القطع الزائد وتحديد قيم h ،k. واستعمل طول المحور القاطع لإيجاد a^2 ، ثم أوجد c المسافة بين المركز وإحدى البؤرتين، ثم استعمل المعادلة $b^2=c^2-a^2$ لتجد b^2. وأخيراً استعمل الصورة القياسية لكتابة المعادلة بالاعتماد على المحور القاطع إن كان موازياً للمحور x أو المحور y.

مراجعة تراكمية

مثل معادلة القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

(42)	(41)	(40)
		

(a $105\ ft$

(b $5\ s$

حلّ كل معادلة مما يأتي لجميع قيم θ :

(44) $2n\pi\ , n \in Z$

(45) $\frac{3\pi}{2} + n\pi\ , n \in Z$

(46) ليس لها حل.

تدرب على إختبار

(47) مراجعة:

$H \longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow\ y = \frac{5}{4}x\ , y = -\frac{5}{4}x$

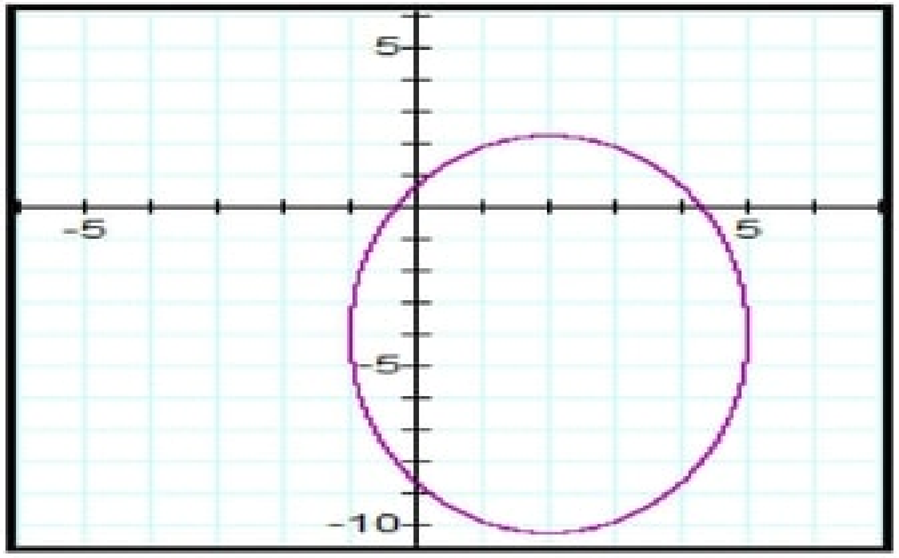
(48) سؤال ذو إجابة قصيرة:

$$y - 1 = \pm \frac{1}{2}(x + 1)$$

(4 – 4) تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

■ تحقق من فهمك:

(1)



$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{39}=1$$

قطع ناقص

■ تحقق من فهمك:

(2)

2A) قطع زائد

2B) قطع زائد

2C) قطع ناقص

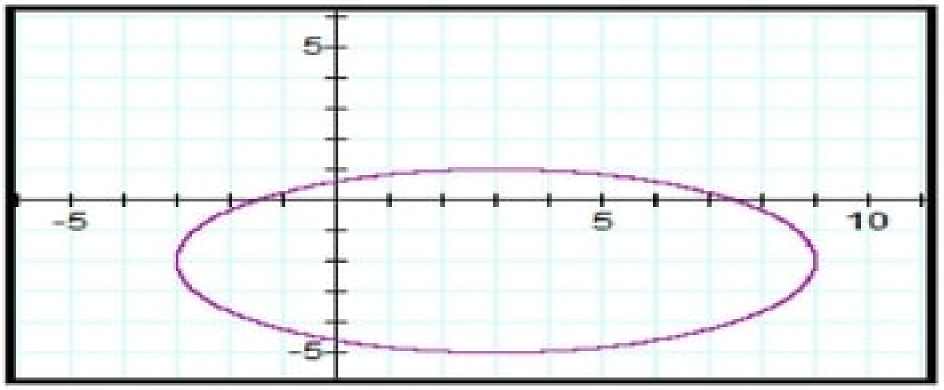
تدرب وحل المسائل.

<u>اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثلة ومثّل منحناه بيانياً:</u>

(1)

$$\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

قطع ناقص

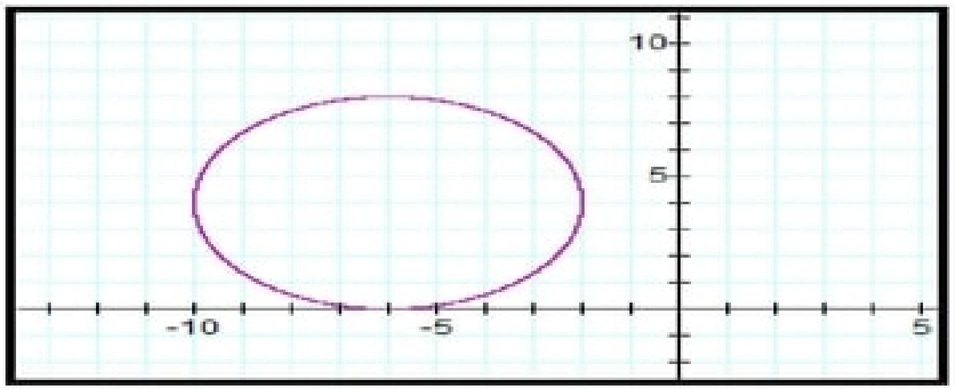


---

(2)

$$(x+6)^2+(y-4)^2=16$$

دائرة

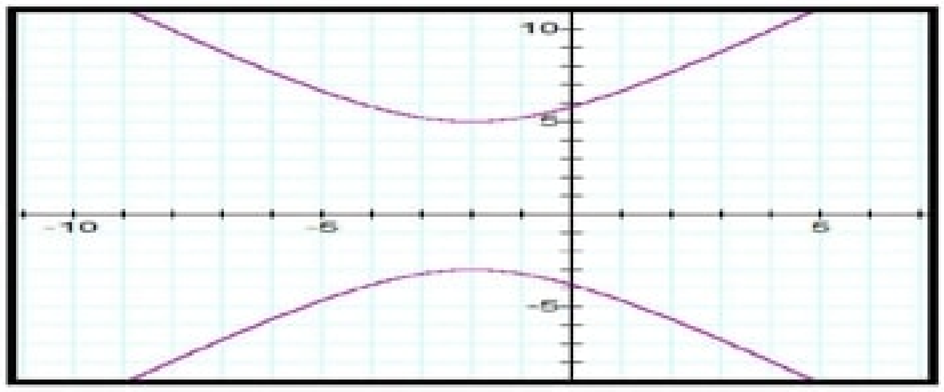


---

(3)

