

# التهيئة

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية ثم أوجد إحداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة  
الواصلة بينهما:

$$3, \left(-1, \frac{4}{2}\right) \quad (1)$$

$$5, \left(-5, \frac{11}{2}\right) \quad (2)$$

$$\sqrt{29}, \left(-1, -\frac{8}{2}\right) \quad (3)$$

$$\sqrt{53}, \left(-5, -\frac{9}{2}\right) \quad (4)$$

أوجد قيمة  $x$  في كل مما يأتي مقربا الناتج إلى أقرب عشر:

$$5.4 \quad (5)$$

$$11.1 \quad (6)$$

4.0 (7

36.1 (8

بالون (9

22.8 ft

# مقدمة في المتجهات

1-1

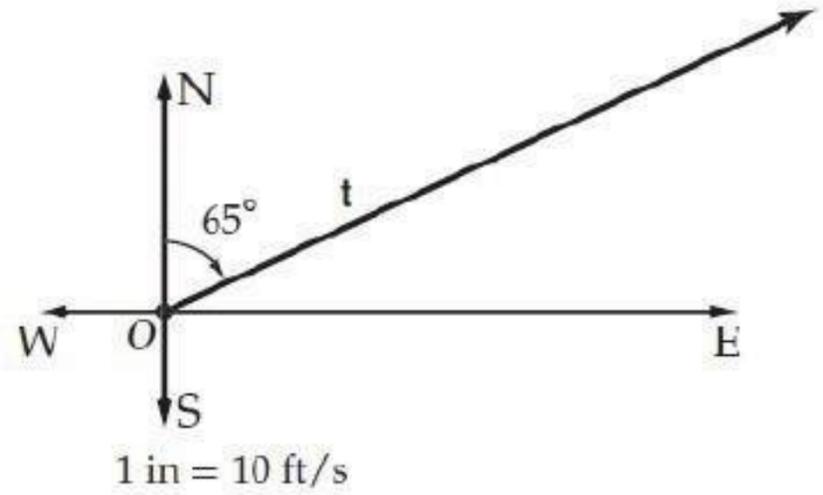
تحقق

(1A) كمية متجهة

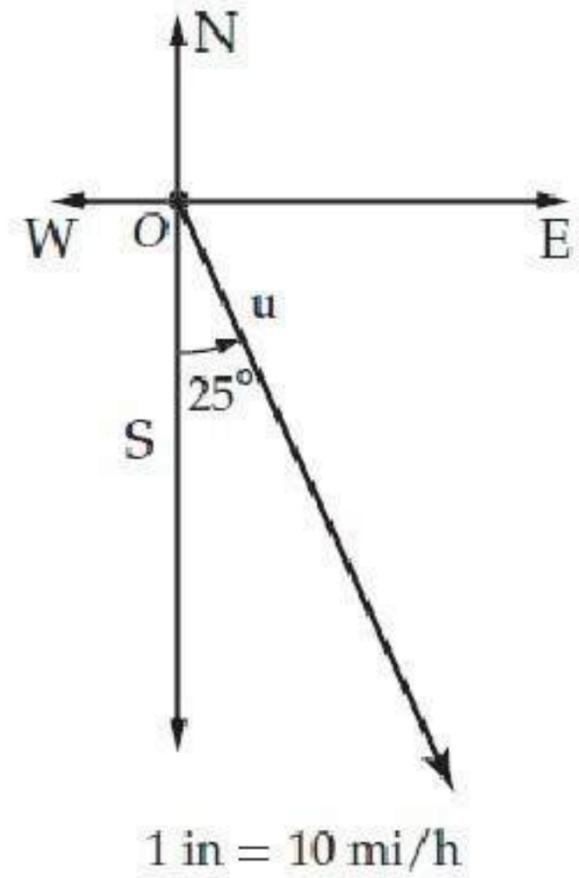
(1B) كمية متجهة

(1C) كمية قياسية

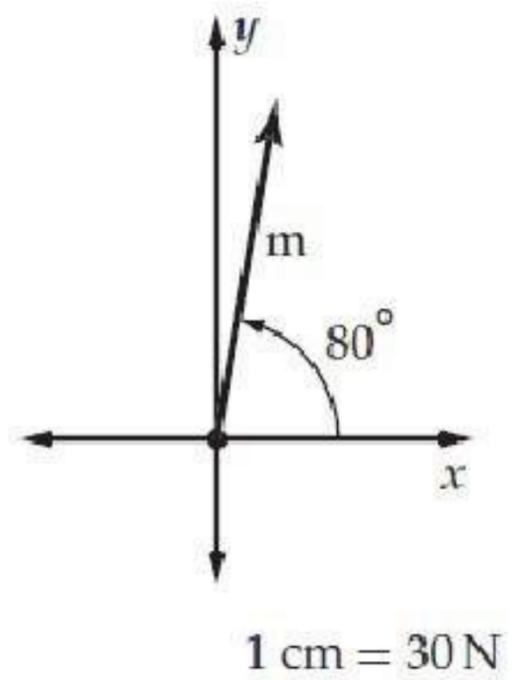
$1 \text{ in} = 10 \text{ ft/s}$  (2A)



**1 in = 10 mi/h (2B)**



**1 cm = 30 N (2C)**

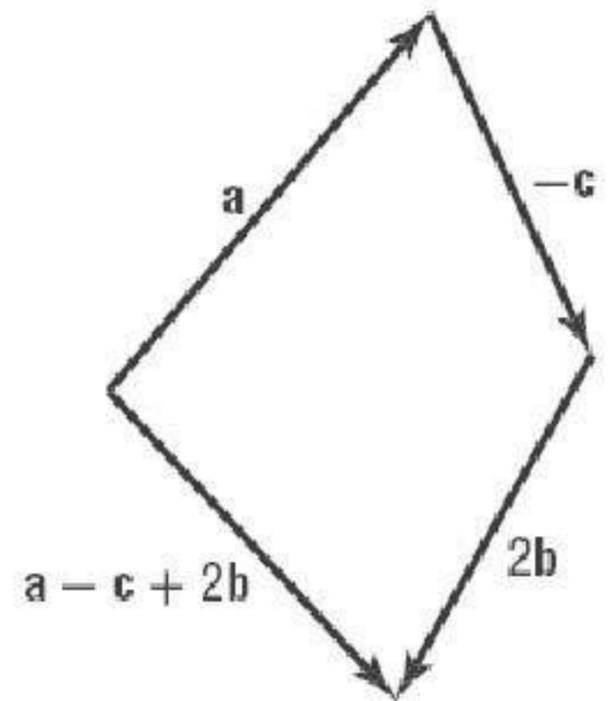


3 cm;  $61^\circ$  (3A)

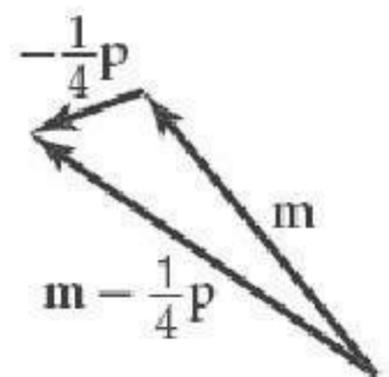
3 cm;  $25^\circ$  (3B)

7.1 in/s;  $343^\circ$ : لعبة اطفال (3C)

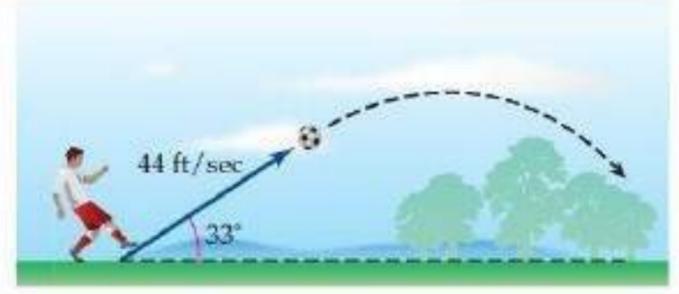
(4A)



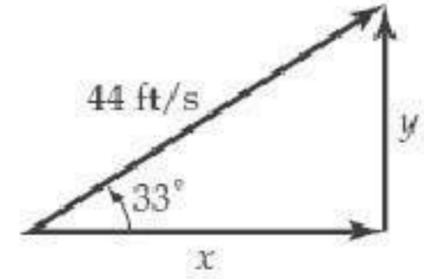
(4B)



(6)



(A)



(B) المركبة الأفقية تساوي تقريباً 36.90 ft/ s؛ المركبة الرأسية تساوي تقريباً 23.96 ft/ s.

# تدرب وحل المسائل:



حدد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كل مما يأتي:

(1) قياسية

(2) قياسية

(3) متجهة

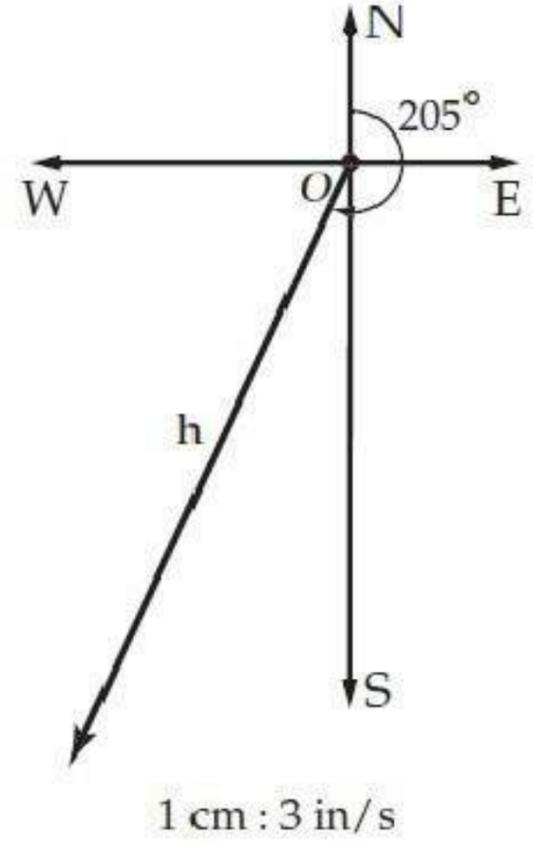
(4) قياسية

(5) متجهة

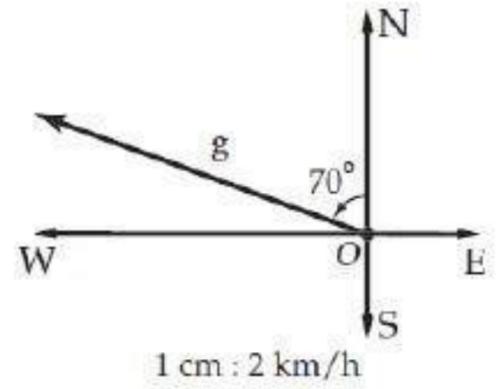
(6) متجهة

استعمل المسطرة والمنقلة لرسم متجه لكل من الكميات الآتية. واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

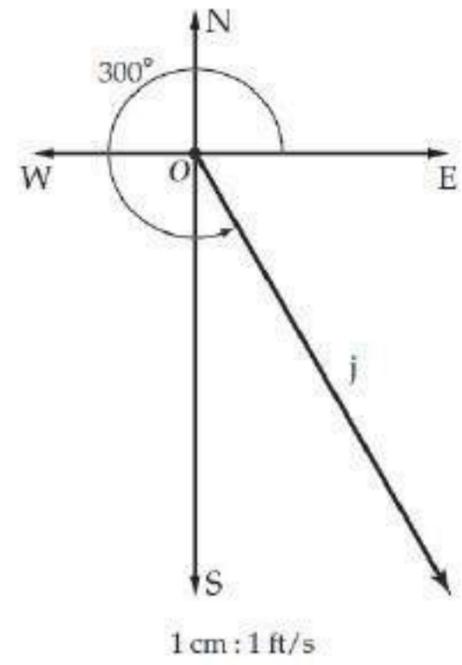
$$1 \text{ cm} = 3 \text{ in / s (7)}$$



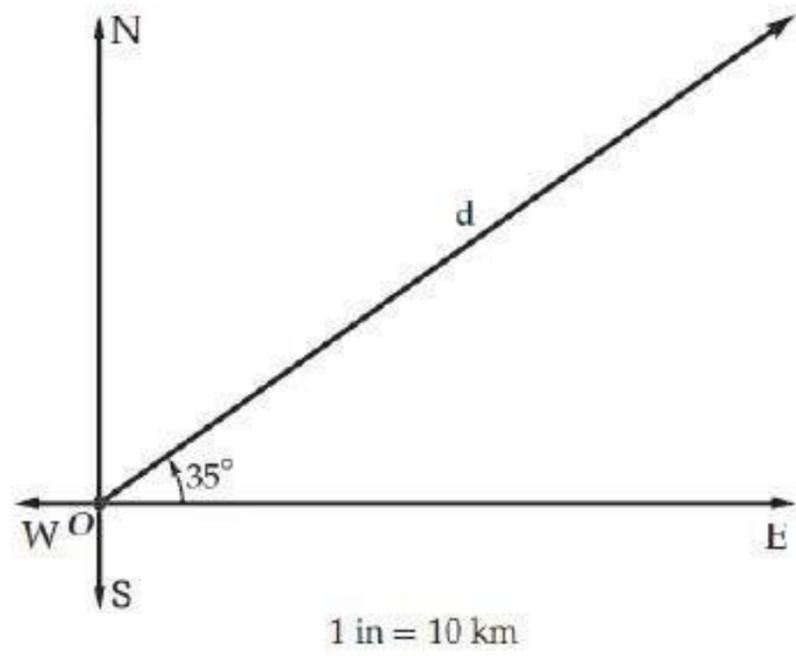
$$1 \text{ cm} = 2 \text{ km / h (8)}$$



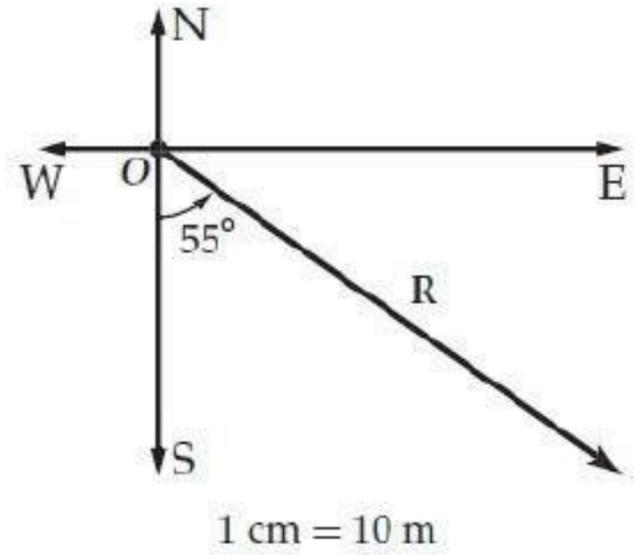
**1 cm = 1 ft / s (9)**



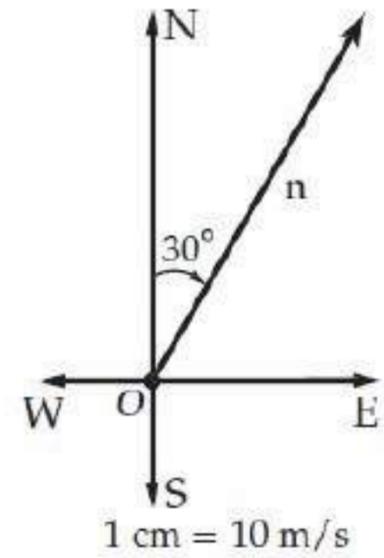
**1 in = 10 km (10)**



$$1 \text{ cm} = 10 \text{ m} \quad (11)$$



$$1 \text{ cm} = 10 \text{ m / s} \quad (12)$$



أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث أو قاعدة متوازي الأضلاع،  
قرب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتيمتر، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي  
مستعملاً المسطرة والمنقلة:

$$1.4 \text{ cm}, 45^\circ \quad (13)$$

$$1.0 \text{ cm}, 58^\circ \quad (14)$$

$$1.1 \text{ cm}, 308^\circ \quad (15)$$

2.3 cm, 188° (16)

20 ميلاً بحرياً، N 11.7° W (17)

حدد مقدار المحصلة الناتجة من جمع المتجهين واتجاهها في كل مما يأتي:

2N للخلف (18)

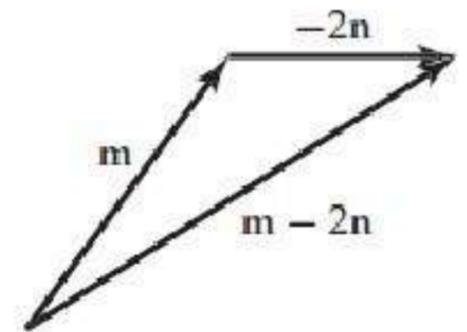
250 m للجنوب (19)

23.35 mi باتجاه S 47° E (20)

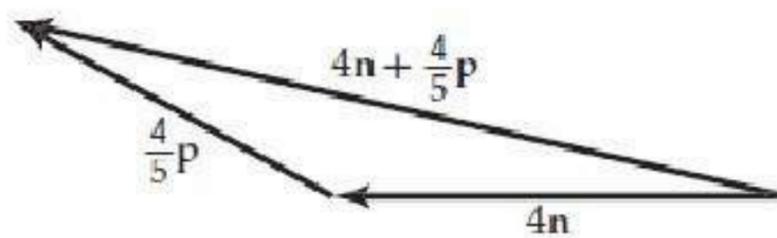
8.15 m/s<sup>2</sup>، 23° مع الأفقي. (21)

استعمل المتجهات الآتية لرسم متجه يمثل كل عبارة مما يأتي:

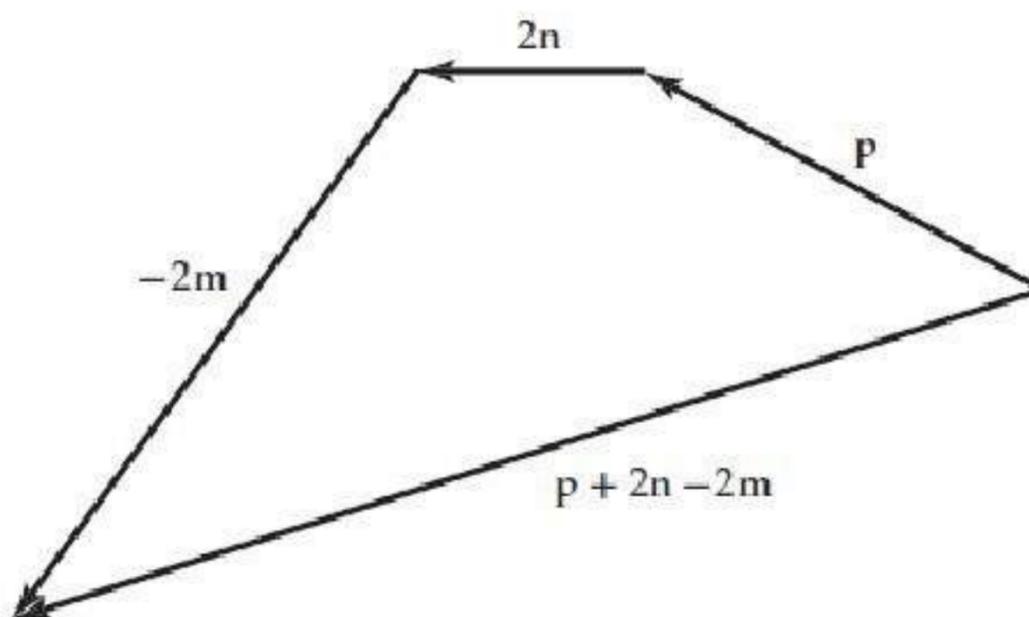
(22)



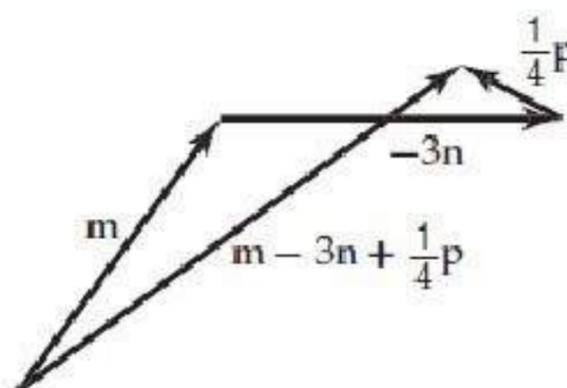
(23)



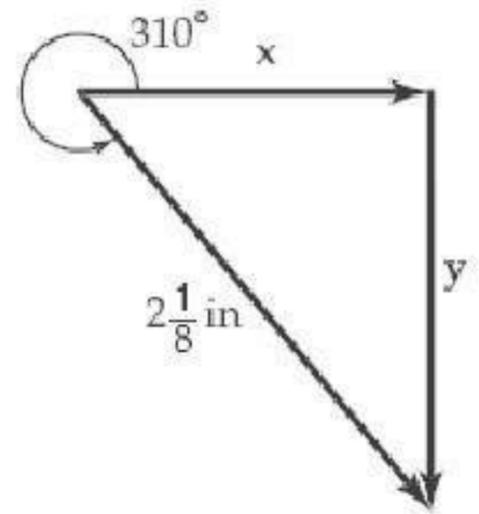
(24)



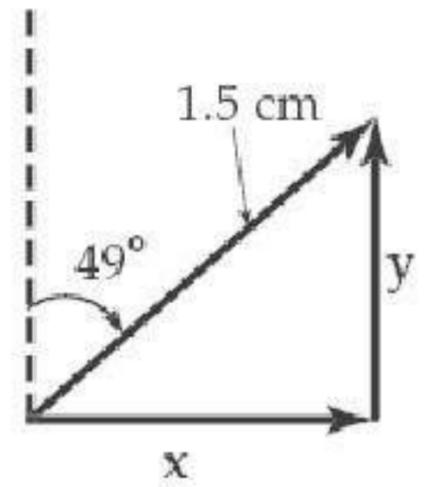
(25)



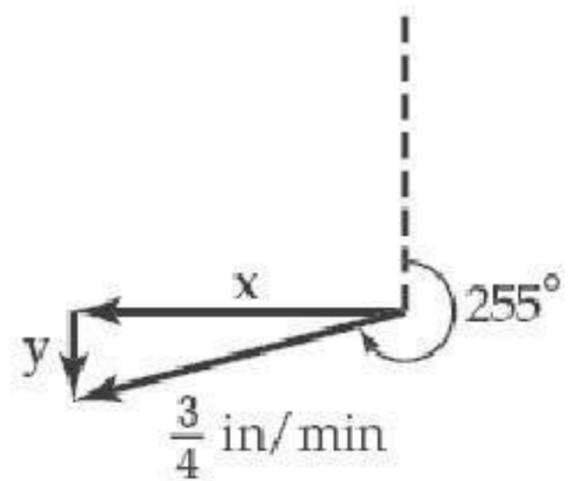
**1.37 in/ s, 1.63 in/ s (26)**



**1.13 cm, 0.98 cm (27)**

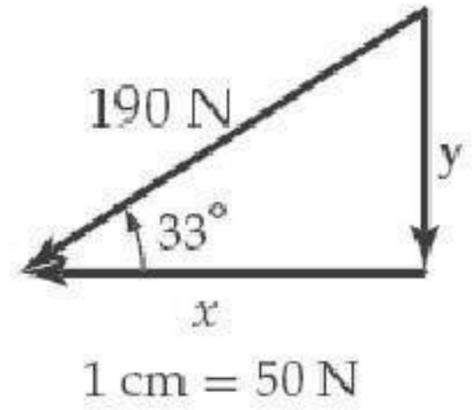


**0.72 in/ min, 0.19 in/ min (28)**



29) تنظيم:

(a)

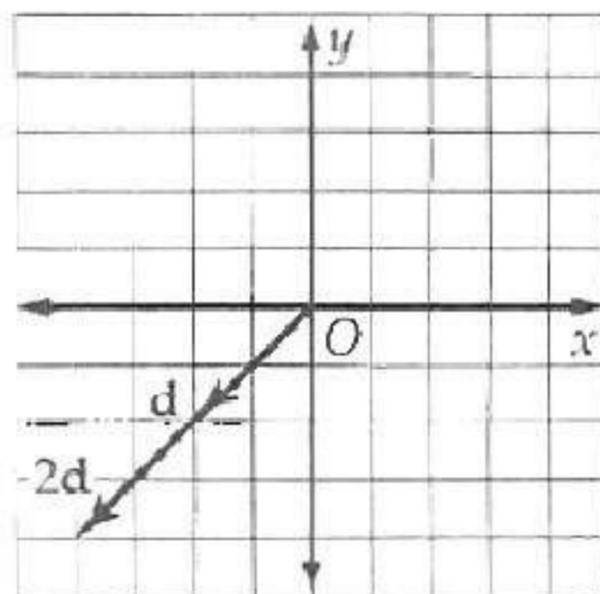
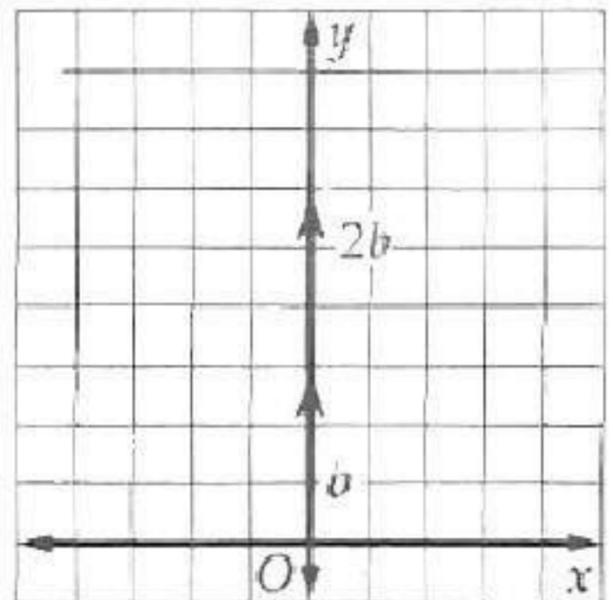
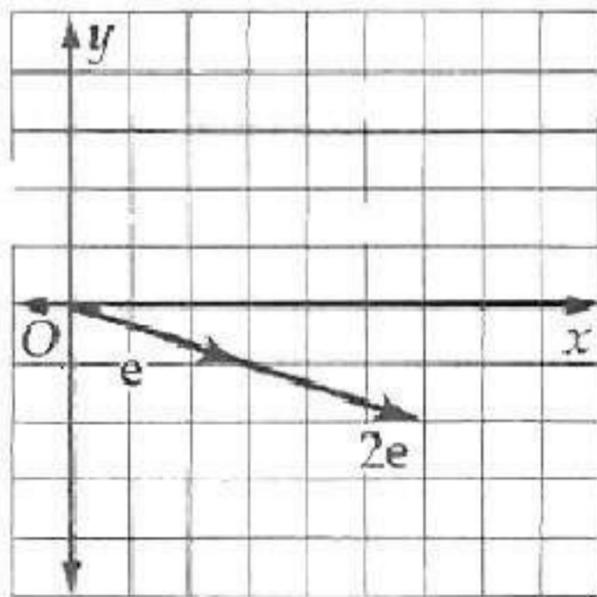
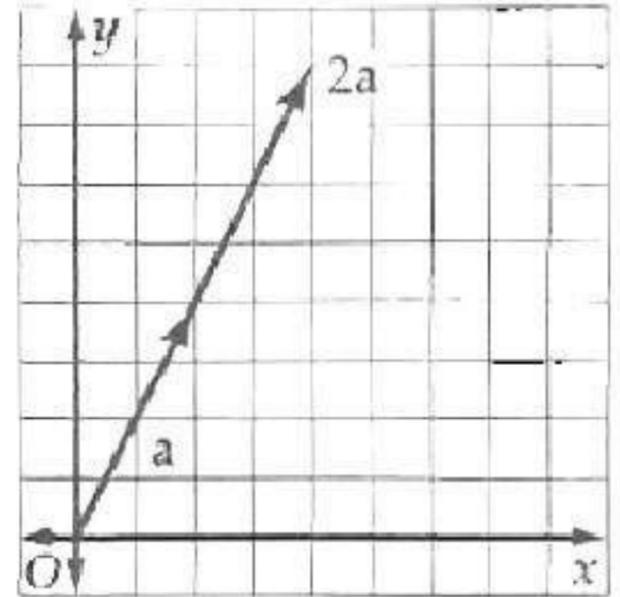
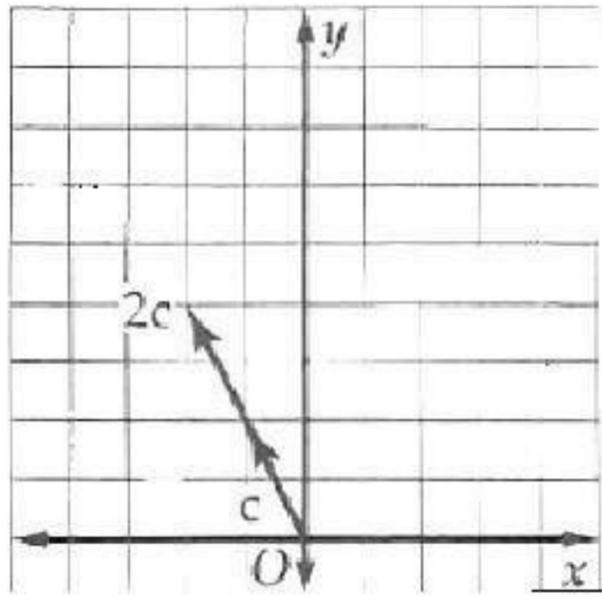


(b) المركبة الأفقية: 159.3 N، والمركبة الرأسية: 103.5 N

30) 52 N تقريباً

(31) تمثيلات متعددة:

(a)



(b)

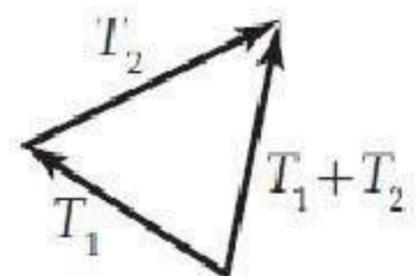
| المتجه | نقطة النهاية للمتجه | نقطة النهاية للمتجه مضروباً في العدد k |
|--------|---------------------|--|
| a      | (2, 4)              | (4, 8)                                 |
| b      | (0, 3)              | (0, 6)                                 |
| c      | (-1, 2)             | (-2, 4)                                |
| d      | (-2, -2)            | (-4, -4)                               |
| e      | (3, -1)             | (6, -2)                                |

(ka, kb) (c)

20.77 mi/ h باتجاه  $270^\circ$  (32)

(33) كرة حديدية:

(a)



(b)  $T_1 = 23.18$  باوند ،  $T_2 = 23.18$  باوند

أوجد طول كل متجه واتجاهه مما يأتي بمعلومية مركبتيه الأفقية والرأسية، والمدى الممكن  
لزواية كل منها:

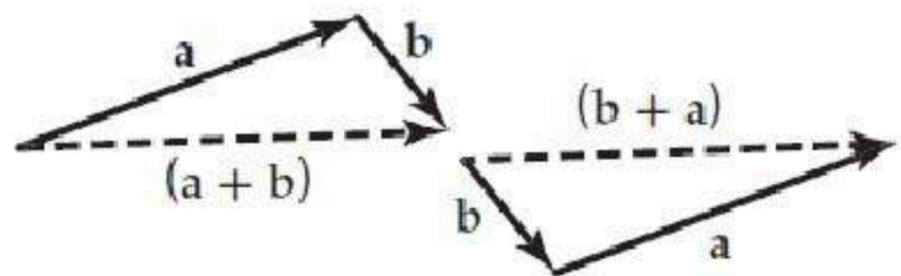
2.3 in;  $98^\circ$  (34)

5.2 ft.;  $54^\circ$  (35)

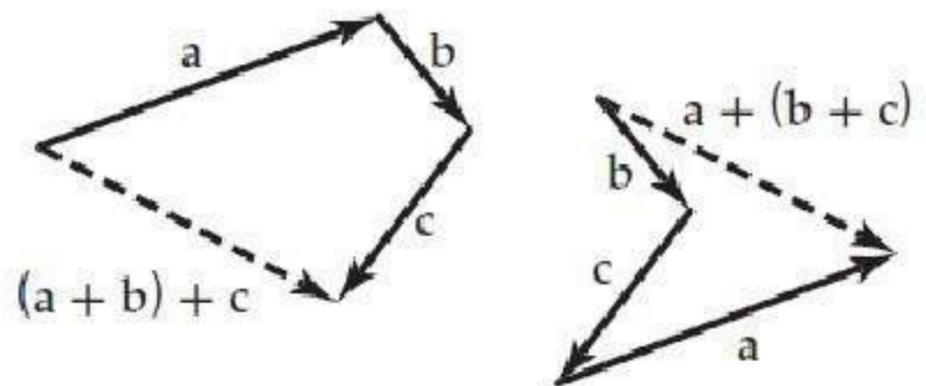
10 cm;  $285^\circ$  (36)

ارسم ثلاثة متجهات  $a, b, c$ ، لتوضح صحة كل خاصية من الخصائص الآتية هندسياً:

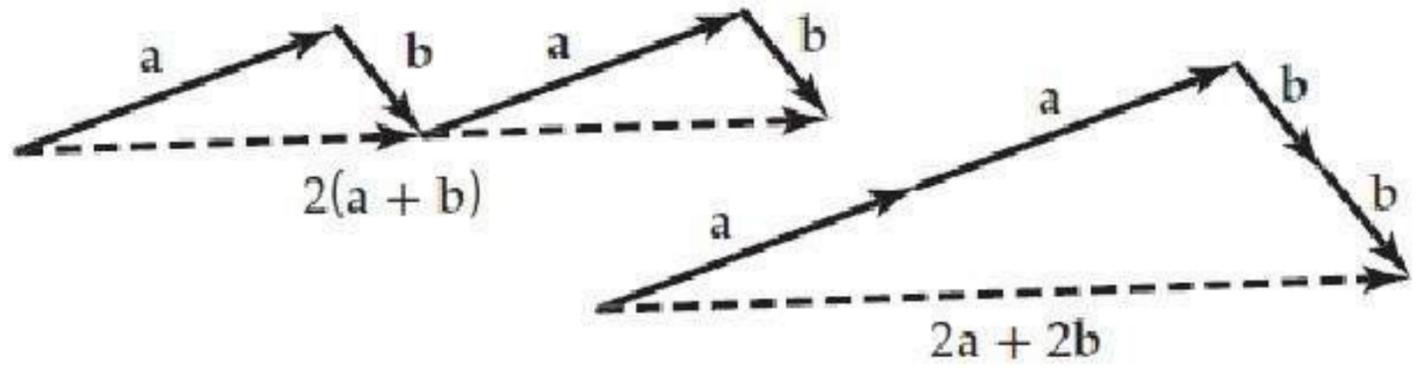
(37)



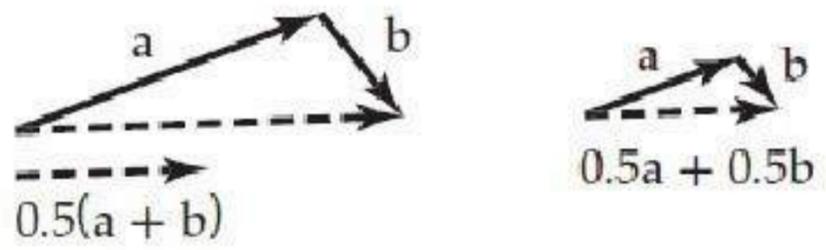
(38)



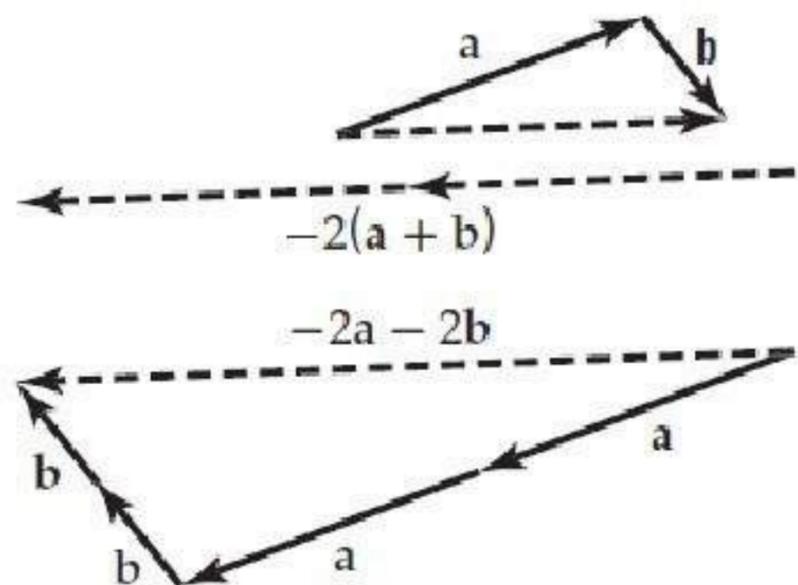
$$k = 2 \quad (39)$$



$$k = 0.5$$

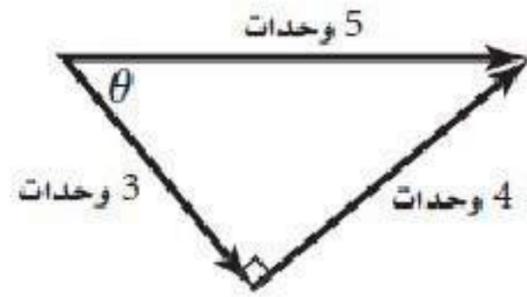


$$k = -2$$



## مسائل مهارات التفكير العليا:

(40) إجابة ممكنة:



(41) ليست صحيحة، إجابة ممكنة: إذا توازي متجهان، فإنهما يكونان في الاتجاه نفسه أو في اتجاهين متعاكسين. أما إذا وضع المتجهان بحيث تتطابق نقطتا بدايتهما، فعندها لا توجد زاوية بين المتجهين تسمح بتكوين متوازي أضلاع.

(42) تبرير:

(a) طول المتجه  $a$  مضافاً إلى طول المتجه  $b$  أكبر من أو يساوي طول المتجه الناتج من  $a + b$ .

(b) صحيحة، إجابة ممكنة: المتجه الناتج من  $a + b$  يتأثر باتجاهي المتجهين وهذا قد يجعل مقدار

$|a + b|$  صغيراً، إذا كان  $a$ ،  $b$  متعاكسين في الاتجاه. ويكون مجموع المقدارين  $|a| + |b|$  أكبر قيمة ممكنة؛ لأنه لا يأخذ بعين الاعتبار اتجاهي المتجهين ويتساوى المقداران  $|a| + |b|$ ،  $|a + b|$  إذا كان  $a$ ،  $b$  متوازيين، ولهما الاتجاه نفسه.

43) مصطفى، إجابة ممكنة: وضع مصطفى نقطة بداية المتجه الثاني عند نقطة نهاية المتجه الأول، ثم رسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الثاني، وهي الطريقة الصحيحة لاستعمال قاعدة المثلث. أما حسين فقد وضع نقطتي بداية المتجهين معاً، وهي الخطوة الأولى لاستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، لكنه لم يكمل متوازي الأضلاع.

44) نعم، إجابة ممكنة: من الممكن أن يكون حاصل جمع متجهين يساوي أحد المتجهين، ويحدث ذلك عندما يكون أحد المتجهين هو المتجه الصفري.

45) إجابة ممكنة: عند استعمال قاعدة المثلث، تضع نقطة بداية المتجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه، وهكذا مع باقي المتجهات، ثم ترسم المحصلة من نقطة بداية المتجه الأول إلى نقطة نهاية المتجه الأخير.

أما عند استعمال طريقة متوازي الأضلاع، فتضع نقطة بداية المتجهين عند نقطة واحدة، ثم تكمل متوازي الأضلاع وترسم المحصلة من نقطة البداية المشتركة للمتجهين إلى الرأس المقابل لمتوازي الأضلاع، يمكن استعمال كلتا القاعدتين، المثلث ومتوازي الأضلاع لإيجاد المحصلة لمتجهين أو أكثر.

## مراجعة تراكمية

أوجد قيمة  $x$  في كل مما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب عشر إن لزم ذلك:

$$5.8 \quad (46)$$

$$22 \quad (47)$$

$$6 \quad (48)$$

حل كل مثلث فيما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب عشر إن لزم ذلك:

$$b = 19.8, a = 11.2, A = 32^\circ \quad (49)$$

$$\sin 2x - \cos x = 0 \quad (50)$$

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0$$

أو

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

أو

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$

أو

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$$

حيث  $n$  عدد صحيح.

تدريب على اختبار:

51 km 6.74 باتجاه  $56.2^\circ$  تقريباً مع الأفقي

B (52)

# المتجهات في المستوى الإحداثي

1-2

تحقق

$$(8, 8) \text{ (1A)}$$

$$(-9, -11) \text{ (1B)}$$

$$\sqrt{128} \approx 11.3 \text{ (2A)}$$

$$\sqrt{202} \approx 14.2 \text{ (2B)}$$

$$(-19, 4) \text{ (3A)}$$

$$(12, -3) \text{ (3B)}$$

$$(3, 22) \text{ (3C)}$$

$$\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle \text{ (4A)}$$

$$\left\langle \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right\rangle \text{ (4B)}$$

$$8i + 5j \quad (5A)$$

$$10i + 9j \quad (5B)$$

$$\langle 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2} \rangle \quad (6A)$$

$$\langle -12\sqrt{3}, -12 \rangle \quad (6B)$$

$$161.6^\circ \text{ تقريباً} \quad (7A)$$

$$249.4^\circ \text{ تقريباً} \quad (7B)$$

(8)  $30.75 \text{ m/s}$  وتصنع زاوية قياسها  $31.6^\circ$  مع الأفقي.