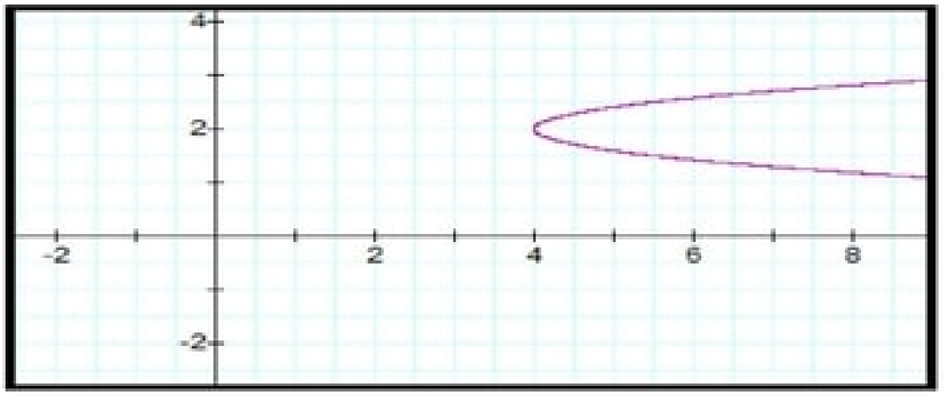
$$\frac{(y-1)^2}{16}-\frac{(x+2)^2}{9}=1$$

قطع زائد



---

(4)



$$x = 6(y - 2)^2 + 4$$

قطع مكافئ

<u>حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية</u> :

(5) قطع مكافئ

(6) قطع زائد

(7) دائرة

(8) قطع مكافئ

(9) قطع زائد

(10) قطع زائد

(11) قطع ناقص

---

(12) <u>طيران</u>:

(a $$(x - 660)^2 = \frac{-125}{3}(y - 10500)$$

قطع مكافئ

(b $x = 1320 ft$

(c $y = 10500 ft$

قابل بين المنحنيات أدناة والمعادلة التي تمثل كل منها:

(13) (c $9x^2+16y^2=72x+64y$

(14) (a $x^2+y^2-8x-4y=-4$

(15) (b $9x^2-16y^2-72x+64y=64$

قابل بين كل حالة في التمارين $(16-19)$ مع المعادلة التي تمثل $(a-d)$:

(16) حاسوب:

$x^2+y^2-18x-30y-14094=0 \longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow (d)$

(17) لياقة:

$25x^2+100y^2-1900x-2200y+45700=0 \longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow (b)$

(18) إتصالات:

$47.25x^2+9y^2+18y+33.525=0 \longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow (a)$

(19) رياضة:

$16x^2-90x+y-0.25=0 \longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow (c)$

(20) **تمثيلات متعددة:**

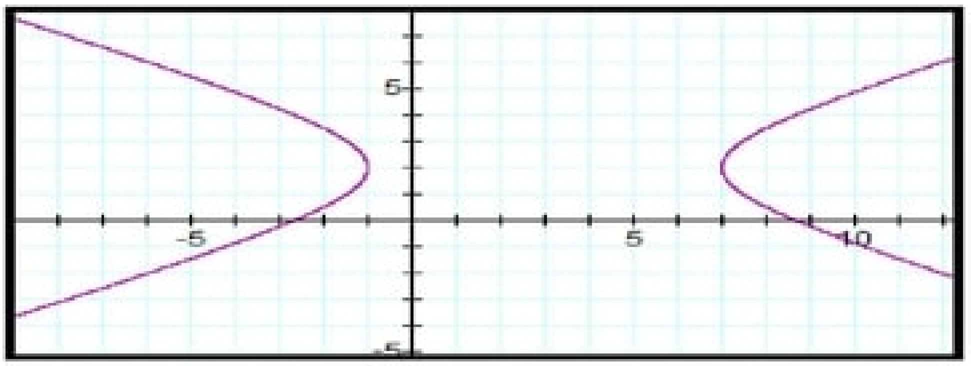
a) تحليلياً:

$$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

b) جبرياً:

$$x^2+4y^2-6x+16y+9=0$$

c) بيانياً:



مسائل مهارات التفكير العليا

(21) **تبرير:**

صحيحة دائما، إذا كان القطع رأسياً فإن $B=0$ ولذا تصبح المعادلة معادلة دائرة حيث $A=C$

(22) **مسألة مفتوحة:**

$$9x^2+y^2+6xy+2x+2y+8=0$$

(23) **اكتب:**

هندسياً:

القطع الناقص عبارة عن دائرة مضغوطة طولياً أو عرضيا، وكلاهما منحنيان مغلقان بعكس القطعان المكافئ والزائدفهما منحنيان مفتوحان وممتدان، لكن الفرق بينهما أن القطع المكافئ يتكون من فرع واحد، بينما القطع الزائد يتكون من فرعين كل منهما تماثل للآخرى.

جبرياً:

إذا كتبت المعادلة في الصورة القياسية بشرط $B = 0$ ، فمعادلة القطع المكافئ تحوي حداً تربيعياً واحداً (إما Ax^2 أو Cy^2) أما معادلة الدائرة فتتصف بأن $A = C$ ، أما بالنسبة للقطع الناقص فأن لكل من A , C الإشارة نفسها و$A \neq 0 , C \neq 0$ ، أما في حالة القطع الزائد A , C متعاكستان و $A \neq 0 , C \neq 0$.

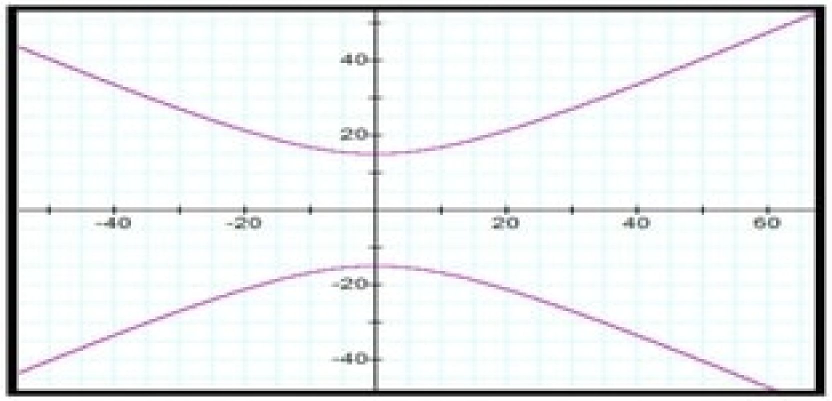
مراجعة تراكمية

(24) **فلك:**

الرأسان: $(0,-15)$ ، $(0,15)$

البؤرتان: $(0,-25)$ ، $(0,25)$

خطا التقارب: $y=\pm\frac{3}{4}x$



حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلتة في كل مما يأتي ، ثم مثِّل منحناه بيانياً:

(25)

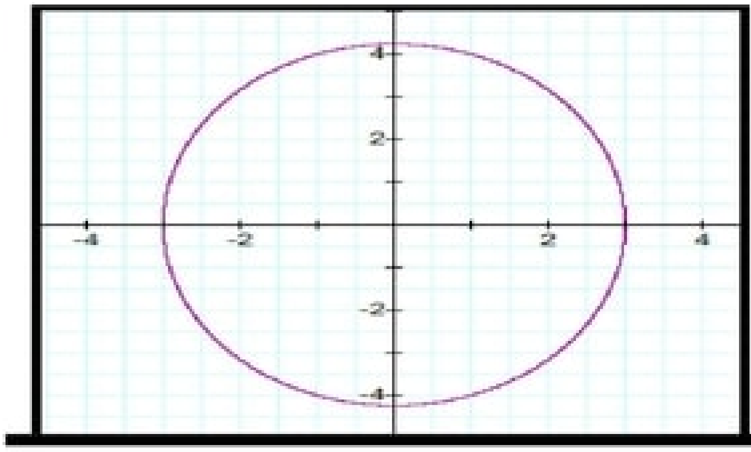
الإتجاه: رأسي

المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(0,-3\sqrt{2})$ ، $(0,3\sqrt{2})$