## تدرب وحل المسائل:



أوجد الصورة الإحداثية وطول  $AB$  المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

$$(1) \langle 7, 4 \rangle, \sqrt{65} \approx 8.1$$

$$(2) \langle -8, 16 \rangle, \sqrt{320} \approx 17.9$$

$$(3) \langle -7, -3 \rangle, \sqrt{58} \approx 7.6$$

$$(4) \langle 3, 4 \rangle, 5$$

$$(5) \langle -6.5, 4.5 \rangle, \sqrt{62.5} \approx 7.9$$

$$(6) \left\langle \frac{11}{2}, \frac{23}{2} \right\rangle, \sqrt{\frac{325}{2}} \approx 12.7$$

إذا كان  $f = (8, 0)$ ,  $g = (-3, -5)$ ,  $h = (-6, 2)$  فأوجد كلا مما يأتي:

$$(7) \langle -21, 13 \rangle$$

$$(8) \langle -4, 4 \rangle$$

$$\langle 31, -11 \rangle \quad (9)$$

$$\langle 26, 6 \rangle \quad (10)$$

$$\langle -53, -23 \rangle \quad (11)$$

$$\langle -42, -18 \rangle \quad (12)$$

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه  $v$  نفسه في كل مما يأتي:

$$\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2\sqrt{53}}{53}, \frac{7\sqrt{53}}{53} \right\rangle \quad (13)$$

$$\mathbf{u} = \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle \quad (14)$$

$$\mathbf{u} = \left\langle -\frac{8\sqrt{89}}{89}, \frac{5\sqrt{89}}{89} \right\rangle \quad (15)$$

$$\mathbf{u} = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right\rangle \quad (16)$$

$$\mathbf{u} = \left\langle -\frac{\sqrt{26}}{26}, -\frac{5\sqrt{26}}{26} \right\rangle \quad (17)$$

$$\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10} \right\rangle \quad (18)$$

اكتب DE المعطاة بدايته ونهايته في كل مما يأتي على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة  $i$ ,  $j$ :

$$i - 6j \quad (19)$$

$$-16i + 8j \quad (20)$$

$$-5i - 19j \quad (21)$$

$$-9.5i - 8.3j \quad (22)$$

$$13i + 11j \quad (23)$$

$$-\frac{33}{8}i - \frac{19}{7}j \quad (24)$$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه  $v$ ، المعطى طوله وزاوية اتجاهه مع المحور  $x$  الموجب في كل مما يأتي:

$$\langle 6, 6\sqrt{3} \rangle \quad (25)$$

$$\langle 8\sqrt{3}, -8 \rangle \quad (26)$$

$$\langle -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \rangle \quad (27)$$

$$\langle -8.6, 12.3 \rangle \quad (28)$$

أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهات الآتية مع المحور x الموجب:

$$63.4^\circ \text{ تقريباً} \quad (29)$$

$$111.8^\circ \text{ تقريباً} \quad (30)$$

$$216.9^\circ \text{ تقريباً} \quad (31)$$

$$119.1^\circ \text{ تقريباً} \quad (32)$$

**(33) ملاحظة جوية:**

$$674 \text{ mi/h (a)}$$

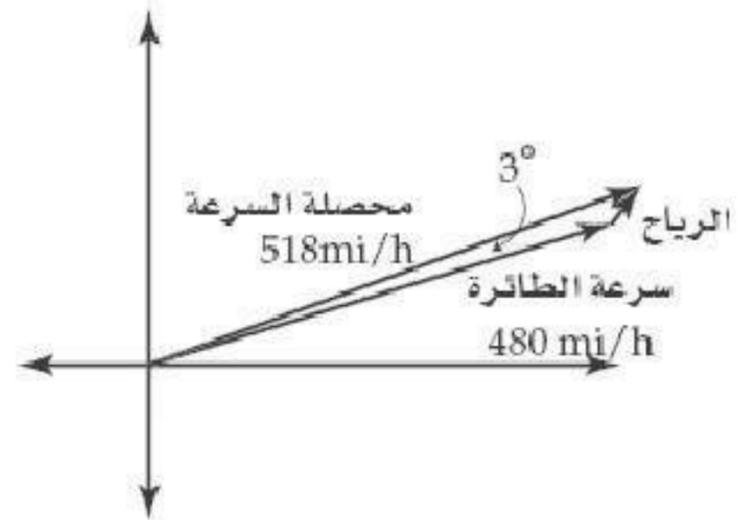
$$\text{S } 86^\circ \text{ E (b)}$$

**(34) تجديف:**

$$5.8 \text{ mi/h (a) تقريباً}$$

$$59^\circ \text{ (b) تقريباً}$$

**(35) ملاحظة جوية:**



بين إذا كان  $AB$ ,  $CD$  المعطاة نقطتا البداية والنهاية لكل منهما فيما يأتي متكافئين أو لا. وإذا كانا متكافئين فأثبت أن  $AB = CD$  وإذا كانا غير ذلك فاذكر السبب.

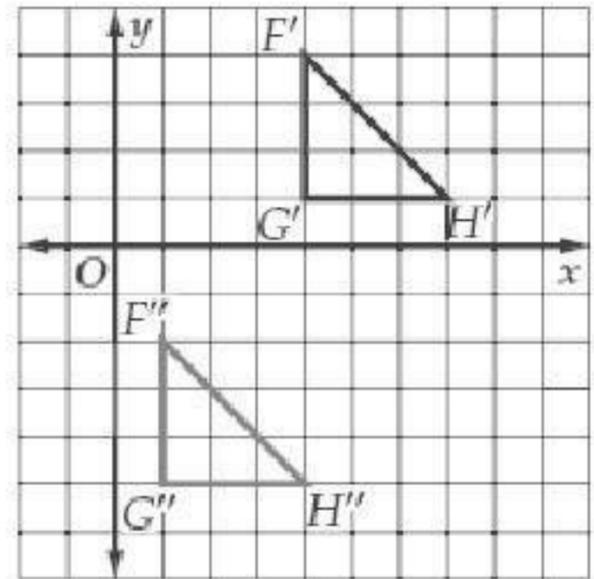
(36) إجابة ممكنة: يختلف المقدار والاتجاه في كل من المتجهين؛ لذا فالمتجهان غير متكافئين.

(37) نعم؛ إجابة ممكنة: للمتجهين المقدار والاتجاه نفساهما؛ لذا فهما متكافئان.

(38) انسحاب:

(a) (2, 5)

(b)



(c) (-1, -1)

أوجد نقطة نهاية ممكنة لكل متجه مما يأتي، إذا علمت طوله ونقطة بدايته:

(39) إجابة ممكنة:  $(0, -2)$

(40) إجابة ممكنة:  $(5, -1)$

(41) آلة تصوير:

(a)  $(-756); (899); (544, -441)$

(b)  $(688, 930)$

(c)  $1157 \text{ N}; 54^\circ$

(42) يجب أن تكون قوة الاحتكاك مساوية لمركبة الجاذبية الموازية للسطح المائل.

## مسائل مهارات التفكير العليا:

(43) **تبرير:** إجابة ممكنة: إذا كانت نقطة بداية المتجه هي  $(a, b)$  ، وطول المتجه  $m$  ، فإن أي

نقطة  $(x, y)$  تحقق المعادل  $m = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$  . يمكن أن تكون نقطة نهاية

المتجه. وهي دائرة مركزها النقط  $(a, b)$  وطول نصف قطرها  $m$ .

$$(44) \text{ **تحديد:** } x = \frac{y}{\tan 4y}$$

**برهان:**

$$a + b = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \quad (45)$$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = b + a$$

$$(a + b) + c = ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) \quad (46)$$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$

$$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$$

$$= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$$

$$= a + (b + c)$$

$$k(a + b) = k((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \quad (47)$$

$$= k(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$= (k(x_1 + x_2), k(y_1 + y_2))$$

$$= (kx_1 + kx_2, ky_1 + ky_2)$$

$$= (kx_1, ky_1) + (kx_2, ky_2)$$

$$= k(x_1, y_1) + k(x_2, y_2)$$

$$= ka + kb$$

$$|ka| = |k(x_1, y_1)| \quad (48)$$

$$= |(kx_1, ky_1)|$$

$$= \sqrt{(kx_1)^2 + (ky_1)^2}$$

$$= \sqrt{(k^2 x_1^2 + k^2 y_1^2)}$$

$$= \sqrt{k^2 (x_1^2 + y_1^2)}$$

$$= \sqrt{k^2} \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)}$$

$$= |k| |(x_1, y_1)|$$

$$= |k| |a|$$

## مراجعة تراكمية

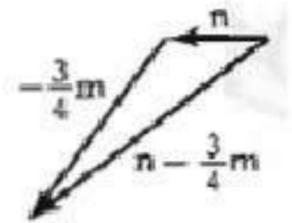
(49) دمي الأطفال:

$$= 0.92 \text{ N}, = 1.18 \text{ N (a)}$$

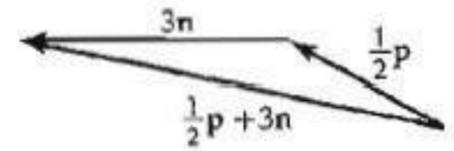
$$= 0.31 \text{ N}, = 1.47 \text{ N (b)}$$

استعمل مجموعة المتجهات الآتية لرسم متجه يمثل كلا مما يأتي:

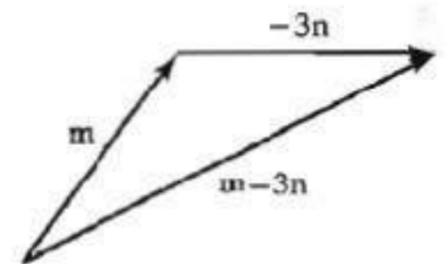
(50)



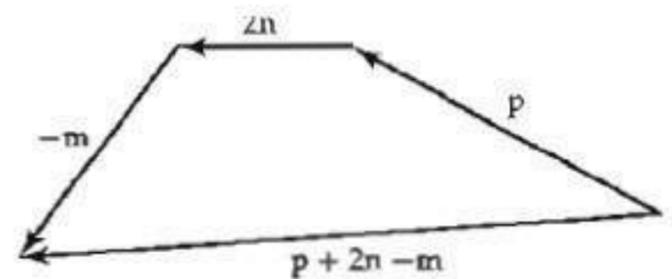
(51)



(52)



(53)



تدریب علی اختبار:

D (54

C (55

# الضرب الداخلي

1-3

تحقق

(1A) ليسا متعامدين

(1B) 0؛ متعامدان

20 (2A)

$5\sqrt{2} = 7.07$  (2B)

$156.8^\circ$  (3A)

$101.5^\circ$  (3B)

(4) 75 جولاً

## تدرب وحل المسائل:



أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين  $u$ ،  $v$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا:

(1) 8؛ غير متعامدين

(2) 0؛ متعامدان

(3) 8؛ غير متعامدين

(4) 0؛ متعامدان

(5) 8؛ غير متعامدين

(6) زيت الزيتون:

(a) 15620

(b) ثمن العطب جميعها هو 15620 ريالاً.

استعمل الضرب الداخلي، لإيجاد طول المتجه المعطى:

$$\sqrt{130} = 11.4 \quad (7)$$

$$\sqrt{97} = 9.8 \quad (8)$$

$$5\sqrt{13} = 18.0 \quad (9)$$

$$\sqrt{785} = 28.0 \quad (10)$$

أوجد قياس الزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $u$  ,  $v$  في كل مما يأتي وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

$$14.0^\circ \quad (11)$$

$$100.0^\circ \quad (12)$$

$$164.7^\circ \quad (13)$$

$$82.9^\circ \quad (14)$$

$$161.6^\circ \text{ مخيم كشفي:} \quad (15)$$

$$801 \text{ J} \quad (16)$$

أوجد متجهاً يعامد المتجه المعطى في كل مما يأتي:

$$(17) \text{ إجابة ممكنة: } (-12, 3)$$

$$(18) \text{ إجابة ممكنة: } (10, -6)$$

$$(19) \text{ إجابة ممكنة: } (8, 14)$$

$$(20) \text{ إجابة ممكنة: } (6, 1)$$

21) عجلة دوارة:

(a)  $(16.38, 11.47), (22.94, -32.77)$

(b)  $(20 \cos 35^\circ) (40 \cos 35^\circ) + (20 \sin 35^\circ) (-40 \sin 55^\circ) = 0$

إذا علمت كلا من  $u \cdot v$  ,  $v$  فأوجد  $u$  في كل مما يأتي:

22) إجابة ممكنة:  $u = (5, -3)$

23) إجابة ممكنة:  $u = (-1, 7)$

24) مدرسة: 55.7 تقريباً

اختبر كل زوج من المتجهات في كل مما يأتي من حيث كونها متعامدة، أو متوازية أو ليس كليهما:

25) بما أن  $u \cdot v = 0$  ، فإن المتجهين متعامدان.

26) ليسا متعامدين، ولا متوازيين، حيث أن الزاوية بين المتجهين  $\theta = 167^\circ$ .

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كل مما يأتي. قرب الناتج إلى أقرب عشر:

27)  $29.7^\circ$

28)  $164.9^\circ$

29)  $37.8^\circ, 60.3^\circ, 81.9^\circ$

إذا علمت كلا من  $|v|$  و  $u$ ، والزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $u, v$ ، فأوجد قيمة ممكنة للمتجه  $v$ ، قرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة:

$$(30) \quad (3.16, -9.49)$$

$$(31) \quad (-5.36, 0.55)$$

## مسائل مهارات التفكير العليا:

32) العبارة خاطئة؛ إذ قد تكون نقطة بداية للمتجهات الثلاثة واحدة ولا تشكل هذه المتجهات مثلثاً مطلقاً، إذا كان الأمر كذلك، فإن الزاوية بين المتجهين  $d$  و  $f$  تكون حادة أو قائمة أو منفرجة.

33) فيصل:  $u \cdot v$  عدد ثابت وعليه فإن  $(u \cdot v) \cdot w$  ليس معرفاً.

34) إجابة ممكنة: لأي متجهين غير صفريين  $(a, d)$ ,  $(c, b)$  يكون الضرب الداخلي لهما يساوي مجموع حاصل ضرب الإحداثيين  $x$  والإحداثيين  $y$  أو  $ac + bd$ .

**برهان:**

$$u \cdot v = v \cdot u \quad (35)$$

$$(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = (v_1, v_2) \cdot (u_1, u_2)$$

$$u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2$$

$$u_1v_1 + u_2v_2 = u_1v_1 + u_2v_2$$

$$(u_1, u_2) \cdot ((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) + (u_1, u_2) \cdot (w_1, w_2) \quad (36)$$

$$(u_1, u_2) \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2) = (u_1v_1 + u_2v_2) + (u_1w_1 + u_2w_2)$$

$$u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) = u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2$$

$$u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 = u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2$$

$$k(u \cdot v) = ku \cdot v = u \cdot kv \quad (37)$$

$$k((u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2)) = k(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = (u_1, u_2) \cdot k(v_1, v_2)$$

$$k(u_1v_1 + u_2v_2) = (ku_1, ku_2) \cdot (v_1, v_2) = (u_1, u_2) \cdot (kv_1, kv_2)$$

$$ku_1v_1 + ku_2v_2 = ku_1v_1 + ku_2v_2 = ku_1v_1 + ku_2v_2$$

(38) الزاوية بين  $u$  ،  $v$  هي  $\theta = 90^\circ$

$$\cos 90^\circ = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$0 = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$

بضرب الطرفين في  $|u| \cdot |v|$

$$v \cdot u = 0$$

## مراجعة تراكمية

أوجد كلا مما يأتي:

$$(39) (-12, -34.2)$$

$$(40) \left\langle -\frac{137}{4}, 9.2 \right\rangle$$

$$(41) \left\langle \frac{163}{4}, -18.2 \right\rangle$$

أوجد الزاوية اتجاه كل من المتجهات الآتية مع المحور  $x$  الموجب:

$$(42) 251.6^\circ$$

$$(43) 150.95^\circ$$

$$(44) 135^\circ$$

تدريب على اختبار:

$$B (45)$$

$$C (46)$$

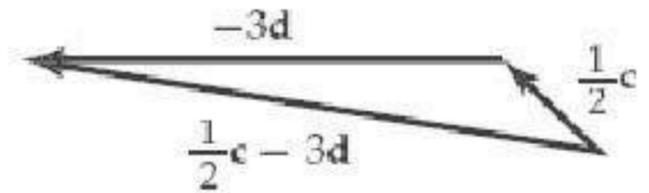
# اختبار منتصف الفصل

6.2 cm, 185° (1)

1.1 cm, 57° (2)

40.96 N; 28.68 N (3)

(4)



اكتب BC المعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كل مما يأتي بدلالة متجهي الوحدة  $i, j$  :

$i + -6j$  (5)

$18i + 8j$  (6-

$3i + -21j$  (7-

$10i + 20j$  (8)

B (9)

10) كرة سلة:

(a) راشد: (2.5, 0)؛ الكرة: (6.5, 4.7)

(b) 10.2 m/s بزواوية قياسها  $28^\circ$  مع الأفقي.

أوجد الصورة الإحداثية، وطول المتجه المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي، قرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

$$(11) \quad \sqrt{65} = 8.1; (7, 4)$$

$$(12) \quad \sqrt{233} = 15.3; (-8, 13)$$

أوجد قياس الزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $u, v$ ، وقرب الناتج إلى أقرب درجة:

$$(13) \quad 93^\circ$$

$$(14) \quad 90^\circ$$

$$(15) \quad 114^\circ$$

$$(16) \quad B$$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كل مما يأتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا:

$$(17) \quad -2; \text{ غير متعامدين}$$

$$(18) \quad 16; \text{ غير متعامدين}$$

$$(19) \quad -43; \text{ غير متعامدين}$$

20) 0؛ متعامدان

21) **عربية:**

a) 3247.6 جولاً

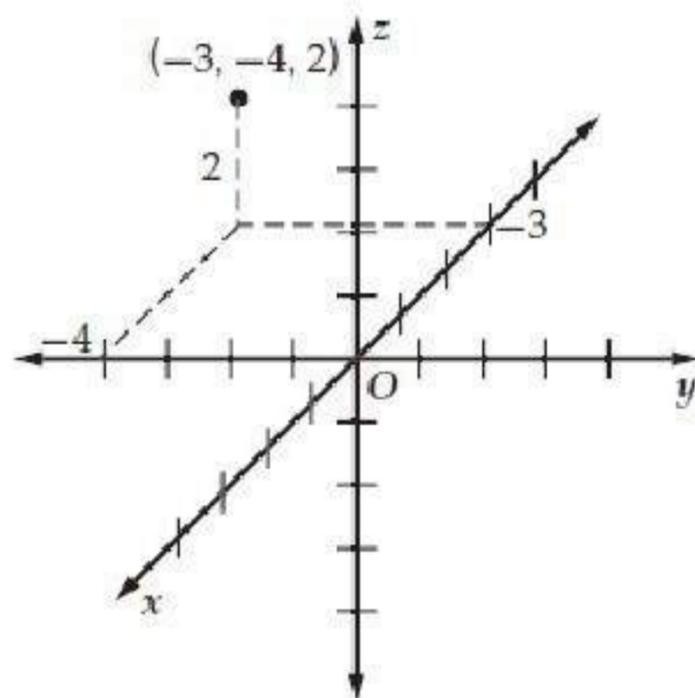
b) أقل؛ سيينل 2872.7 جولاً

# المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

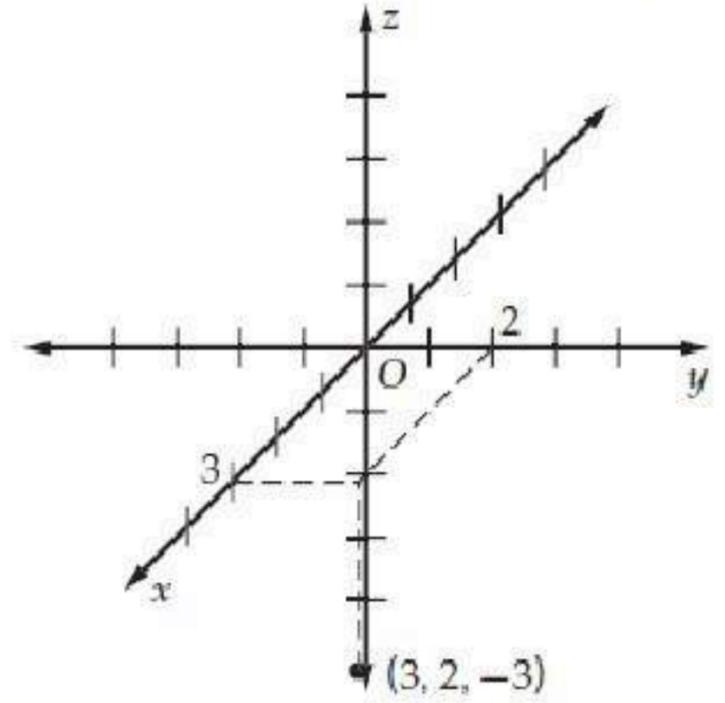
1-4

تحقق

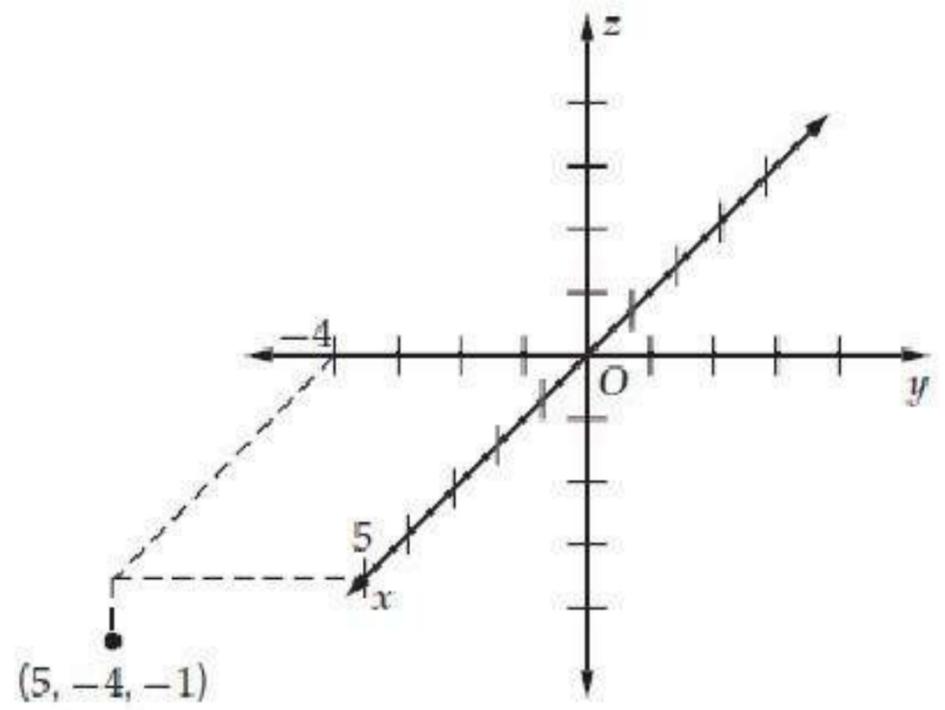
(1A)



(1B)



(1C)

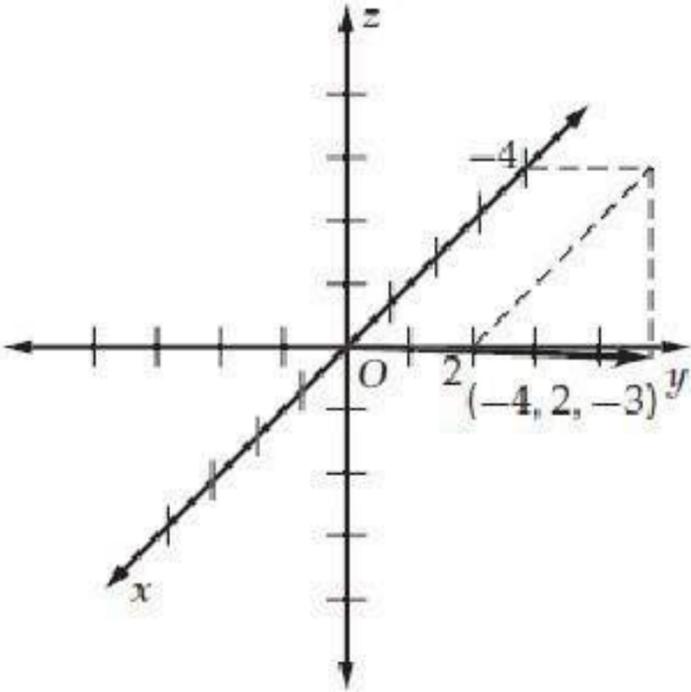


(2) طائرات:

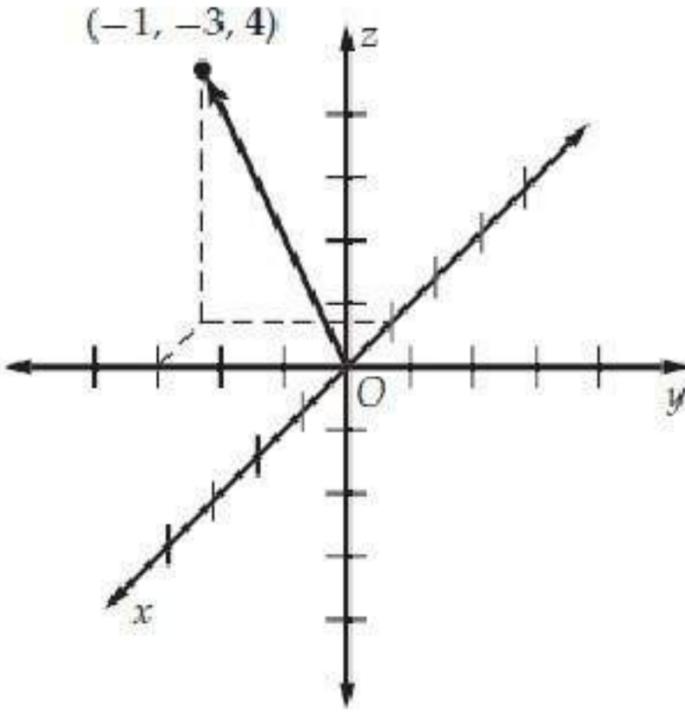
(A) نعم؛ تبعد الطائرتان حوالي 2045 قدماً، وهذه المسافة أقل من المسافة المسموح بها وهي نصف ميل تقريباً.

(B) (375, - 50, 29000)

(3A)



(3B)



(12, 16, -56) (4A)

(9, -42, 45) (4B)

$$\langle 1, 9, 3 \rangle; \sqrt{91}; \left\langle \frac{\sqrt{91}}{91}, \frac{9\sqrt{91}}{91}, \frac{3\sqrt{91}}{91} \right\rangle \quad (5A)$$

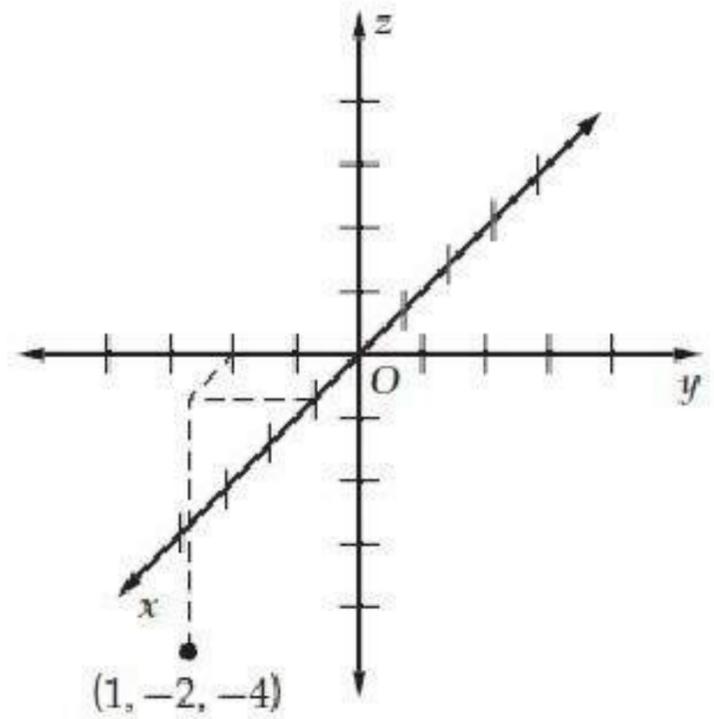
$$\langle 4, -1, 2 \rangle; \sqrt{21}; \left\langle \frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{-\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21} \right\rangle \quad (5B)$$

# تدرب وحل المسائل:

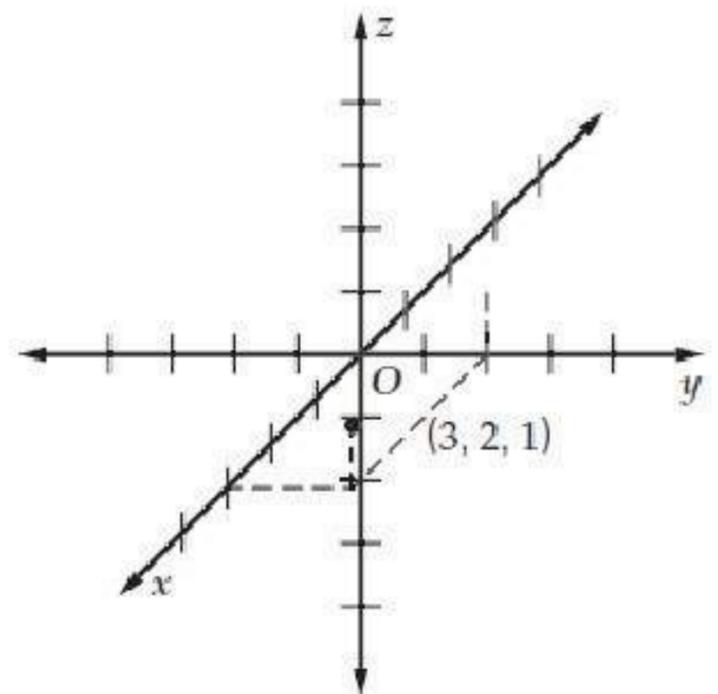


عين كل نقطة مما يأتي في نظام الحداثيات الثلاثي الأبعاد:

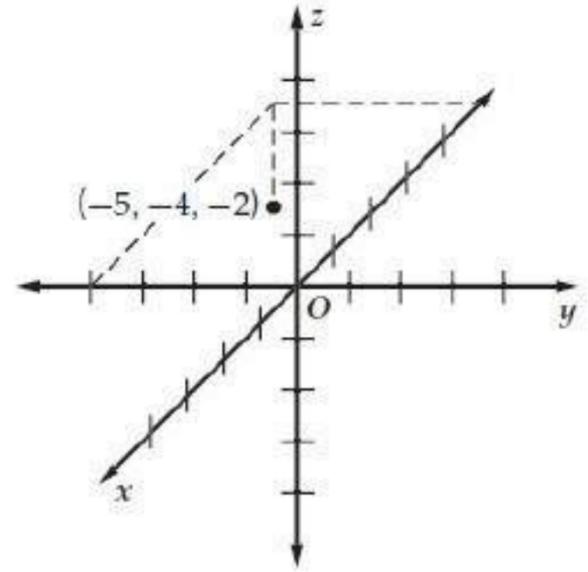
(1)



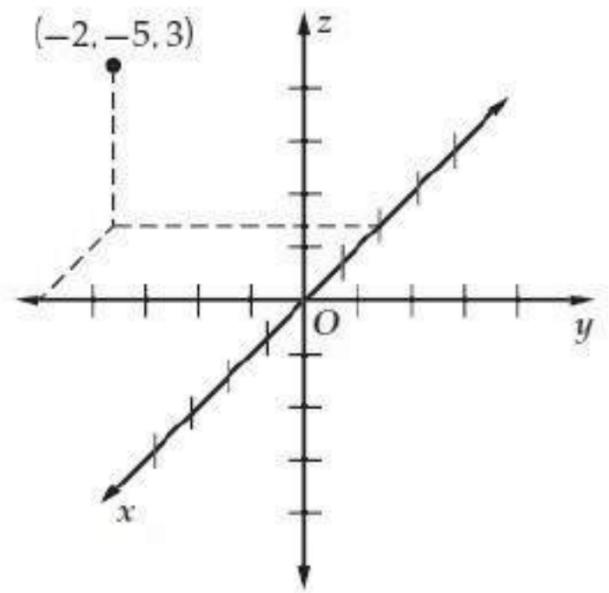
(2)



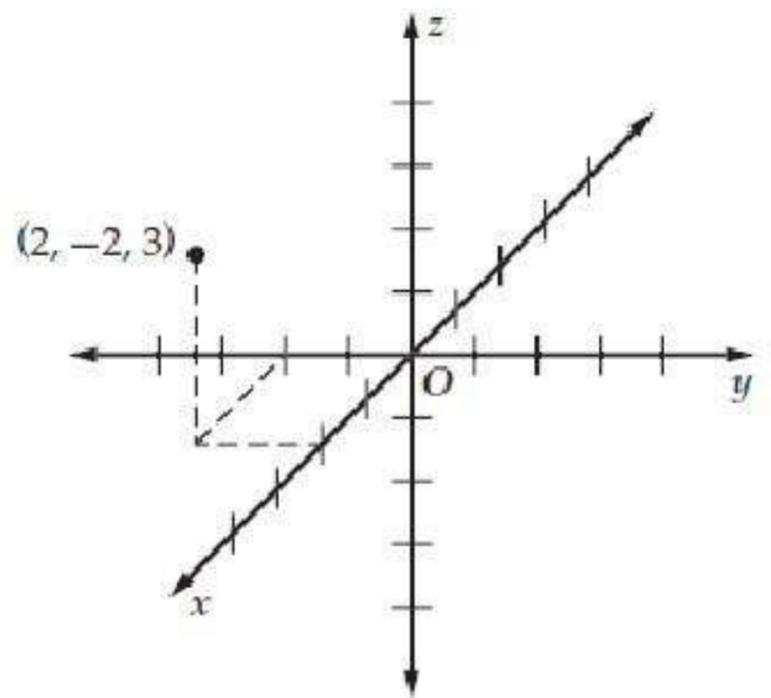
(3)



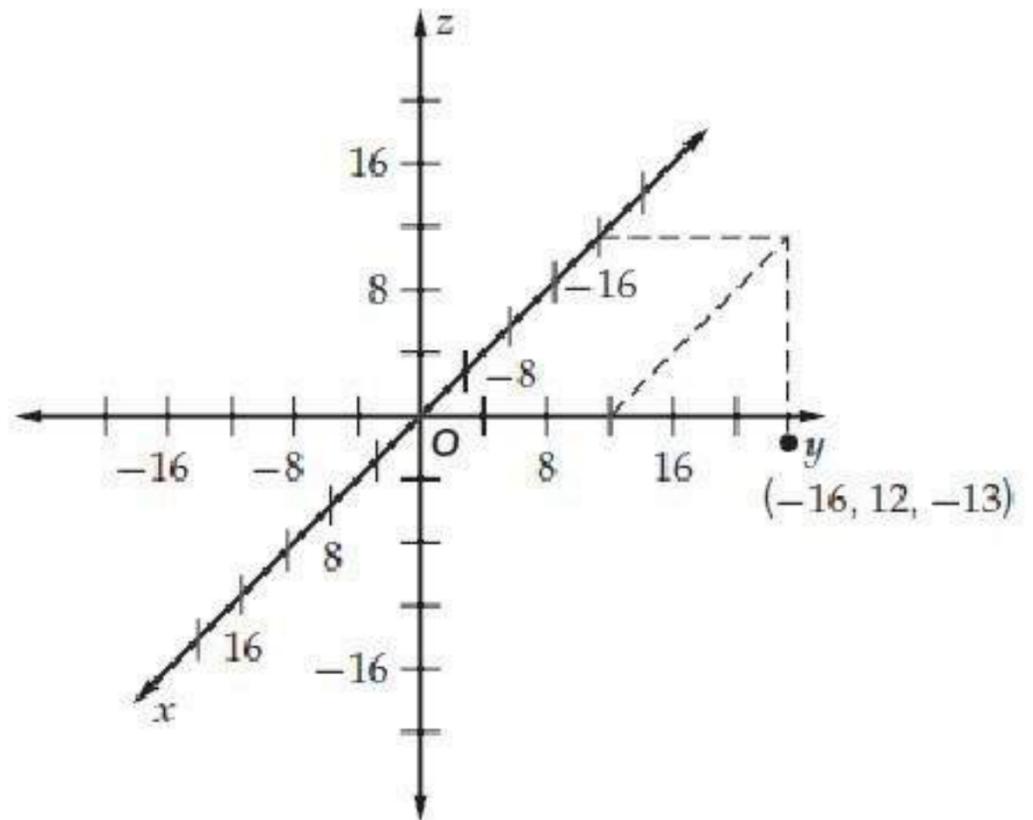
(4)



(5)



(6)



أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كل مما يأتي:

12.25,  $(-3, 5, 13)$  (7)

$\frac{2}{2}$

9.90,  $(-15, 2, 1)$  (8)

$\frac{2}{2}$

15.65,  $(2, -2, 9)$  (9)

$\frac{2}{2}$

9.11,  $(-9, -3, -13)$  (10)

$\frac{2}{2}$

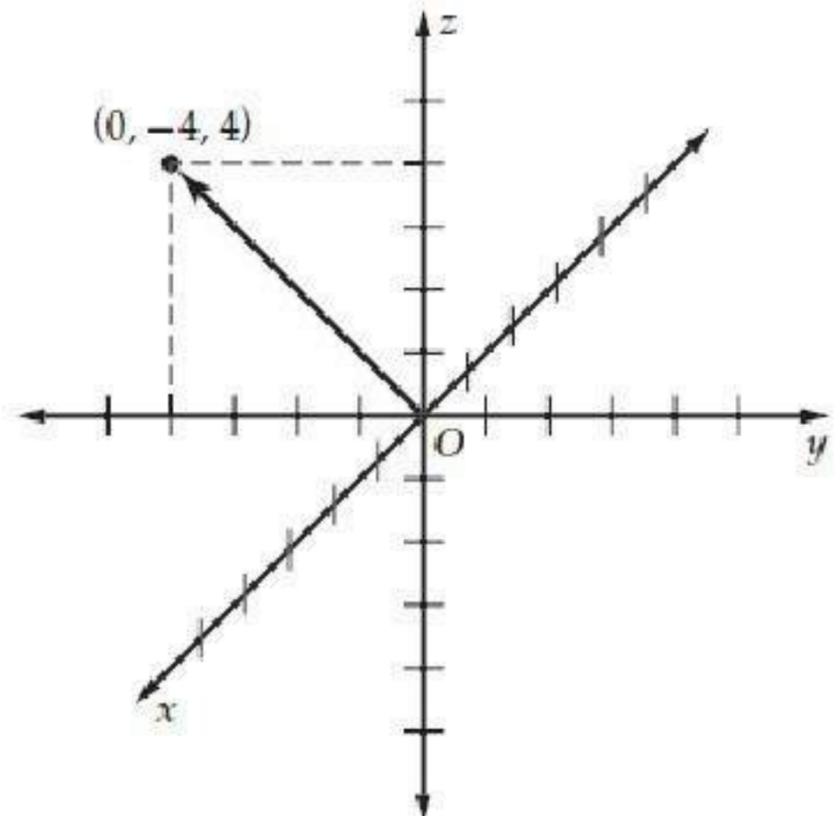
(11) طيارون:

3445 ft (a)

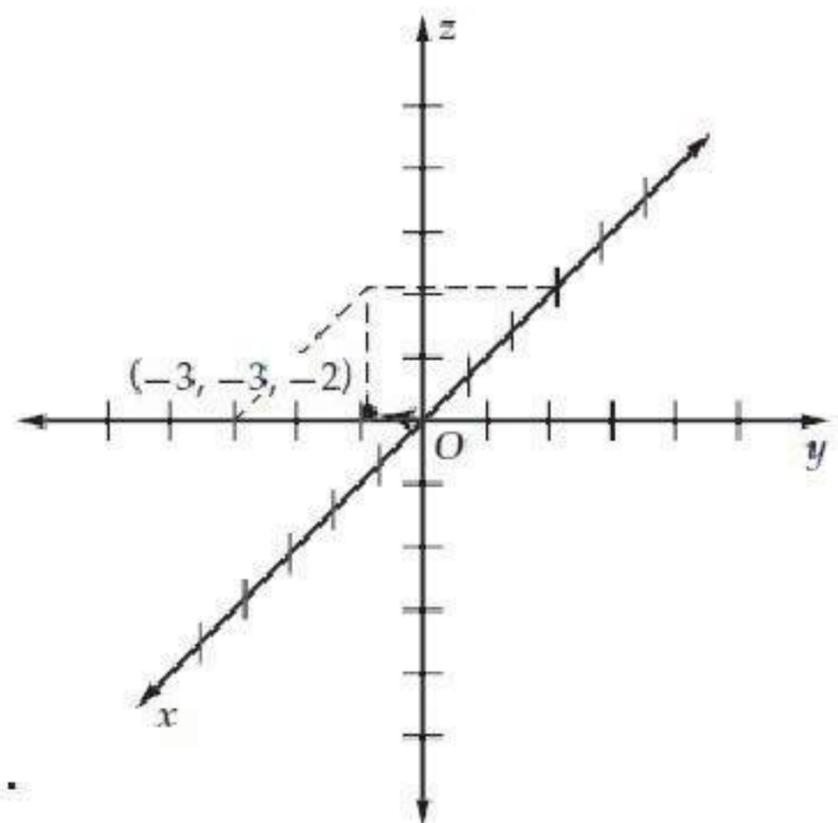
(193, 297, 17700) (b)

عين موقع كل من المتجهات الآتية في الفضاء، ثم مثله بيانياً:

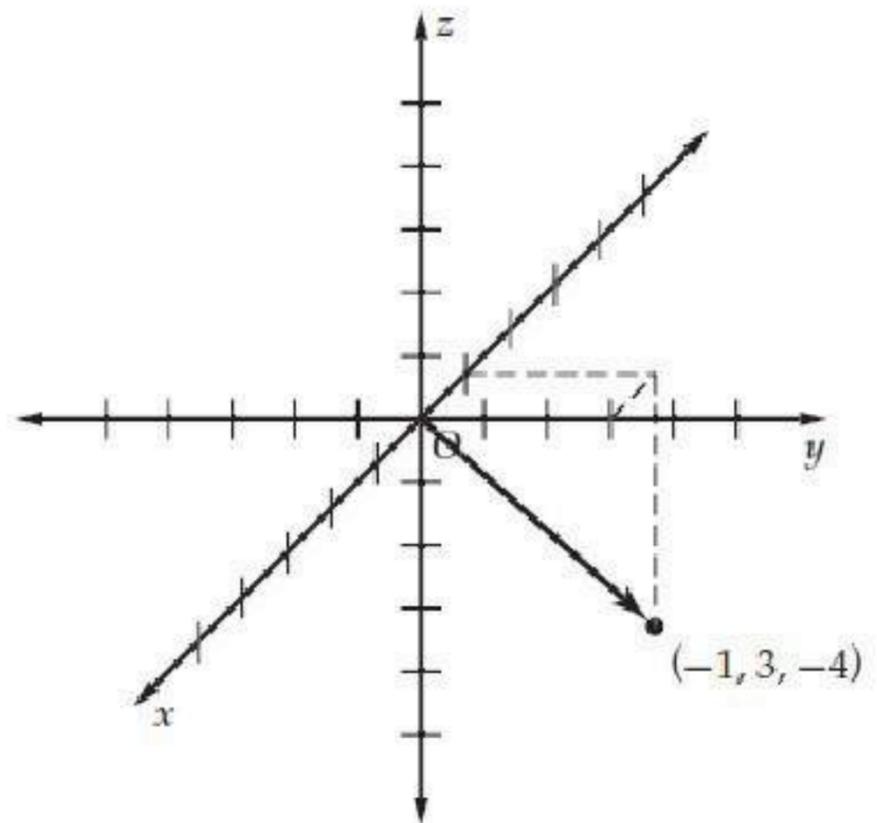
(12)



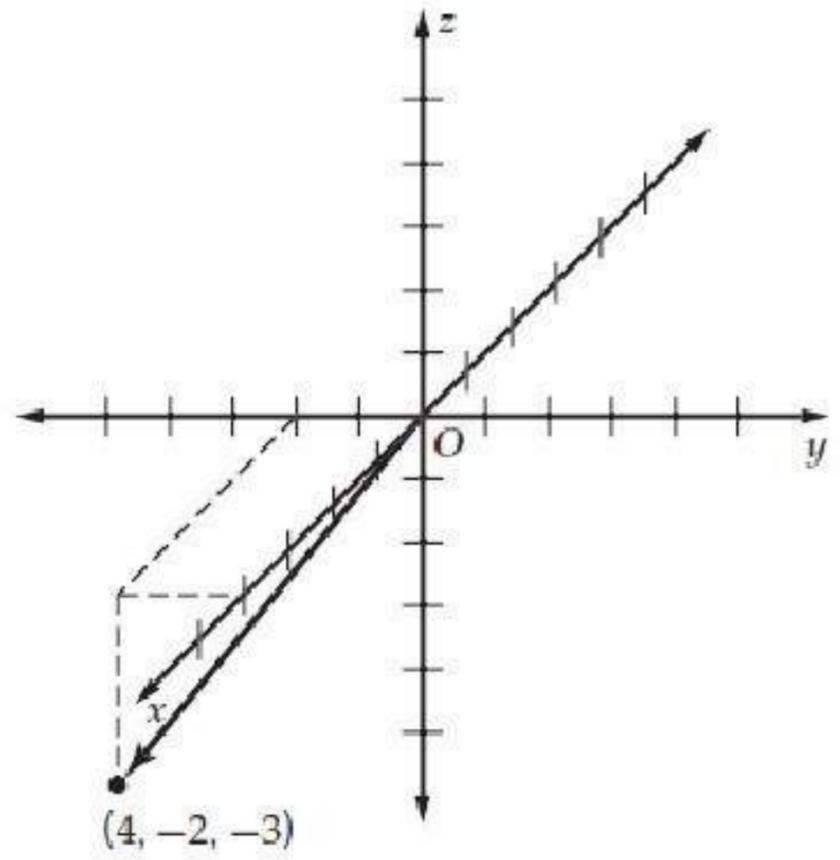
(13)



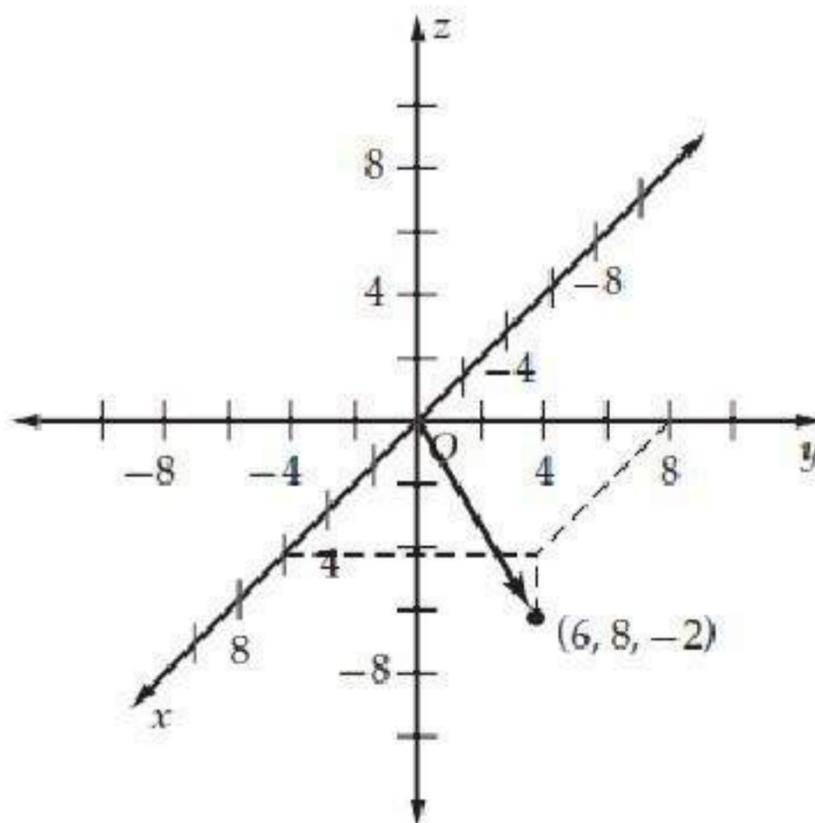
(14)



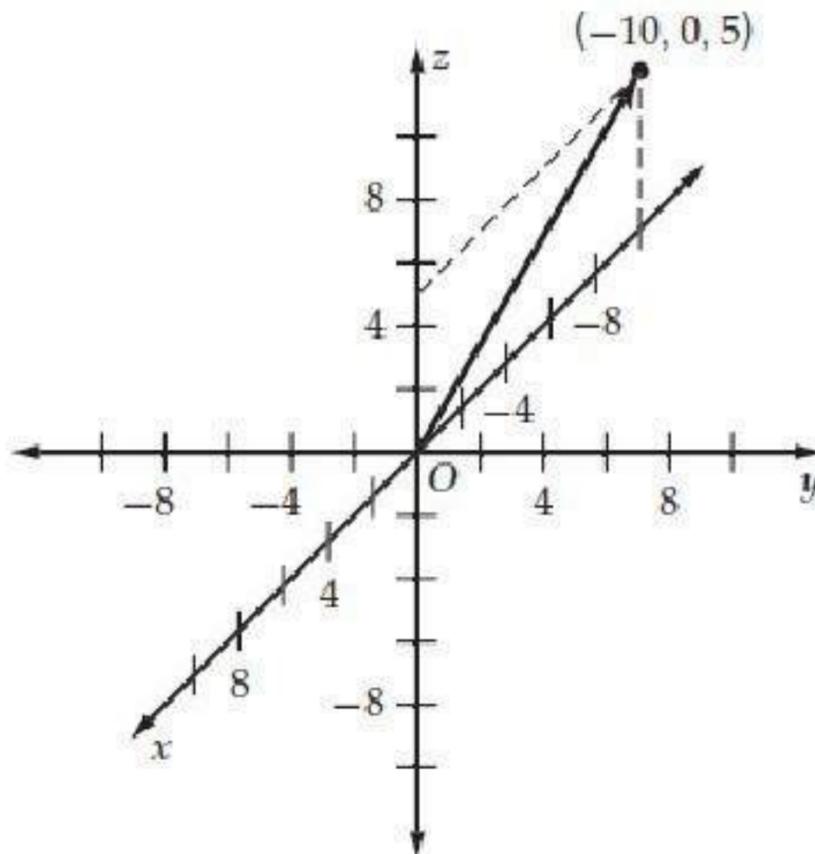
(15)



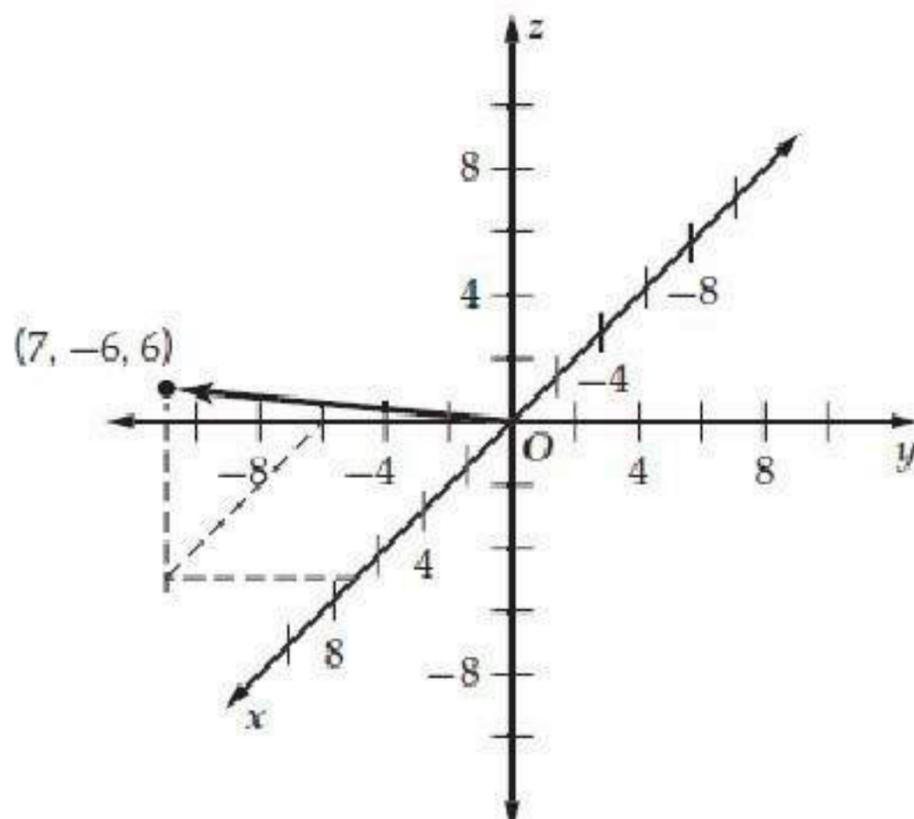
(16)



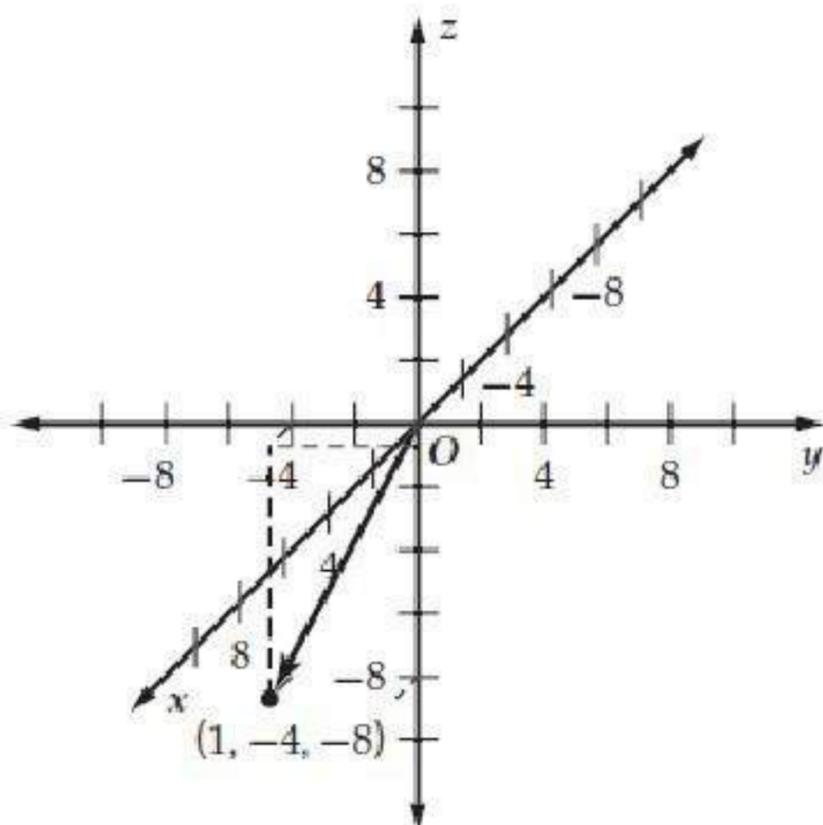
(17)



(18)



(19)



أوجد كلا مما يأتي للمتجهات:

$$(20) (-88, 6, 99)$$

$$(21) (-65, -18, 56)$$

$$(22) (38, -36, -65)$$

$$(23) (48, 12, -38)$$

$$(24) (-68, -24, 55)$$

$$(25) (22, 36, 3)$$

أوجد كلا مما يأتي للمتجهات:

$$(26) (-27, 16, -21)$$

$$(27) (-63, 28, 56)$$

$$(28) (-22, 14, -1)$$

$$(29) (50, -18, 10)$$

$$(30) (-18, -6, 6)$$

$$(31) (-13, 2, 21)$$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول AB المعطاة بدايته ونهايته، في كل مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه AB:

$$\langle 16, 2, 8 \rangle, 18, \left\langle \frac{8}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9} \right\rangle \quad (32)$$

$$\langle 0, -8, 12 \rangle, \left\langle 0, -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle \quad (33)$$

$$\langle -3, -5, -10 \rangle, \sqrt{134}, \left\langle -\frac{3\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{67} \right\rangle \quad (34)$$

$$\langle -4, 8, 20 \rangle, 4\sqrt{30}, \left\langle -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right\rangle \quad (35)$$

$$\langle -1, 8, -10 \rangle, \sqrt{165}, \left\langle -\frac{\sqrt{165}}{165}, \frac{8\sqrt{165}}{165}, -\frac{2\sqrt{165}}{33} \right\rangle \quad (36)$$

$$\langle -6, -15, 4 \rangle, \sqrt{277}, \left\langle -\frac{6\sqrt{277}}{277}, -\frac{15\sqrt{277}}{277}, \frac{4\sqrt{277}}{277} \right\rangle \quad (37)$$

$$\langle 4, -15, 5 \rangle, \sqrt{266}, \left\langle -\frac{2\sqrt{266}}{133}, -\frac{15\sqrt{266}}{266}, \frac{5\sqrt{266}}{266} \right\rangle \quad (38)$$

$$\langle 20, 32, 42 \rangle, 2\sqrt{797}, \left\langle \frac{10\sqrt{797}}{797}, \frac{16\sqrt{797}}{797}, \frac{21\sqrt{797}}{797} \right\rangle \quad (39)$$

إذا كانت N منتصف MP فأوجد إحداثيات النقطة P في كل مما يأتي:

$$(4, -2, -1) \quad (40)$$

$$(-3, 6, -1) \quad (41)$$

$$(3, -2, 7) \quad (42)$$

$$\left(-\frac{11}{2}, -8, 2\right) \quad (43)$$

$$34 \text{ ft.} \quad \text{تطوع:} \quad (44)$$

حدد نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط الثلاث في كلٍ مما يأتي (قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع):

(45)

$$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (-1-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$
$$Bc = \sqrt{(1-5)^2 + (3+1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$
$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

بما أن:  $AB = Ac \neq Bc$  فالمثلث متطابق الضلعين

(46)

$$AB = \sqrt{(4-4)^2 + (6-3)^2 + (4-4)^2} = 3$$
$$Bc = \sqrt{(4-4)^2 + (3-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$
$$Ac = \sqrt{(4-4)^2 + (3-3)^2 + (6-4)^2} = 2$$

بما أن:  $(\sqrt{13})^2 = 2^2 + 3^2$  إذن المثلث قائم الزاوية، و بما أن أطوال اضلاعه مختلفة،

إذن فهو مختلف الأضلاع

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (5-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$Bc = \sqrt{(0-2)^2 + (-6-5)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{4+121+25} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$$

$$Ac = \sqrt{(0+1)^2 + (-6-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{1+100+9} = \sqrt{110}$$

بما أن أطوال أضلاع المثلث مختلفة، إذن المثلث مختلف الأضلاع.

**48 كرات:** الكرة هي مجموعة النقاط في الفضاء التي تبعد عن مركز الكرة بعدا ثابتا (نصف

القطر) إذن إذا كانت النقطة  $(z, y, x)$  نقطة تقع على الكرة التي مركزها  $m(h, k, l)$ ، فإنه

يجب أن تكون المسافة بين  $A$  و  $M$  تساوي  $r$

نفترض أن النقطة  $A(x, y, z)$  نقطة تقع على الكرة التي مركزها  $m(h, k, l)$  نستخدم صيغة

المسافة بين نقطتين.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2}$$

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2$$

استعمل الصيغة العامة لمعادلة الكرة التي وجدتها في السؤال 48، لإيجاد معادلة الكرة المعطى

مركزها، وطول نصف قطرها في كل مما يأتي:

$$(x + 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16 \quad (49)$$

$$(x - 6)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = \frac{1}{4} \quad (50)$$

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 3 \quad (51)$$

$$x^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = 144 \quad (52)$$

$$(0, 3.5, -4) \quad (53)$$

54) إجابة ممكنة: يمكن استعمال بُعدين أكثر منطقية عند وصف موقع على الخارطة؛ لأن الخارطة نفسها مرسومة ببُعدين. ويكون استعمال ثلاثة أبعاد أكثر منطقية عند وصف موقع على الكرة الأرضية؛ لأن للكرة الأرضية أبعاداً ثلاثة.

## مراجعة تراكمية

أوجد الصورة الإحداثية وطول  $\overline{AB}$  المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

$$(-13, -3), \sqrt{178} = 13.3 \quad (55)$$

$$(5, 14), \sqrt{221} = 14.9 \quad (56)$$

$$(6, 18), \sqrt{360} = 19.0 \quad (57)$$

اكتب  $\overline{DE}$  المعطاة نقطتا بدايته ونهايته بدلالة متجهي الوحدة  $i, j$  في كل مما يأتي:

$$\frac{21i}{5} + \frac{-2j}{3} \quad (58)$$

$$\frac{1}{4} i + \frac{1}{7} j \quad (59)$$

$$15.8i + \frac{-6.1j}{1} \quad (60)$$

تدريب على اختبار:

B (61)

# الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

1-5

تحقق

(1A) 0؛ متعامدان

(1B) 4؛ غير متعامدين

(2)  $124.6^\circ$

(3A)

$$\begin{aligned}(u \times v) \cdot v &= \langle 9, -21, -6 \rangle \cdot \langle 5, 1, 4 \rangle \\ &= 9(5) + (-21)(1) + (-6)(4) \\ &= 45 + (-21) + (-24) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(u \times v) \cdot u &= \langle 9, -21, -6 \rangle \cdot \langle 4, 2, -1 \rangle \\ &= 9(4) + (-21)(2) + (-6)(-1) \\ &= 36 + (-42) + 6 \\ &= 0\end{aligned}$$

(3B)

$$\begin{aligned}(u \times v) \cdot v &= \langle -1, -7, 3 \rangle \cdot \langle 5, 1, 4 \rangle \\ &= (-1)(5) + (-7)(1) + 3(4) \\ &= -5 + (-7) + 12 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(u \times v) \cdot u &= \langle -1, -7, 3 \rangle \cdot \langle -2, -1, -3 \rangle \\ &= (-1)(-2) + (-7)(-1) + 3(-3) \\ &= 2 + 7 + (-9) \\ &= 0\end{aligned}$$

(4)  $\sqrt{545}$  أو حوالي 23.35 وحدة مربعة.

(5) 86 وحدة مكعبة.

# تدرب وحل المسائل:



أوجد الضرب الداخلي للمتجهين  $u, v$  في كل مما يأتي، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أو لا:

(1) 0؛ متعامدان

(2) 14؛ غير متعامدين

(3) 0؛ متعامدان

(4) -15؛ غير متعامدين

(5) -8؛ غير متعامدين

(6) 0؛ متعامدان

(7) كيمياء:  $109.5^\circ$

أوجد قياس الزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $u, v$  في كل مما يأتي، قرب الناتج إلى أقرب جزء من

عشرة:

(8)  $88.9^\circ$

(9)  $45.4^\circ$

$$37.5^\circ \text{ (10)}$$

$$152.3^\circ \text{ (11)}$$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين  $u, v$  في كل مما يأتي، ثم بين ان  $u \times v$  عمودي على كل من

$u, v$

$$(21, 7, 0) \text{ (12)}$$

$$\begin{aligned} & (u \times v) \cdot v \\ &= \langle 21, 7, 0 \rangle \cdot \langle 2, -6, -3 \rangle \\ &= 21(2) + 7(-6) + 0(-3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (u \times v) \cdot u \\ &= \langle 21, 7, 0 \rangle \cdot \langle -1, 3, 5 \rangle \\ &= 21(-1) + 7(3) + 0(5) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(25, 6, 71) \text{ (13)}$$

$$\begin{aligned} & (u \times v) \cdot v \\ &= \langle 25, 6, 71 \rangle \cdot \langle -5, 9, 1 \rangle \\ &= 25(-5) + 6(9) + 71(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (u \times v) \cdot u \\ &= \langle 25, 6, 71 \rangle \cdot \langle 4, 7, -2 \rangle \\ &= 25(4) + 6(7) + 71(-2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(38, 26, 21) \text{ (14)}$$

$$\begin{aligned} & (u \times v) \cdot v \\ &= \langle 38, 26, 21 \rangle \cdot \langle 1, 5, -8 \rangle \\ &= 38(1) + 26(5) + 21(-8) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (u \times v) \cdot u \\ &= \langle 38, 26, 21 \rangle \cdot \langle 3, -6, 2 \rangle \\ &= 38(3) + 26(-6) + 21(2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(15) (7, 23, 12)$$

$$\begin{aligned} & (u \times v) \cdot v \\ &= \langle 7, 23, 12 \rangle \cdot \langle 7, 1, -6 \rangle \\ &= 7(7) + 23(1) + 12(-6) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (u \times v) \cdot u \\ &= \langle 7, 23, 12 \rangle \cdot \langle -2, -2, 5 \rangle \\ &= 7(-2) + 23(-2) + 12(5) \\ &= 0 \end{aligned}$$

أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه  $u, v$  ضلعان متجاوران في كل مما يأتي:

$$(16) \quad 13\sqrt{9} \text{ أو } 56.7 \text{ وحدة مربعة تقريباً.}$$

$$(17) \quad \sqrt{186} \text{ أو } 13.6 \text{ وحدة مربعة تقريباً.}$$

$$(18) \quad \sqrt{6821} \text{ أو } 82.6 \text{ وحدة مربعة تقريباً.}$$

$$(19) \quad 3\sqrt{74} \text{ أو } 25.8 \text{ وحدة مربعة تقريباً.}$$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه  $t, u, v$  أحرف متجاورة في كل مما يأتي:

$$(20) \quad 429 \text{ وحدة مكعبة}$$

$$(21) \quad 85 \text{ وحدة مكعبة}$$

$$(22) \quad 40 \text{ وحدة مكعبة}$$

$$(23) \quad 69 \text{ وحدة مكعبة}$$

أوجد متجهاً غير صفري يعامد المتجه المعطى في كل مما يأتي:

(24) إجابة ممكنة: (4, 3, 3)

(25) إجابة ممكنة: (5, 5, 3)

(26) إجابة ممكنة: (1, 9, 1)

(27) إجابة ممكنة: (-8, 0, 7)

إذا علم كل من  $v, u, v$  فأوجد  $u$  في كل مما يأتي:

(28) إجابة ممكنة: (3, 4, 2)

(29) إجابة ممكنة: (-1, -3, 4)

(30) إجابة ممكنة: (-3, 1, -7)

حدد مما إذا كانت النقاط المعطاة واقعة على استقامة واحدة:

(31) ليست على استقامة واحدة

(32) ليست على استقامة واحدة

حدد ما إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أو لا:

(33) متوازيان

(34) غير متوازيين

$$(35) \langle 1, 4, 4\sqrt{3} \rangle$$

حدد مما إذا كان الشكل الرباعي ABCD المعطاة إحداثيات رؤوسه متوازي أضلاع، وإذا كان كذلك فأوجد مساحة سطحه، وحدد ما إذا كان مستطيلاً أو لا:

(36) ليس متوازي أضلاع

(37) متوازي أضلاع؛ 9.4 وحدة مربعة تقريباً؛ مستطيل.

(38) عرض جوي:

إجابة ممكنة: لا؛ لأن الزاوية بين المتجهين لا تساوي  $0^\circ$  ولا  $180^\circ$ ، و عليه فالمتجهان غير متوازيين

إذا كان:  $v = \langle -4, 4, 5 \rangle, u = \langle 3, 2, -2 \rangle$ ، فأوجد كلا مما يأتي إن أمكن:  
(39) 0

(40) ليس ممكناً، لأن  $u \cdot v$  كمية قياسية و ليست متجهاً، و الضرب الاتجاهي يكون لمتجهين

إذا كانت  $u, w, v$  تمثل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي السطوح في الشكل المجاور، وكان حجمه 7 وحدات مكعبة، فما قيمة C؟

(41) حجم متوازي السطوح يساوي  $|u \cdot (v \times w)|$

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2i + k$$

$$u \cdot (v \times w) = \langle C, -3, 1 \rangle \cdot \langle 2, 0, 1 \rangle \\ = 2C + 1$$

$$|2C + 1| = 7$$

$$C = -4 \text{ أو } C = 3 \text{ إذن}$$

## مسائل مهارات التفكير العليا:

(42) **تبرير:** دائماً صحيحة، إجابة ممكنة: الضرب الاتجاهي في الفضاء يعطي متجهاً يعامد كلاً من المتجهين الأصليين.

(43) **تحذ:** 2

(44) **تبرير:** إجابة ممكنة: إن تعريف الضرب الاتجاهي للمتجهين  $a, b$  هو متجه عمودي على المستوى الذي يحوي كلاً من  $a, b$ . وللحصول على متجه عمودي على مستوى ثنائي الأبعاد تحتاج لبعث ثالث.

(45) **اكتب:** إجابة ممكنة: للتحقق من توازي أو تعامد متجهين، يمكنك استعمال قاعدة حساب الزاوية بين متجهين، إذا كان قياس الزاوية  $0^\circ$  أو  $180^\circ$ ، يكونان متوازيين، وإذا كان قياسها  $90^\circ$  يكونان متعامدين. يمكنك كذلك إيجاد الصورة الإحداثية للمتجهين واستعمال النسب بين الإحداثيات المتناظرة للتحقق مما إذا كان المتجهان متوازيين، إذا كانت النسب بين الإحداثيات الثلاثة المتناظرة في الصيغة المركبة نفسها، يكون المتجهان متوازيين، ولا يمكن استعمال هذه الطريقة إذا كان المتجهان متعامدين. وللتحقق من تعامد متجهين يمكنك إيجاد الضرب الداخلي بينهما، فإذا كان الناتج صفراً يكون المتجهان متعامدين، لا يمكن استعمال طريقة الضرب الداخلي هذه للتحقق من التوازي.

## مراجعة تراكمية

أوجد طول كل قطعة مستقيمة مما يأتي، والمعطاة نقطتا طرفيها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها:

$$22.67; \left(-\frac{1}{2}, 16, \frac{7}{2}\right) \quad (46)$$

$$23.71; \left(\frac{33}{2}, 9, -\frac{37}{2}\right) \quad (47)$$

$$36.62; \left(-6, 17, -\frac{7}{2}\right) \quad (48)$$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين  $v, u$  في كل مما يأتي ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا:

$$(49) \quad 22 - ; \text{ ليسا متعامدين}$$

$$(50) \quad 58 - ; \text{ ليسا متعامدين}$$

$$(51) \quad 33 - ; \text{ ليسا متعامدين}$$

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية، مستعملاً قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع ثم حدد إتجاهها بالنسبة للأفقي:

$$(52) \quad 3 \text{ cm}, 45^\circ$$

$$(53) \quad 0.5 \text{ cm}, 60^\circ$$

تدریب علی اختبار:

D (54

A (55

# دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك:

حدد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

(1) خطأ؛ ينتهي عنده

(2) خطأ؛  $-4(3) + 1(2)$

(3) صحيحة

(4) خطأ؛ الصورة الإحداثية للمتجه

(5) صحيحة

(6) خطأ؛  $90^\circ$

(7) صحيحة

(8) صحيحة

(9) خطأ؛  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

مراجعة الدروس:

1-1: مقدمة في المتجهات:

حدد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كل مما يأتي:

(10) كمية متجهة

(11) كمية قياسية

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث أو قاعدة متوازي الأضلاع.  
قرب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتيمتر ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي،  
مستعملا المسطرة والمنقلة:

(12)  $6.3 \text{ cm}, 11^\circ$

(13)  $1.2 \text{ cm}, 130^\circ$

(14)  $2.8 \text{ cm}, 297^\circ$

(15)  $4.8 \text{ cm}, 195^\circ$

(16) 80 m للشرق

(17) 20 N للخلف

2-1: المتجهات في المستوى الإحداثي:

أوجد الصورة الإحداثية وطول  $AB$  المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

$$(6, 1); \sqrt{37} \approx 6.1 \quad (18)$$

$$(-16, 8); \sqrt{320} = 8\sqrt{5} \approx 17.9 \quad (19)$$

$$(14, 5); \sqrt{221} \approx 14.9 \quad (20)$$

$$(1, 5); \sqrt{26} \approx 5.1 \quad (21)$$

إذا كان  $\mathbf{p} = \langle 4, 0 \rangle, \mathbf{q} = \langle -2, -3 \rangle, \mathbf{t} = \langle -4, 2 \rangle$  فلو وجد كلا مما يأتي:

$$(-8, -6) \quad (22)$$

$$(-4, 4) \quad (23)$$

$$(-18, -1) \quad (24)$$

$$(10, 11) \quad (25)$$

أوجد متجه وحدة  $u$  باتجاه  $v$  في كل مما يأتي:

$$\left\langle -\frac{7\sqrt{53}}{53}, \frac{2\sqrt{53}}{53} \right\rangle \quad (26)$$

$$\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle \quad (27)$$

$$\left\langle -\frac{5\sqrt{89}}{89}, \frac{8\sqrt{89}}{89} \right\rangle \quad (28)$$

$$\left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10} \right\rangle \quad (29)$$

### 3-1: الضرب الداخلي:

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين  $u, v$  في كل مما يأتي، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا:

(30) 1-؛ غير متعامدين

(31) 48؛ غير متعامدين

(32) 0؛ متعامدان

(33) 7؛ غير متعامدين

أوجد الزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $u, v$  في كل مما يأتي:

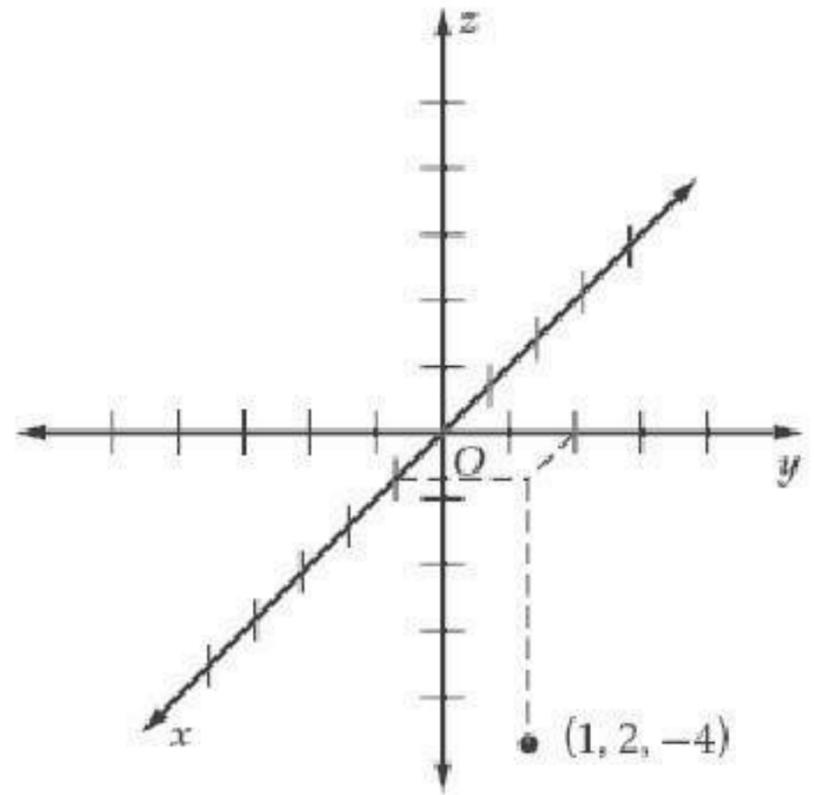
(34)  $135^\circ$

(35)  $70.6^\circ$

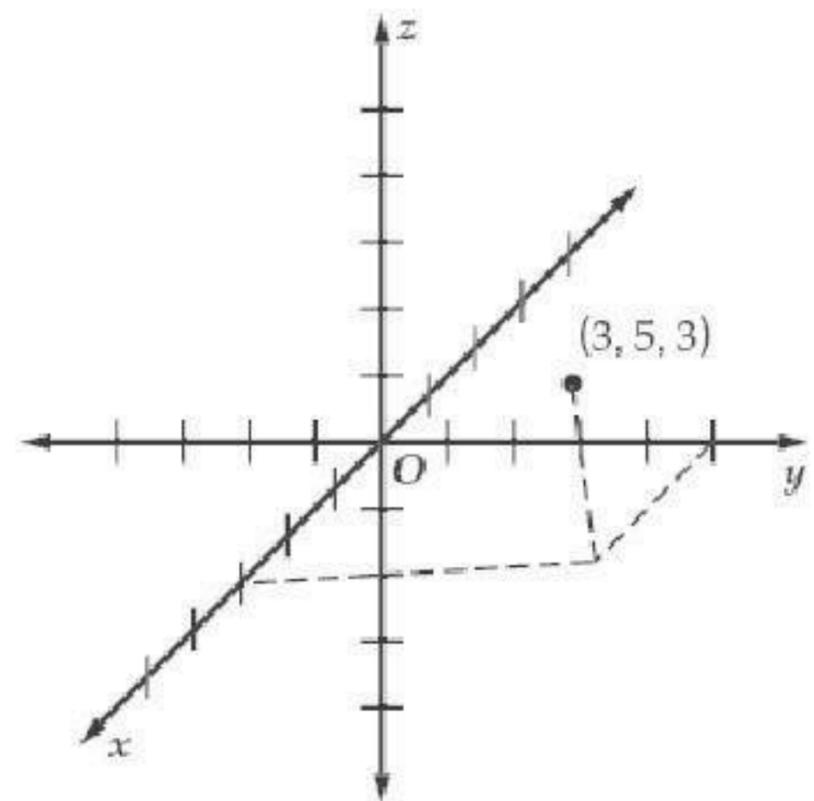
41-: المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد:

عين كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد:

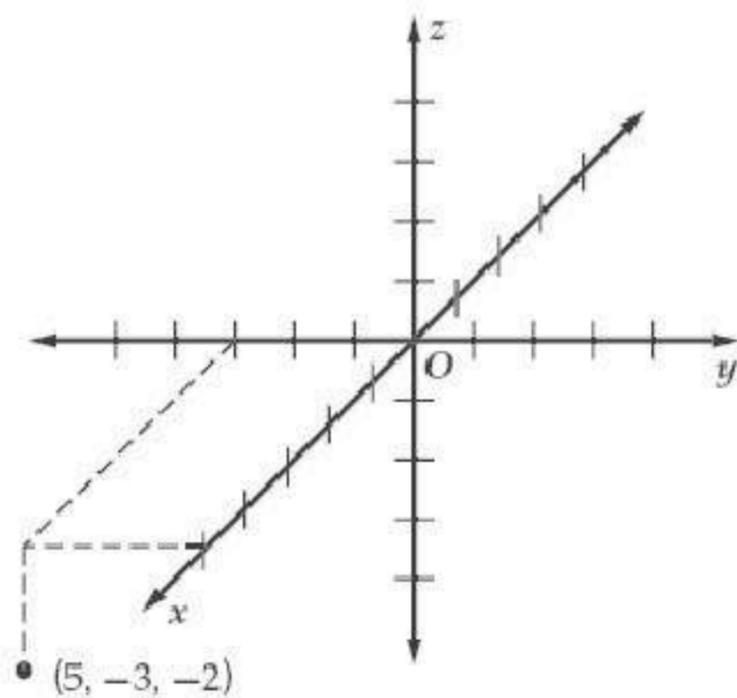
(36)



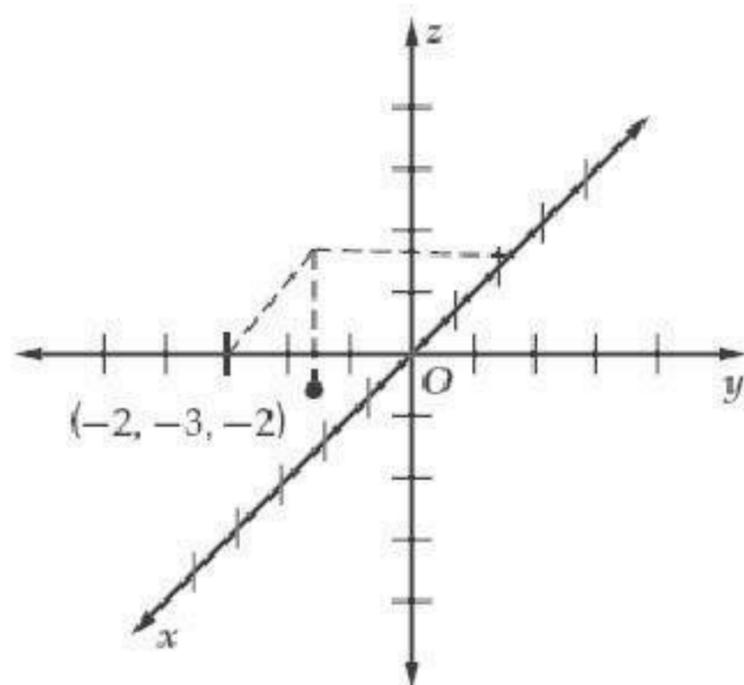
(37)



(38)



(39)



أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا طرفيها في كل مما يأتي، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها:

12.33;  $(-1, 5, 6)$  (40)

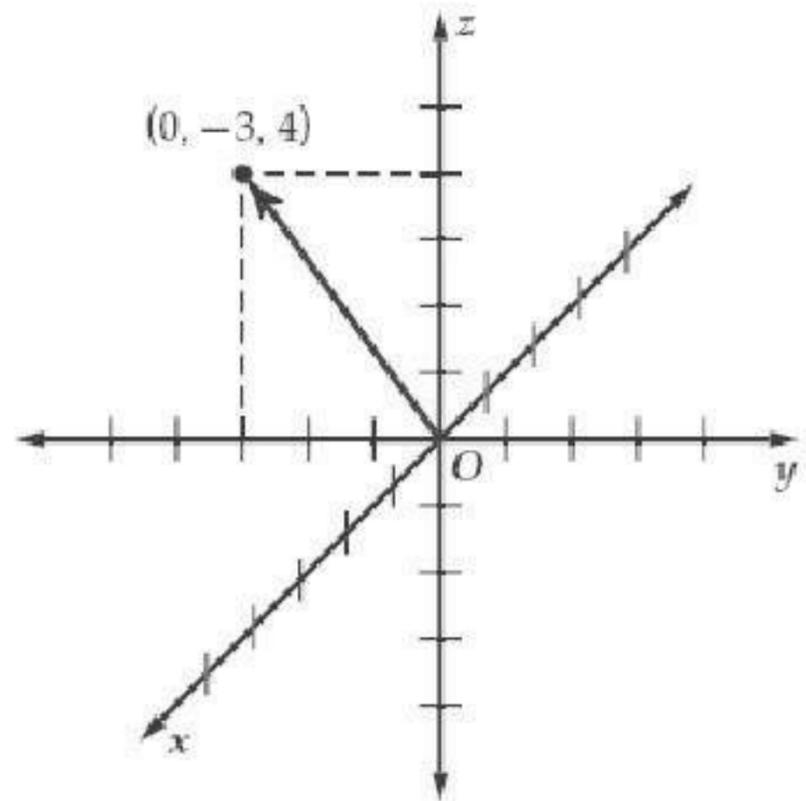
10.77;  $(-7, 2, 1)$  (41)

17.44;  $(-3, -4, 2)$  (42)

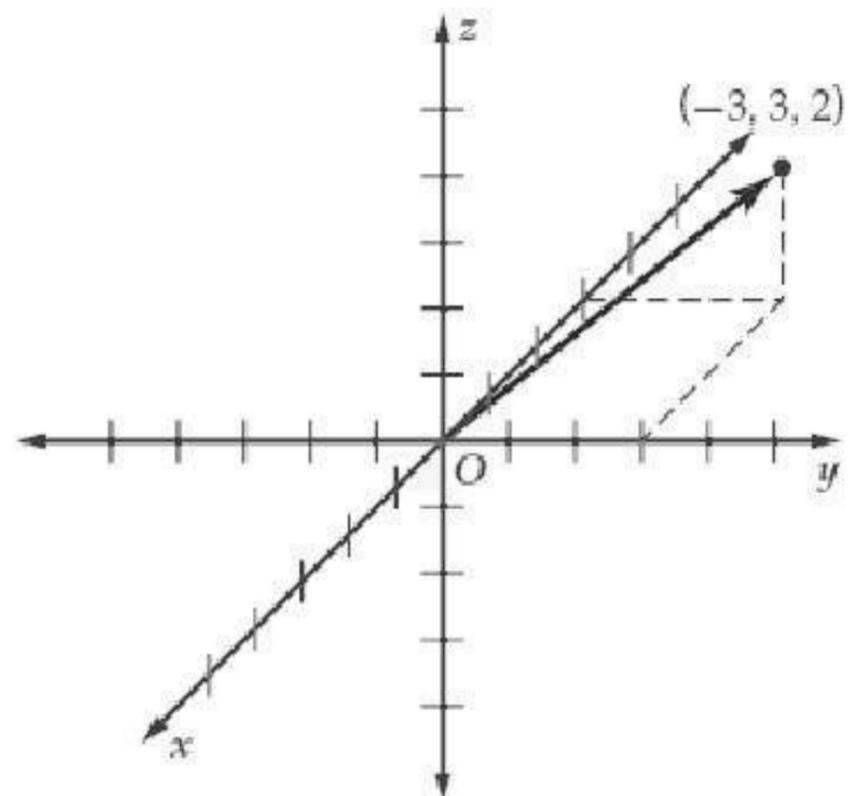
15.52;  $(2, -1.5, 4)$  (43)

مثل بيانياً كلاً من المتجهات الآتية في الفضاء:

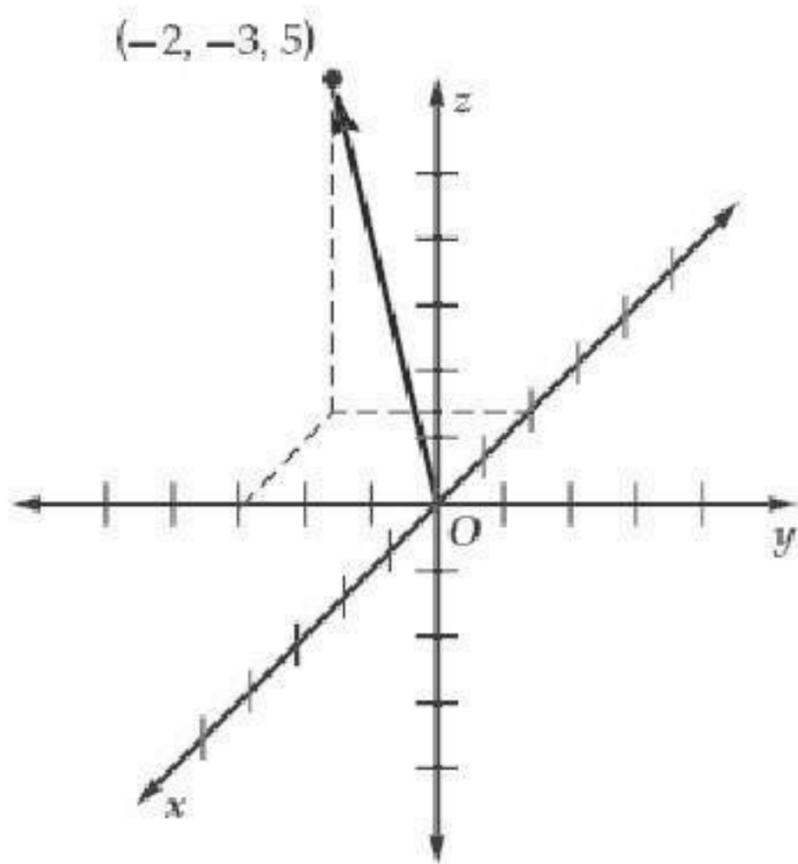
(44)