البؤرتان: $(0,-3)$ ، $(0,3)$

الرأسان المرافقان: $(-3,0)$ ، $(3,0)$



---

(26)

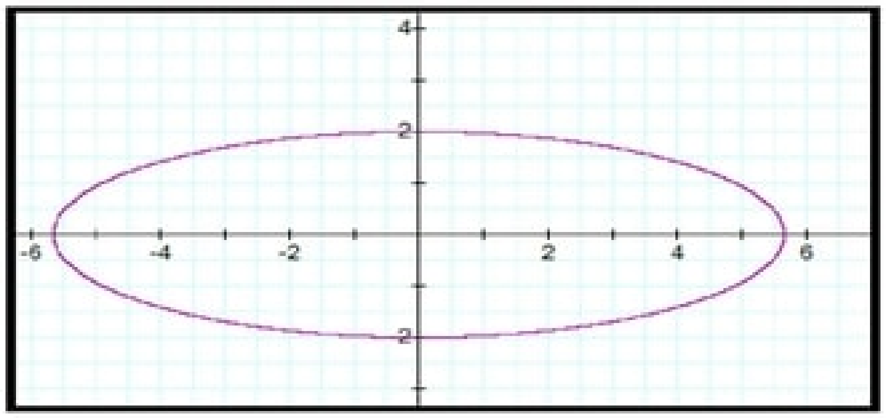
الإتجاه: أفقي

المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(2\sqrt{2},0)$ ، $(-2\sqrt{2},0)$

البؤرتان: $(-2,0)$ ، $(2,0)$

الرأسان المرافقان: $(0,-2)$ ، $(0,2)$



(27)

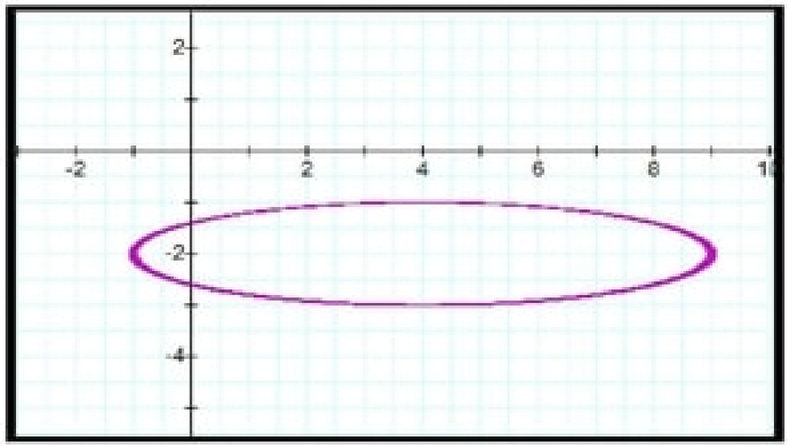
الإتجاه: أفقي

المركز: $(4,-2)$

الرأسان: $(-1,-2)$ ، $(9,-2)$

البؤرتان: $(4+2\sqrt{6},-2)$ ، $(4-2\sqrt{6},-2)$

الرأسان المرافقان: $(4,-1)$ ، $(4,-3)$



---

(28) **فلك:**

$$\frac{x^2}{9.006\times10^{15}}+\frac{y^2}{8.427\times10^{15}}=1$$

تدرب على إختبار

حل كل معادلة من المعادلتين الآتيتين :

(29)

$$8n(n-1)=4^2=16$$
$$8n^2-8n=16$$
$$n^2-n-2=0$$
$$n=2$$

(30)

$$9p(p+8)=8^2=81$$
$$9p^2+72p=81$$
$$p^2+8p=9$$
$$p^2+8p-9=0$$
$$p=1$$

---

(31) قطع مكافئ

(32) $A \longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow y=x^2-4x+6$

معمل الحاسبة البيانية أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية

حل بيانياً كل نظام معادلات فيما يأتي مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة:

(1) $(-2,-1)$ ، $(2,1)$

(2) $(1,-6.9)$ ، $(1,6.9)$

(3) $(-6,-8)$ ، $(6,8)$

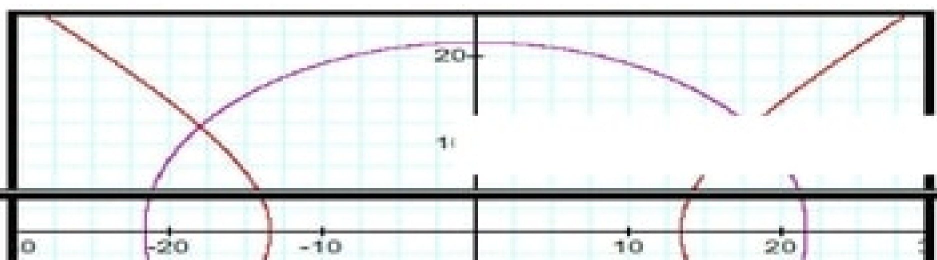
(4) $(-2,3)$ ، $(1.5,-4)$

(5) $(-1.3,-2)$ ، $(1.3,-2)$ ، $(-1.3,2)$ ، $(1.3,2)$

(6) $(-3,2)$ ، $(0,-1)$

(7) تحد:

$a)$



$$x^2+y^2=468$$
$$x^2-y^2=180$$

(b

حل كل نظام متباينات فيما يأتي بيانياً:

(8) $(1.8, 2.4)$

(9) $(1, 6.9)$

(10) $(2.5, 2.5)$

دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك:

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) القطع المخروطي

2) المحل الهندسي

3) دليل

4) القطع الناقص

5) البؤرتين

6) الاختلاف المركزي

7) مركز

8) القطع الزائد

مراجعة الدروس

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاه معادلته في كل مما يأتي:

(9

منحنى القطع مفتوح إلى الأعلى

الرأس: $(-3 , 2)$ والبؤرة $(-3 , 1)$

ومحور التماثل: $x = -3$ والدليل $y = -5$

وطول الوتر البؤري 2

(10

منحنى القطع مفتوح إلى الأسفل

الرأس: $(2 , -1)$ والبؤرة $(2 , -2)$

ومحور التماثل: $x = 2$ والدليل $y = 0$

وطول الوتر البؤري 4

(11

منحنى القطع مفتوح إلى اليمين

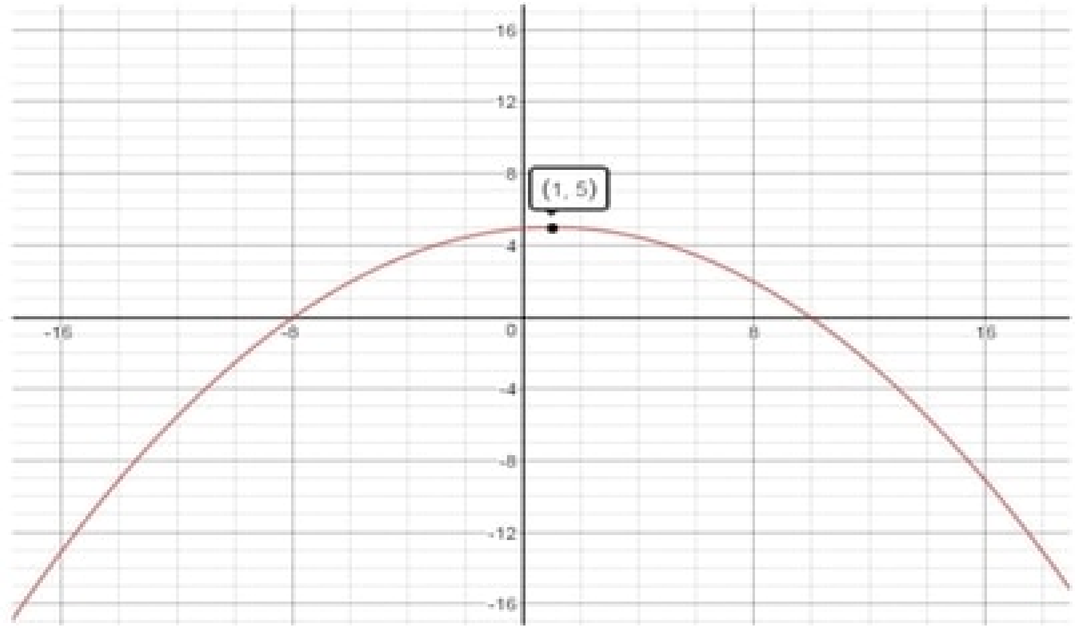
الرأس: $(5 , 3)$ والبؤرة $\left(\frac{241}{48} , 3\right)$

ومحور التماثل: $y = 3$ والدليل $x = \frac{239}{48}$

اكتب معادلة القطع المكافئ المعطاة إحداثيات رأسه وبؤرته في كل مما يأتي ثم مثل منحناه بيانيا