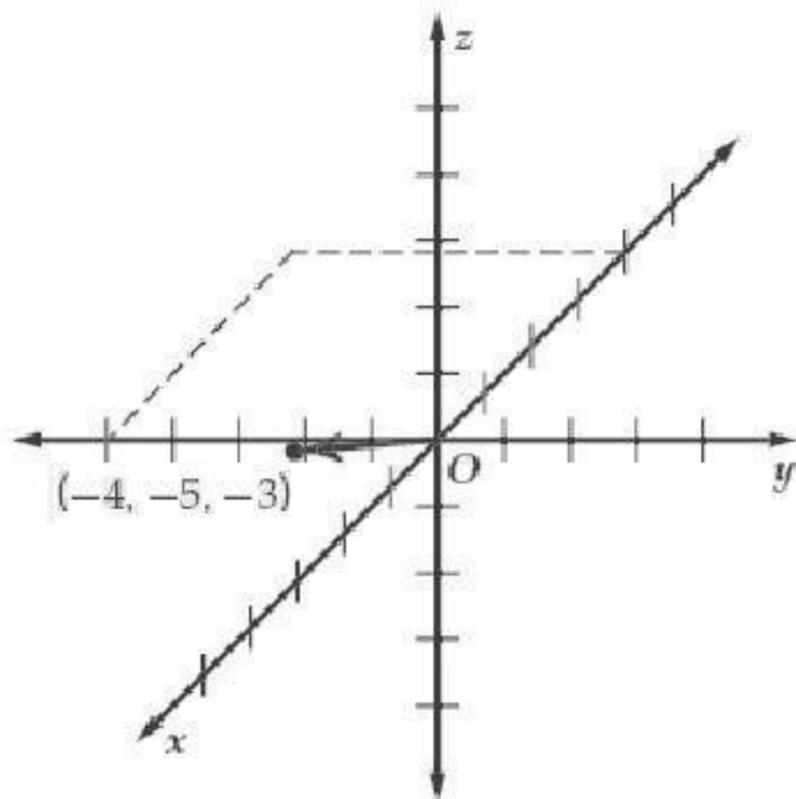
(45)



(46)



(47)



5-1: الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء:

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين  $u, v$  في كل مما يأتي، ثم حدد مما إذا كانا متعامدين أو لا:

(48) 0؛ متعامدان

(49) -48؛ غير متعامدين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين  $u, v$  في كل مما يأتي ، ثم بين أن  $u \times v$  يعامد كلا من  $u, v$ :

$$(17, -1, 10), (17, -1, 10) \cdot (1, -3, -2) = 0 \quad (50)$$

$$, (17, -1, 10) \cdot (2, 4, -3) = 0$$

$$(-9, -6, -21), (-9, -6, -21) \cdot (4, 1, -2) = 0 \quad (51)$$

$$, (-9, -6, -21) \cdot (5, -4, -1) = 0$$

**تطبيقات ومسائل:**

(52) كرة قدم:  $49.8 \text{ ft/s}$  تقريباً،  $23.2 \text{ ft/s}$  تقريباً

(53) طيران:  $(108.3, -19.1)$

(54) صناديق:  $509 \text{ J}$

(55) أقمار اصطناعية:

(a)  $118598 \text{ mi}$  تقريباً

(b)  $(-1494, 1621.5, 2294.5)$

(c) إجابة ممكنة: لا يمكن وجود قمر ثالث؛ لأن إحداثياته ستكون داخل الأرض؛ و ذلك لان القيمة المطلقة لجميع احداثيات موقع القمر الثالث أقل من نصف قطر الأرض

$$\langle 3, 0, 0 \rangle \cdot (\langle 0, 4, 0 \rangle \cdot \langle 0, 0, 5 \rangle) = 60 \text{ m}^3 \quad (56)$$

## اختبار الفصل

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، او قاعدة متوازي الأضلاع. قرب المحصلة إلأقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملاً المسطرة والمنقلة:

$$(1) \quad 0.8 \text{ cm}, 25^\circ$$

$$(2) \quad 4.6 \text{ cm}, 8^\circ \text{ تقريباً}$$

أوجد الصورة الإحداثية وطول  $AB$  المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

$$(3) \quad (-6, 4), \sqrt{52} \approx 7.2$$

$$(4) \quad \left\langle \frac{-3}{2}, \frac{11}{2} \right\rangle, \sqrt{32.5} \approx 5.7$$

$$(5) \quad \text{كرة قدم: } 33.7 \text{ m/s}; 22^\circ \text{ تقريباً}$$

أوجد متجه وحدة باتجاه  $u$  في كل مما يأتي:

$$(6) \quad \left( \frac{-\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17} \right)$$

$$\left( \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5} \right) \quad (7)$$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين  $u, v$  في كل مما يأتي ثم بين ما إذا كانا متعامدين أو لا:

(8) -16؛ غير متعامدين

(9) 0؛ متعامدان

(10) -14؛ غير متعامدين

(11) D

إذا كان  $a=(2, 4, -3)$  ,  $b=(-5, -7, 1)$  ,  $c=(8, 5, -9)$  فأوجد كلا مما يأتي:

(12)  $(-45, -42, 26)$

(13)  $(-1, -21, 1)$

(14) بالونات الهواء الساخن:

53.9 ft (a)

(b)  $\left( -\frac{9}{2}, 20, 20 \right)$

أوجد الزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $u, v$  في كل مما يأتي:

$$27.9^\circ \text{ (15)}$$

$$110.8^\circ \text{ (16)}$$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين  $u, v$  في كل مما يأتي ثم بين أن  $u \times v$  يعامد كلا من  $u, v$ :

$$(65, 16, -59), (17$$

$$(65, 16, -59) \cdot (1, 7, 3) = 65(1) + 16(7) + (-59)(3) = 0$$

$$(65, 16, -59) \cdot (9, 4, 11) = 65(9) + 16(4) + (-59)(11) = 0$$

المتجه  $u \times v$  يعامد كلا من المتجهين  $v, u$

$$-7i - 17j + 8k, (18$$

$$(-7, -17, 8) \cdot (-6, 2, -1) = (-7)(-6) + (-17)(2) + 8(-1) = 0$$

$$(-7, -17, 8) \cdot (5, -3, -2) = (-7)(5) + (-17)(-3) + 8(-2) = 0$$

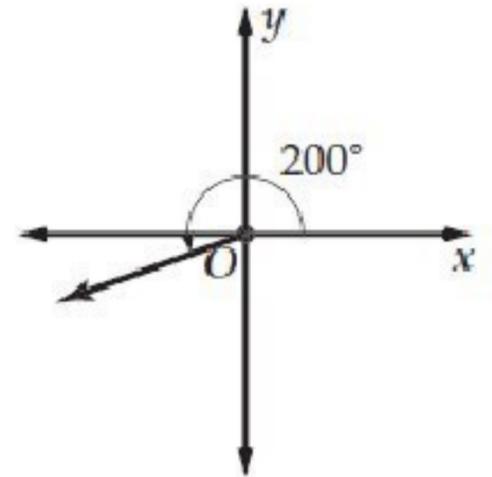
المتجه  $u \times v$  يعامد كلا من المتجهين  $v, u$

# التهيئة

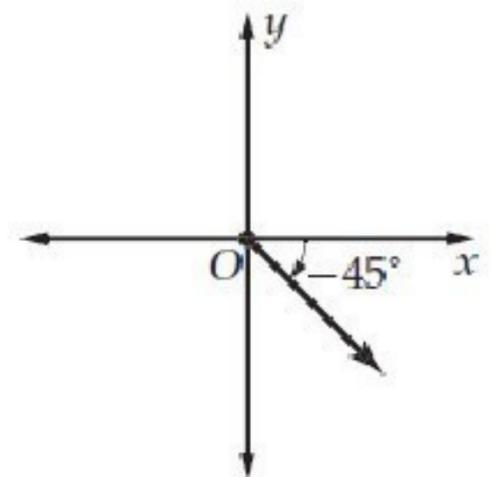
اختبار سريع:

ارسم كلا من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

(1)

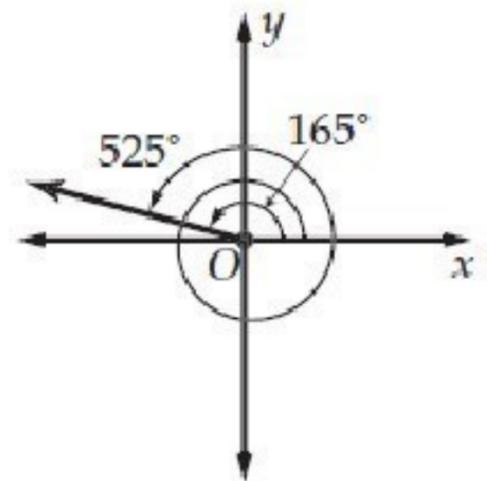
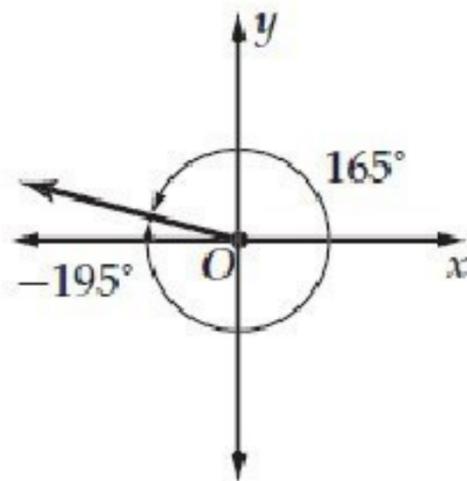


(2)

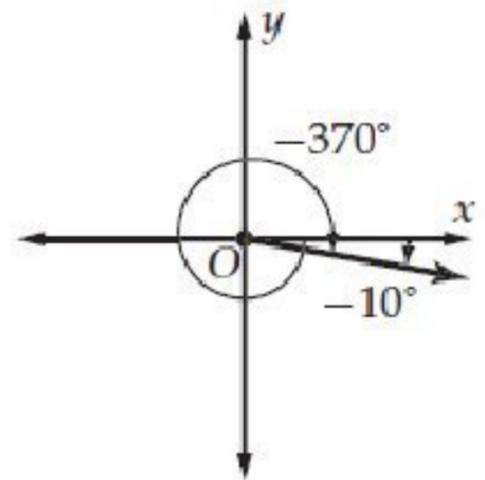
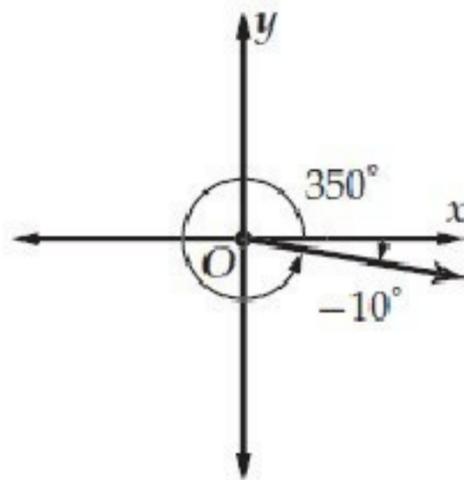


أوجد زاوية بقياس موجب وأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل من الزوايا الآتية ومثلها في الوضع القياسي:

$525^\circ, -195^\circ$  (3)

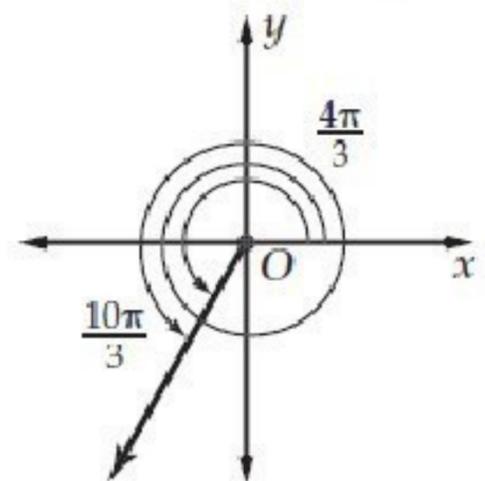
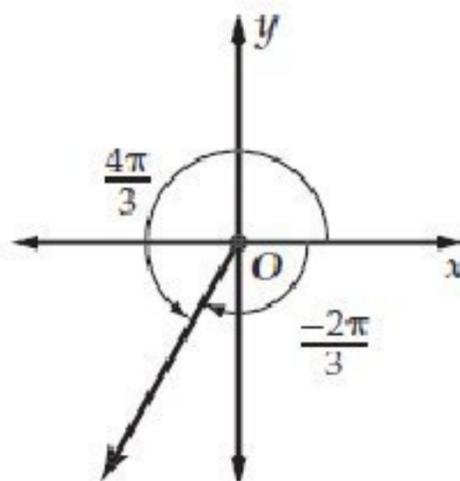


$350^\circ, -10^\circ$  (4)

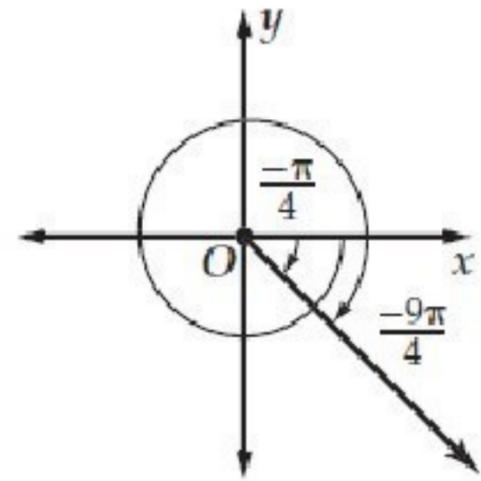
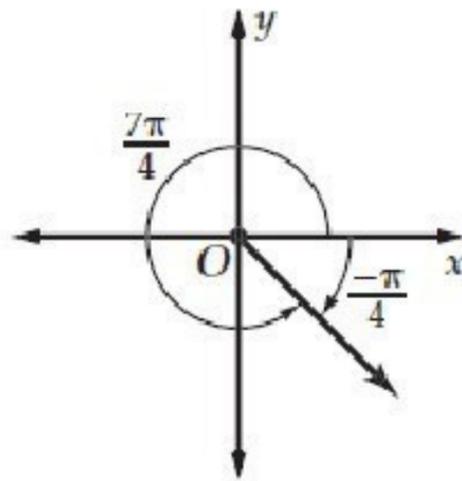


$\frac{10\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$  (5)

$\frac{3}{3}$        $\frac{3}{3}$



$$\frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4} \quad (6)$$



حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات في كل مما يأتي:

$$-\frac{\pi}{3} \quad (7)$$

$$270^\circ \quad (8)$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad (9)$$

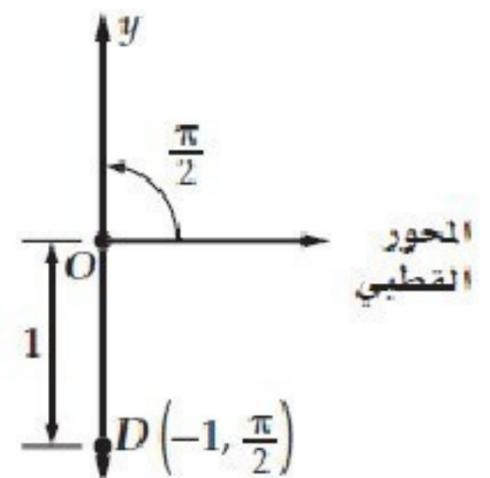
$$3.6 \text{ m تقريباً} \quad (10)$$

# الإحداثيات القطبية

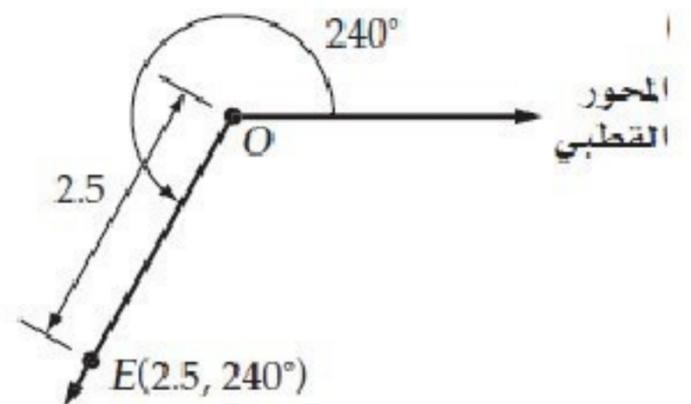
2-1

تحقق

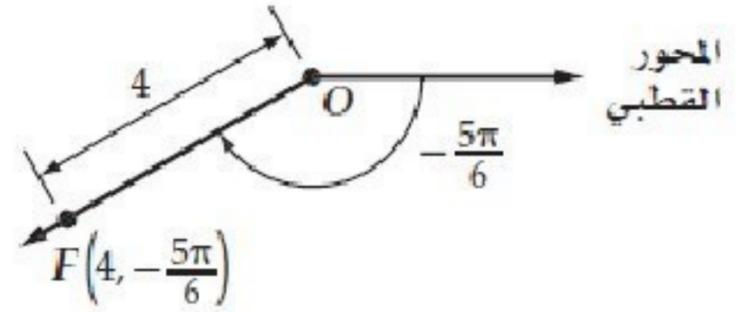
(1A)



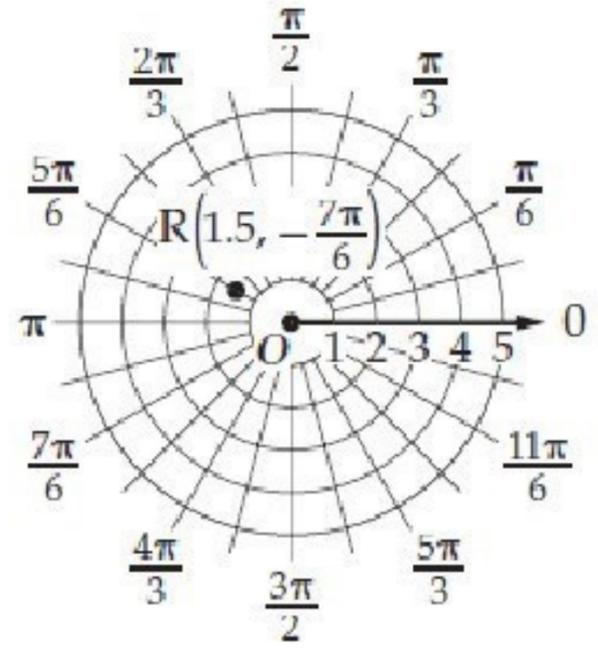
(1B)



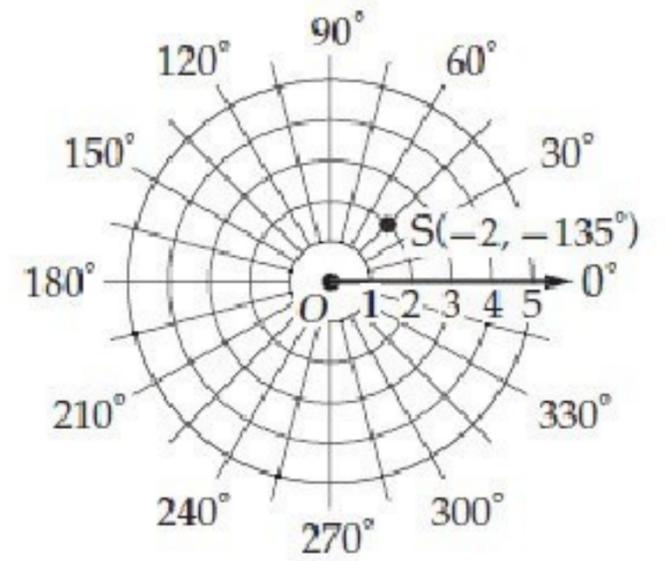
(1C)



(2A)



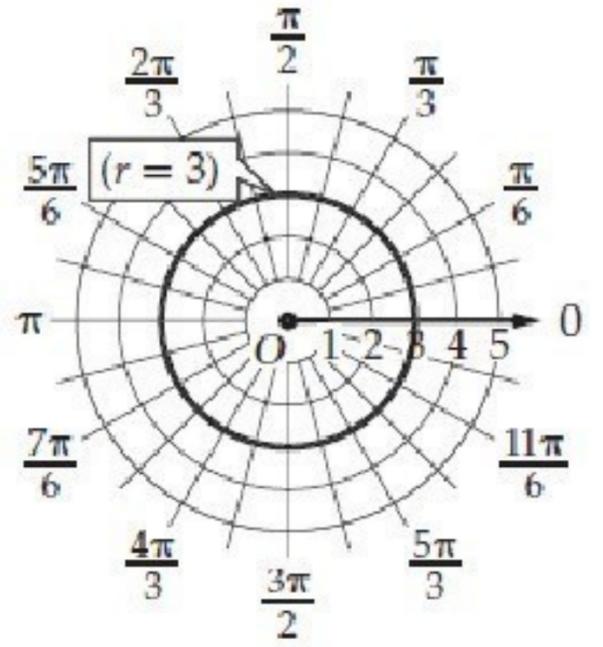
(2B)



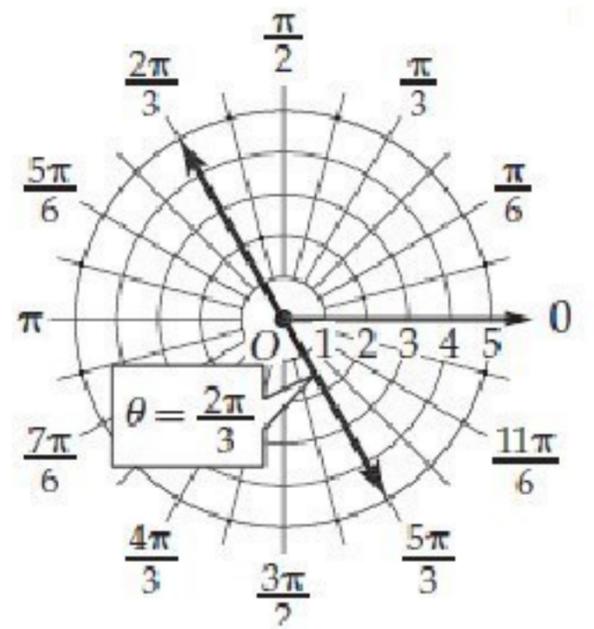
$(5, -120^\circ), (-5, 60^\circ), (-5, -300^\circ)$  (3A)

$(-2, -\frac{11\pi}{6}), (+2, -\frac{5\pi}{6}), (+2, -\frac{5\pi}{6})$  (3B)

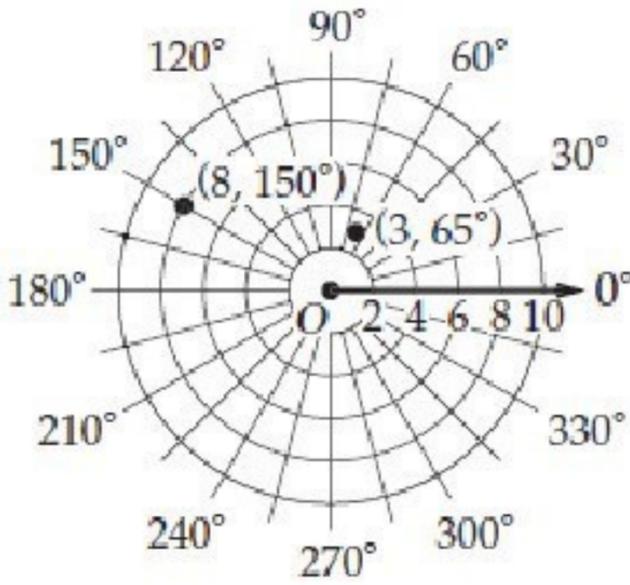
(4A)



(4B)



(5A)



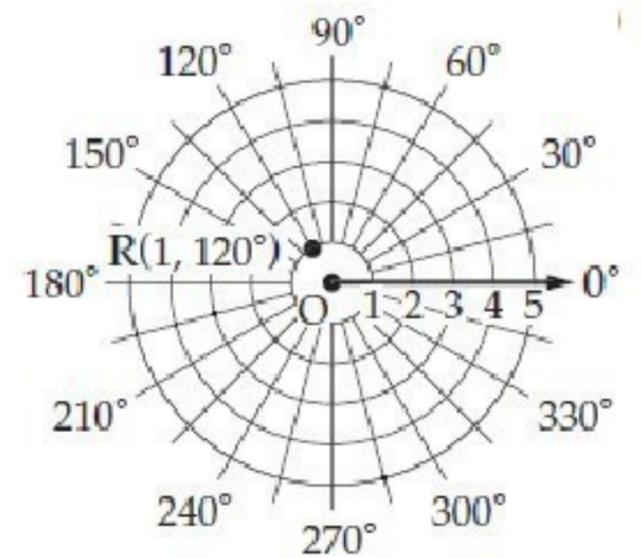
8.30 mil (5B)

# تدرب وحل المسائل:

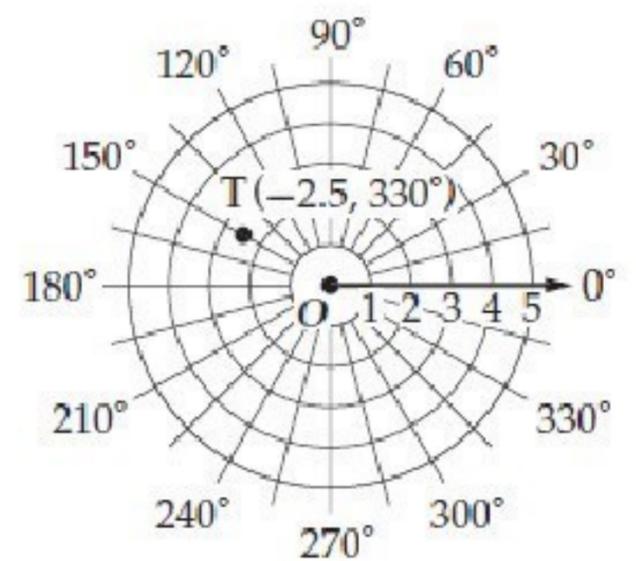


مثل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي:

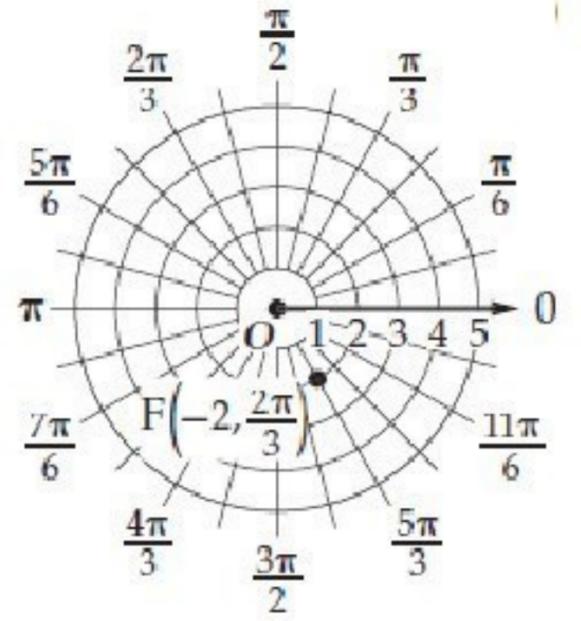
(1)



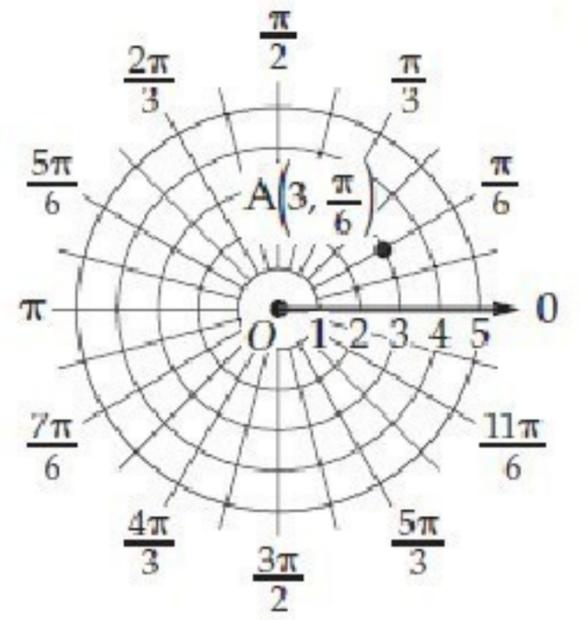
(2)



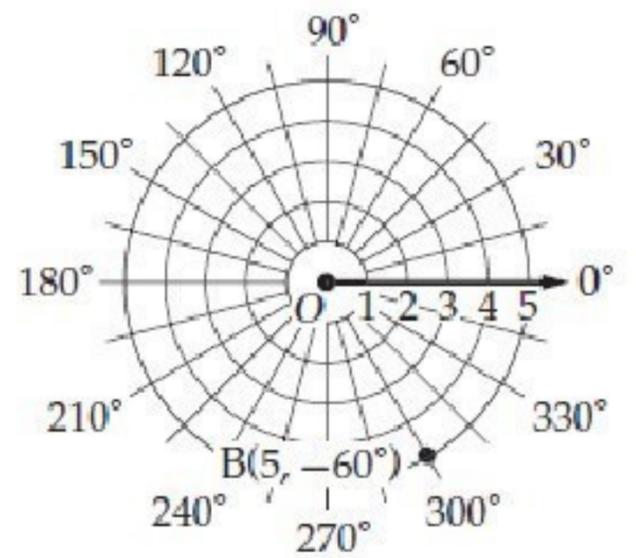
(3)



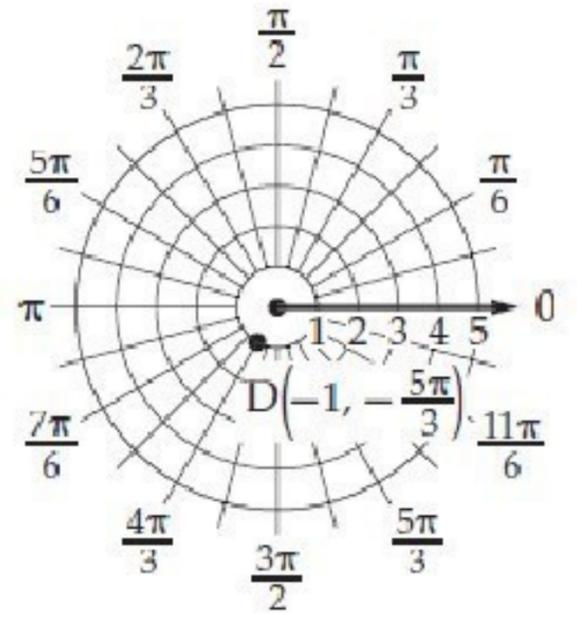
(4)



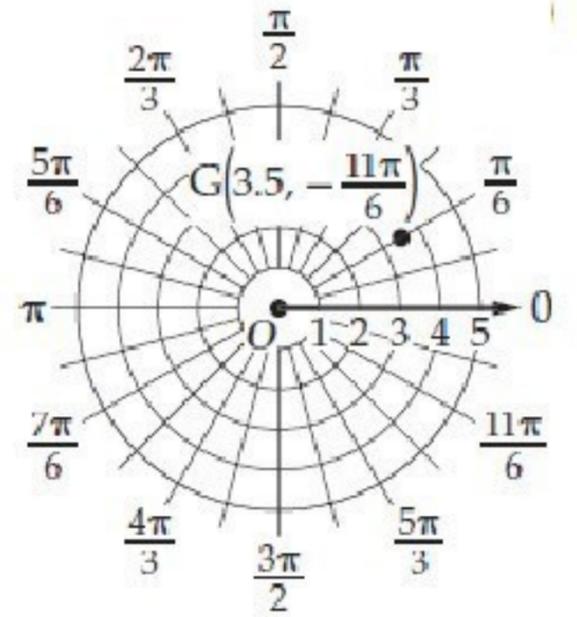
(5)



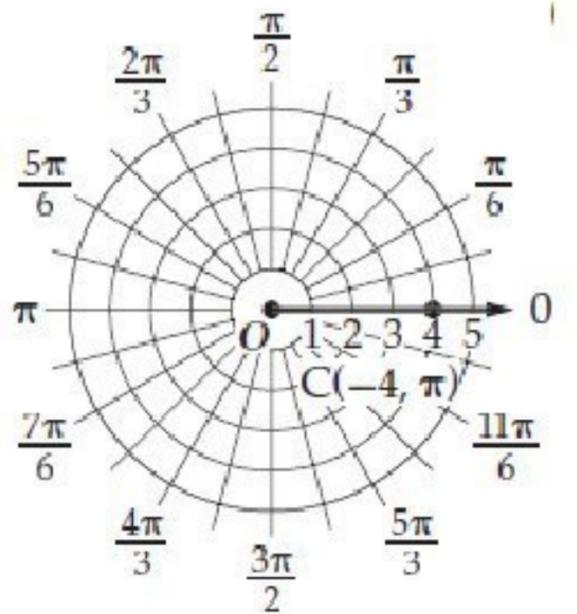
(6)



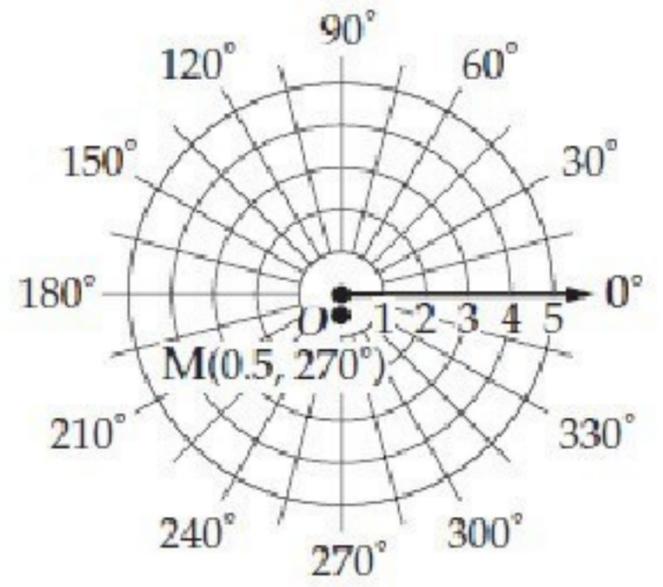
(7)



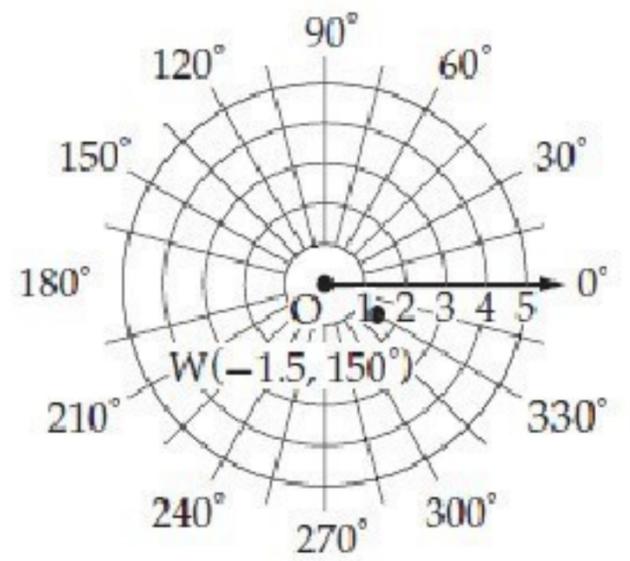
(8)



(9)

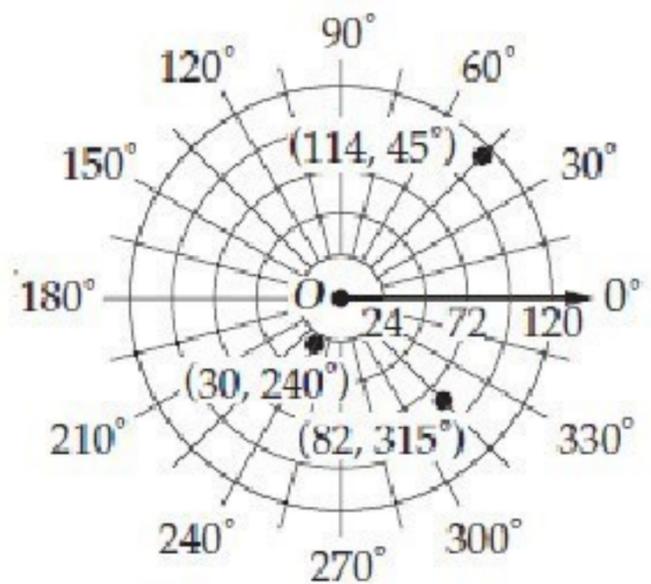


(10)



(11) رمالية:

(a)



(b) 13 نقطة.

إذا كانت  $360^\circ \leq \theta \leq -360^\circ$ ، فأوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثل إحداثيين قطبيين للنقطة في كل مما يأتي:

$$(12) (-1, 330^\circ), (1, -210^\circ), (-1, -30^\circ)$$

$$(13) (2, 120^\circ), (2, -240^\circ), (-2, -60^\circ)$$

$$(14) \left(4, \frac{5\pi}{6}\right), \left(-4, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-4, \frac{-\pi}{6}\right)$$

$$(15) \left(3, \frac{5\pi}{3}\right), \left(3, \frac{-\pi}{3}\right), \left(-3, \frac{-4\pi}{3}\right)$$

$$(16) \left(5, \frac{-\pi}{6}\right), \left(-5, \frac{5\pi}{6}\right), \left(-5, \frac{-7\pi}{6}\right)$$

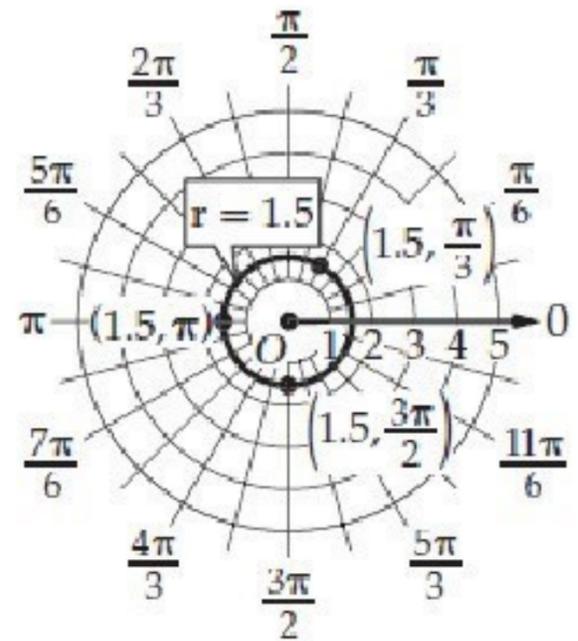
$$(17) \left(5, \frac{5\pi}{3}\right), \left(5, \frac{-\pi}{3}\right), \left(-5, \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$(18) (2, 330^\circ), (-2, 150^\circ), (-2, -210^\circ)$$

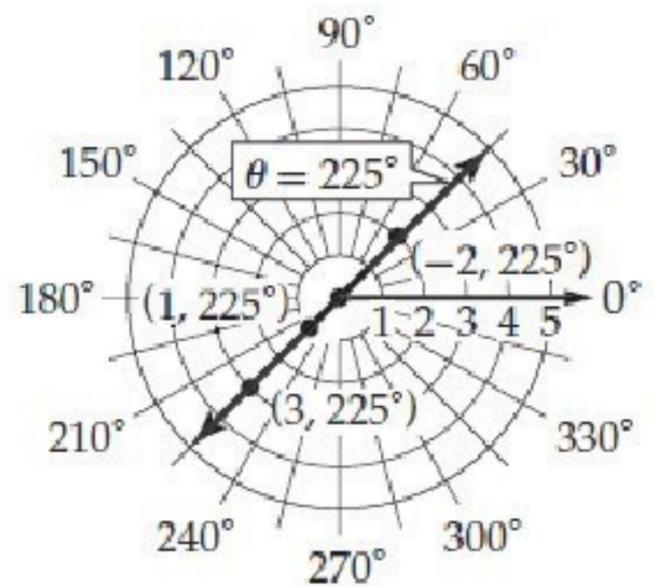
$$(19) (1, 300^\circ), (1, -60^\circ), (-1, 120^\circ)$$

مثل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانياً:

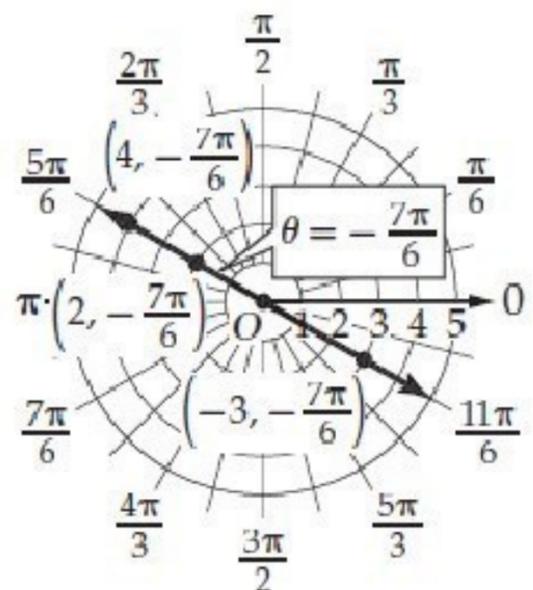
(20)

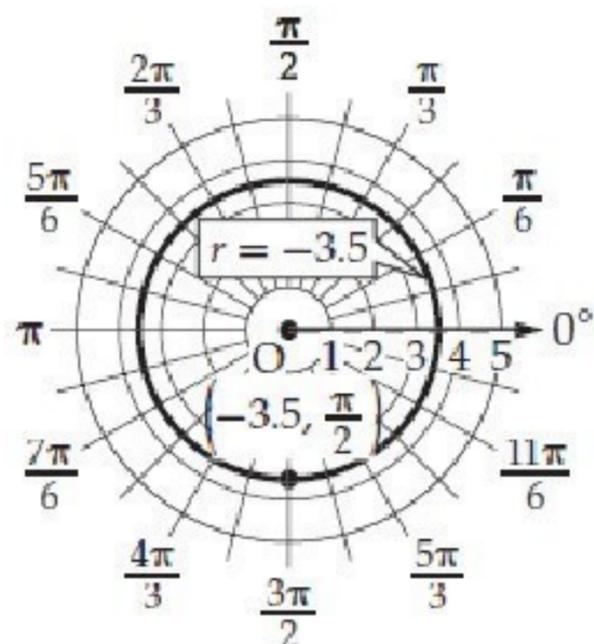


(21)



(22)

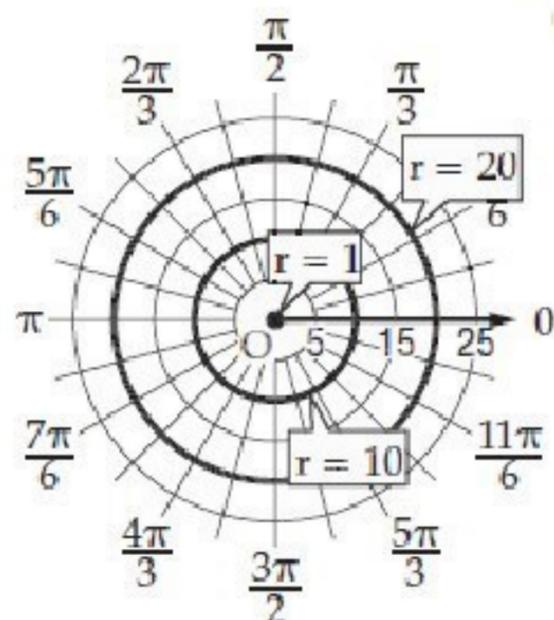




(24) القفز بالمظلات:

$r = 1, r = 10, r = 20$  (a)

(b)



أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط فيما يأتي:

(25)  $5.39 \approx$

(26)  $10.70 \approx$

(27)  $5.97 \approx$

8 (28)

1 (29)

3.05≈ (30)

7.21≈ (31)

5 (32)

4.84≈ (33)

6.08≈ (34)

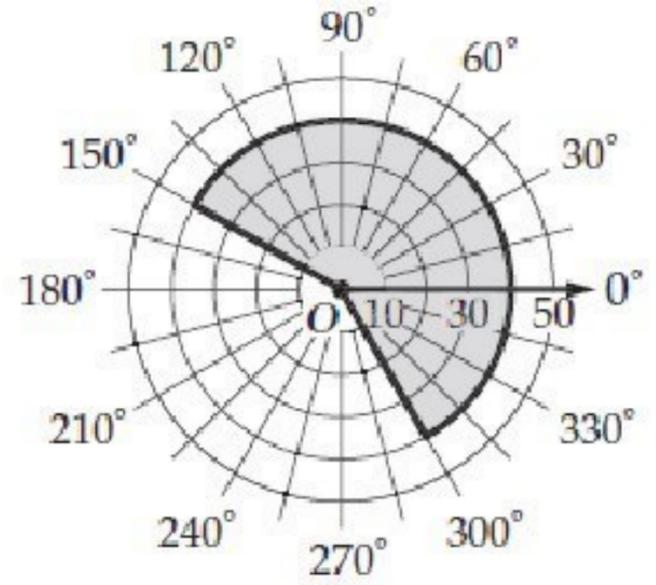
4.26≈ (35)

5.35≈ (36)

542.5 ft. : مساحون (37)

(38) مراقبة:

(a)



(b) حوالي  $2932.2 \text{ m}^2$

إذا كانت  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ، فأوجد زوجاً آخر من الإحداثيات القطبية لكل نقطة مما يأتي:

(39)  $(-5, 60^\circ)$

(40)  $\left(-2.5, \frac{\pi}{2}\right)$

(41)  $\left(4, \frac{3\pi}{4}\right)$

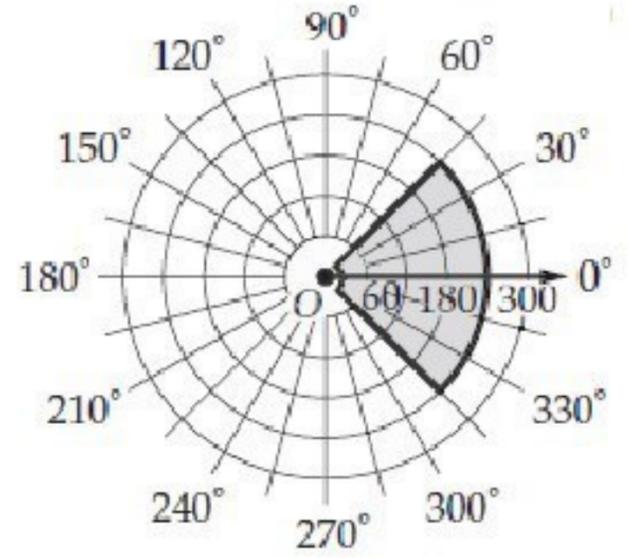
(42)  $(1.25, 160^\circ)$

(43)  $\left(1, \frac{3\pi}{8}\right)$

(44)  $(6, 160^\circ)$

(45) مسرّح:

(a)



(b) 8906 مقاعد تقريباً

(46) أمن: 10 ft. تقريباً

أوجد الإحداثي المجهول الذي يحقق الشروط المعطاة في كل مما يأتي:

$$(47) \quad r = 6 \text{ أو } r = -1.40$$

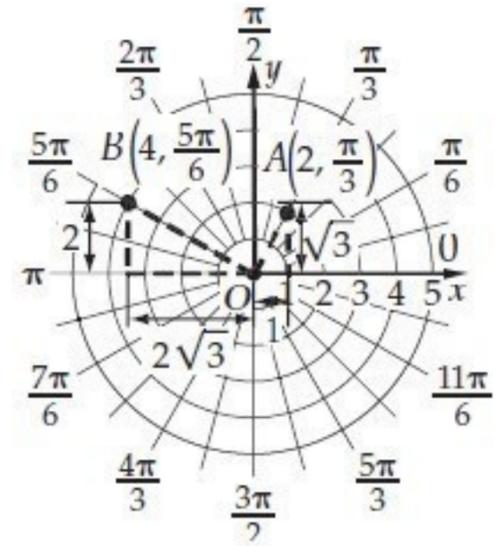
$$(48) \quad \theta \approx 75.5 \text{ أو } \theta \approx 174.46^\circ$$

$$(49) \quad \theta \approx \frac{5\pi}{18}$$

$$(50) \quad r \approx 5.13 \text{ أو } r \approx 1$$

51 تمثيلات متعددة:

(a)

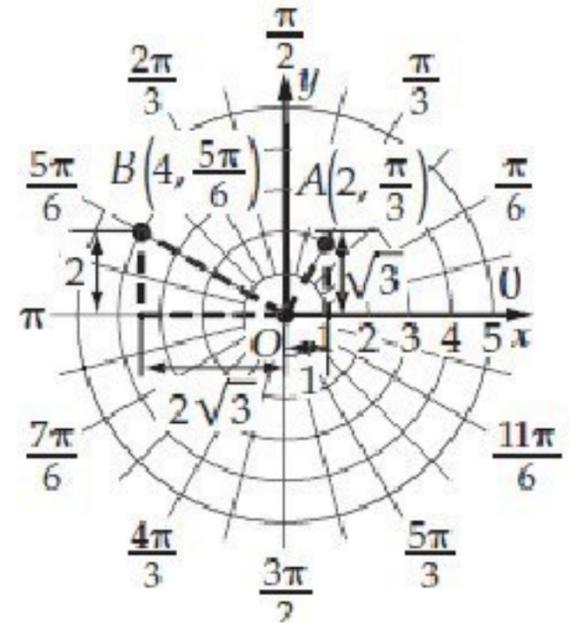


(b)

$$x = r \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r \sin \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

(c)



(d) يمثل طول الضلعين الأفقي والرأسي القيمة المطلقة للإحداثيين  $x, y$  على الترتيب.

(e) إذا كانت إحداثيات النقطة القطبية  $(r, \theta)$  ، فإن إحداثياتها الديكارتية هي  
 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$

اكتب المعادلة لكل تمثيل قطبي مما يأتي:

(52) إجابة ممكنة:  $\theta = \pi$

12

(53)  $r = -2.5$  أو  $r = 2.5$

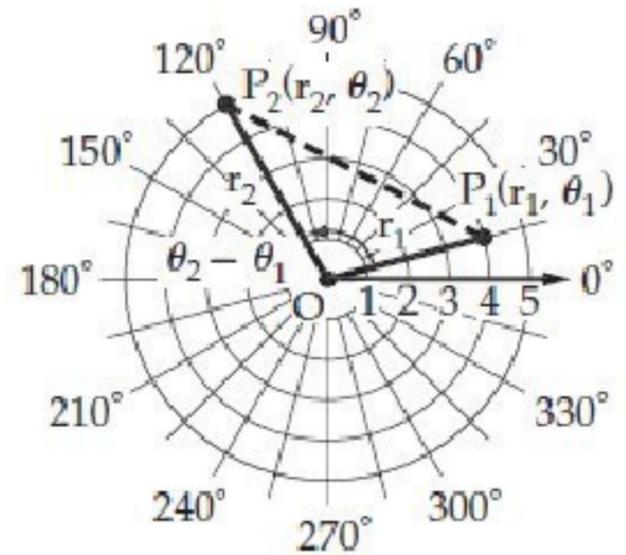
## مسائل مهارات التفكير العليا:

(54) إجابة ممكنة: تحتوي صيغة المسافة على عمليتي ضرب قيم  $r$  وجمعها، وكلتا العمليتين إبدالية. والدالة  $\cos \theta$  دالة زوجية. لذا،  $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ، ومنه

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

(55) تقريباً  $(5, 233^\circ)$

(56)



في المثلث الذي رؤوسه  $P_1$ ،  $P_2$  والقطب، ضلعان معلومان وزاوية محصورة بينهما؛ لذا وباستعمال قانون جيب التمام، فإن:

$$(P_1P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \text{ أو}$$

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

(57) عندما  $(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\pi}{2}$ ، فإن  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ، وعليه فإن تبسيط قانون المسافة القطبية

يعطي  $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ . وهذه النتيجة تكافئ نظرية فيثاغورس، حيث تمثل القطعة المستقيمة

الواصلة بين النقطتين وتر المثلث القائم الذي رؤوسه هاتان النقطتان ونقطة الأصل.

(58) سعيد؛ إجابة ممكنة: عين علي نقطة على المحور القطبي ورسم منها قطعة مستقيمة رأسية طولها 5 وحدات، بينما كان عليه تعيين نقطة تبعد 5 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية.

(59) في الإحداثيات القطبية، لا يؤخذ ارتفاع الطائرة في الحساب لتحديد موقعها بشكل دقيق.

## مراجعة تراكمية

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين  $u, v$ ، ثم حدد ما إذا كان  $u, v$  متعامدين، لكل مما يأتي:

(60) 3-؛ ليسا متعامدين

(61) 0؛ متعامدان

(62) 14-؛ ليسا متعامدين

إذا كان  $a = (-4, 3, -2)$ ،  $b = (2, 5, 1)$ ،  $c = (3, -6, 5)$  فأوجد كلا مما يأتي:

(63)  $(16, -29, 36)$

(64)  $(1, 44, -17)$

أوجد الزاوية  $\theta$  بين المتجهين  $u, v$  لكل مما يأتي:

(65)  $133.9^\circ$

(66)  $144.3^\circ$

(67)  $61.45^\circ$

أوجد إحداثيات مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر الآتية:

(68) المركز  $(0, 1)$  ، ونصف القطر 3

(69) المركز  $(-1, 0)$  ، ونصف القطر 4

(70) المركز  $(0, 0)$  ، ونصف القطر 1

تدريب على اختبار:

A (71)

B (72)

# الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

2-2

تحقق

(1A)  $(3, 3\sqrt{3})$  أو  $(3, 5.20)$  تقريباً

(1B)  $(2.5, 2.5\sqrt{3})$  أو  $(2.5, 4.33)$  تقريباً

(1C)  $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$  أو  $(-2.1, -2.1)$  تقريباً

(2A) تقريباً  $(12.8, 4.04)$  , تقريباً  $(12.8, 0.90)$

(2B) تقريباً  $(-9.85, 6.70)$  , تقريباً  $(9.85, 3.56)$

(3) صيد الأسماك:

(A) تقريباً  $(-3.44, 4.91)$

(B) تقريباً  $(6.32, 108^\circ)$

$$r = 6 \sin \theta \quad (4A)$$

$$r^2 = \sec 2\theta \quad (4B)$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad (5A) \text{ دائرة}$$

$$y = \sqrt{3}x \quad (5B) \text{ مستقيم}$$

$$x^2 + y^2 - 3x = 0 \quad (5C) \text{ دائرة}$$

## تدريب وحل المسائل:



حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي:

$$(1) (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$(2) \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

$$(3) (-2.5, -2.5\sqrt{3})$$

$$(4) (-0.86, -2.35) \text{ تقريباً}$$

$$(5) (1, \sqrt{3})$$

(6)  $(-4.45, 12.22)$  تقريباً

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad (7)$$

(8)  $(0, 2)$

$$\left(-2\sqrt{3}, -2\right) \quad (9)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (10)$$

**أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية في كل مما يأتي:**

$$\approx (12.21, 0.96), \approx (-12.21, 4.1) \quad (11)$$

$$\approx (12.21, 55^\circ), \approx (-12.21, 235^\circ) \quad \text{أو}$$

$$\approx (13.6, 2.84), \approx (-13.6, 5.98) \quad (12)$$

$$\approx (13.6, 163^\circ), \approx (-13.6, 343^\circ) \quad \text{أو}$$

$$\approx (13.42, 4.25), \approx (-13.42, 1.11) \quad (13)$$

$$\approx (13.42, 244^\circ), \approx (-13.42, 64^\circ) \quad \text{أو}$$

$$(12.65, 5.03), (-12.65, 1.89) \quad (14)$$
$$\approx (12.65, 288^\circ), \approx (-12.65, 108^\circ) \text{ أو}$$

$$(3.61, 5.30), (-3.61, 2.16) \quad (15)$$
$$\approx (3.61, -72^\circ), \approx (-3.61, 124^\circ) \text{ أو}$$

$$\left(173, \frac{3\pi}{2}\right), \left(-173, \frac{\pi}{2}\right) \quad (16)$$
$$\approx (173, 270^\circ), \approx (-173, 90^\circ) \text{ أو}$$

$$\approx (3.16, 1.25), \approx (-3.16, 4.39) \quad (17)$$
$$\approx (3.16, 72^\circ), \approx (-3.16, 252^\circ) \text{ أو}$$

$$\approx (19.8, 0.75\pi), \approx (-19.8, 1.75\pi) \quad (18)$$
$$\approx (19.8, 135^\circ), \approx (-19.8, 315^\circ) \text{ أو}$$

$$\approx (60.54, 0.54), \approx (-60.54, 2.61) \quad (19)$$
$$\approx (60.54, 31^\circ), \approx (-60.54, 150^\circ) \text{ أو}$$

$$\approx (5, -0.93), \approx (-5, 2.21) \quad (20)$$
$$\approx (5, 53^\circ), \approx (-5, 127^\circ) \text{ أو}$$

$$\approx \left(1.41, -\frac{\pi}{4}\right), \approx \left(-1.41, \frac{3\pi}{4}\right) \quad (21)$$

أو  $\approx (1.41, -45^\circ), \approx (-1.41, 135^\circ)$

$$\approx (2.45, 0.62), \approx (-2.45, 3.76) \quad (22)$$

أو  $\approx (2.45, 36^\circ), \approx (-2.45, 216^\circ)$

**(23) مسافات:**

(a) 1.2 mi شرقاً و 0.90 mi شمالاً

(b) (2.06, 194.04°)

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

$$r = -2 \sec \theta, \text{ مستقيم, (24)}$$

$$r = -10 \cos \theta, \text{ دائرة, (25)}$$

$$r = -3 \csc \theta, \text{ مستقيم, (26)}$$

$$r = 5 \sec \theta, \text{ مستقيم, (27)}$$

$$r = 4 \cos \theta, \text{ دائرة, (28)}$$

$$r = -6 \sin \theta, \text{ دائرة, (29)}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \text{ مستقيم, (30)}$$

$$r = -2 \sin \theta, \text{ دائرة, (31)}$$

اكتب كل معادلة قطبية مما يأتي على الصورة الديكارتية

$$x^2 + y^2 - 3y = 0 \quad (32)$$

$$y = -\sqrt{3}x \quad (33)$$

$$x^2 + y^2 = 100 \quad (34)$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \quad (35)$$

$$y = 4x \quad (36)$$

$$y = 8 \quad (37)$$

$$x^2 + y^2 = 16 \quad (38)$$

$$-\frac{1}{7}x = y \quad \text{أو} \quad x = -7y \quad (39)$$

$$y = -x \quad (40)$$

$$x = 1 \quad (41)$$

(42) **زلازل:**

$$x^2 + y^2 - 12.6y = 0 \quad (a)$$

**اكتب كل معادلة قطبية مما يأتي على الصورة الديكارتية**

$$y = 1 - x \quad \text{أو} \quad x + y = 1 \quad (43)$$

$$y = x + 10\sqrt{2} \quad \text{أو} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = -2 \quad (44)$$

$$x = -3 \quad (45)$$

$$y = \sqrt{3}x + 4 \text{ أو } \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x = 10 \quad (46)$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ أو } -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 4 \quad (47)$$

$$y = x - 5 \text{ أو } x - y = 5 \quad (48)$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \text{ أو } x^2 + y^2 - \sqrt{3}x - y = 0 \quad (49)$$

$$x^2 + (y + 2)^2 = 4 \text{ أو } x^2 + y^2 + 4x - y = 0 \quad (50)$$

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القطبية

$$r = \frac{4}{6\cos\theta - 3\sin\theta} \quad (51)$$

$$r = \frac{12}{2\cos\theta - 5\sin\theta} \quad (52)$$

$$r = 12\cos\theta + 16\sin\theta \quad (53)$$

$$r = -6\cos\theta + 4\sin\theta \quad (54)$$

55) جولف:

$$39\pi \text{ yd}^2 \approx 122.52 \text{ yd}^2$$

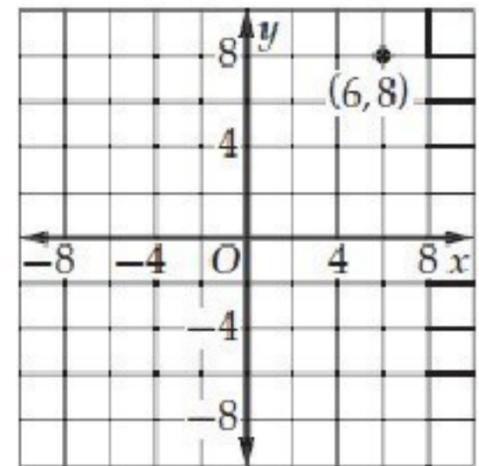
56) عجلة دوارة:

$$x^2 + (y - 10)^2 = 100 \text{ (a)}$$

$$r = 20 \sin \theta \text{ (b)}$$

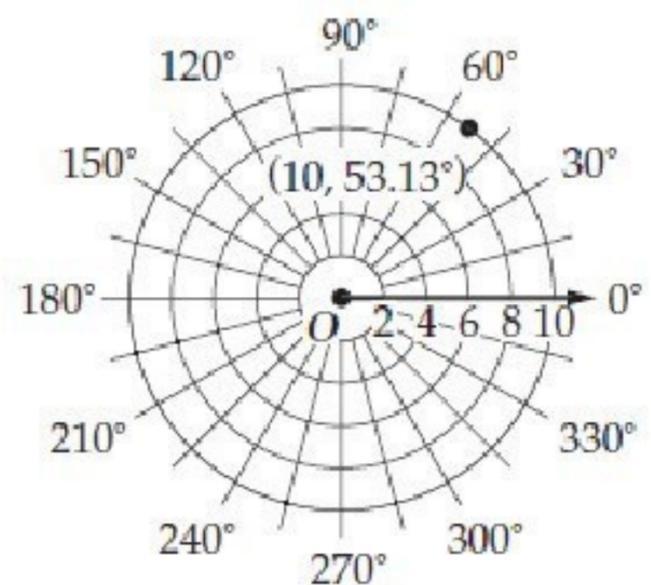
57) تمثيلات متعددة:

(a)

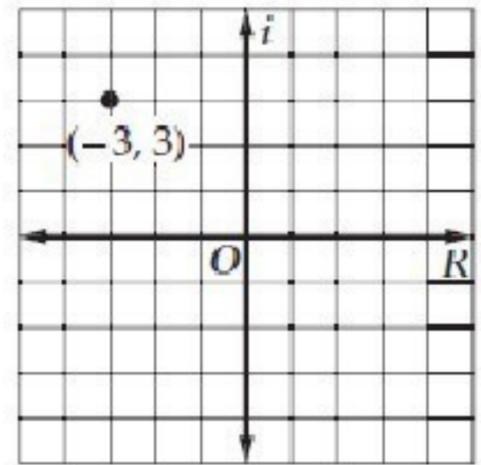


(b)  $(10, 0.93)$  أو  $(10, 53.13^\circ)$

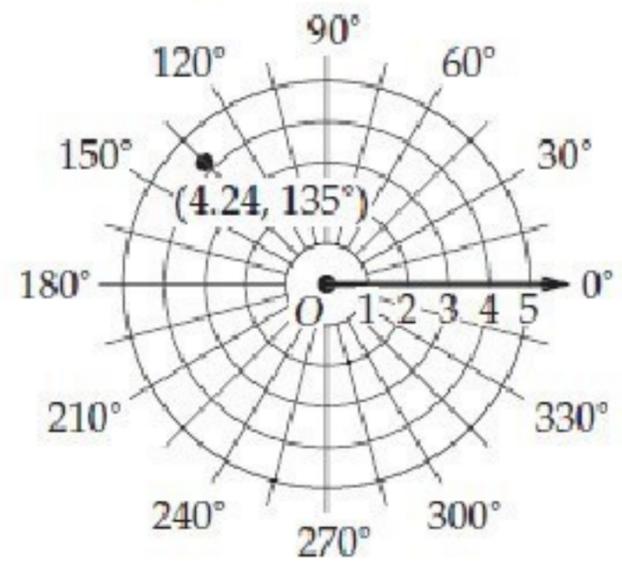
(c)



(d)



(e)  $(4.24, 135^\circ)$  أو  $(4.24, \frac{3\pi}{4})$



$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (f)$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{b}{a} \text{ عندما } a \text{ موجبة،}$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1} \frac{b}{a} + \pi \text{ عندما } a \text{ سالبة.}$$

## مسائل مهارات التفكير العليا:

(58) **اكتشف الخطأ:** توفيق؛ إجابة ممكنة: استعمل توفيق التعويض الصحيح. وتمثيل معادلته يطابق المعادلة القطبية الأصلية، في حين تمثل إجابة باسل دالة الجيب، ولا تمثل الدائرة التي هي التمثيل البياني للمعادلة القطبية الأصلية.

(59) **تحذ:**  $(x - a)^2 + y^2 = a^2$  ، المركز  $(a, 0)$  ، نصف القطر  $a$

(60) **اكتب:** إجابة ممكنة: تمثيل معادلات لا تمثل دوال، كمعادلات الدوائر أسهل باستعمال الصورة القطبية من استعمال الصورة الديكارتية، في حين أن تمثيل معادلات تمثل دوال كالدوال الخطية أسهل باستعمال الصورة الديكارتية.

(61) **برهان:**  $x = r \cos \theta$

$$y = r \sin \theta$$

$$x = r \cos \theta$$

$$\frac{y}{\sin \theta} = r$$

$$\frac{x}{\cos \theta} = r$$

$$y \cdot \frac{1}{\sin \theta} = r$$

$$x \cdot \frac{1}{\cos \theta} = r$$

$$y \csc \theta = r$$

$$x \sec \theta = r$$

(62) **تحذ:**

$$r^2 (4 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) + r (-8a \cos \theta + 6b \sin \theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$

$$4r^2 \cos^2 \theta + 3r^2 \sin^2 \theta - 8ar \cos \theta + 6br \sin \theta = 12 - 4a^2 - 3b^2$$

$$4(r \cos \theta)^2 + 3(r \sin \theta)^2 - 8a(r \cos \theta) + 6b(r \sin \theta) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$

$$4x^2 + 3y^2 - 8ax + 6by = 12 - 4a^2 - 3b^2$$

$$4x^2 - 8ax + 4a^2 + 3y^2 + 6by + 3b^2 = 12$$

$$4(x^2 - 2ax + a^2) + 3(y^2 + 2by + b^2) = 12$$

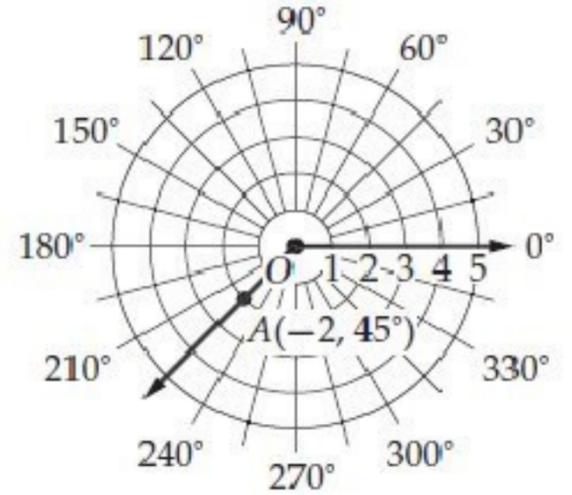
$$4(x - a)^2 + 3(y + b)^2 = 12$$

$$\frac{(x - a)^2}{3} + \frac{(y + b)^2}{4} = 1$$

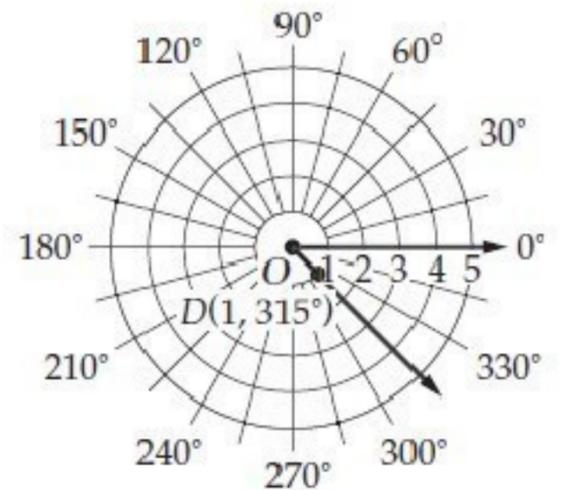
## مراجعة تراكمية

مثل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي:

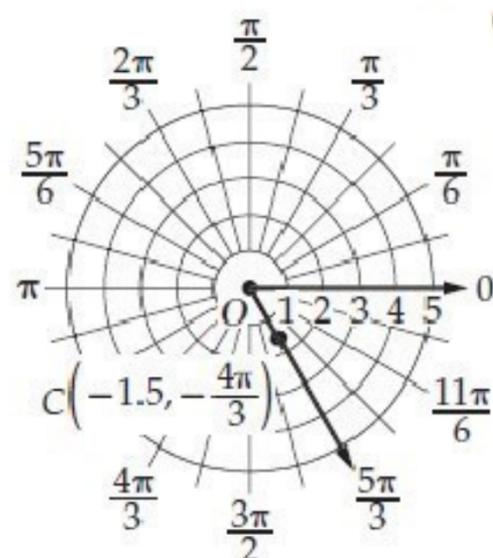
(63)



(64)



(65)



أوجد الزاوية بين المتجهين  $u, v$  في كل مما يأتي:

91.8° (66)

90° (67)

طائرات: (68)

A (11.5, 3°), B (11.5, 75°), C (11.5, 147°), (a

D (11.5, 219°), E (11.5, 291°)

13.5 ft (b)

حل كلاً من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام:

$$\frac{7 \pm i\sqrt{11}}{2} \quad (69)$$

$$-1 \pm i\sqrt{3} \quad (70)$$

$$\frac{-3 \pm i\sqrt{71}}{8} \quad (71)$$

أوجد طول القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين في كل مما يأتي، وأوجد إحداثيات نقطة منتصفها:

$$5.1; (1.5, -13, 13.5) \quad (72)$$

$$15.78; (2.5, 4, 4) \quad (73)$$

$$19.31; (2.5, -2, -3) \quad (74)$$

تدريب على اختبار:

A (75)

A (76)

C (77)

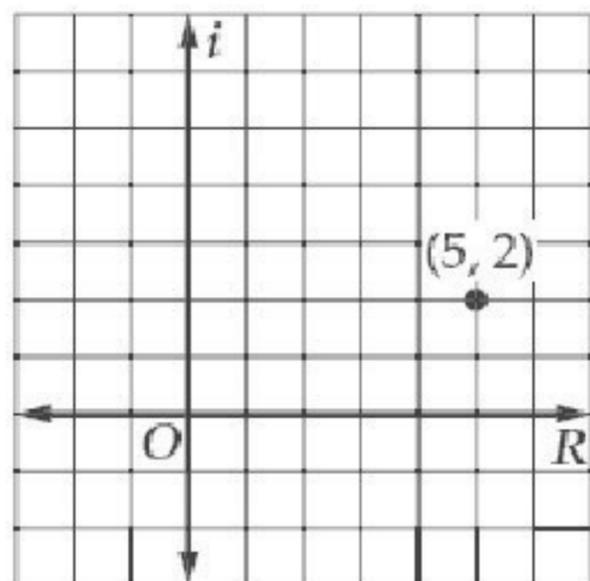
C (78)

# الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

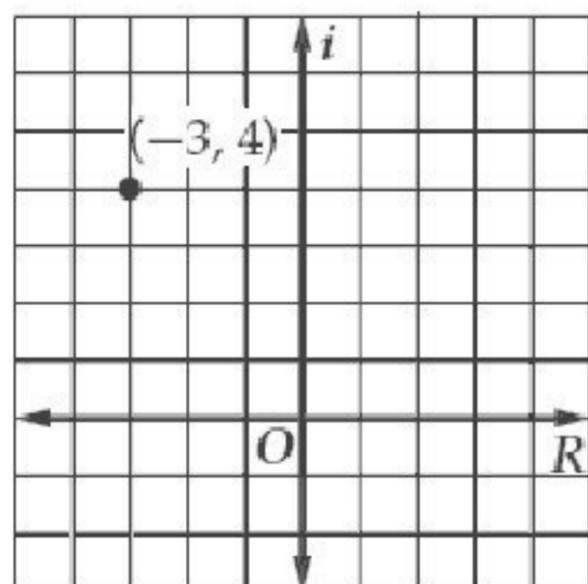
2-3

تحقق

$$\sqrt{29} \approx 5.39 \quad (1A)$$



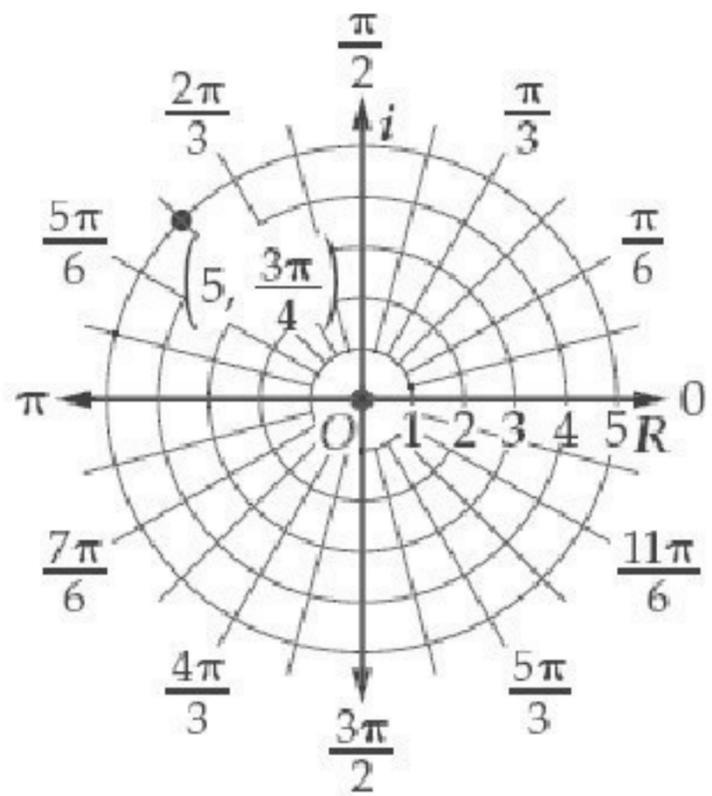
5 (1B)



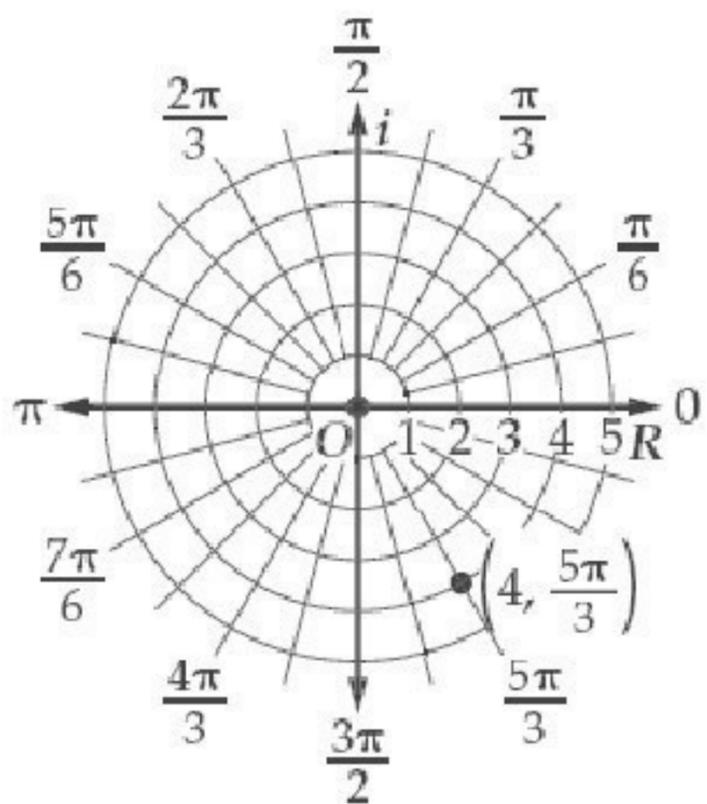
$$11.4 (\cos 0.66 + i \sin 0.66) \quad (2A)$$

$$2.83 (\cos 3.93 + i \sin 3.93) \quad (2B)$$

$$-\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i \quad (3A)$$



$$2 - 2\sqrt{3}i \quad (3B)$$



$$15 \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \text{ تقريباً } , -3.88 + 14.49i \text{ (4A)}$$

$$15 \left( \cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right) \text{ تقريباً } , -3.11 - 11.59i \text{ (4B)}$$

$$V = 120(\cos \theta + j \sin \theta) \text{ (5)}$$

$$I = (8 + 6j)(\cos \theta + j \sin \theta)$$

$$\text{تقريباً } (9.6 - 7.2j) \Omega$$

$$-8 - 8\sqrt{3}i \text{ (6A)}$$

$$-32768 + 32768\sqrt{3}i \text{ (6B)}$$

$$\approx 1.37 + 0.37i, -1 + i, \approx -0.37 - 1.37i \text{ (7A)}$$

$$2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i \text{ (7B)}$$

$$1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ (8A)}$$

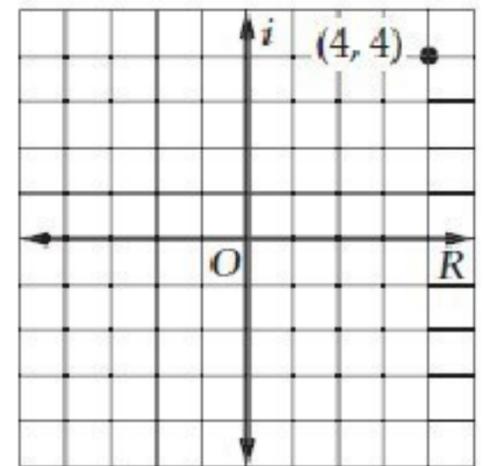
$$1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ (8B)}$$

# تدرب وحل المسائل:

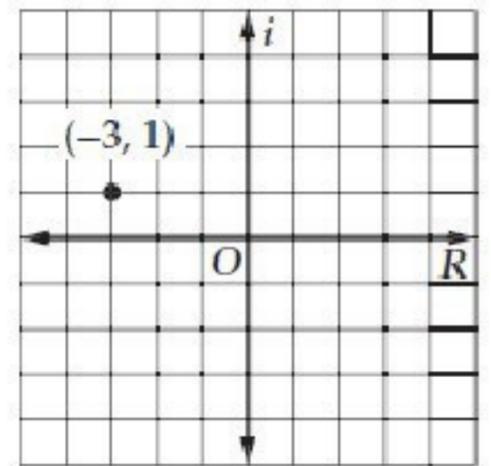


مثل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

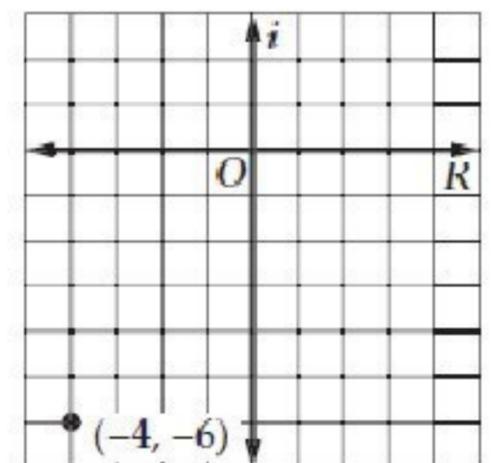
$$\approx 5.66 \quad (1)$$



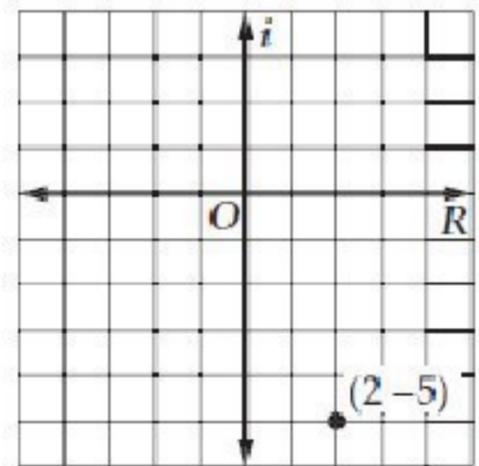
$$\approx 3.16 \quad (2)$$



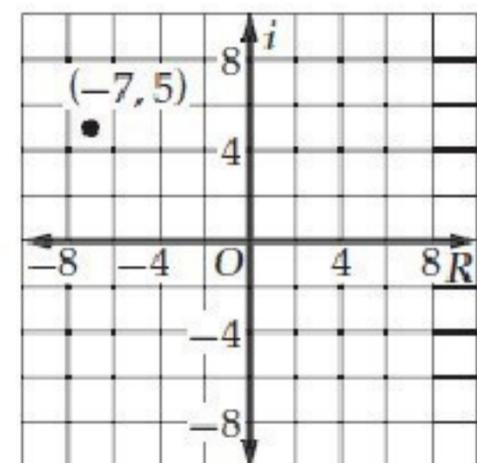
$$\approx 7.21 \quad (3)$$



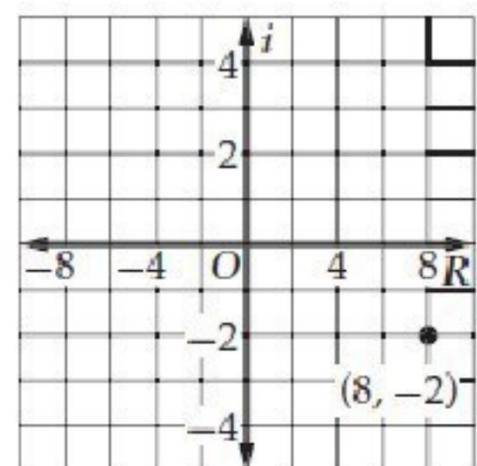
$\approx 5.39$  (4)



$\approx 8.60$  (5)

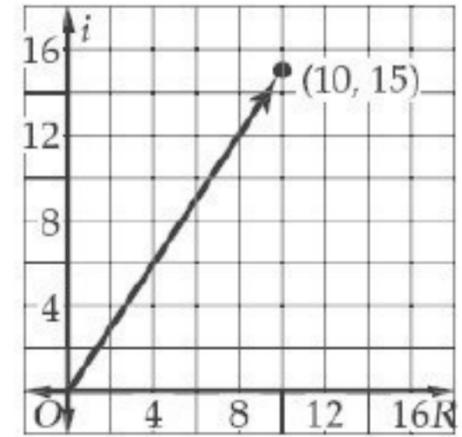


$\approx 8.25$  (6)



(7) متجهات:

(a)



(b) طوله 18.03 N، اتجاهه محدد بالزاوية  $56.31^\circ$

عبر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

$$4\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad (8)$$

$$\approx \sqrt{5} (\cos 2.68 + i \sin 2.68) \quad (9)$$

$$\approx 3\sqrt{2} (\cos(-0.34) + i \sin(-0.34)) \quad (10)$$

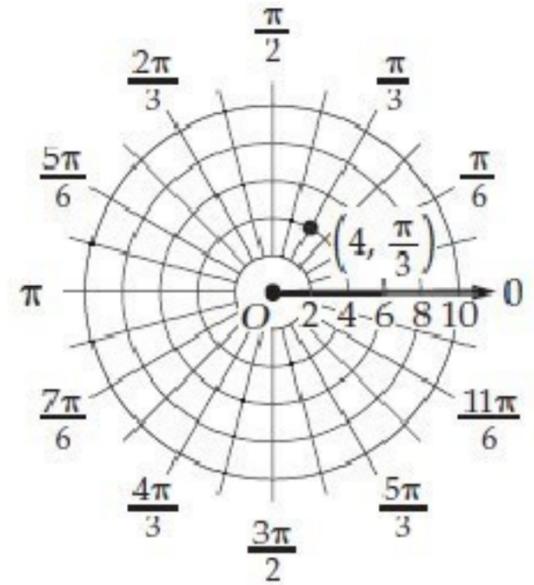
$$2\sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (11)$$

$$\approx \sqrt{41} (\cos 0.9 + i \sin 0.9) \quad (12)$$

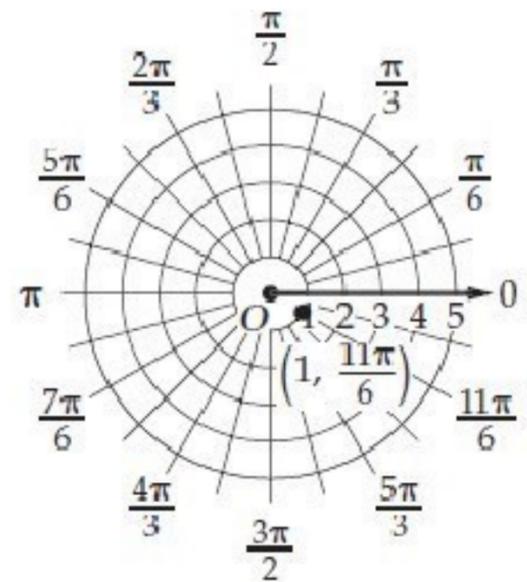
$$2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \quad (13)$$

مثل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية:

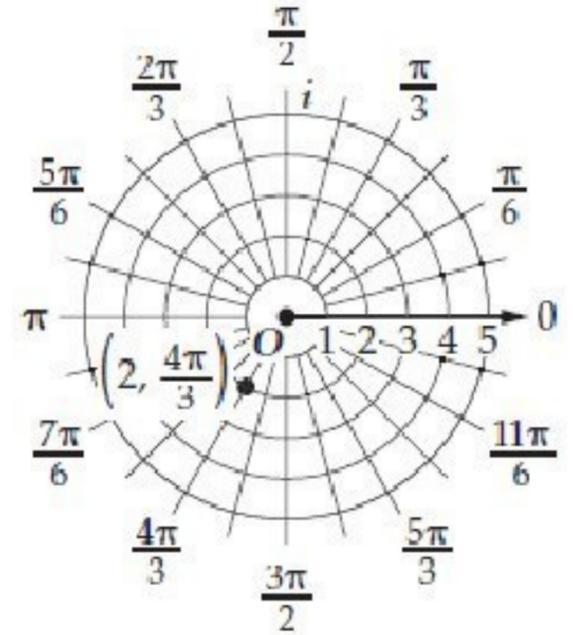
$$2 + 2\sqrt{3}i \quad (14)$$



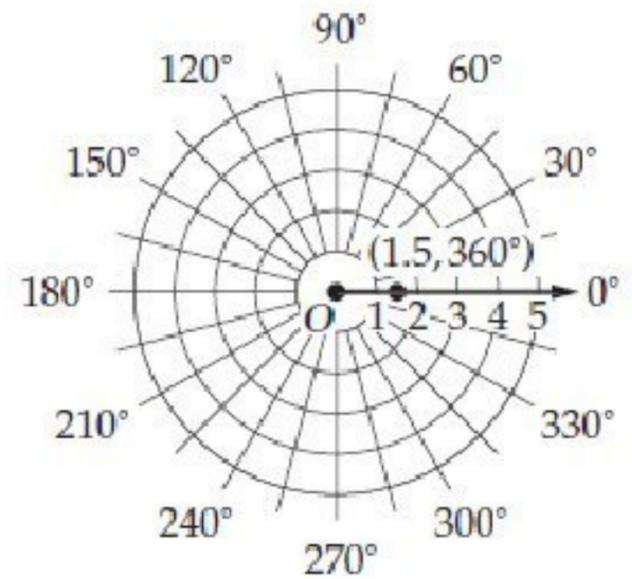
$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad (15)$$



$$-1 - \sqrt{3}i \quad (16)$$



$$\frac{3}{2} \quad (17)$$



أوجد الناتج في كل مما يأتي على الصورة القطبية. ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية:

$$24 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right), -12\sqrt{2} + 12\sqrt{2}i \quad (18)$$

$$10(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ), -10 \quad (19)$$

$$6 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} \right) \right], 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i \quad (20)$$

$$4(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ), 4 \quad (21)$$

$$\frac{3}{4} \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right], -\frac{3}{4}i \quad (22)$$

$$2 \left( \cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4} \right), -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \quad (23)$$

$$3 \left( \cos 210^\circ + i \sin 210^\circ \right), -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \quad (24)$$

$$3 \left( \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} \right), 3i \quad (25)$$

$$10 \left( \cos 315^\circ + i \sin 315^\circ \right), 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}i \quad (26)$$

$$\frac{1}{6} \left( \cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right), \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{12}i \quad (27)$$

أوجد الناتج لكل مما يأتي بالصورة القطبية، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية:

$$4096 \quad (28)$$

$$256 \quad (29)$$

$$-0.03 - 0.07i \quad (30)$$

$$-16 \quad (31)$$

أوجد جميع الجذور المطلوبة للعدد المركب في كل مما يأتي:

$$\approx 0.97 + 0.26i , \approx 0.26 + 0.97i , \approx -0.71 + 0.71i \quad (32)$$
$$\approx -0.97 - 0.26i , \approx -0.26 - 0.97i , \approx 0.71 - 0.71i$$

$$\approx 0.22 + 1.67i , \approx -1.67 + 0.22i \quad (33)$$
$$\approx -0.22 - 1.67i , \approx 1.67 - 0.22i$$

$$-1 + 2i , 1 - 2i \quad (34)$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (35) \text{ تصميم}$$

(36) كهرباء:

$$3.11 + 3.92j, 7.37 + 3.12j \quad (a)$$

$$(10.48 + 7.04j) \Omega \quad (b)$$

$$\approx 12.63 (\cos 0.59 + j \sin 0.59) \Omega \quad (c)$$

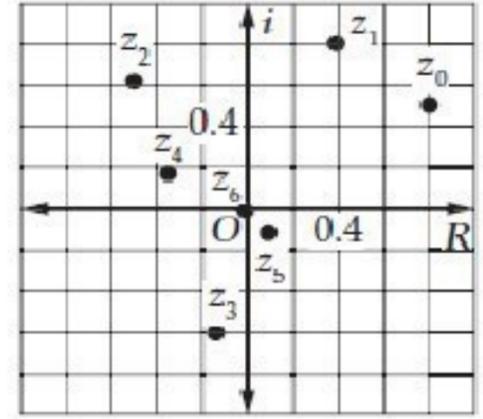
(37) انماط:

$$z_1 \approx 0.39 + 0.8i , z_2 \approx -0.49 + 0.62i \quad (a)$$

$$z_3 \approx -0.14 - 0.61i , z_4 \approx -0.35 + 0.17i$$

$$z_5 \approx 0.09 - 0.12i , z_6 \approx -0.0063 - 0.0216i$$

(b)



(c) إجابة ممكنة: عند تطبيق  $f(z) = z^2$ ، في كل مرة، فإن العدد المركب الناتج يقترب من نقطة الأصل وتقترب قيمته المطلقة من الصفر. لذا  $Z_{100}$  تقع قريبة جداً من نقطة الأصل

(38) إجابة ممكنة: أوجد الصورة القطبية للجذر  $(-1 - i)$  فستكون

$$\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$\left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \right]^4 \text{ ثم أوجد}$$

تحصل على العدد المركب  $z$ ، ثم أوجد جذوره الأخرى، وتكون الإجابة النهائية هي:

$$-4 ; 1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$$

**حل كلا من المعادلات الآتية باستعمال صيغة الجذور المختلفة:**

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i \quad (39)$$

$$2.77 + 1.15i, -1.15 + 2.77i \quad (40)$$

$$\approx -2.77 - 1.15i, 1.15 - 2.77i$$

$$0.79 + 0.79i, -1.08 + 0.29i, 0.29 - 1.08i \quad (41)$$

## مسائل مهارات التفكير العليا:

(42) **اكتشف الخطأ:** باسم؛ إجابة ممكنة: لقد قام أحمد بتحويل العدد المركب إلى الصورة القطبية فقط؛ لذا عليه استعمال نظرية ديموافر لحساب القوة الخامسة.