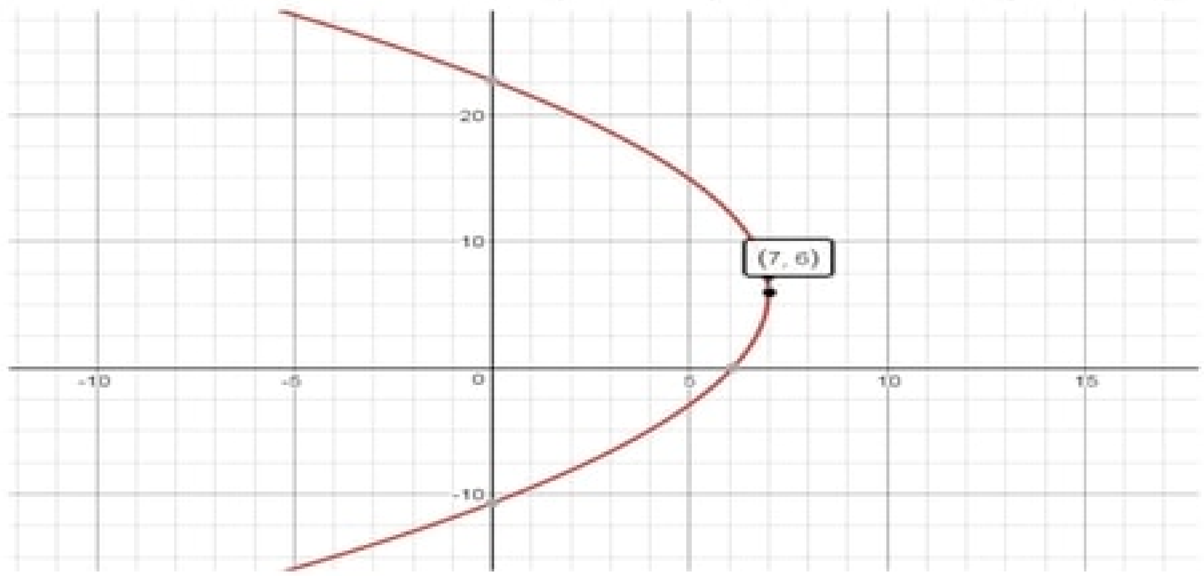
(12

$$(x-1)^2 = -16(y-5)$$



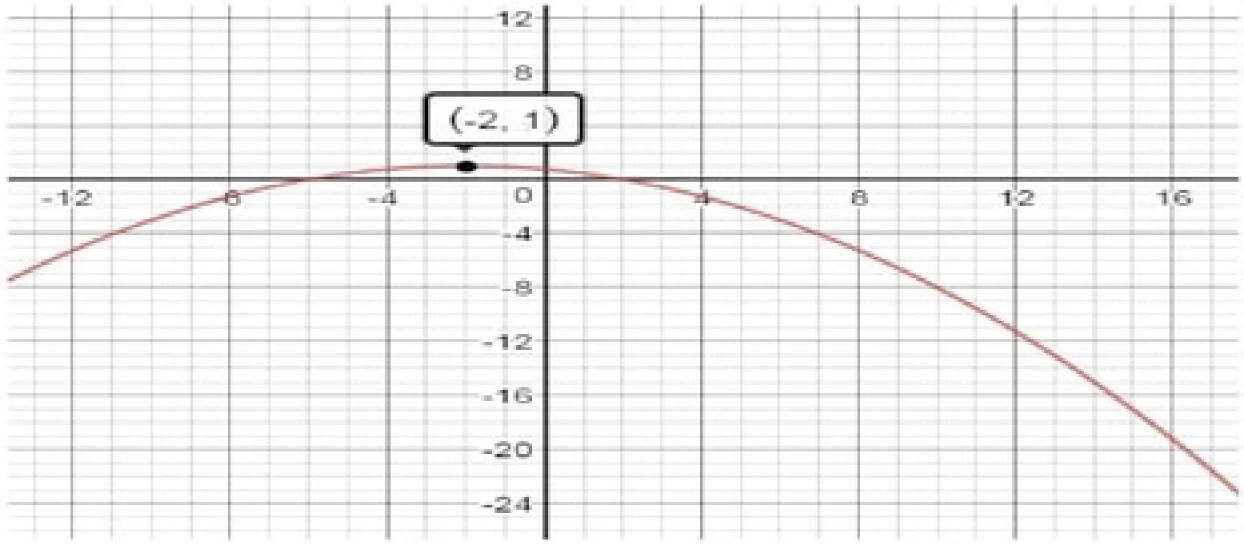
(13

$$(y-6)^2 = -40(x-7)$$



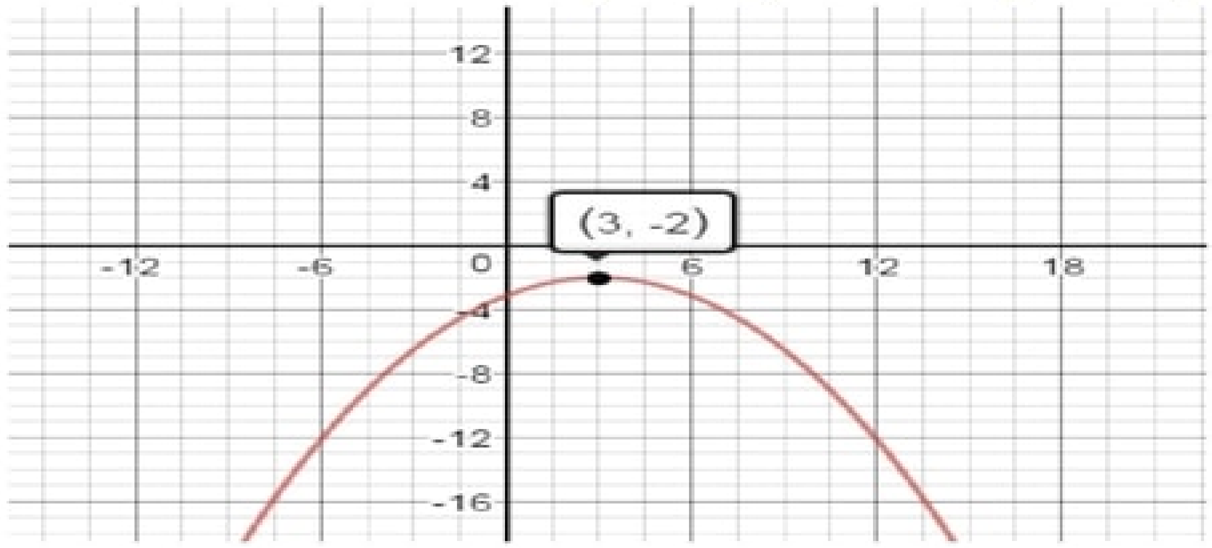
(14

$$(x+2)^2 = -16(y-1)$$



(15

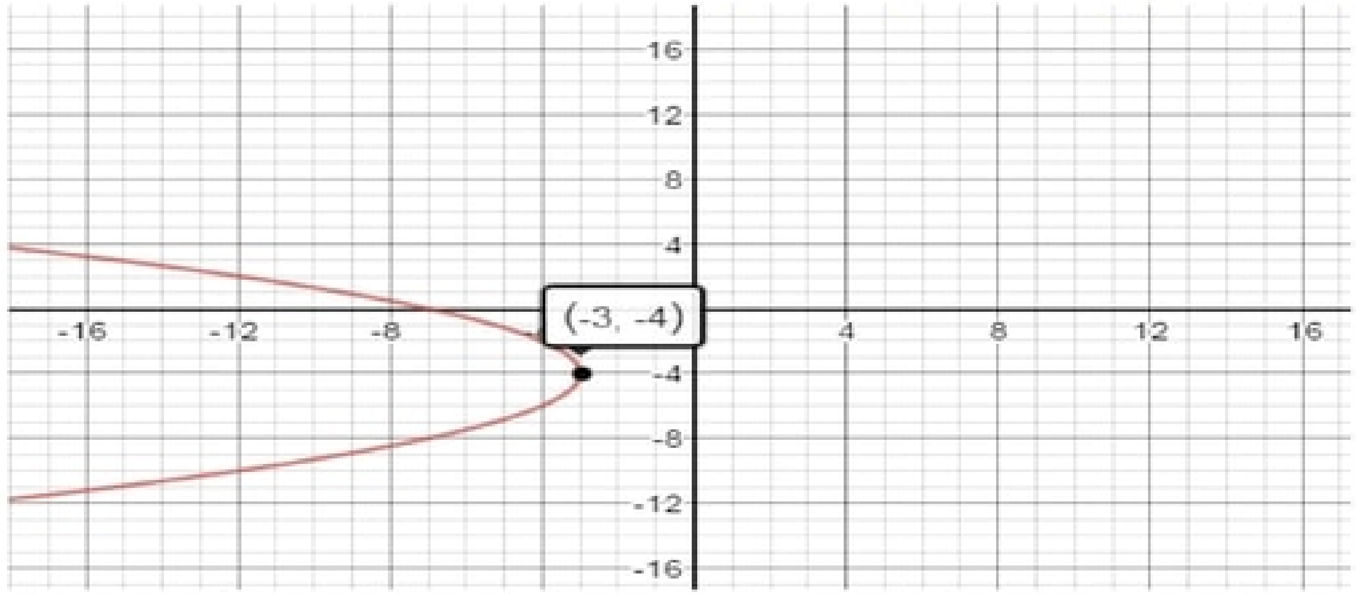
$$(x-3)^2 = -8(y+2)$$



اكتب معادلة القطع المكافئ الذى يحقق الخصائص المعطاه فى كل مما يأتى ثم مثل منحناه بيانياً:

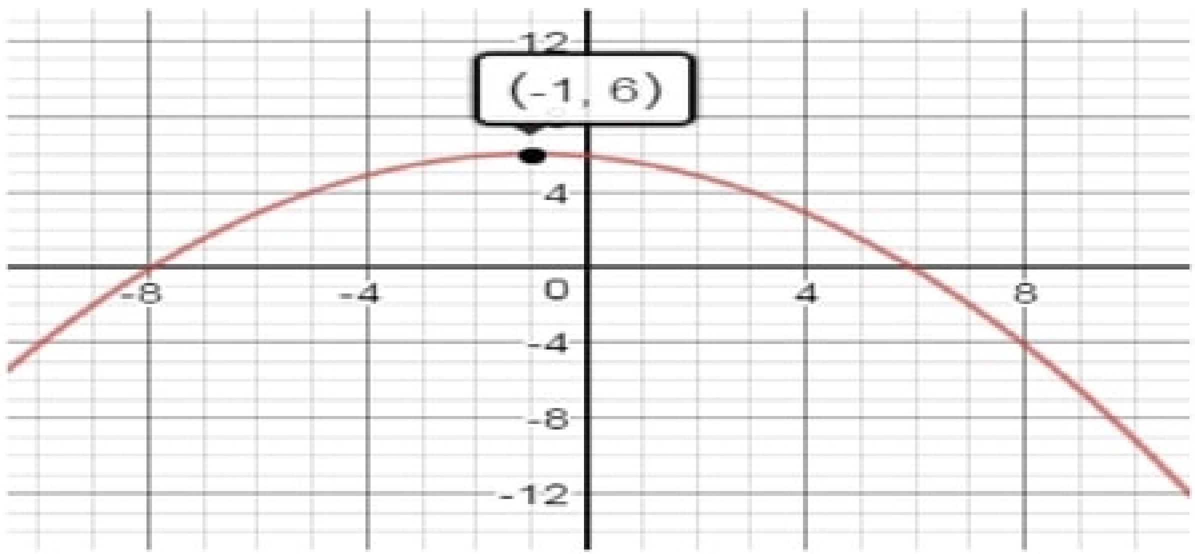
(16

$$(y+4)^2 = -4(x+3)$$



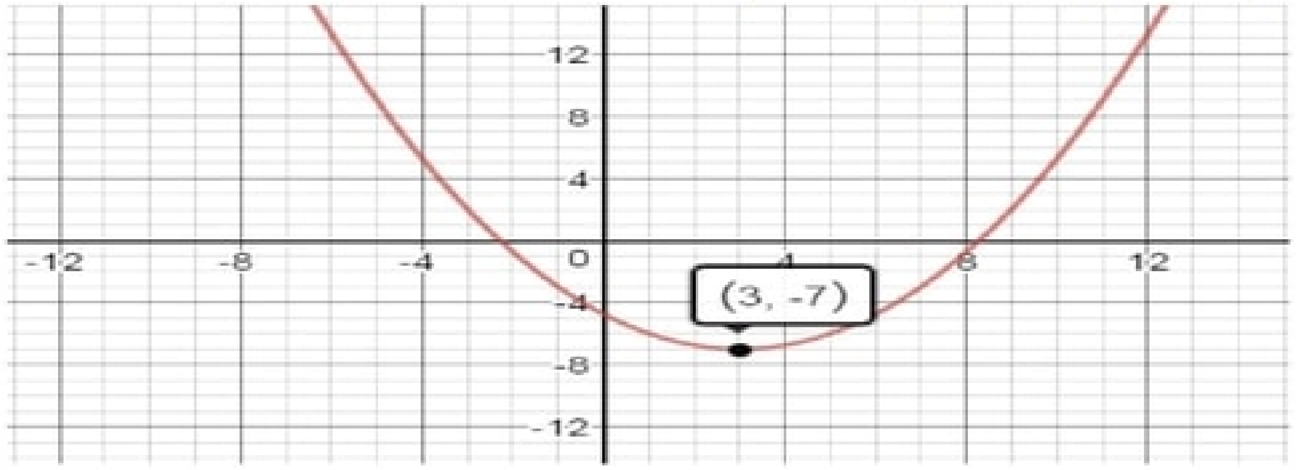
(17

$$(x+1)^2 = -8(y-6)$$



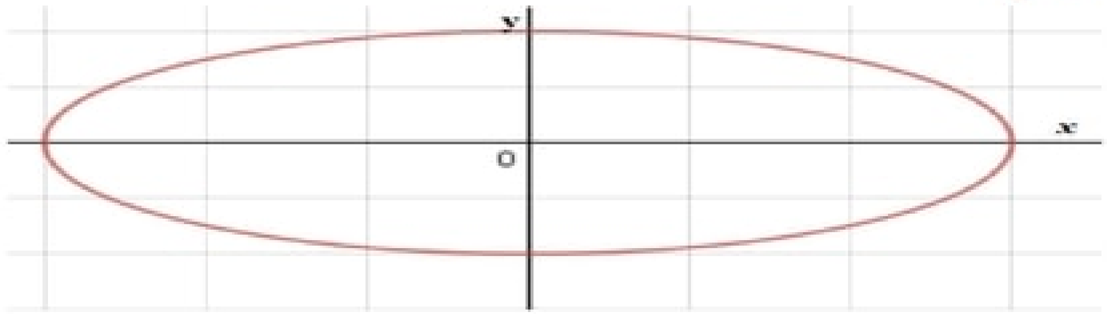
(18

$$(x-3)^2 = 4(y+7)$$

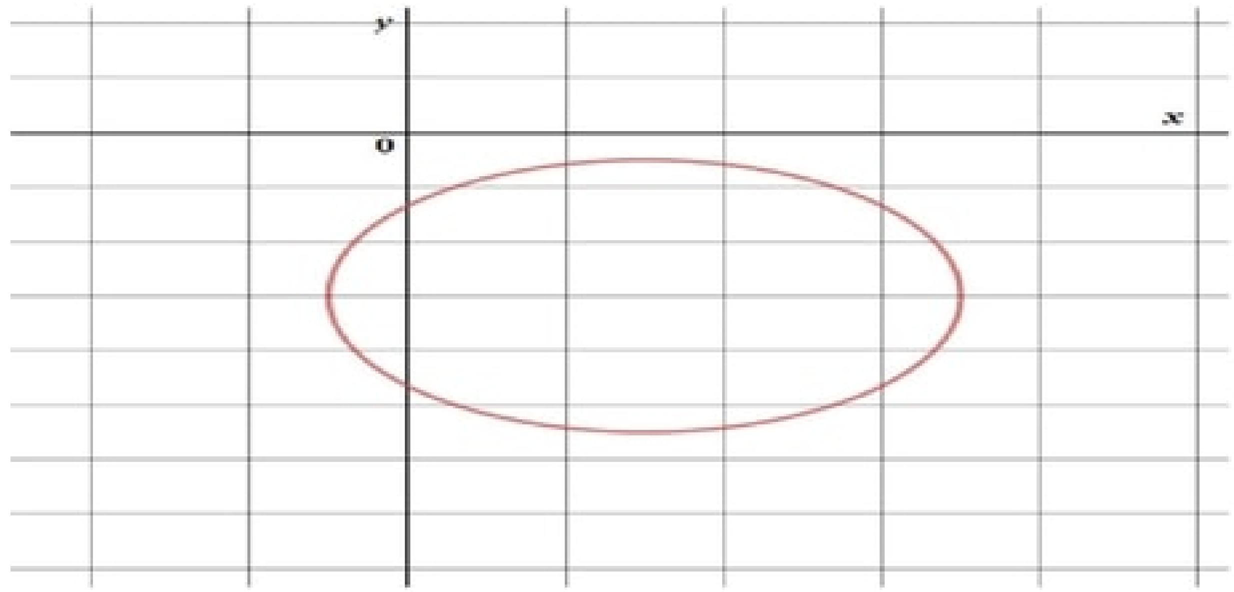


حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي ثم مثل منحناه بيانياً:

(19



(20



اكتب معادلة القطع الناقص الذى يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتى:

(21

$$\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{3}=1$$

(22

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

(23

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$$

أوجد معادلة كل دائرة من الدوائر في الحلات الآتية:

24)

$$(x+1)^2+(y-6)^2=9$$

25)

$$(x-1)^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{29}{4}$$

26)

$$(x-1)^2+(y+4)^2=13$$

حدد خصائص القطع الزائد المعطاه معادلته في كل مما يأتي ثم مثل منحناه بيانياً:

27)

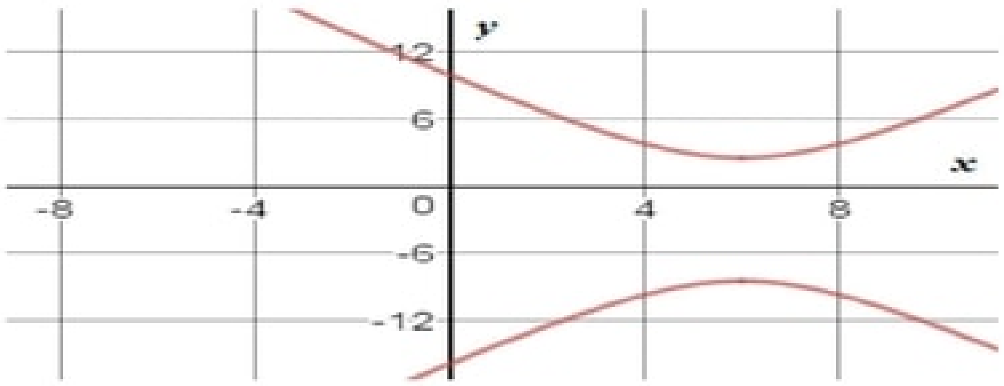
الاتجاه: رأسي

المركز $(6\ ,\ -3)$ ، الرأس: $\left(6\ ,\ -3\pm\sqrt{30}\right)$

البؤرتان: $\left(6\ ,\ -3\pm\sqrt{30}\right)$

محور التماثل: $x=6$

خطا التقارب: $y+3=\pm\frac{2\sqrt{15}}{15}(x-6)$



28)