**تحذ:**

(43)

$$3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right), 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right), 27i$$

(44)

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \\ 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right), 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right), -16$$

(45) **برهان:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \\ = \frac{r_1}{r_2} \left( \frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} \right) \\ = \frac{r_1}{r_2} \left( \frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} \right) \cdot \left( \frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2} \right) \\ = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\left( \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \sin \theta_2 \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\cos^2 \theta_2 - i \sin \theta_2 \cos \theta_2 + i \sin \theta_2 \cos \theta_2 - i^2 \sin^2 \theta_2} \right) = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\left( \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \sin \theta_2 \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2} \right)$$

$$\frac{r_1}{r_2} (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \sin \theta_2 \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

$$\frac{r_1}{r_2} [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1)]$$

$$\frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$(46) \text{ تحد: } \cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

(47) اكتب:

(1) اكتب الصيغة العامة للجذور النونية للعدد المركب وهي:

$$r^{\frac{1}{n}} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

حيث  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$

(2) عوض عن  $n$  بالقيمة المطلوبة، إذا أردت إيجاد الجذور الرباعية ( $n = 4$ ) وإذا أردت إيجاد

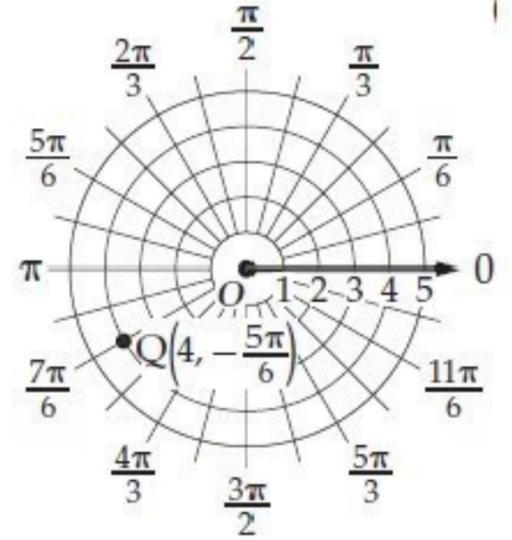
الجذور الخماسية ( $n = 5$ )، وهكذا.

(3) افترض أن  $k = 0$  ، و عوض في الصيغة العامة؛ لإيجاد الجذر الأول، ثم افترض أن  $k = 1$  ، و عوض لإيجاد الجذر الثاني، وهكذا حتى تصل إلى  $n - 1$  ، فتحصل على جميع الجذور المطلوبة.

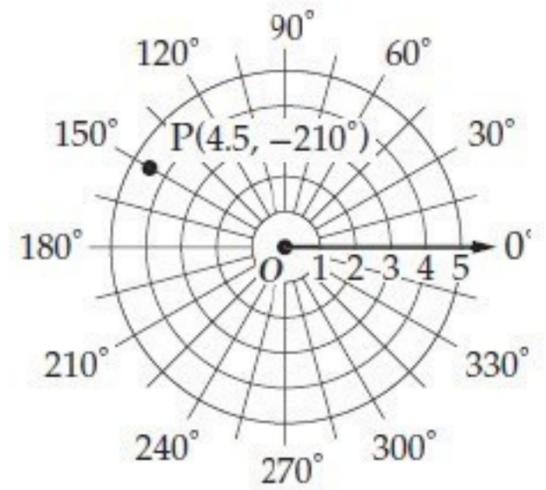
## مراجعة تراكمية

مثل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي:

(48)



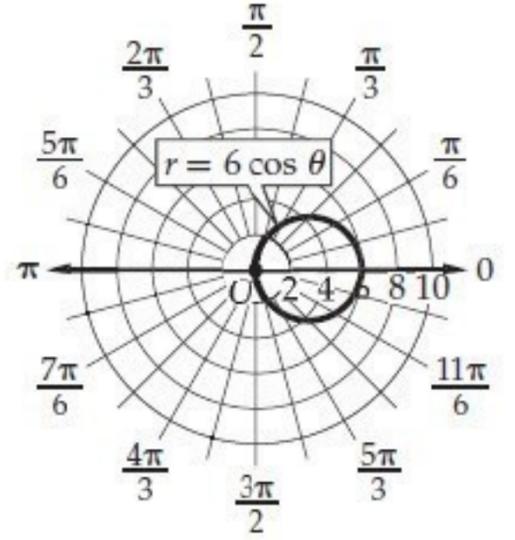
(49)



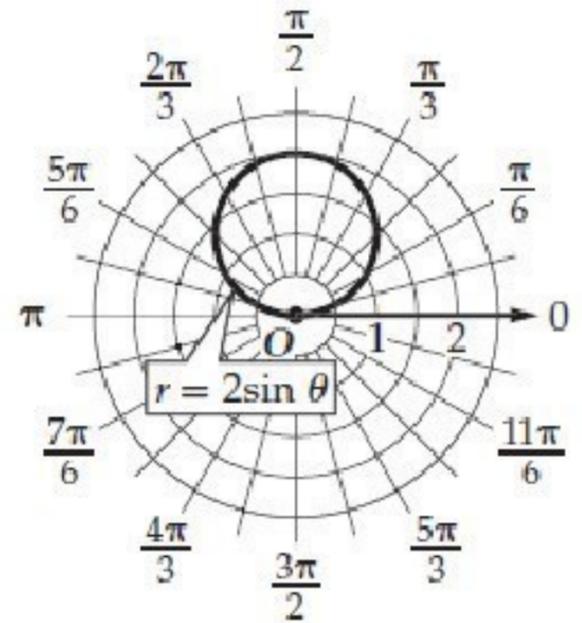
حدد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية مما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية،

وعزز إجابتك بتمثيلها في المستوى القطبي:

(50) دائرة،  $r = 6 \cos \theta$



(51) دائرة،  $r = 2 \sin \theta$



أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي:

$$\approx \sqrt{29} \quad (52)$$

$$\approx 4.84 \quad (53)$$

حول الإحداثيات القطبية لكل مما يأتي إلى إحداثيات ديكارتية:

$$\left( \frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2} \right) \quad (54)$$

$$(-2\sqrt{3}, -2) \quad (55)$$

تدریب علی اختبار:

A (56)

C (57)

A (58)

# دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك:

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة مما يأتي:

(1) التمثيل القطبي

(2) المستوى المركب أو مستوى أرجاند

(3) نظام الإحداثيات القطبية

(4) السعة

(5) القطب

(6) المقياس

(7) مستوى أرجاند

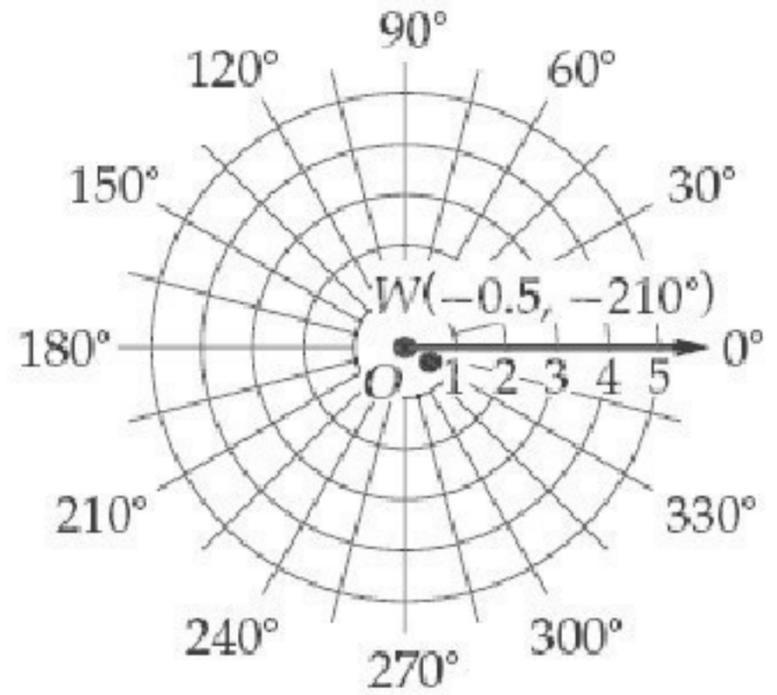
(8) المحور القطبي

مراجعة الدروس:

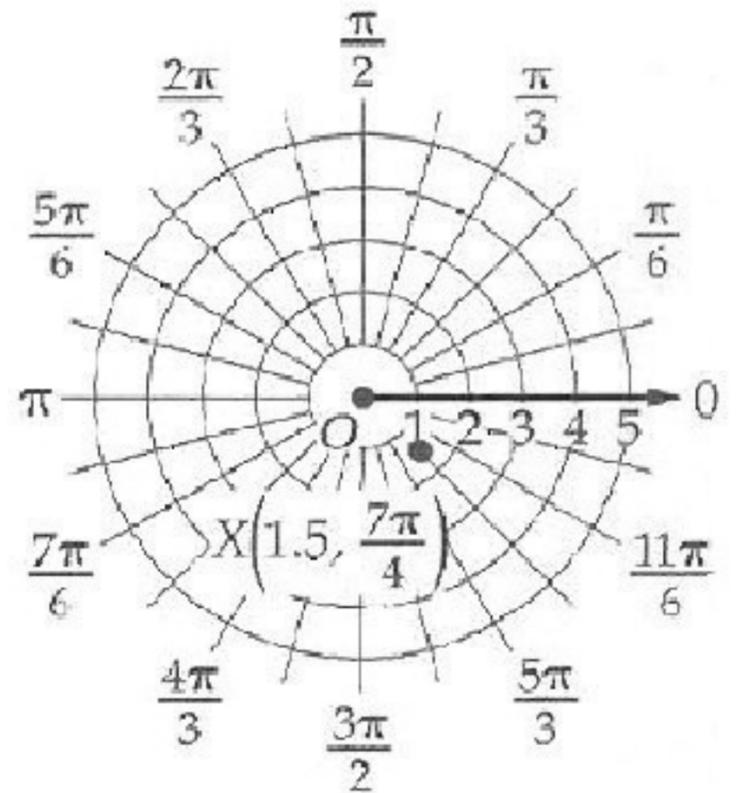
1-2: الإحداثيات القطبية:

مثل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي:

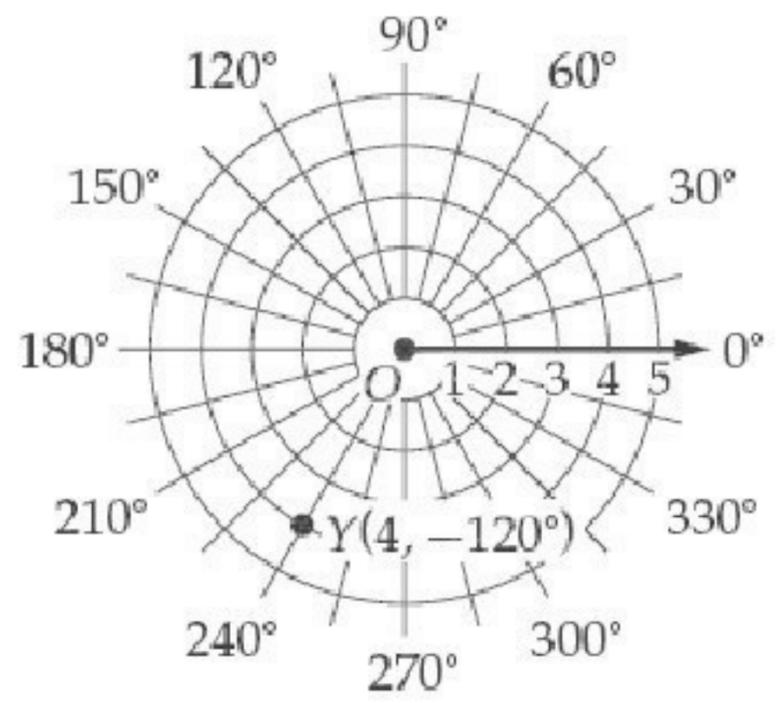
(9)



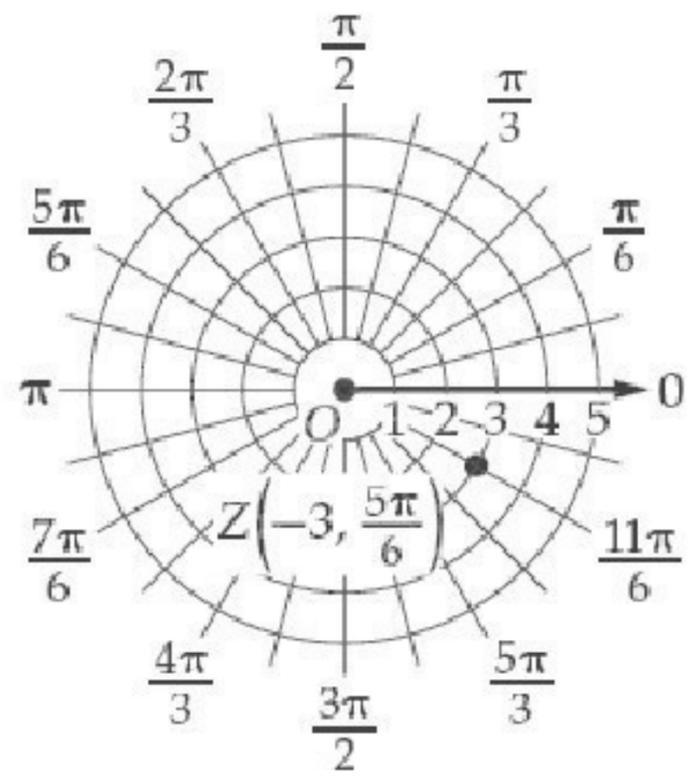
(10)



(11)

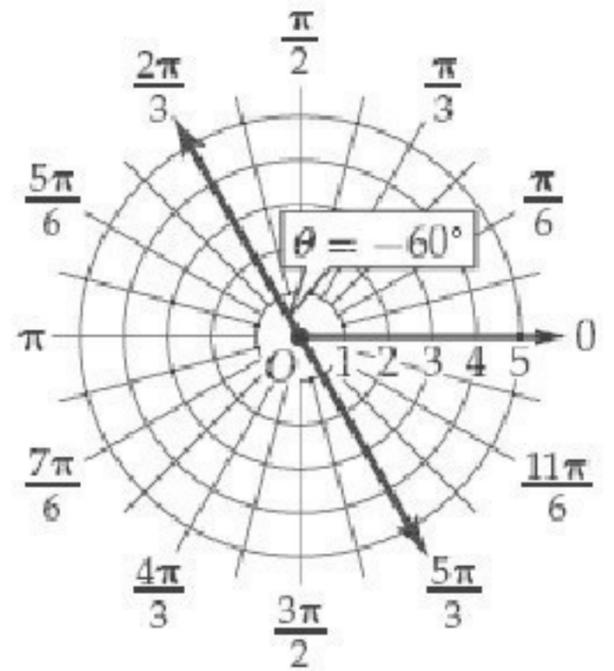


(12)

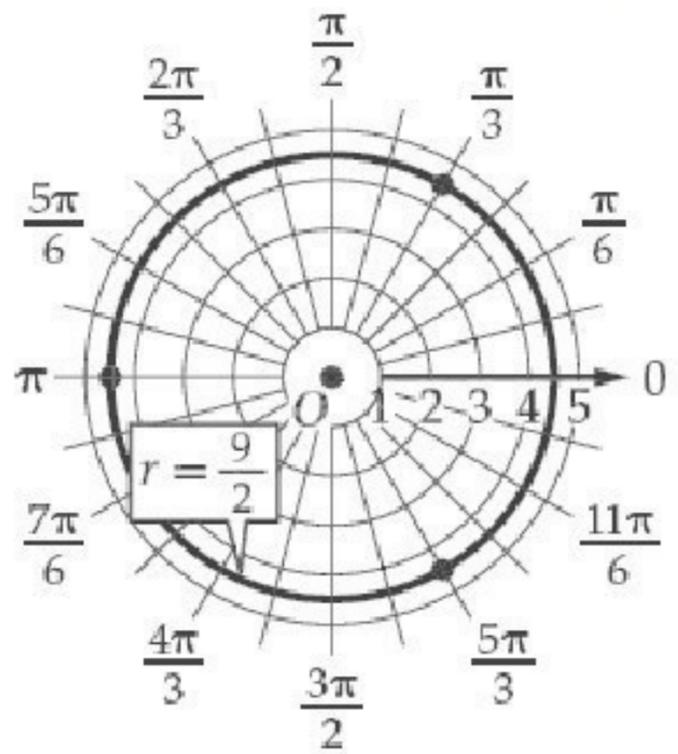


مثل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانياً:

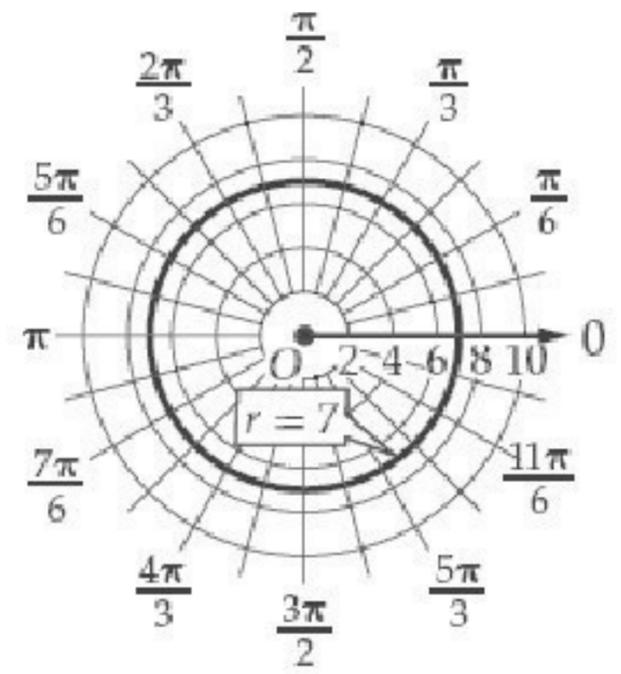
(13)



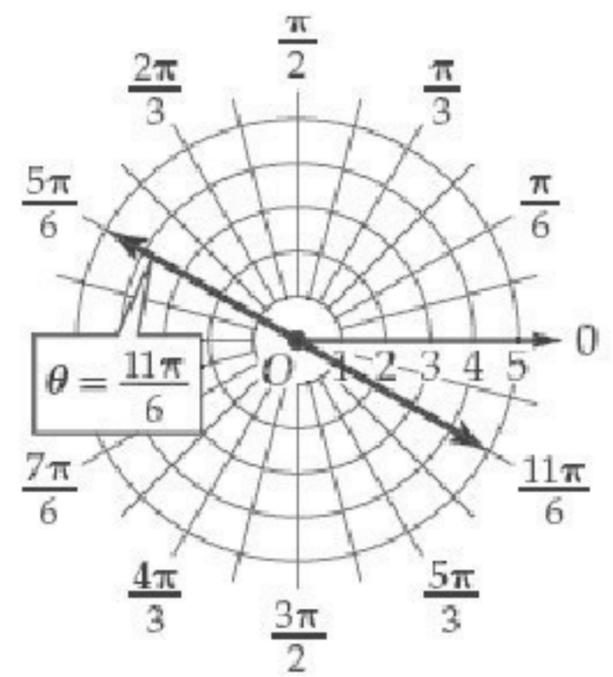
(14)



(15)



(16)



أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي:

4.36 (17)

1 (18)

6.74 (19)

7.28 (20)

2-2: الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات:

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية في كل مما يأتي، حيث  $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$

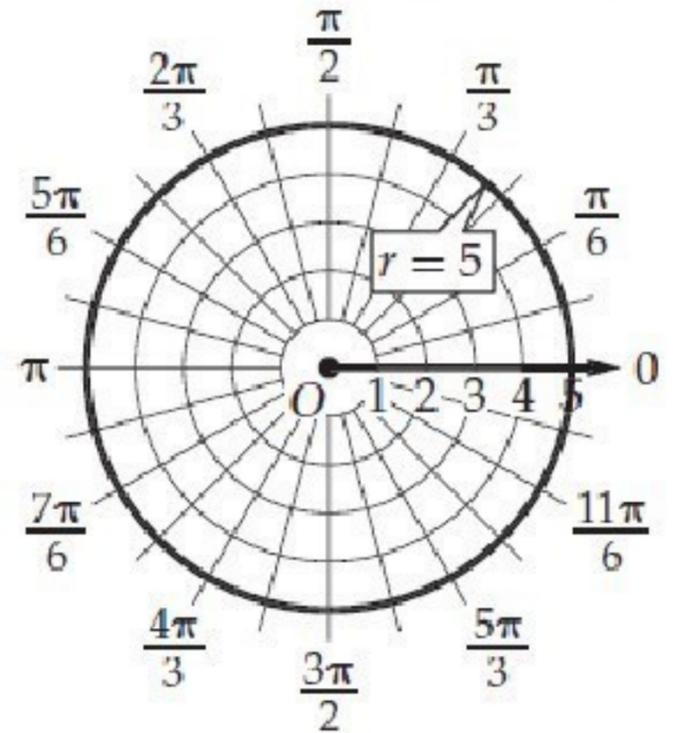
(21)  $(5.1, 1.77), (-5.10, 4.91)$

(22)  $(7.62, 1.17), (-7.62, 4.31)$

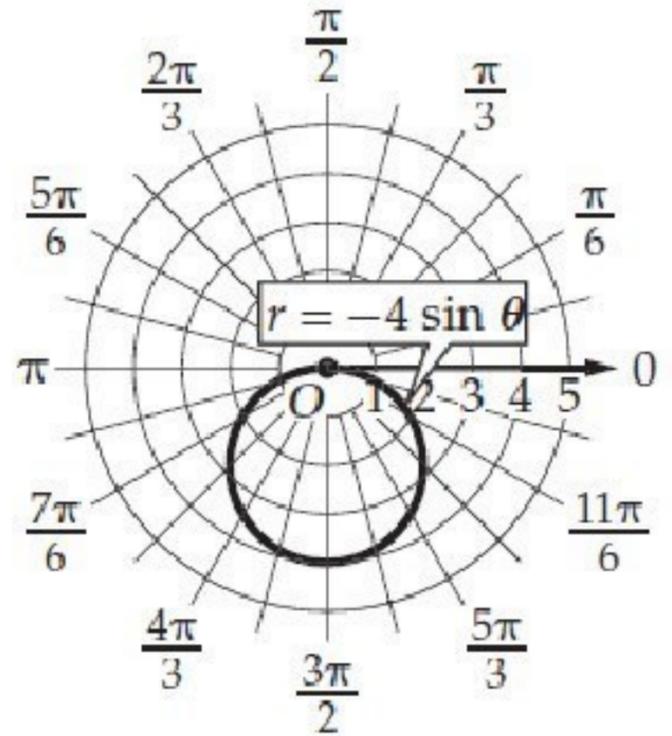
(23)  $(2.24, 1.11), (-2.24, 4.25)$

اكتب كل معادلة على الصورة الديكارتية، وحدد نوع تمثيلها البياني:

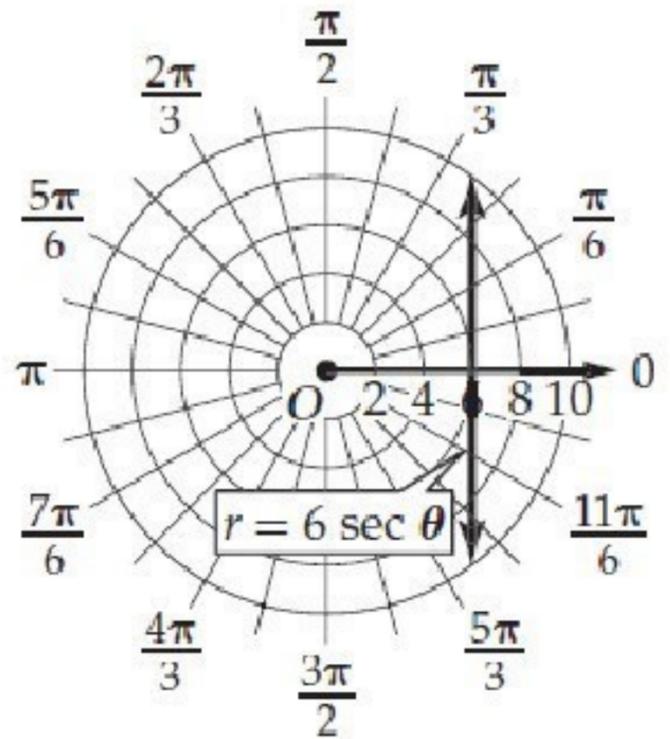
(24)  $x^2 + y^2 = 25$  دائرة



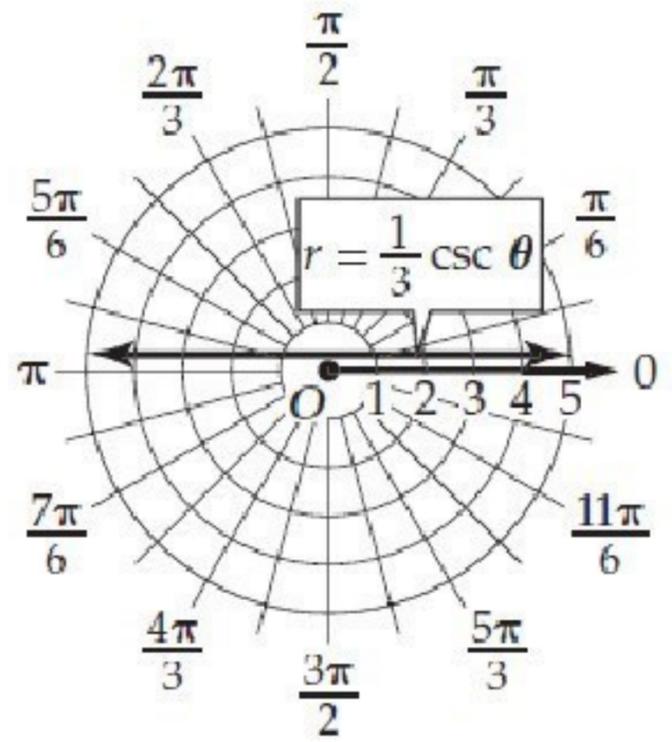
(25) دائرة  $x^2 + (y + 2)^2 = 4$



(26) مستقيم  $x = 6$



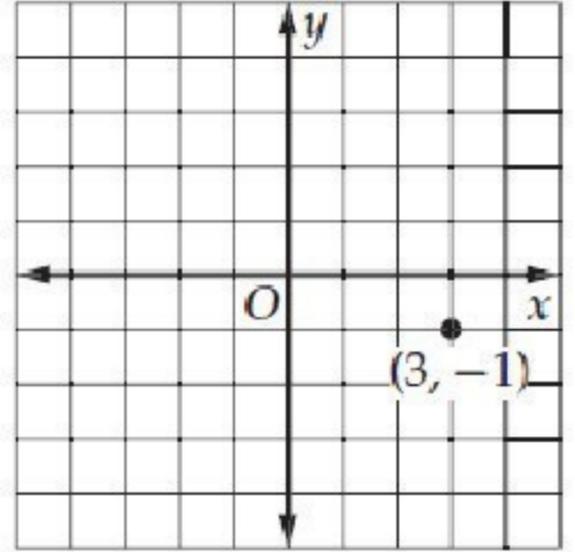
$y = \frac{1}{3}$  ، مستقيم (27)



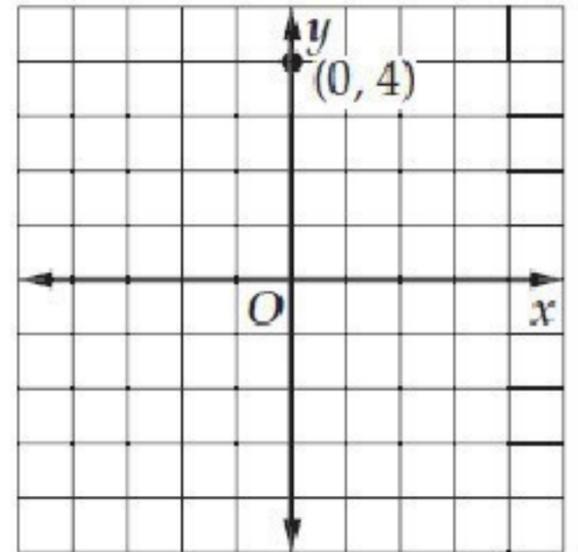
3-2: الأعداد المركبة ونظرية ديموافر:

مثل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

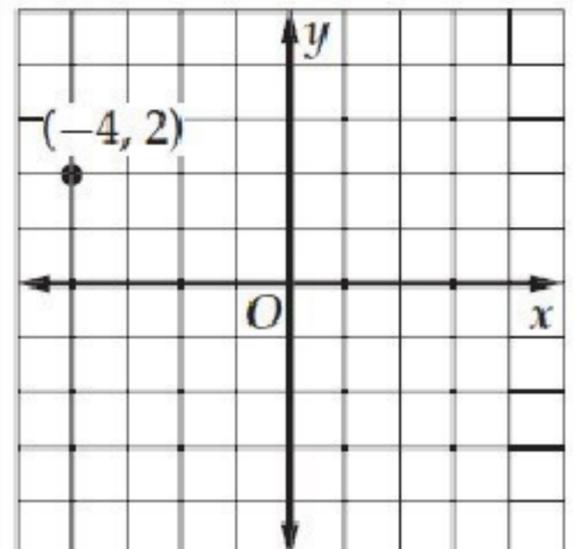
(28)  $\sqrt{10}$



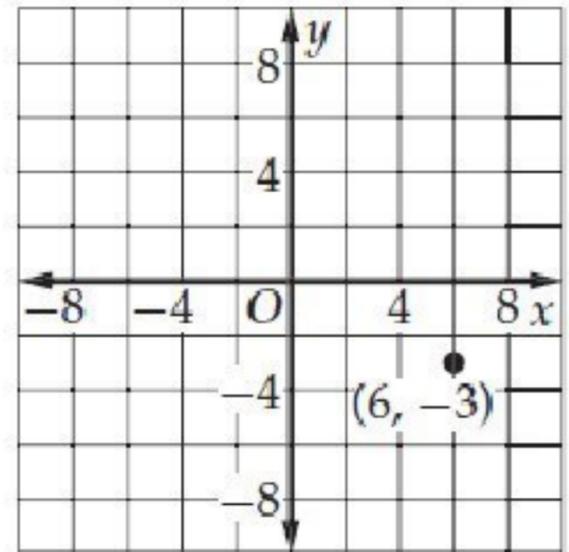
(29) 4



(30)  $2\sqrt{5}$



$$3\sqrt{5} \quad (31)$$



عبر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

$$\approx 3.317(\cos 0.441 + i \sin 0.441) \quad (32)$$

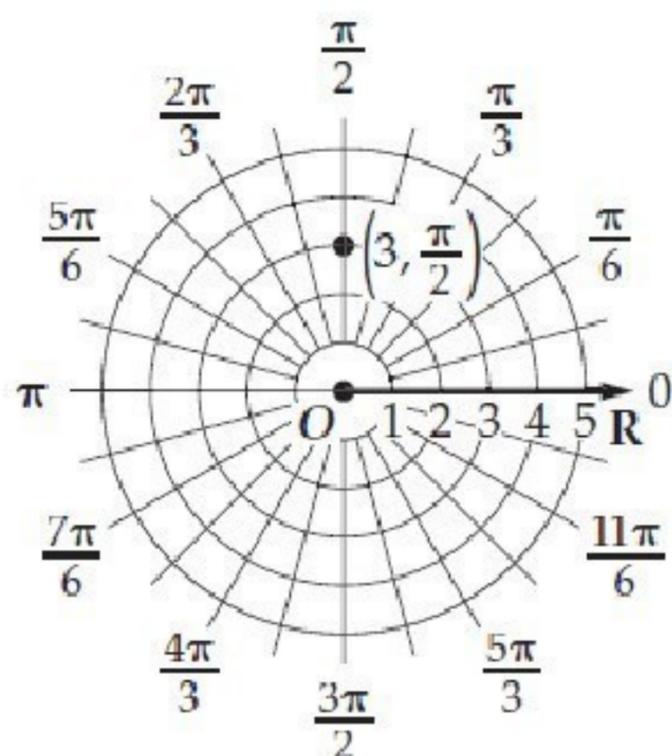
$$\approx 9.434[\cos(2.1294) + i \sin(2.1294)] \quad (33)$$

$$\approx 4.359(\cos 3.55 + i \sin 3.55) \quad (34)$$

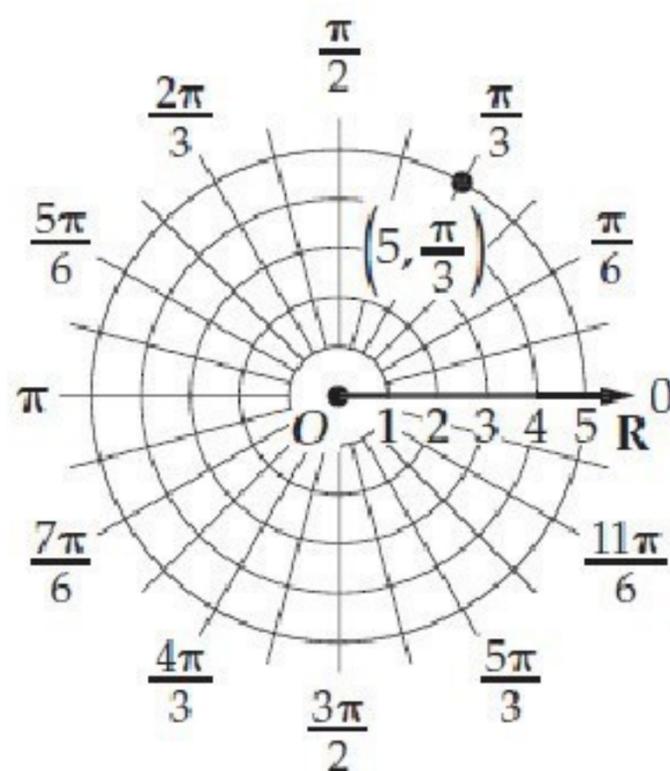
$$2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \quad (35)$$

مثل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية:

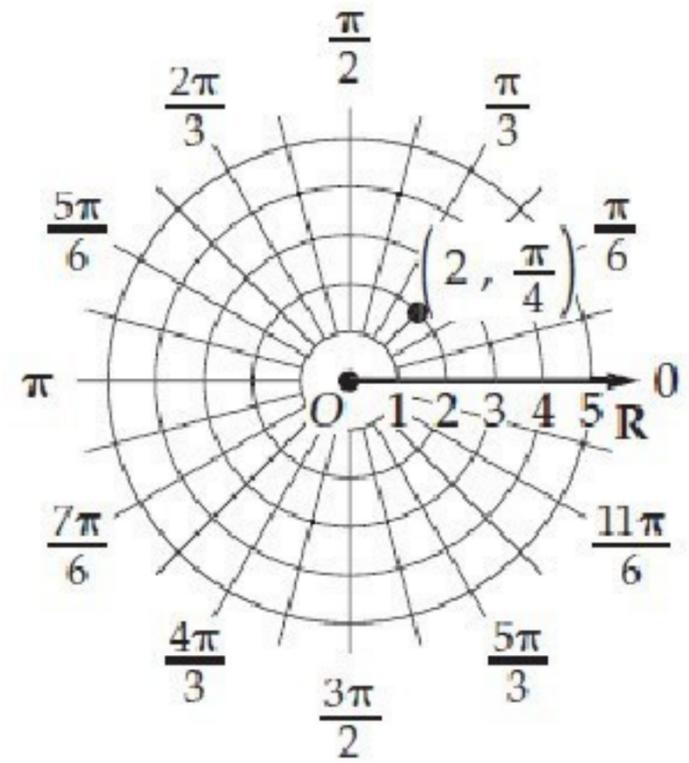
$$3i \quad (36)$$



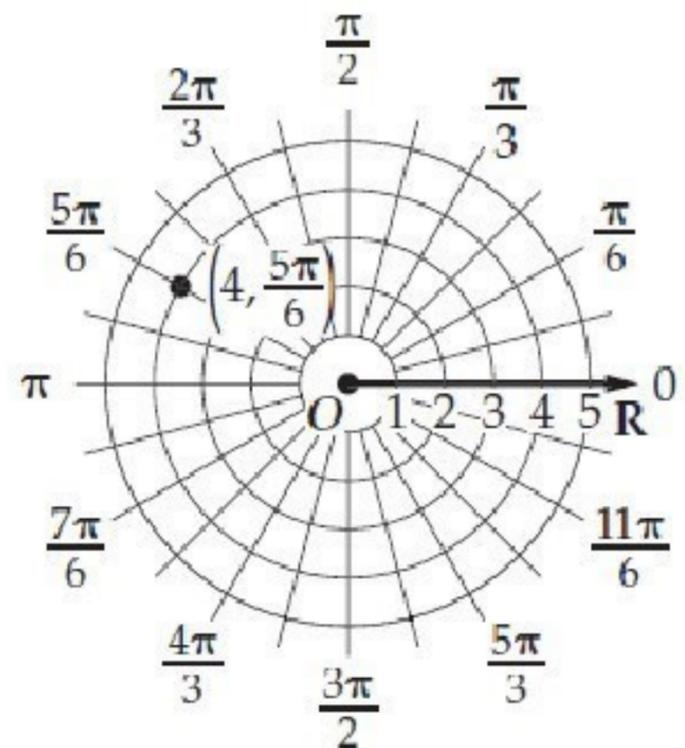
$$2.5 + 2.5\sqrt{3}i \quad (37)$$



$$\sqrt{2} + \sqrt{2}i \quad (38)$$



$$-2\sqrt{3} + 2i \quad (39)$$



أوجد الناتج في كل مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية:

$$8 \left[ \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right] \quad (40)$$

$$-4\sqrt{3} - 4i$$

$$4 \left[ \cos(345^\circ) + i \sin(345^\circ) \right] \quad (41)$$

$$\approx 3.86 - 1.04i$$

$$15 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] \quad (42)$$

$$\frac{15}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2}i$$

$$2 \left[ \cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ) \right] \quad (43)$$

$$1 + i\sqrt{3}$$

$$-23 - 119i \text{ تقريباً} \quad (44)$$

$$\approx 107 + 0.21i, \quad (45)$$

$$\approx -0.21 + 1.07i,$$

$$\approx -1.07 - 0.21i, \approx 0.21 - 1.07i$$

تطبيقات ومسائل:

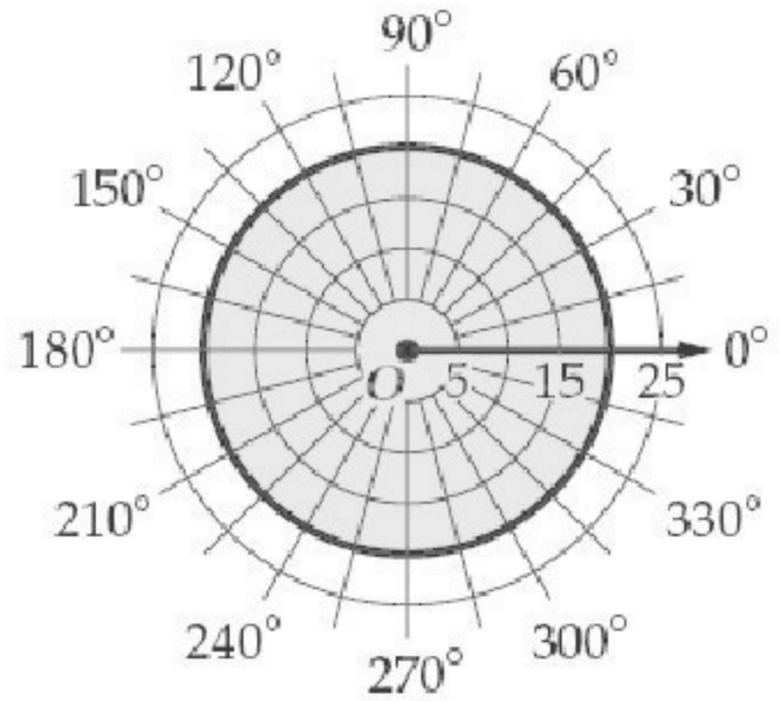
(46) ألعاب:

20 (a)

(b) إجابة ممكنة:  $(2, 180^\circ)$  أو  $(2, 0^\circ)$

(47) حدائق:

(a)



(b)  $838 \text{ ft}^2$  تقريباً

(48) عجلة دوارة:

(a)  $\left(12.9, \frac{\pi}{12}\right)$

(b) (12.5, 3.3)

(c) 3 ft.