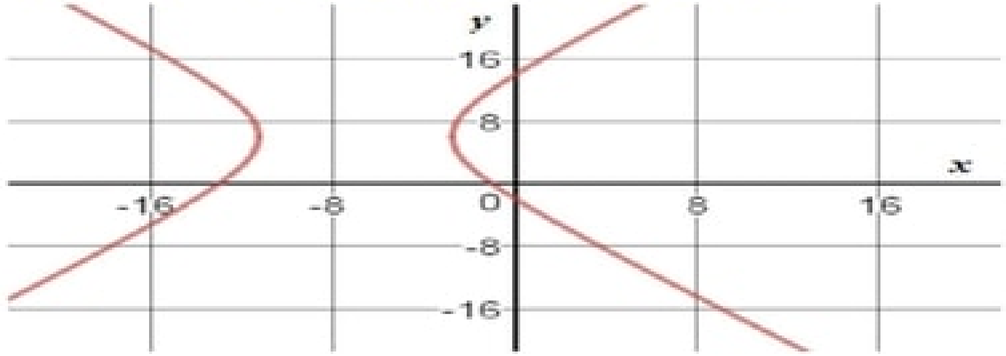
الاتجاه: أفقي

المركز $(-7, 6)$ ، الرأس: $(-7 \pm 3\sqrt{2}\ ,\ 6)$

البؤرتان: $(-7 \pm 3\sqrt{2}\ ,\ 6)$

محور التماثل: $y = 6$

خطا التقارب: $y - 6 = \pm\sqrt{2}\,(x + 7)$



(29

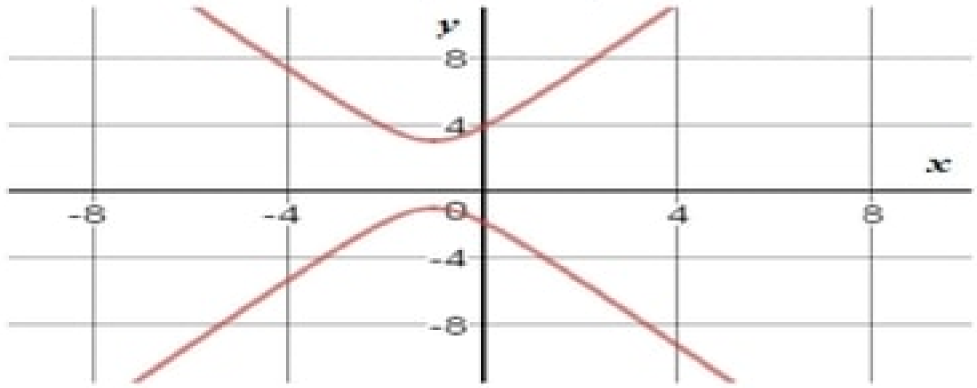
الاتجاه: رأسي

المركز $(-1\ ,\ 1)$ ، الرأسان: $(-1\ ,\ 3)$ و $(-1\ ,\ -1)$

البؤرتان: $(-1\ ,\ 1 \pm \sqrt{5})$

محور التماثل: $x = -1$

خطا التقارب: $y - 1 = \pm\ 2(x + 1)$



(30

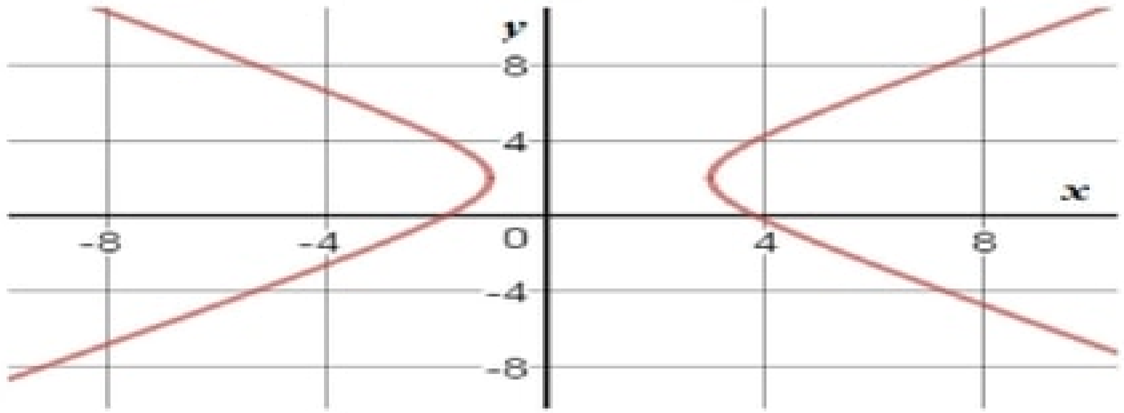
الاتجاه: أفقي

المركز $(1, 2)$ ، الرأس: $(-1, 2)$, $(3, 2)$

البؤرتان: $\left(1 \pm 2\sqrt{2}\ ,\ 2\right)$

محور التماثل: $y = 2$

خطا التقارب: $y - 2 = \pm\,(x - 1)$



<u>اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:</u>

(31

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$$

(32

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

(33

$$\frac{(y-5)^2}{64} - \frac{(x-1)^2}{36} = 1$$

(34

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

35) قطع زائد

36) قطع مكافئ

37) قطع ناقص

تطبيقات وحل المسألة

38) أقواس:

a) $x^2 = -81y + 2025$

b) موقع البؤرة $= 4.75$ أقدام فوق سطح الأرض

39) حركة الماء:

a) $x^2 + y^2 = 900$

b) عدد الثواني $= 5$ثواني

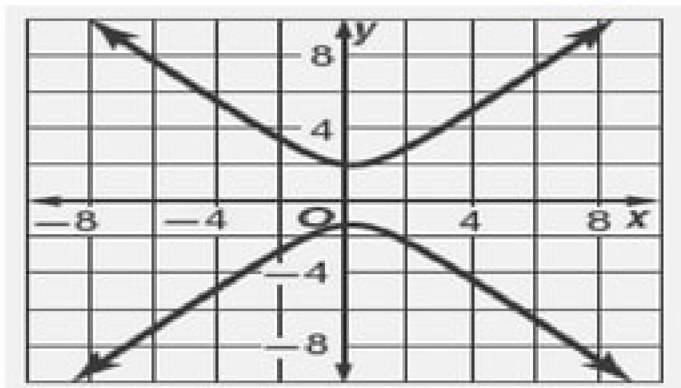
40) طاقة:

a) $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{625} = 1$

b) ستزداد نسبة المقام المرتبط بـ y إلى المقام المرتبط بـ x

41) ضوء:

قطع زائد



اختبار الفصل

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

(1)

بما أن الرأسان $(h+a,k)=(7,-4)$ ، $(h-a,k)=(-3,-4)$

لذا فإن $k=-4$ ، $h=2$ ، $a=5$

بما أن البؤرتان $(h+c,k)=(6,-4)$ ، $(h-c,k)=(-2,-4)$

لذا فإن $c=4$ وبالتالي فإن $b=\sqrt{25-16}=3$

وبالتالي فإن معادلة القطع الناقص تكون $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{9}=1$