(49) كهرباء:

(a)  $(15.2 - 37.9j) \Omega$

(b) أمبير  $(21.9 + 66.0j)$

(50) تحويل جوكوسكي:

(a) 1

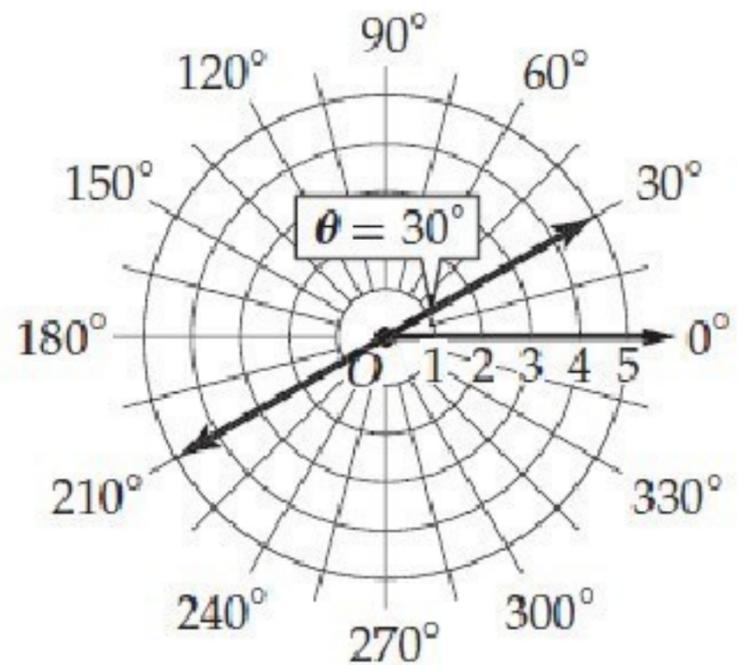
# اختبار الفصل

$$(1) \left(2.5, \frac{\pi}{3}\right), \left(2.5, -\frac{5\pi}{3}\right), \left(-2.5, \frac{4\pi}{3}\right)$$

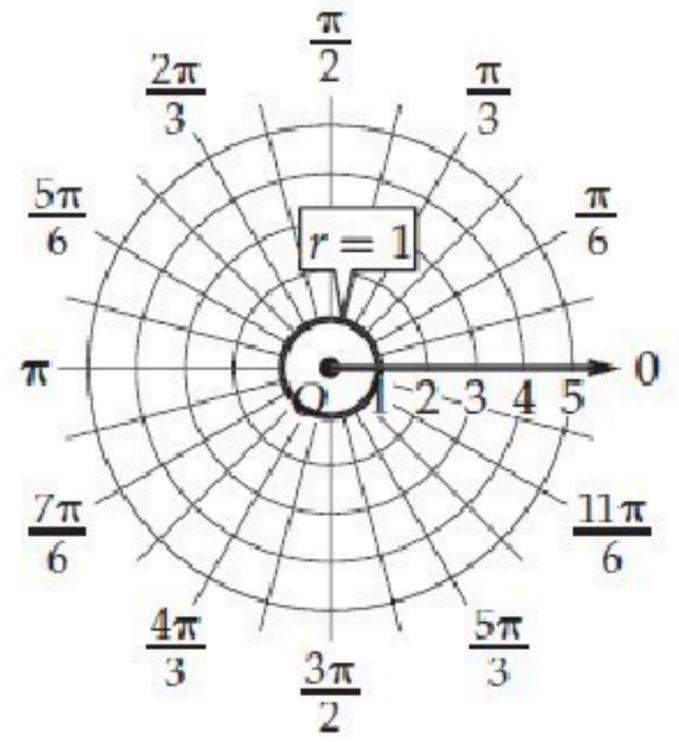
$$(2) \left(4, \frac{19\pi}{12}\right), \left(4, -\frac{5\pi}{12}\right), \left(-4, \frac{7\pi}{12}\right)$$

مثل بيانيا في المستوى القطبي كلا من المعادلات الآتية:

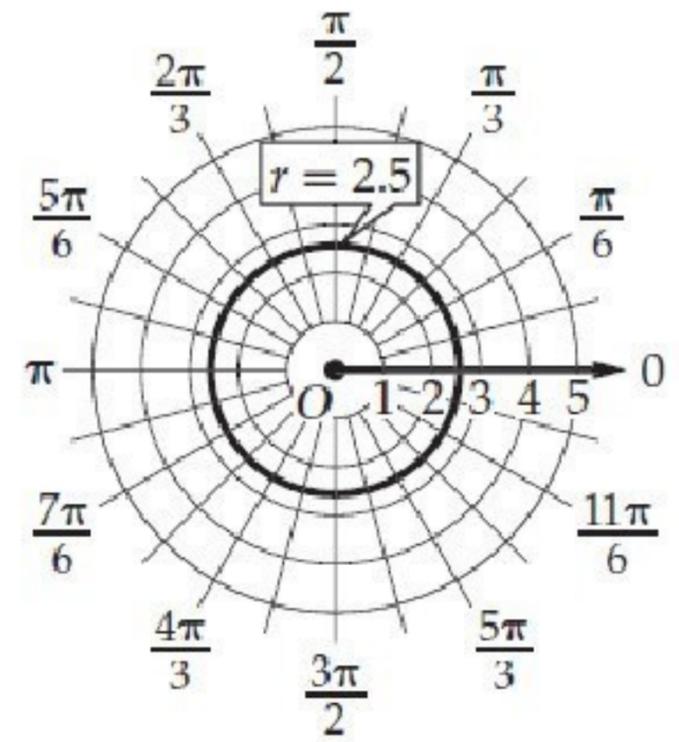
(3)



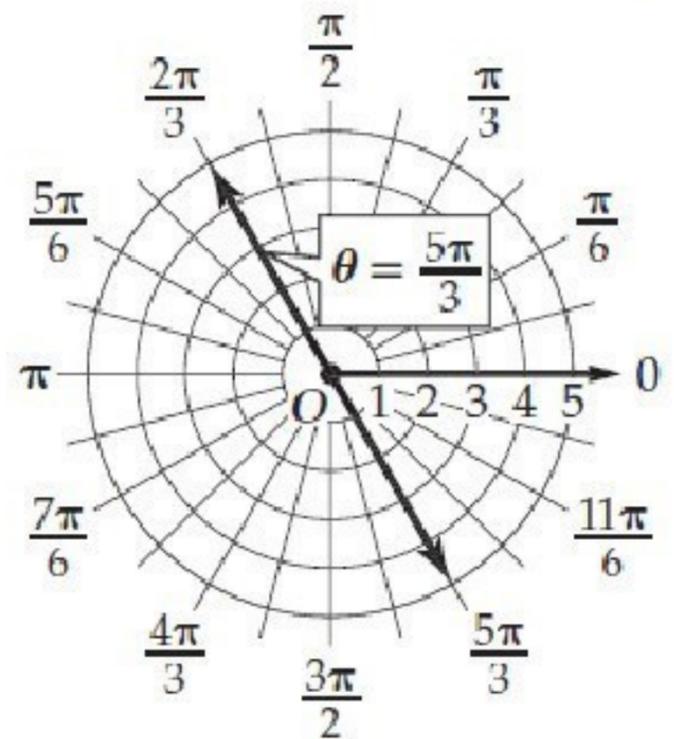
(4)



(5)



(6)



(7) رادار:

(a)  $(-28, 60)$

(b) إجابة ممكنة:  $(90, 303.7^\circ)$

(c) 156 mi

(8) دائرة،  $r = 14 \cos \theta$

(9)  $(16.2 + 21.6j) \Omega$

(10) D

أوجد كل قوة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وقرب إلى أقرب عدد صحيح إذا لزم الأمر:

(11)  $47 - 52i$

(12)  $1081 + 840i$

# التهيئة

اختبار سريع:

حدد ما إذا لزم كانت الحوادث الآتية مستقلة، أو غير مستقلة:

(1) مستقلة

(2) غير مستقلة

(3) مستقلة

حدد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تتطلب تطبيق التباديل أو التوافق في حلها:

(4) تباديل

(5) تباديل

(6) توافق

اكتب مفكوك كل من العبارات الآتية:

$$a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16 \quad (7)$$

$$64a^6 + 192a^5b + 240a^4b^2 + 160a^3b^3 + 60a^2b^4 + 12ab^5 + b^6 \quad (8)$$

$$243x^5 - 810x^4y + 1080x^3y^2 - 720x^2y^3 + 240xy^4 - 32y^5 \quad (9)$$

$$\frac{a^5}{32} + \frac{5a^4}{8} + 5a^3 + 20a^2 + 40a + 32 \quad (10)$$

# الدراسات التجريبية والمسحية وبالملاحظة

3-1

## تحقق

(1A) متحيزة؛ لأن الرياضة المفضلة للاعبين كرة السلة في الغالب هي كرة السلة.

(1B) متحيزة؛ لأن رياضتهم المفضلة الأكثر احتمالاً ستكون كرة القدم.

(2A) هذا سؤال متحيز؛ لأنه ذكر مادة محددة، ولم يذكر غيرها.

(2B) سؤال متحيز؛ لأنه حدد مائتين للاختيار بينهما.

(2C) سؤال غير متحيز؛ لأنه يعطي الإجابة التي يبحث عنها من دون تحيز.

(3) دراسة قائمة على الملاحظة

(4) دراسة مسحية؛ حيث من الأفضل أن يتم اختيار عينة عشوائية من المدرسة الثانوية، لتحصل على عينة غير متحيزة.

(5) ارتباط؛ حيث إن الدراسة قد تساعد على الحصول على تقدير ممتاز، ولكنها لا تضمن ذلك.

# تدرب وحل المسائل:



حدد ما إذا كانت من الدراستين المسحيتين الآتيتين تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسر إجابتك:

(1) متحيزة؛ لأن الوجبة الأكثر تفضيلاً من وجهة نظرهم ستكون المشويات.

(2) متحيزة؛ لأن الأشخاص المستهدفين يميلون إلى العلوم أكثر من غيرهم.

(3) غير متحيزة؛ لأن لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها ليكون في العينة.

(4) متحيزة؛ لأن مهنتهم المستقبلية الأكثر تفضيلاً بالنسبة لهم ستكون الطب.

حدد سؤال الدراسة المسحية الذي تحصل منه على الإجابة المطلوبة بشكل أفضل:

b (5)

c (6)

a (7)

حدد ما إذا كان كل موقف من المواقف الآتية يمثل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بين ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا:

(8) دراسة تجريبية: اختار المعلم شعبتين بشكل عشوائي. المجموعة التجريبية تراجع المادة مع المعلم في الحصص. والمجموعة الضابطة هي الشعبة أخرى، وهذه دراسة متحيزة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

(9) دراسة قائمة على الملاحظة.

(10) دراسة تجريبية، لأنه تم تقسيم الأشخاص الى مجموعتين عشوائياً. تتضمن المجموعة التجريبية من يقرأ القرآن الكريم قبل النوم، وتتضمن المجموعة الضابطة من لا يفعل ذلك، وهذه تجربة متحيزة؛ لأن كل مشارك يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

(11) دراسة قائمة على الملاحظة.

(12) دراسة قائمة على الملاحظة.

حدد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة بالملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفسر إجابتك:

(13) دراسة تجريبية: المستهدفون أشخاص لديهم صلح. والمجموعة التجريبية تتلقى معالجة، بينما المجموعة الضابطة تتلقى معالجة شكلية.

**14) مسحية، من الأفضل أن تستطلع آراء أشخاص يختارون بصورة عشوائية.**

**15) دراسة قائمة على الملاحظة.**

**16) دراسة قائمة على الملاحظة.**

**17) دراسة تجريبية: الفئة المستهدفة بساتين فيها غزلان. والمجموعة التجريبية بساتين تتلقى معالجة معينة تبعد الحيوانات عنها، وبقية البساتين هي المجموعة الضابطة وتتلقى معالجة شكلية.**

**بين ما إذا كانت كل من العبارات الآتية تظهر ارتباطاً، أو سببية، وفسر إجابتك:**

**18) ارتباط، مع أن ممارسة الرياضة تجعل الإنسان في نفسية أفضل، إلا أن أحداً منهما لا يتسبب بالضرورة في الآخر.**

**19) العبارة تظهر سببية؛ لأن نزول المطر بغزارة سبب كاف لوحده، لعدم ذهاب الطلاب إلى المدرسة، على الرغم من أن الغياب يمكن أن تسببه عوامل أخرى مثل المرض.**

**20) العبارة تظهر سببية؛ لأن الحر في الصيف سبب مباشر في زيادة مبيعات المشروبات الباردة، فجسم الإنسان بحاجة إلى سوانا أكثر لتعويض ما يفقده.**

**21) ارتباط، مع أن الاثنين يرتبطان كل منهما بالآخر، لكن كثرة القراءة قد لا تؤثر في الذكاء.**

**(22)** ارتباط، حيث إن للدراسة علاقة بين الاثنين، لكن أحدهما قد لا يسبب الآخر.

**(23)** ارتباط، مع أنه ربما توجد علاقة بين الاثنين، إلا أن أحدهما قد لا يسبب الآخر.

**(24) استبانات:** إجابة ممكنة: نعم متحيزة؛ معظم العاملين الذين يتركون عملهم في الشركة، هم غير راضين عنها، وإلا لم يتركوها.

## مسائل مهارات التفكير العليا:

**25) اكتشف الخطأ:** إجابة ممكنة: ليس أي منهما، كلا التجربتين متحيزتان؛ لأن الموجودين في المجموعة التجريبية يعلمون ذلك.

**26) تحد:** إجابة ممكنة: الدراسات المسحية بالهاتف تكون عادة متحيزة؛ لأن الذين لم تُدرج أسماءهم لن يتم الاتصال بهم، وكذلك الذين ليس لديهم هواتف.

**27) اكتب:** إجابة ممكنة: تُسحب العينات العشوائية من المجتمع الكلي للحصول على عينة ممثلة للمجتمع ، وبغرض تجنب التحيز. يتم استعمال الإختيار العشوائي؛ لتحديد الأفراد في كل من المجموعتين التجريبية والضابطة، بحيث يكون لكل منهم الفرصة ذاتها ليكون ضمن أي من المجموعتين. كما يتم التأكد أن كل فرد لا يعرف إلى أي مجموعة ينتمي.

**28) مسألة مفتوحة:**

(a) إجابة ممكنة: دراسة مسحية تتناول استطلاع رأي 50 طالبا في الصف الأول الثانوي حول الطريقة التي سيقرونها بناء عليها مسار التعليم الثانوي المفضل لهم. العينة: سـ جل طلاب المدرسة جميعهم في قائمة، واسحب عشوائيا 50 طالبا . موضوع الدراسة المسحية: طريقة تحديد الطالب خياره في مسار التعليم الثانوي الذي يرغب فيه على مقياس من 1 إلى 5 ، حيث يدل الرمز 1 على المعارضة بشدة، والرمز 5 على الموافقة بشدة.

(b) إجابة ممكنة: ألاحظ 20 طالباً نصفهم لديه غرفة للدراسة، وأقارن درجاتهم في نهاية الفصل.

(c) إجابة ممكنة: اختر عينة من 20 شخصاً عشوائياً مصابين بالرشح. أعط نصفهم علاجاً، وأعط النصف الآخر علاجاً شكلياً، وقارن بين النتائج بعد 3 أسابيع. المجموعة التجريبية هي مجموعة الأشخاص الذين أعطوا العلاج المقصود، والمجموعة الضابطة هم الذين أعطوا علاجاً محايداً (شكلياً).

**(29) تبرير:** إجابة ممكنة: يمكن أن يحدث التحيز في الدراسة التجريبية عندما يعط الأفراد في المجموعة التجريبية أنها هي المجموعة التي ينتمون إليها. فمثلاً إذا علم أفراد مجموعة تجريبية أنهم يتعرضون لعلاج بقصد زيادة مستوى الطاقة لديهم، فقد يحاولون التأثير في نتائج الدراسة، وإثبات أن العلاج فاعل أو غير فاعل، وكذلك إذا علم أفراد المجموعة الضابطة أنهم يأخذون علاجاً غير فاعل، فلن تكون لديهم الدافعية لاستكمال التجربة.

## مراجعة تراكمية

إذا كان  $u = (2, -3)$  ،  $v = (1, 6)$  ، فأوجد كلا مما يأتي:

$$(30) \langle 4, -6 \rangle$$

$$(31) \langle 3, 3 \rangle$$

$$(32) \langle 3, -12 \rangle$$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول  $AB$  المعطاة بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

$$(33) \langle -1, 1, -11 \rangle, \sqrt{123}$$

$$(34) \langle 3, -4, -2 \rangle, \sqrt{29}$$

حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي:

$$(35) (0, 3)$$

$$(36) (-\sqrt{3}, -1)$$

$$(37) \left( \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

عبر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

$$\approx 10 (\cos 0.93 + i \sin 0.93) \quad (38)$$

$$\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \quad (39)$$

تدريب على اختبار:

حدد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تمثل دراسة تجريبية أو دراسة بالملاحظة، وإذا كانت دراسة تجريبية، فحدد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة، ثم بين ما إذا كانت متحيزة أو لا:

(40) دراسة تجريبية: وضع الأشخاص في مجموعات عشوائية. تتضمن المجموعة التجريبية التي تقوم بالتدريبات الرياضية لمدة ساعة واحدة يومياً، وتتضمن المجموعة الضابطة من لا يفعل ذلك، وكتلة الجسم للمجموعة التجريبية ربما تصبح أكبر.

الدراسة التجريبية متحيزة، لأن أفراد المجموعة التجريبية يعلمون أنهم يخضعون لدراسة، وأفراد المجموعة الضابطة أنهم لا يتدربون أسوة بأفراد المجموعة التجريبية.

(41) دراسة قائمة على الملاحظة

(42) دراسة قائمة على الملاحظة

# توسع: معمل الحاسبة البيانية: تقويم البيانات المنشورة

3-1

حل النتائج:

قارن تمثيلك البياني بتمثيل الصحيفة:

(1) نعم

(2) إجابة ممكنة: تمثيل الصحيفة، لأنه مضلل، حيث بدأ التدرج على المحور الرأسي من العدد 250 وليس من الصفر، ولذلك تظهر المبيعات في السنوات 94 – 90 ، وكأنها أكثر من ضعف المبيعات في السنوات 89 – 85 ، وهي في الحقيقة ليست كذلك.

(3) إجابة ممكنة: يريد المعرض أن يظهر أن الزيادة في المبيعات متسارعة بشكل كبير، وهذا ليس مقبولاً؛ لأن البيانات يجب أن تعرض بصورة واضحة.

# التحليل الإحصائي

3-2

تحقق

(1) المنوال؛ حيث إن الغالبية العظمى من القيم متساوية.

$\pm 1.75\%$  (2A)

بين 39.25% و42.75% (2B)

$\mu = 30.6, \sigma = 2.74$  (3A)

(3B) إجابة ممكنة: يجب أن يزداد المتوسط قليلاً تبعاً لذلك، أما الانحراف المعياري فيزداد بشكل كبير.

$\mu = 32.2, \sigma = 8.19$

# تدريب وحل المسائل:



أي مقياس النزعة المركزية يناسب بصورة أفضل البيانات الآتية؟

- (1) المتوسط؛ لأنه لا توجد قيم متطرفة.
- (2) الوسيط؛ لأنه توجد قيمة متطرفة.
- (3) الوسيط؛ لأنه توجد قيمة واحدة متطرفة، و لا توجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات.
- (4) المتوسط؛ لأنه لا توجد قيم متطرفة.
- (5) الوسيط؛ لأنه يوجد قيمة واحدة متطرفة أكبر بكثير من بقية القيم وهي 66.
- (6) **طقس**: المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة في البيانات.

(7) ألعاب أولمبية:

(a) هامش خطأ المعاينة

قانون هامش خطأ المعاينة

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$n = 5824$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{5824}}$$

$$\approx \pm 1.31\%$$

$$0.29 + 0.0131 = 0.3031 \approx 30.3\% \text{ (b)}$$

$$0.29 - 0.0131 = 0.2769 \approx 27.7\%$$

الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا بأنهم سيشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز تقع بين 27.7% و 30.3%

**(8) رياضة:**

(a) هامش خطأ المعاينة

قانون هامش خطأ المعاينة

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$n = 5669$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{5669}}$$

$$\approx \pm 1.33\%$$

$$0.31 + 0.0133 = 0.3233 \approx 32.3\% \text{ (b)}$$

$$0.31 - 0.0133 = 0.2967 \approx 29.7\%$$

الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا أنهم يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهرياً تقع بين 29.7% و32.3%

(9) تمارين رياضية:

(a)  $\approx \pm 1.54\%$

(b) بين 76.5% و 79.5% أي في الفترة (76.5% , 79.5%)

(10) قيادة:

(a)  $\approx 4.3$

(b) الانحراف المعياري للدولة الثانية أكبر كثيراً من الانحراف المعياري للدولة الأولى؛ لذا فالسرعات القصوى في الدولة الأولى أكثر تجانساً؛ أي أن السرعات القصوى قريبة بعضها من بعض، مقارنة بالسرعات القصوى في الدولة الثانية التي تتضمن سرعات قصوى كبيرة جداً، وأخرى صغيرة جداً.

(11) تدريب:

0.12

(12) اختبارات:

(a) المتوسط = 21.18 و الوسيط = 21.4 والقيمتان قريبتان إحداهما من الأخرى

(b) 1.02

(c) المتوسط الجديد = 21.23

الوسيط الجديد = 21.45

يرتفع المتوسط و الوسيط قليلا.

**(13) مدارس:**

(a) المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة في البيانات.

(b) 2.35

## مسائل مهارات التفكير العليا:

14) مسألة مفتوحة:

إجابة ممكنة:

| كتل طلاب الصف الثالث الثانوي<br>(بالكيلوجرام) |     |    |    |
|---|-----|----|----|
| 69  | 112 | 61 | 55 |
| 91  | 108 | 66 | 62 |
| 81  | 79  | 83 | 51 |
| 58  | 86  | 92 | 77 |

لا يوجد منوال، الوسيط = 78، والمتوسط 76.9375. والانحراف المعياري 18 تقريباً.

15) تحد: 2066

16) تبرير: إجابة ممكنة: عند حذف القيمة المتطرفة الكبيرة، ستكون بقية القيم قريبة بعضها من بعض؛ لذا سينقص الانحراف المعياري وينقص المتوسط لبقية القيم أيضاً؛ لأن القيمة المتطرفة الكبيرة هي التي تؤدي إلى ارتفاع قيمة المتوسط.

17) تبرير: إجابة ممكنة: سيزداد الوسيط كذلك بمقدار 10، فمثلاً إذا كان الوسيط لمجموعة بيانات يساوي 18، وزيدت كل مفردة بمقدار 10، فإن الوسيط يزداد بمقدار 10 ليصبح 28. ويزداد المتوسط أيضاً بمقدار 10؛ لأن البيانات جميعها زادت بالمقدار نفسه، فمثلاً المتوسط لمجموعة

الأعداد 2, 2, 2, 2, 2 هو 2، إذا زيدت كل مفردة بمقدار 10 فإنها تصبح 12, 12, 12, 12, 12،  
ويصبح المتوسط للمجموعة الجديدة يساوي 12. أما الانحراف المعياري فإنه لا يتأثر مع زيادة كل  
مفردة بالقيمة نفسها؛ حيث إن مقدار التباعد في القيم يبقى نفسه، فزيادة كل مفردة بمقدار ثابت لا  
تؤثر في تباعد القيم الجديدة.

**18) اكتب:** إجابة ممكنة: مع أن كلاً من المتوسط والوسيط يمثل مركز البيانات، فإن الوسيط هو  
القيمة التي تقع في منتصف البيانات، بينما يتأثر المتوسط بالقيم جميعها.

## مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت كل دراسة مسحية مما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، وفسر إجابتك:

(19) غير متحيزة؛ لأن لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها ليكون في العينة.

(20) متحيزة؛ لأن لاعبي كرة السلة في الغالب يكونون أطول من المعدل العام لأطوال طلاب المدرسة، لذلك لا تمثل أطوال لاعبي كرة السلة أطوال الطلاب.

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين  $u, v$  في كل مما يأتي، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أو لا:

(21) 0، متعامدان

(22) 32، غير متعامدين

(23) -40، غير متعامدين

(24) 2، غير متعامدين

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية في كل مما يأتي:

(25)  $(12.53, 1.07)$ ,  $(-12.53, 4.21)$

(26)  $(9.22, 2.92)$ ,  $(-9.22, 6.06)$

(27)  $(3.16, 0.32)$ ,  $(-3.16, 3.46)$

تدريپ علي اختبار:

D (28

D (29

# الاحتمال المشروط

3-3

تحقق

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

B (3)

## تدرب وحل المسائل:



يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء، و 6 كرات حمراء، و 10 كرات صفراء، و 6 كرات بيضاء، و 5 كرات خضراء. إذا سحبت كرة واحدة عشوائياً، فأوجد الاحتمال في كل حالة مما يأتي:

(1)  $\frac{5}{27}$

(2)  $\frac{1}{5}$

(3)  $\frac{10}{21}$

(4)  $\frac{11}{29}$

(5) 0

(6) قطاعات دائرية:

$\frac{1}{4}$  أو 25%

**(7) فحص القيادة:**

$$\frac{32}{41} \text{ (a)}$$

$$\frac{2}{5} \text{ (b)}$$

$$\frac{3}{7} \text{ (c)}$$

**(8) دروس التقوية:**

$$\frac{78}{199} \text{ (a)}$$

$$\frac{9}{35} \text{ (b)}$$

$$\frac{121}{175} \text{ (c)}$$

**C (9)**

**D (10)**

إذا ألقيت أربع قطع نقد متميزة مرة واحدة، فأجب عما يأتي:

$$\frac{2}{5} \text{ (11)}$$

$$\frac{4}{15} \text{ (12)}$$

$$\frac{1}{15} \text{ (13)}$$

$$\frac{1}{5} \text{ (14)}$$

(15) بطاقات:

$$\frac{1}{13}$$

(16)

$$\frac{2}{5} \text{ (a)}$$

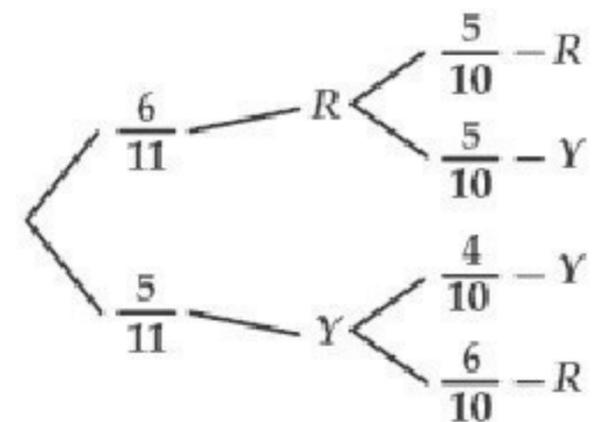
$$\frac{1}{3} \text{ (b)}$$

## مسائل مهارات التفكير العليا:

(17) تحد: 0.25%

(18) اكتب: إجابة ممكنة: عندما تكون الحادثتان  $A$  و  $B$  مستقلتين، فإن احتمال حدوث إحداهما لا يؤثر في حدوث الأخرى. فمثلاً: إلقاء حجر النرد لا يؤثر في سحب بطاقة. فاحتمال سحب البطاقة التي تحمل الرقم 3 من بين بطاقات مرقمة علماً بأن الرقم 3 ظهر على حجر النرد يكافئ احتمال سحب الرقم 3 من البطاقات فقط. أي أن  $P(A | B) = P(A)$ . وعندما تكون الحادثتان غير مستقلتين يطبق الاحتمال المشروط. فمثلاً: احتمال سحب البطاقة التي تحمل الرقم 3 دون إرجاع يؤثر في احتمال سحب بطاقة أخرى، حيث يقل فضاء العينة.

(19) تبرير: إجابة ممكنة: صندوق به 11 كرة، منها 6 حمراء و 5 صفراء. سحب كرتان على التوالي دون إرجاع، استعمل الرسم الشجري لبيان الاحتمالات جميعها.



(20) تبرير: إجابة ممكنة: 50%؛ ليس للرميات السابقة تأثير في الرمية 21، فهي حوادث مستقلة.

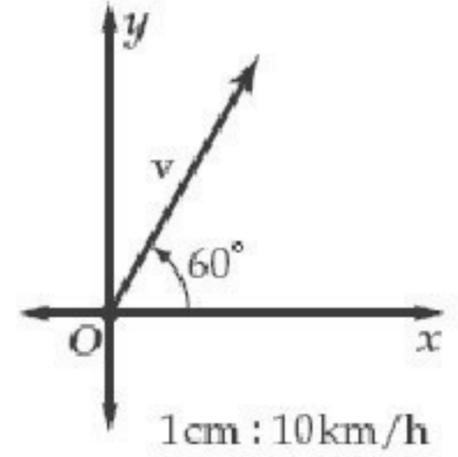
21) مسألة مفتوحة: إجابة ممكنة:

| طب | هندسة | الصف      |
|----|-------|-----------|
| 9  | 6     | سنة أولى  |
| 5  | 8     | سنة ثانية |

احتمال أن يكون من كلية الطب علماً بأنه في السنة الجامعية الأولى يساوي  $\frac{3}{5}$

## مراجعة تراكمية

(22) إجابة ممكنة:



(23) ثقافة مالية:

(a) المتوسط 26489 ريالاً، والوسيط 25738 ريالاً

(b) 2736.46 ريالاً

(c) يزداد المتوسط ليصل إلى 26655.67 ويبقى الوسيط كما هو.

حدد إذا كانت دراسة مسحية مما يأتي، تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة. وفسر إجابتك:

(24) متحيزة؛ لأن الأشخاص الذين تم مسح رأيهم قد يظنون أن الأطباق التي يقدمها المطعم هي الأكثر شعبية.

(25) غير متحيزة؛ لأن لكل شخص في مجتمع الدراسة فرصة متساوية لأن يكون ضمن عينة الدراسة التي استطلعت آراؤهم.

تدریب علی اختبار:

A (26

$\frac{1}{2}$  (27

# اختبار منتصف الفصل

حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، وفسر إجابتك:

(1) متحيزة؛ لأن الذين تم استطلاع آرائهم يكون لديهم أطفال أكثر من غيرهم في العادة.

(2) غير متحيزة؛ لأن مجتمع الدراسة هو الموظفون في الشركة، ولكل موظف الفرصة نفسها لأن يكون في العينة.

(3) غير متحيزة؛ طلاب المدرسة جميعهم يشكلون المجتمع، وكل طالب له الفرصة نفسها أن يكون في العينة.

D (4)

حدد ما إذا كانت كل من الحالتين الآتيتين تمثل دراسة تجريبية أو دراسة بالملاحظة. وإذا كانت دراسة تجريبية، فحدد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة، ثم اذكر إن كانت متحيزة أو لا:

(5) دراسة قائمة على الملاحظة

(6) دراسة تجريبية: المجموعة التجريبية هي النصف الذي حصل على ساعة لتناول الغداء. والمجموعة الضابطة هي النصف الآخر من الموظفين.

(7) المتوسط، لا يوجد قيم متطرفة في البيانات.

(8)

$$\frac{24}{41} \text{ (a)}$$

$$\frac{17}{30} \text{ (b)}$$

إذا إلقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال كل مما يأتي:

$$\frac{1}{3} \text{ (9)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (10)}$$

D (11)

# الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

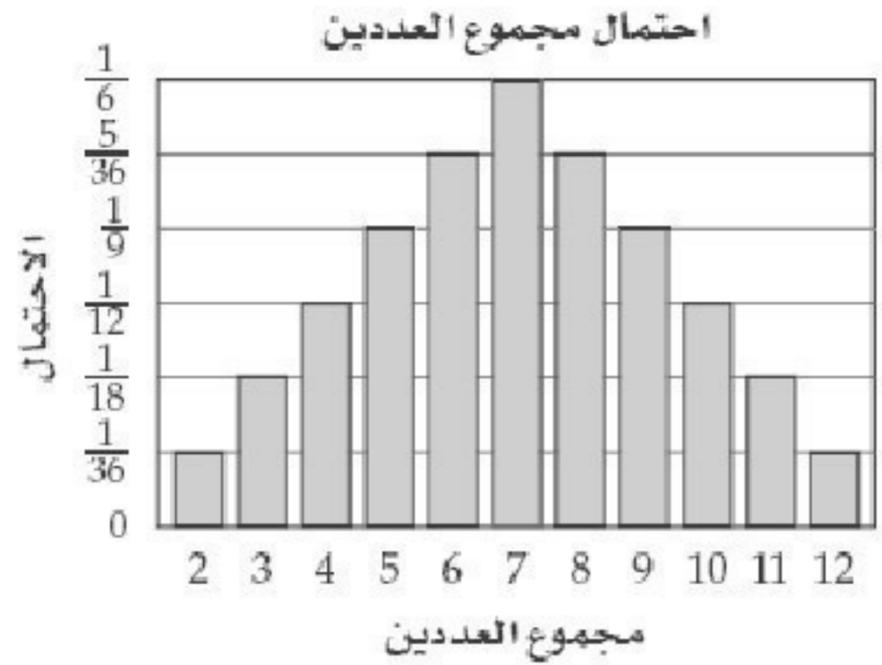
3-4

تحقق

(1) 16.5% تقريباً

(2)  $\frac{1}{56}$  أو 2% تقريباً

(3A)



$$7, \frac{1}{6} \text{ (3B)}$$

$$\frac{1}{6} \text{ (3C)}$$

$$2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + \dots + 12 \times \frac{1}{36} = 7 \text{ (4)}$$

# تدريب وحل المسائل:



(1)  $\frac{1}{3}$

(2) 13.9% تقريباً

(3)  $\frac{1}{1680}$  أو 0.06% تقريباً

(4) مختبر:

$$\frac{1}{15600}$$

























































0.056 (c)

0.25 (d)

D (34)









5 – 3: التوزيع الطبيعي:

في كل من السؤالين الاتيين توزيع طبيعي بوسط وانحراف معياري، أوجد الاحتمال المطلوب في كل منهما:

97.5% (20)

84% (21)

2.5% (22)











$$\frac{6}{9} \approx 67\% \quad (b)$$

(12) اختيار من متعدد: D

(13)

|              |            |            |            |
|--------------|------------|------------|------------|
| <b>X</b>     | <b>0</b>   | <b>1</b>   | <b>2</b>   |
| <b>P (X)</b> | <b>0.1</b> | <b>0.6</b> | <b>0.3</b> |

(14) طقس: 84.1% تقريباً

(15) حقيقة: 0.24665 تقريباً أو 24.7%





































480.2 , 80.71 , 13.56 (b)

0 (c)

(d) لا؛ مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية  $6666.67 \text{ m}$  تقريباً، وهو أقل من  $7000 \text{ m}$ ، والذي يساوي بُعد المستشفى.

– 1 (38)

4 (39)

(40) غير موجودة

1 (41)

6 (42)

2.5 (43)

**حاسبة بيانية:**

**(44) غير موجودة؛ يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند  $x = 1$**

**(45) غير موجودة؛ يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند  $x = 2$**

**(46) غير موجودة؛ تنذب**

**(47) غير موجودة؛ تقترب قيم  $f(x)$  من قيمتين مختلفتين باقتراب قيم  $x$  من العدد 5 - من اليمين ومن اليسار.**

## مسائل مهارات التفكير العليا:

(48) **اكتشف الخطأ:** كلاهما على خطأ، إذا اقتربت الدالة من قيمتين مختلفتين من اليمين واليسار، فإن النهاية غير موجودة عند تلك النقطة.

(49) **مسألة مفتوحة:** إجابة ممكنة:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & x = 0 \\ x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

(50) **تحذير:**  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  غير موجودة؛  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  غير موجودة؛ إجابة ممكنة: إذا كان مقام

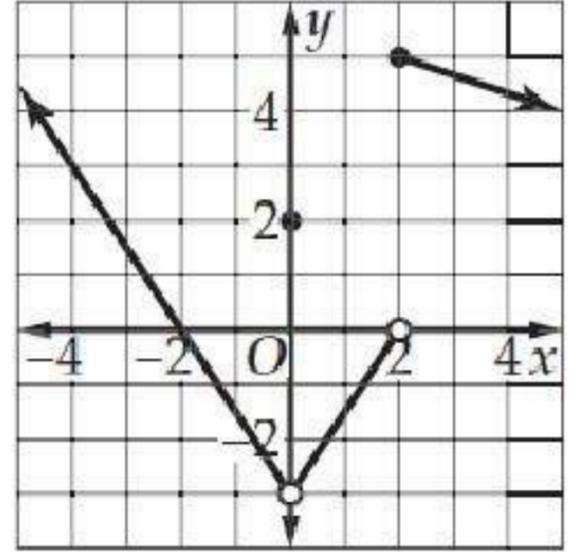
الدالة النسبية صفراً، والبسط لا يساوي صفراً عند نقطة معطاة، فإن النهاية غير موجودة.

(51) **تبرير:** أحياناً؛ إجابة ممكنة: لا تعتمد نهاية  $f(x)$  عندما تقترب  $x$  من  $c$  على قيمة الدالة عند

النقطة  $c$ . فإذا كانت الدالة غير متصلة عند  $c$ ، وكان  $f(c) = L$ ، فإن نهاية الدالة قد تكون قيمة

مختلفة عن  $L$ .

52) مسألة مفتوحة: إجابة ممكنة:



53) تحد:

(a) غير موجودة

(b) غير موجودة

(c) - 1

54) إجابة ممكنة: إذا كانت الدالة  $f(x)$  متصلة عند  $x = a$ ، فإنه يمكنك إيجاد النهاية بالتعويض عن  $x$  بـ  $a$  في الدالة، أما إذا لم تكن الدالة متصلة، فبإمكانك التبسيط ثم التعويض عن  $x$  بـ  $a$ . وإذا لم تفد أي من الطريقتين، فإننا نقدر النهاية باستعمال التمثيل البياني.



63° (58)

93.4° (59)

تدريب على اختبار:

C (60)

A (61)

# حساب النهايات جبرياً

4-2

تحقق

$$-4 \text{ (1A)}$$

$$\frac{1}{9} \text{ (1B)}$$

$$\sqrt{2} \text{ (1C)}$$

$$3 \text{ (2A)}$$

$$-\frac{1}{7} \text{ (2B)}$$

(2C) بما أم هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما  $x = 2$  فلا يمكننا حسابها بالتعويض المباشر

2D غير ممكن؛ لأنه اذا كانت  $f(x) = x + 6$  فإن  $f(-8) = -8 + 6 < 0$  إذن لا يمكن

حساب  $\lim_{x \rightarrow -8} \sqrt{f(x)}$

20 (3A)

$\frac{1}{5}$  (3B)

10 (4A)

$-\frac{1}{4}$  (4B)

$-\infty$  (5A)

$\infty$  (5B)

$-\infty$  (5C)

0 (6A)

$-\infty$  (6B)

3.5 (6C)

0 (7A)

$\infty$  (7B)

3 (7C)

# تدرب وحل المسائل:



استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

(1) -25

(2) 29

(3) 21.11

(4) - 46

(5) 6

(6) 42

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكناً، وإلا فذكر السبب:

(7) ليس ممكناً؛ فالمقام يساوي صفرأ عندما  $x = 16$ .

(8) 30

2 (9)

(10) ليس ممكناً؛ قيمة الدالة  $f(x) = \sqrt{2-x}$  هي  $\sqrt{-1}$  عندما  $x = 3$  وهي ليست معرفة.

188 (11)

- 66.84 (12)

(13) فيزياء:

عندما تقترب سرعة الجسم من الصفر، فإن كتلته تقترب من كتلته الابتدائية، أو  $\lim_{v \rightarrow 0} m = m_0$  كتلته في وضع السكون.

احسب كل نهاية مما يأتي:

3 (14)

8 (15)

1.46 (16)

$$-2 \quad (17)$$

$$-8 \quad (18)$$

$$\frac{1}{6} \quad (19)$$

احسب كل نهاية مما يأتي:

$$\infty \quad (20)$$

$$\frac{3}{4} \quad (21)$$

$$-\infty \quad (22)$$

$$\infty \quad (23)$$

$$0 \quad (24)$$

$$2 \quad (25)$$

**(26) اسفنج:**

**25 mm (a)**

**130 mm (b)**

**(c) لن يتعدى طول حيوان الإسفنج 130 mm**

**احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إذا كانت موجودة:**

**0 (27)**

**- 4 (28)**

**2 (29)**

**$\infty$  (30)**

**$\frac{1}{4}$  (31)**

**$\infty$  (32)**

$$-5 \quad (33)$$

$$5 \quad (34)$$

(35) غير موجودة

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إذا كانت موجودة:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0 \quad (36)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + 2^x - \cos x) = 1 + 0 + 2^0 - \cos 0 = 1 \quad (37)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x} = \frac{\tan \pi}{\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (38)$$

$$-0.5 \quad (39)$$

أوجد  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  لكل دالة مما يأتي:

$$2 \quad (40)$$

$$-9 \quad (41)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (42)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad (43)$$

$$2x \quad (44)$$

$$2x + 8 \quad (45)$$

$$0.0000125 \quad (46) \text{ فيزياء}$$

## مسائل مهارات التفكير العليا:

(47) برهان:  $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = \lim_{x \rightarrow c} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)$

$$\lim_{x \rightarrow c} p(x) = \lim_{x \rightarrow c} a_n x^n + \lim_{x \rightarrow c} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow c} a_2 x^2 + \lim_{x \rightarrow c} a_1 x + \lim_{x \rightarrow c} a_0$$

$$p(x) = a_n \left( \lim_{x \rightarrow c} x \right)^n + a_{n-1} \left( \lim_{x \rightarrow c} x \right)^{n-1} + \dots + a_2 \left( \lim_{x \rightarrow c} x \right)^2 + a_1 \lim_{x \rightarrow c} x + \lim_{x \rightarrow c} a_0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} p(x) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0 = p(c)$$

(48) برهان: أثبت أن العبارة صحيحة عند  $n = 1$ ،

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^1 = L^1 = L = \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]$$

أي أن العبارة صحيحة عند  $n = 1$ . افترض أن العبارة صحيحة عند  $n = k$  حيث  $k$  عدد صحيح

$$\text{موجب أي: } \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^k = L^k$$

والمطلوب إثبات أن العبارة صحيحة عند  $n = k + 1$  أي  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{k+1} = L^{k+1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{k+1} &= \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^k \cdot \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^1 \\ &= L^k \cdot L^1 = L^{k+1} \end{aligned}$$

أي أن العبارة صحيحة عندما  $n = k + 1$ . وحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، فإن العبارة صحيحة

لأي عدد صحيح موجب  $n$ .