---

(2)

بما أن البؤرتان $(h,k+c)=(-2,1)$ ، $(h,k-c)=(-2,-9)$

لذا فإن $h=-2$ ، $k=-4$ ، $c=5$

بما أن طول المحور الأكبر $2a=12$ فإن $a=6$

وبالتالي فإن $b=\sqrt{36-25}=\sqrt{11}$

وبالتالي فإن معادلة القطع الناقص تكون $\frac{(x+2)^2}{11}+\frac{(y+4)^2}{36}=1$

---

(3) اختيار من متعدد:

$C \longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow 4$

---

(4) جسور:

$$x^2=1492(y-5)$$

اكتب معادلة القطع الزائد الذى يحقق الخصائص المعطاة فى السؤالين الآتيين:

(5)

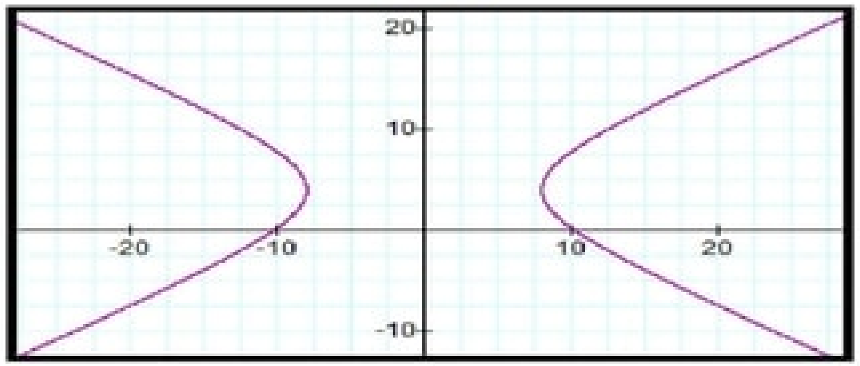
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

(6)

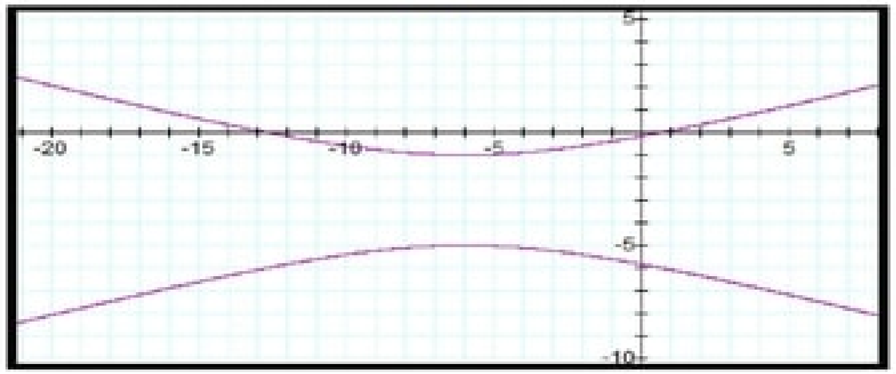
$$\frac{(y-4)^2}{4}-\frac{(x-8)^2}{12}=1$$

مثل بيانياً منحنى القطع الزائد المعطاة معادلته فى السؤالين 11 و 12:

(7)



(8)



---

(9) اختيار من متعدد:

مستعملاً البؤرة F والرأس V ، اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين الآتيين ، ثم مثل منحنييهما بيانياً:

(10)

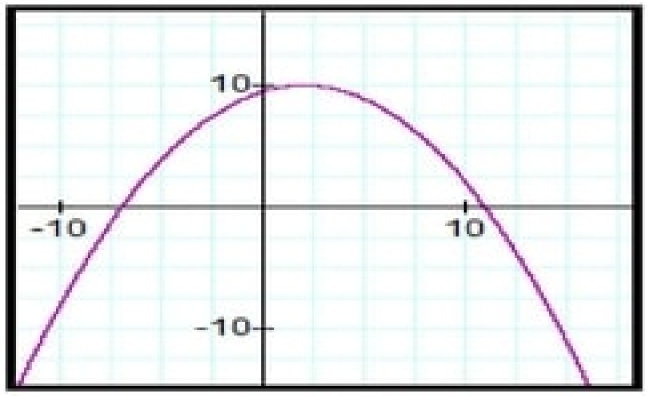
بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي x فإن المنحني مفتوح رأسياً

البؤرة $(h, k+p) = (2, 8)$ ، الرأس $(h, k) = (2, 10)$

لذا فإن $h = 2$ ، $k = 10$ ، $p = 8 - 10 = -2$

إذن معادلة القطع المكافئ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

هي $(x-2)^2 = -8(y-10)$



(11)

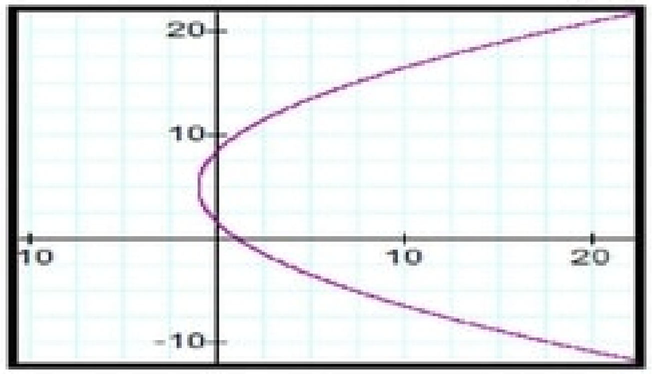
بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y فإن المنحني مفتوح أفقياً

البؤرة $(h+p, k) = (2, 5)$ ، الرأس $(h, k) = (-1, 5)$

لذا فإن $h = -1$ ، $k = 5$ ، $p = 2 + 1 = 3$

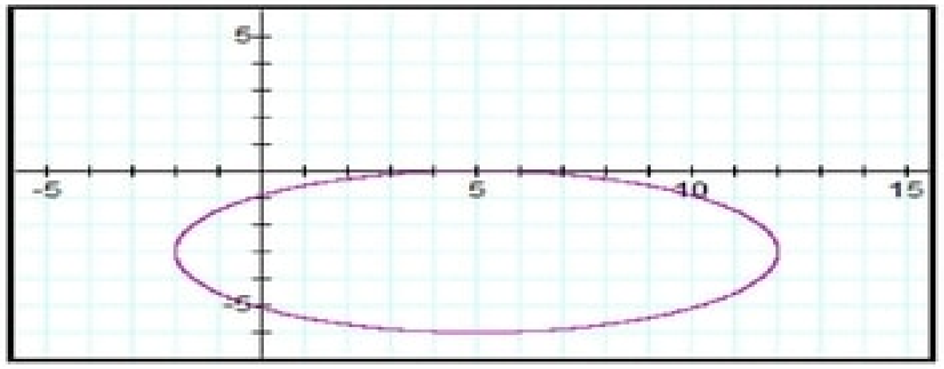
إذن معادلة القطع المكافئ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

هي $(y-5)^2 = 12(x+1)$



مثل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في السؤالين الآتيين:

(12)



(13)