(49) **تحذ:** إذا كانت  $m > n$ ، فإن النهاية تساوي 0. إذا كانت  $m = n$

$$\frac{a_n}{b_m}$$

إذا كانت  $m < n$ ، فإن النهاية إما  $+\infty$  أو  $-\infty$ .

(50) **تبرير:** صحيحة أحياناً، تكون صحيحة إذا كانت  $r(x)$  معرفة عند  $c$ .

| مثال   | التعريف  | الخاصية             |
|--|--|---------------------|
| $\lim_{x \rightarrow 2} [x + 5] =$ $= \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5$   | $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] =$ $= \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$   | خاصية المجموع       |
| $\lim_{x \rightarrow 2} [x - 5] =$ $= \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 5$   | $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] =$ $= \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$   | خاصية الفرق         |
| $\lim_{x \rightarrow 2} 2x = 2 \lim_{x \rightarrow 2} x$   | $\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$   | خاصية الضرب في ثابت |
| $\lim_{x \rightarrow 2} [x^2(x - 5)] =$ $= \left( \lim_{x \rightarrow 2} x^2 \right) \left( \lim_{x \rightarrow 2} (x - 5) \right)$  | $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] =$ $= \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$   | خاصية الضرب         |
| $\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{x^2}{(x - 5)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2}{\left( \lim_{x \rightarrow 2} (x - 5) \right)}$ <p><math>\lim_{x \rightarrow 2} (x - 5) \neq 0</math> شرط <math>\neq</math></p> | $\lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ <p><math>\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0</math> شرط <math>\neq</math></p> | خاصية القسمة        |
| $\lim_{x \rightarrow 2} [(x - 5)^2] = \left[ \lim_{x \rightarrow 2} (x - 5) \right]^2$   | $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)^n] = \left[ \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$   | خاصية القوة         |
| $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{(x - 5)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 9} (x - 5)}$  | $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$ <p>إذا كانت <math>\lim_{x \rightarrow c} f(x) &gt; 0</math></p> <p>عندما <math>n</math> زوجي</p>                         | خاصية الجذر النوني  |

## مراجعة تراكمية

(52) @ 1 -1

(56) 0، غير معرفة

(57) 2، 4

أوجد  $(f + g)(x)$  @  $(f - g)(x)$  @  $(f \cdot g)(x)$  @  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$  لكل زوج من الدوال

الآتية، ثم حدّد مجال الدالة الناتجة:

(58)

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= x^2 - 2x + x + 9 \\ &= x^2 - x + 9\end{aligned}$$

المجال:  $(-\infty, \infty)$  أو  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^2 - 2x - x - 9 \\ &= x^2 - 3x - 9\end{aligned}$$

المجال:  $(-\infty, \infty)$  أو  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
 &= (x^2 - 2x) \cdot (x + 9) \\
 &= x^3 + 9x^2 - 2x^2 - 18x \\
 &= x^3 + 7x^2 - 18x
 \end{aligned}$$

المجال:  $(-\infty, \infty)$  أو  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\
 &= \frac{x^2 - 2x}{x + 9}
 \end{aligned}$$

المجال:  $\{x \mid x \neq -9, x \in \mathbb{R}\}$

(59)

$$\begin{aligned}
 (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\
 &= \frac{x}{x + 1} + x^2 - 1
 \end{aligned}$$

المجال:  $\{x \mid x \neq -1, x \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned}
 (f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\
 &= \frac{x}{x + 1} - x^2 + 1
 \end{aligned}$$

المجال:  $\{x \mid x \neq -1, x \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
 &= \frac{x}{x+1} \cdot (x-1) \cancel{(x+1)} \\
 &= x(x-1)
 \end{aligned}$$

المجال:  $\{x | x \neq -1, x \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\
 &= \frac{x}{x+1} \div (x^2 - 1) \\
 &= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x^2 - 1}
 \end{aligned}$$

المجال:  $\{x | x \neq -1, x \neq 1, x \in \mathbb{R}\}$

تدريب على اختبار:

C (60)

A (61)

B (62)

استكشاف:  
معمل الحاسبة  
البيانية: ميل المنحنى

4-3

تمارين:

(1) 6 -

(2) 12

(3) 1

(4) 0.5

حل النتائج

(5) إجابة ممكنة: كلما اقتربت نقاط تقاطع القاطع من نقطة  $(a, b)$  ، على المنحنى، فإن القاطع يقترب أكثر فأكثر من المماس للمنحنى عند النقطة  $(a, b)$ .

(6) إجابة ممكنة: إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة عند تلك النقطة.

# المماس والسرعة المتجهة

4-3

تحقق

6 (1A)

-4 (1B)

$$m = 2x - 4 \text{ (2A)}$$

$$m = 3x^2 \text{ (2B)}$$

17 ft/s إلى الأعلى. (3)

- 224 ft/s (4)

$$v(t) = 90 - 32t \text{ (5)}$$

# تدرب وحل المسائل:



أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة:

$$(1) \quad -3, 5$$

$$(2) \quad -3, -3$$

$$(3) \quad -3, -\frac{1}{3}$$

$$(4) \quad 12, 3$$

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

$$(5) \quad m = -2$$

$$(6) \quad m = -2x + 4$$

$$(7) \quad m = -2x$$

$$m = -\frac{2}{x^3} \quad (8)$$

$$m = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2} \quad (9)$$

$$m = -6x^2 \quad 10$$

(11) تزلج:

$$m = 0.18t^2 - 2.16t \quad (a)$$

$$-3.6, -6.3, -6.3 \quad (b)$$

تمثل  $s(t)$  في كلٍ مما يأتي بعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأميال بعد  $t$  دقيقة. أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم بالميل لكل ساعة في الفترة الزمنية المعطاة (تذكر بأن تحوّل الدقائق إلى ساعات):

(12) 45 mi/h تقريباً

(13) 65 mi/h تقريباً

(14) 49 mi/h تقريباً

(15) 45 mi/h تقريباً

$$\frac{-64t^2 + 130t + 2625}{2t - 15} \quad (16)$$

تمثل  $f(t)$  في كل مما يأتي بعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد  $t$  ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللحظية لهذا الجسم عند الزمن المعطى:

(17) -96 ft/s

(18) 12.4 ft/s

(19) - 512 ft/s

(20) - 121.6 ft/s

(21) -58.2 ft/s

$$-57.6 \text{ ft/s (22)}$$

تمثل  $s(t)$  في كلٍ مما يأتي المسافة التي يقطعها جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية  $v(t)$  للجسم عند أي زمن :

$$v(t) = 28t \text{ (23)}$$

$$v(t) = 1 - 6t \text{ (24)}$$

$$v(t) = 5 \text{ (25)}$$

$$v(t) = -2t + 4 \text{ (26)}$$

$$v(t) = 24t - 6t^2 \text{ (27)}$$

$$v(t) = 9t^2 + 6 \text{ (28)}$$

(29) قفز مظلي:

$$-112 \text{ ft/s (a)}$$

$$-64 \text{ ft/s, } -160 \text{ ft/s (b)}$$

$$v(t) = -32t \text{ (c)}$$

**(30) غوص:**

$$-7.4 \text{ m/s (a)}$$

$$v(t) = -9.82t - 0.04, -29.5 \text{ m/s (b)}$$

**(31) كرة قدم:**

$$-32t + 75 \text{ (a)}$$

$$59 \text{ ft/s (b)}$$

$$t \approx 2.344 \text{ s (c)}$$

$$90.39 \text{ ft تقريباً (d)}$$

**(32) فيزياء:**

$$9t^2 + 8 \text{ (a)}$$

$$44 \text{ m, } 152 \text{ m, } 332 \text{ m (b)}$$

## مسائل مهارات التفكير العليا:

(33) اكتشف الخطأ: جميل؛ إجابة ممكنة: ميل المنحنى هو  $-1$  عندما  $x < 0$ ،  $1$  عندما  $x > 0$ .  
لذا، فإن التمثيل البياني للميل يتكون من مستقيمين أفقيين:

$$y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

ولذلك يكون غير متصل.

$$m = 8x^3 + 9x^2 - 2 \quad (34)$$

(35) خاطئة؛ إجابة ممكنة: إذا لم يكن المنحنى دائرة فمن الممكن أن يقطع المماس هذا المنحنى في نقاط أخرى غير نقطة التماس، على سبيل المثال، المنحنى الذي يمثل الدالة  $y = \sin x$ .

(36) صح، إجابة ممكنة: بما أن  $s(t)$  دالة خطية، فإن ميلها ثابت ويساوي  $a$ ، وبذلك تكون السرعة المتجهة اللحظية للجسم تساوي  $a$  دائماً.

(37) إجابة ممكنة: إذا مثلت دالة المسافة التي يقطعها جسم بيانياً، فإن المماس عند نقطة القيمة العظمى (أو الصغرى) يكون أفقياً؛ أي موازياً للمحور  $x$ ، وميله يساوي صفراً. ولذلك تكون السرعة المتجهة اللحظية تساوي صفراً عند نقطة القيمة العظمى (أو الصغرى)

## مراجعة تراكمية

22 (38)

1 (39)

0 (40)

$\frac{3}{2}$  (41)

0 (42)

تدريب على اختبار:

A (43)

C (44)

C (45)

# اختبار منتصف الفصل

قَدِّر كل نهاية مما يأتي:

1 (1)

1 (2)

12 (3)

0 (4)

0.66 (5)

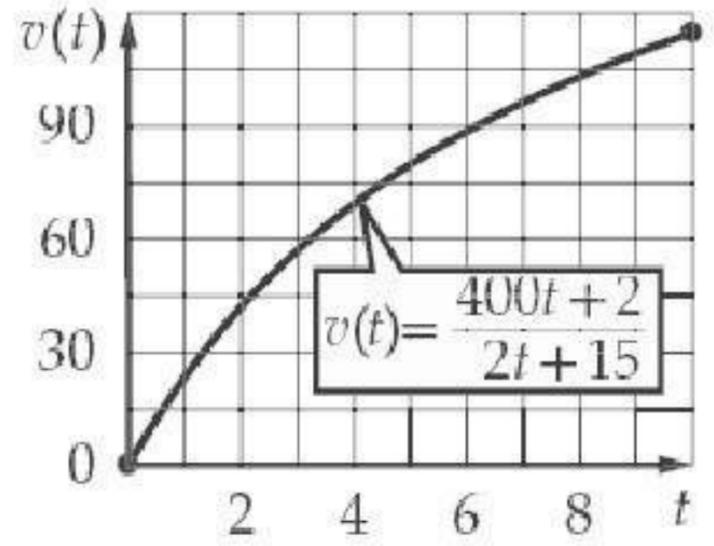
2 (6)

-1 (7)

0.33 (8)

(9)

(a)



(b) 42000, 80000, 115000 ريال

(c) 200

(d) إن قيمة التحفة لن تزيد عن 200000 ريال.

احسب كل نهاية مما يأتي بالتعويض المباشر ، إذا كان ممكناً، وإلا فاذكر السبب.

(10) ليس ممكناً؛ عندما  $x = 9$ ، فإن المقام يساوي صفراً.

(11) - 20

(12) حياة بريّة: 500 غزال

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

$$\infty \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \quad (14)$$

$$0 \quad (15)$$

$$-\infty \quad (16)$$

$$A \quad (17)$$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة:

$$1, -5 \quad (18)$$

$$-5, -5 \quad (19)$$

$$-5, 3 \quad (20)$$

(21) ألعاب نارية:

$$v(t) = -32t + 90 \text{ (a)}$$

$$74 \text{ ft/ s (b)}$$

$$129.76 \text{ ft (c) تقريباً}$$

(22) اختيار من متعدد: H

تعطى المسافة التي يقطعها جسم متحرك بالأميال بعد  $t$  دقيقة بالدالة  $s(t)$ .  
أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم في كل مما يأتي بالميل لكل ساعة على الفترة الزمنية  
المعطاة. تذكر أن تحول الدقائق إلى ساعات.

$$42 \text{ mi/ h (23)}$$

$$123 \text{ mi/ h (24)}$$

$$54 \text{ mi/ h (25) تقريباً}$$

$$120 \text{ mi/ h (26) تقريباً}$$

أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية  $v(t)$  لجسم يعطى موقعه عند أي زمن بالعلاقة  $h(t)$  في كل مما يأتي:

$$v(t) = 8t - 9 \quad (27)$$

$$v(t) = 2 - 26t \quad (28)$$

$$v(t) = 2 - 10t \quad (29)$$

$$v(t) = 12t - 3t^2 \quad (30)$$

# المشتقة

4-4

تحقق

$$f'(x) = 12x, f'(2) = 24, f'(5) = 60 \quad (1A)$$

$$f'(x) = -10x + 2, f'(1) = -8, f'(4) = -38 \quad (1B)$$

$$j'(x) = 4x^3 \quad (2A)$$

$$k'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \quad (2B)$$

$$m'(x) = -\frac{5}{x^6} \quad (2C)$$

$$f'(x) = 10x^4 - 3x^2 \quad (3A)$$

$$g'(x) = 15x^4 + 24x^3 \quad (3B)$$

$$h'(x) = 12x^2 - 3 \quad (3C)$$

$$v(t) = 55 - 32t \quad (4)$$

(5) أقصى ارتفاع وقدره 330 ft، وذلك عند 0 s، وأدنى ارتفاع 10 ft عند 4 s.

$$h'(x) = (5x^4 + 26x)(7x^3 - 5x^2 + 18) + (x^5 + 13x^2)(21x^2 - 10x) \quad (6A)$$

$$h'(x) = (2x + 3x^2 + 1)(8x^2 + 3) + (x^2 + x^3 + x)(16x) \quad (6B)$$

$$\frac{155}{(12x + 5)^2} \quad (7A)$$

$$\frac{-12x^2 + 24}{(2x^2 + 4)^2} \quad (7B)$$

# تدرب وحل المسائل:



أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة:

$$f'(x) = 8x, f'(2) = 16, f'(-1) = -8 \quad (1)$$

$$g'(t) = -2t + 2, g'(5) = -8, g'(3) = -4 \quad (2)$$

$$m'(j) = 14, m'(-7) = 14, m'(-4) = 14 \quad (3)$$

$$v'(n) = 10n + 9, v'(7) = 79, v'(2) = 29 \quad (4)$$

$$r'(b) = 6b^2 - 10, r'(-4) = 86, r'(-3) = 44 \quad (5)$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

$$y'(f) = -11 \quad (6)$$

$$z'(n) = 4n + 7 \quad (7)$$

$$g'(h) = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{h^{\frac{2}{3}}} - 3h^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$b'(m) = 2m^{-\frac{1}{3}} - 3m^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$n'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{6}{t^3} - \frac{6}{t^4} \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \quad (11)$$

$$q'(c) = 9c^8 - 15c^4 + 10c - 3 \quad (12)$$

$$p'(k) = 5.2k^{4.2} - 38.4k^{3.8} + 3 \quad (13)$$

(14) درجات الحرارة:

$$f'(h) = -0.0108h^2 - 0.02h + 2.04 \quad (a)$$

$$f'(2) \approx 1.96^\circ F, f'(14) \approx -0.36^\circ F, f'(20) \approx -2.68^\circ F \quad (b)$$

68.92° F (c)

استعمل الاشتقاق لإيجاد النقاط الحرجة، ثم أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لكل دالة مما يأتي على الفترة المعطاة.

15) نقطة حرجة  $(-2, -8)$  ، صغرى  $(-2, -8)$  ، عظمى  $(-5, 10)$

16) لا يوجد نقاط حرجة في الفترة  $[1, 4]$  ، صغرى  $(1, 5)$  ، عظمى  $(4, 350)$

17) نقطة حرجة  $(-5, -10)$  ، صغرى  $(-6, -11)$  ، عظمى  $(-3, -2)$

18) نقطة حرجة  $(-9, 405)$  ، صغرى  $(-11, 385)$  ، عظمى  $(-9, 405)$

19) نقطة حرجة  $(1, 1)$  ، صغرى  $(0, 0)$  ، عظمى  $(3, 9)$

20) نقطتان حرجتان  $(-3, 21.5)$  و  $(2, 0.67)$  ، صغرى  $(2, 0.67)$  ، عظمى

$(5, 32.17)$

(21) رياضة:

$$h'(t) = 65 - 32t \quad (a)$$

$$(b) \quad (0, 3) , (2.03, 69.02) \text{ تقريباً}$$

(c) نعم؛ أقصى ارتفاع يمكن أن تبلغه الكرة هو 69.02 ft تقريباً. وهذا أعلى من 68 ft.

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

$$f'(x) = 4(x^2 + 9) + 2x(4x + 3) \quad (22)$$

$$g'(x) = (12x^3 + 2)(5 - 3x) - 3(3x^4 + 2x) \quad (23)$$

$$s'(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t}(3t^{11} - 4t) + (\sqrt{t} + 2)(33t^{10} - 4) \quad (24)$$

$$g'(x) = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2\right) + (0.5x^4 - 3x) + (3x^3 - 3)\left(x^{\frac{3}{2}} + 2x\right) \quad (25)$$

(26)

$$f'(t) = (3t^2 + 2 - 7t^6)(t^6 + 3t^4 - 22t) + (t^3 + 2t - t^7) \cdot (6t^5 + 12t^3 - 22)$$

$$q'(a) = \left( \frac{8}{9}a^{\frac{1}{8}} - \frac{1}{4}a^{-\frac{5}{4}} \right) \left( a^{\frac{5}{4}} - 13a \right) + \left( a^{\frac{9}{8}} + a^{-\frac{1}{4}} \right) \cdot \left( \frac{5}{4}a^{\frac{1}{4}} - 13 \right) \quad (27)$$

(28)

$$f'(x) = (7x^4 + 2.7)(7.3x^9 - 0.8x^5) + (1.4x^5 + 2.7x) \cdot (65.7x^8 - 4x^4)$$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$f'(m) = -\frac{12}{(3 + 2m)^2} \quad (29)$$

$$r'(t) = \frac{10t}{(3 - t^2)^2} \quad (30)$$

$$m'(q) = \frac{q^6 - 2q^4 - 8q^3 - 9q^2 - 8q}{(q^3 - 2)^2} \quad (31)$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 3x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} + 12}{2(-x^2 + 3)^2} \quad (32)$$

$$q'(r) = \frac{r^2 - 15}{r^4} \quad (33)$$

$$t'(w) = \frac{1}{2}w^{-\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}w^{\frac{5}{2}} \quad (34)$$

(35)

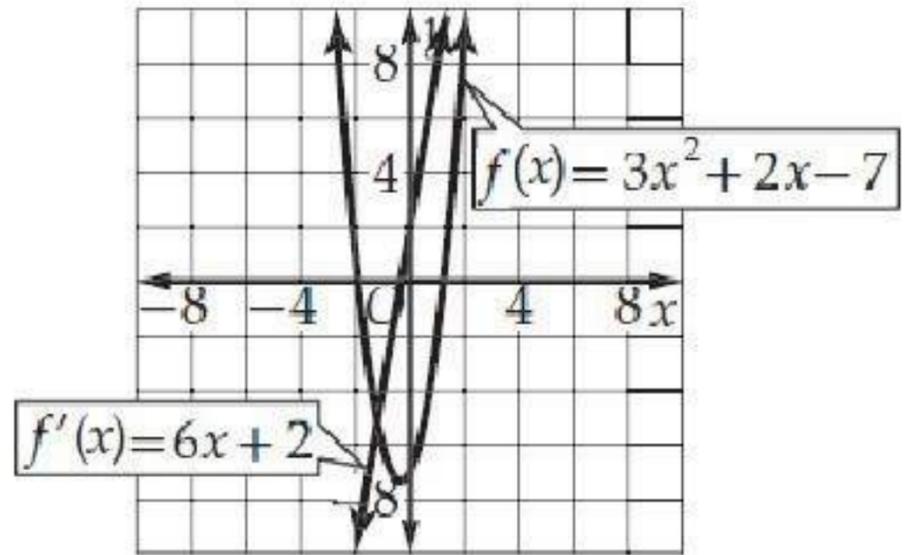
$$r(d) = d(80 - 2d) \quad (a)$$

$$r'(d) = -4d + 80 \quad (b)$$

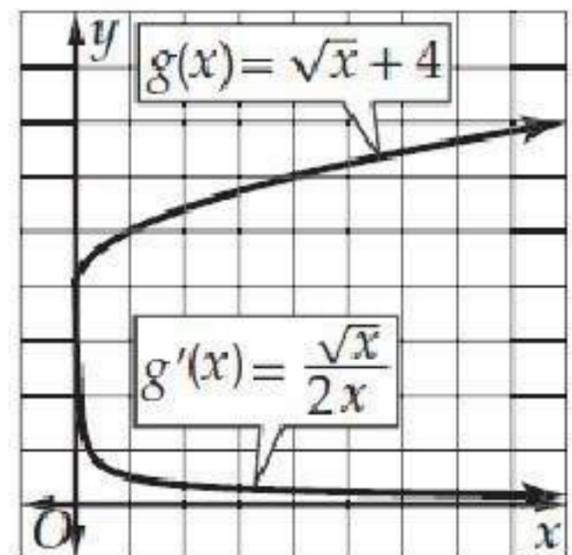
(c) 20 ريالاً

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي، ثم مثل الدالة والمشتقة بيانياً على المستوى الإحداثي نفسه.

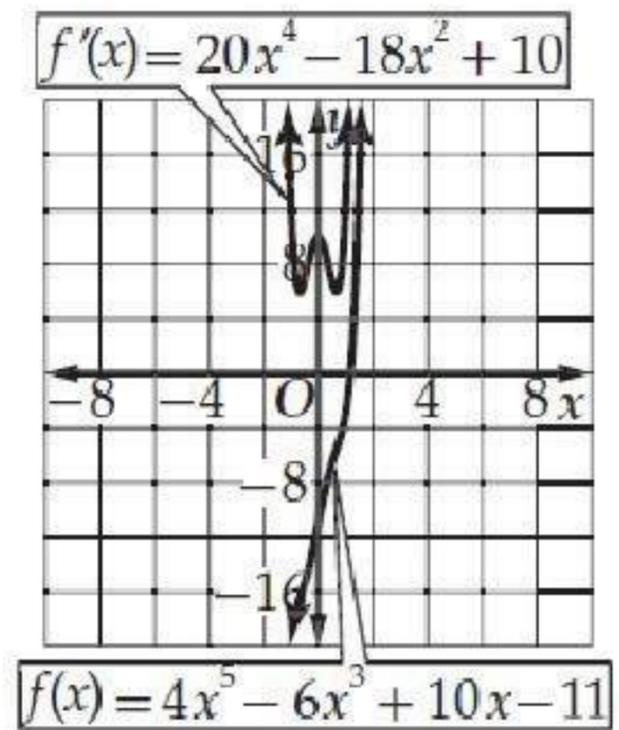
$$f'(x) = 6x + 2 \quad (36)$$



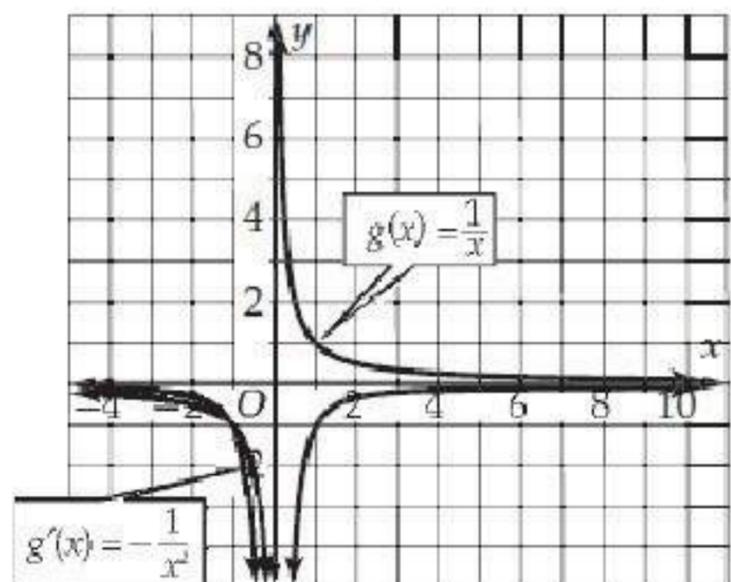
$$g'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x} \quad (37)$$



$$f'(x) = 20x^4 - 18x^2 + 10 \quad (38)$$



$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \quad (39)$$



(40)

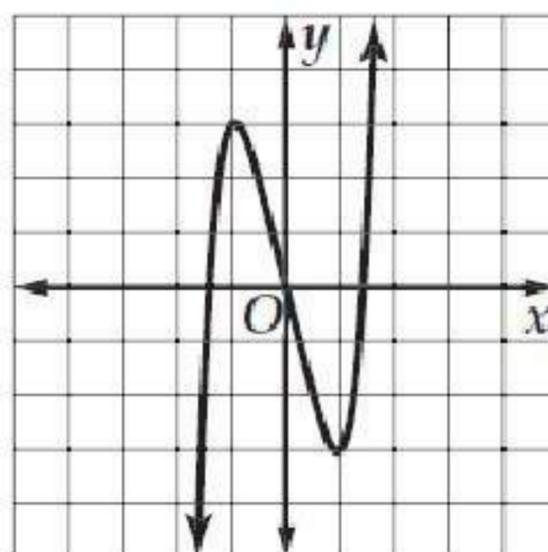
$$f''(x) = 80x^3 - 12x \quad (a)$$

$$g'''(x) = -420x^4 + 96x - 42 \quad (b)$$

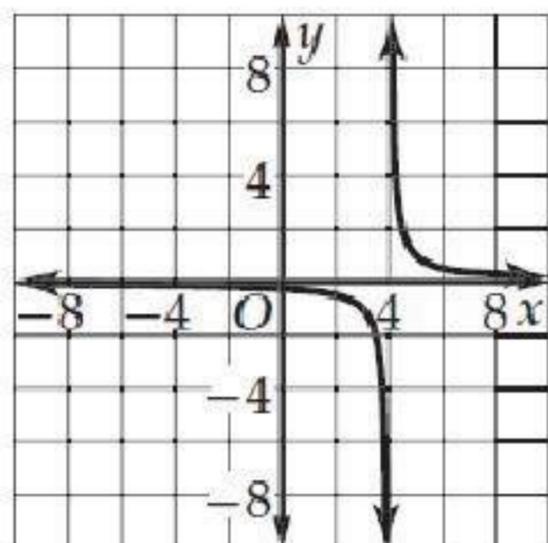
$$h^{(4)}(x) = 1080x^{-7} + 240x^{-6} \quad (c)$$

مثّل منحنى دالة لها الخصائص المعطاة في كلّ مما يأتي:

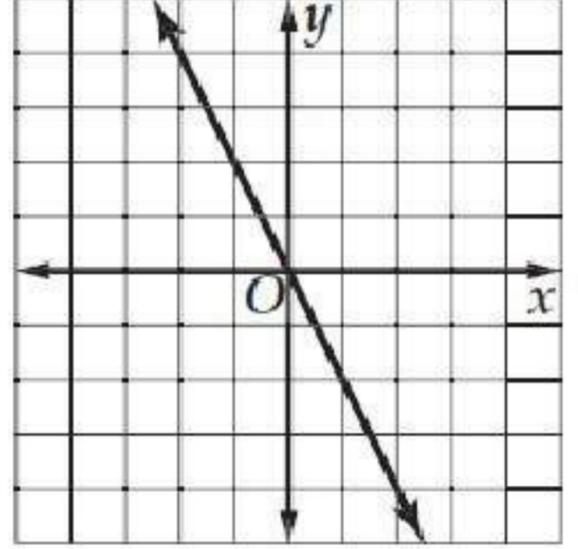
(41) إجابة ممكنة:



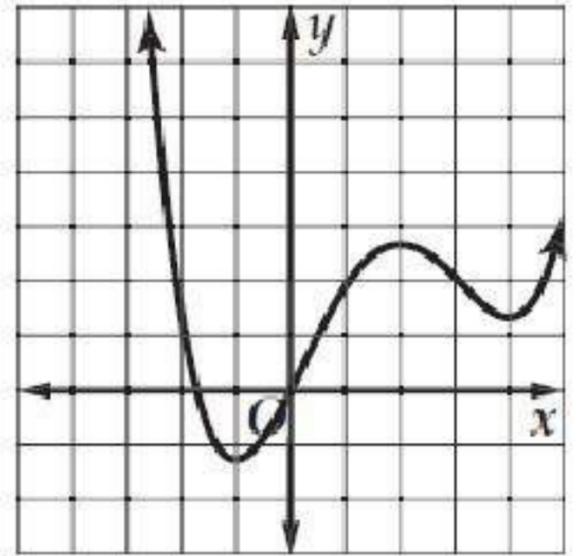
(42) إجابة ممكنة:



(43) إجابة ممكنة:



(44) إجابة ممكنة:

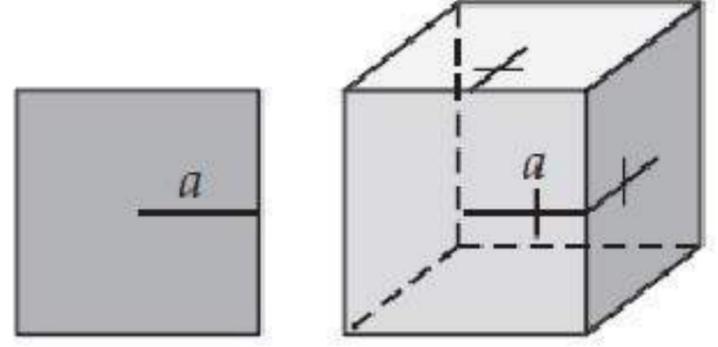


(45) تمثيلات متعددة:

$$A' = 2\pi r \text{ (a)}$$

(b) إجابة ممكنة: مشتقة صيغة مساحة الدائرة هي صيغة محيط الدائرة.

(c)



$$A = 4a^2, A' = 8a, V = 8a^3, V' = 24a^2 \text{ (d)}$$

(e) عند كتابة مساحة المربع بدلالة بعد المركز عن الأضلاع، فإن مشتقة صيغة المساحة هي محيط المربع. وعند كتابة حجم المكعب بدلالة بعد المركز عن الأوجه، فإن مشتقة صيغة الحجم هي مساحة السطح الكلية للمكعب.

## مسائل مهارات التفكير العليا:

(46) اكتشف الخطأ: عبد الله، إجابة ممكنة: وجد عبد الله  $f'(x) = 12x + 4$ ، ثم رُبِع الطرفين.

أما أحمد فقد رُبِع الدالة الأصلية، ثم أوجد المشتقة.

(47) نحد:  $f'(y) = 30x^2y^2 - 12xy - 11x^8z^7$

(48) برهان: إجابة ممكنة:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \left[ \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \right] + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

(49) **تبرير:** صحيحة؛ إجابة ممكنة: إن قوة  $f(x)$  هي  $5n + 3$ . بحسب قاعدة مشتقة القوة، تصبح هذه القوة معامل في المشتقة. وتصبح القوة في المشتقة أقل بواحد من  $5n + 3$  أي  $(5n + 3) - 1$  أو  $5n + 2$ .

(50) **برهان:** إجابة ممكنة:

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x) - \frac{g(x+h) - g(x)}{h}f(x)}{g(x+h)g(x)} \\
 &= \frac{g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x) \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)} \\
 &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}
 \end{aligned}$$

(51) **اكتب:** إجابة ممكنة: من الممكن أن يكون لدالتين مختلفتين المشتقة نفسها؛ لأن مشتقة أي ثابت هي 0، أي أنه لأي دالتين مختلفتان باتسحاب رأسي فإن لهما المشتقة نفسها. فمثلاً للدالتين  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = x^2 + 3$  المشتقة نفسها وهي  $2x$ .

## مراجعة تراكمية

- 3, 3 (52)

- 2, - 2 (53)

6, 12 (54)

- 8 (55)

$-\frac{1}{3}$  (56)

$-\frac{1}{2}$  (57)

7 (58)

3 (59)

تدریب علی اختبار:

D (60

C (61

A (62

# المساحة تحت المنحنى والتكامل

4-5

تحقق

(1) المساحة باستعمال 6 مستطيلات = 2240 وحدة مربعة،

المساحة باستعمال 8 مستطيلات = 2268 وحدة مربعة،

المساحة باستعمال 12 وحدة مستطيلة = 2288 وحدة مربعة.

(2) المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي 15.4 وحدة مربعة،

الأطراف اليسرى = 25 وحدة مربعة،

الوسط = 20.2 وحدة مربعة.

(3A) وحدة مربعة

(3B) 4.5 وحدة مربعة

(4A)  $\frac{26}{3}$  وحدات مربعة

(4B) 60 وحدة مربعة

(5) **طلاء:** لا؛ مساحة كل جزء من الجدار  $16.67 \text{ ft}^2$  تقريباً، بما أن المطلوب طلاء جزأين من الجدار، أي (16.67) 2 ، ويساوي  $33.34 \text{ ft}^2$  تقريباً.  
إن كمية الطلاء لا تكفي.

# تدرب وحل المسائل:



قرب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة مستعملا الطرف المعطى لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عددها في كل من الأشكال أدناه:

(1) 15 وحدة مربعة تقريبا

(2) 9.25 وحدات مربعة تقريبا

(3) 14.29 وحدة مربعة تقريبا

(4) 0.65 وحدة مربعة تقريبا

(5) أرضيات:

(a) طرفا منحنى نصف الدائرة هما طرفا الفترة  $[1, 10]$  ، وباستعمال الأطراف اليسرى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة نجد أن

$$\begin{aligned}
R_1 &= 1 \cdot f(0) = (-0^2 + 10 \cdot 0)^{0.5} = 0 \\
R_2 &= 1 \cdot f(1) = (-1^2 + 10 \cdot 1)^{0.5} = 3 \\
R_3 &= 1 \cdot f(2) = (-2^2 + 10 \cdot 2)^{0.5} = 4 \\
R_4 &= 1 \cdot f(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3)^{0.5} \approx 4.58 \\
R_5 &= 1 \cdot f(4) = (-4^2 + 10 \cdot 4)^{0.5} \approx 4.90 \\
R_6 &= 1 \cdot f(5) = (-5^2 + 10 \cdot 5)^{0.5} = 5 \\
R_7 &= 1 \cdot f(6) = (-6^2 + 10 \cdot 6)^{0.5} \approx 4.90 \\
R_8 &= 1 \cdot f(7) = (-7^2 + 10 \cdot 7)^{0.5} \approx 4.58 \\
R_9 &= 1 \cdot f(8) = (-8^2 + 10 \cdot 8)^{0.5} = 4 \\
R_{10} &= 1 \cdot f(9) = (-9^2 + 10 \cdot 9)^{0.5} = 3
\end{aligned}$$

المساحة الكلية تساوي 37.96 وحدة مربعة تقريباً.

(b) في هذا الجزء من السؤال، سوف نستعمل الأطراف اليمنى لمستطيلات، والأطراف اليسرى لمستطيلات أخرى.

$$\begin{aligned}
R_1 &= 1 \cdot f(0) = (-0^2 + 10 \cdot 0)^{0.5} = 0 \\
R_2 &= 1 \cdot f(1) = (-1^2 + 10 \cdot 1)^{0.5} = 3 \\
R_3 &= 1 \cdot f(2) = (-2^2 + 10 \cdot 2)^{0.5} = 4 \\
R_4 &= 1 \cdot f(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3)^{0.5} \approx 4.58 \\
R_5 &= 1 \cdot f(4) = (-4^2 + 10 \cdot 4)^{0.5} \approx 4.90 \\
R_6 &= 1 \cdot f(6) = (-6^2 + 10 \cdot 6)^{0.5} \approx 4.90 \\
R_7 &= 1 \cdot f(7) = (-7^2 + 10 \cdot 7)^{0.5} \approx 4.58 \\
R_8 &= 1 \cdot f(8) = (-8^2 + 10 \cdot 8)^{0.5} = 4 \\
R_9 &= 1 \cdot f(9) = (-9^2 + 10 \cdot 9)^{0.5} = 3 \\
R_{10} &= 1 \cdot f(10) = (-10^2 + 10 \cdot 10)^{0.5} = 0
\end{aligned}$$

المساحة الكلية تساوي 32.96 وحدة مربعة تقريباً.

(c) 39.27 وحدة مربعة، التقريب الأول أفضل.

إجابة ممكنة: المساحة الإضافية الواقعة خارج نصف الدائرة والمحتواه في التقريب الأول تساعد على حساب مساحة المنطقة التي لم تدخل في حسابات المستطيلات. نصف القطر يساوي 5 وحدات.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} r^2 \pi \\ &= 12.5 \pi \\ &\approx 39.27 \end{aligned}$$

التقريب الأول هو الأقرب إلى المساحة الحقيقية.

إجابة ممكنة: المساحات خارج نصف الدائرة، والمحتواه داخل مستطيلات التقريب الأول تعوض المساحة داخل نصف الدائرة، وغير المحصورة بالمستطيلات.

**قرب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة في كلٍ من الأشكال الآتية مستعملا الأطراف اليمنى ثم اليسرى؛ لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عرض كلٍ منها، ثم أوجد الوسط للتقريبين:**

**(6) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 13.5 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 10.5 وحدات مربعة، الوسط للمساحة هو 12 وحدة مربعة.**

**(7) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 12.75 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 12.25 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 12.5 وحدة مربعة.**

**(8) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 162.94 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 171.94 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 167.44 وحدة مربعة.**

(9) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 18.91 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 19.66 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 19.28 وحدة مربعة.

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور  $x$  والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

(10) 84 وحدة مربعة

(11) 12 وحدة مربعة

(12)  $\frac{70}{3}$  وحدة مربعة

(13)  $\frac{32}{3}$  وحدة مربعة

(14)  $\frac{26}{3}$  وحدات مربعة

(15) 12 وحدة مربعة

(16)  $\frac{100}{3}$  وحدة مربعة

(17) 48 وحدة مربعة

(18) طباعة: 3750 ريالاً

(19)

(a) الارتفاع = 4 وحدات،

القاعدة = 4 وحدات،

المساحة = 8 وحدات مربعة.

(b) 8 وحدات مربعة

(20)  $\frac{2}{3}$  وحدة مربعة

(21) 1.75 وحدة مربعة

(22)  $\frac{52}{3}$  وحدة مربعة

(23) 12.5 وحدة مربعة

(24) 8 وحدات مربعة

(25) 0.75 وحدة مربعة

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور  $x$  ، والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

(26)  $\frac{32}{3}$  وحدات مربعة

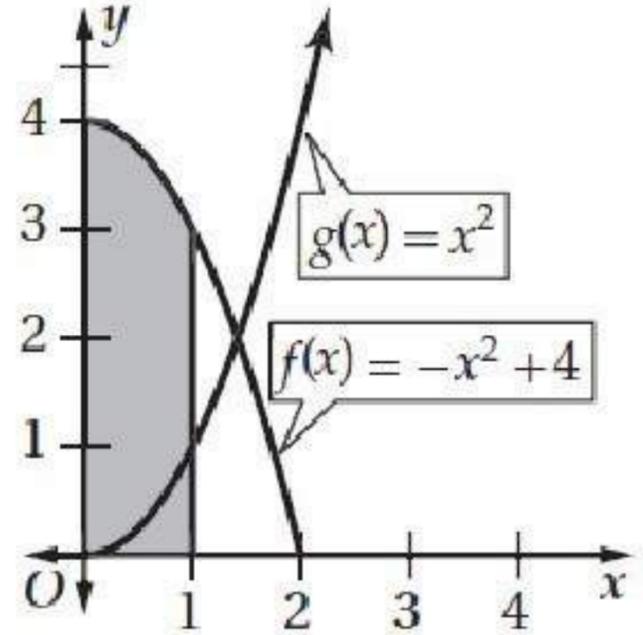
(27) 4 وحدات مربعة

(28) 14 وحدة مربعة

(29) 3.75 وحدات مربعة

(30) تمثيلات متعددة:

(a)



$$\int_0^1 (-x^2 + 4) dx = 3\frac{2}{3} \quad (b)$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

(c) إجابة ممكنة: إذا أردنا إيجاد المساحة المحصورة بين المنحنيين، فإننا نبدأ بالتكامل

تحت  $g(x)$ ، والذي يمثل المساحة الكلية بين  $f(x)$  والمحور  $x$ . وبما أننا لا نحتاج للمساحة

لنحصل على  $3\frac{1}{3}$  أو 3.33 تقريباً

$$3\frac{1}{3}, -2x^2 + 4 \quad (d)$$

(e) عند حساب المساحة المحصورة بين منحنى دالتين، بإمكاننا حساب المساحة المحصورة تحت كل منحنى، ثم نطرح المساحة الصغرى من المساحة الكبرى، أو نطرح الدالة الصغرى من الدالة الكبرى، و نحسب تكامل الدالة الناتجة.

## مسائل مهارات التفكير العليا:

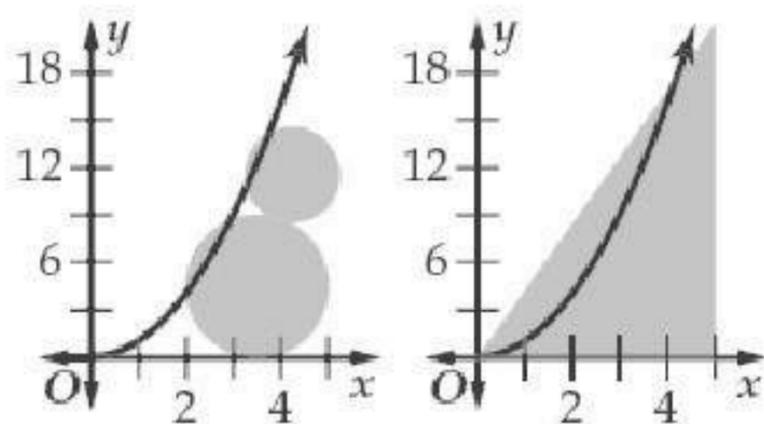
**31) اكتشف الخطأ:** كلاهما خطأ؛ إجابة ممكنة: إذا كانت الدالة متزايدة، فإن استعمال الأطراف اليمنى للمستطيلات سيعطي مساحات أكبر من تلك المساحة تحت المنحنى، في حين يُعطي استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات مساحات أصغر. أما إذا كانت الدالة متناقصة، فإن استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات، سيعطي قيمة أكبر للمساحة ويُعطي استعمال الأطراف اليمنى قيمة أصغر.

**32) تبرير:** إجابة ممكنة: يعطي التكامل مساحة كل مقطع عرضي، ونحصل على حجم النفق بضرب هذه المساحة في طول النفق.

**33) اكتب:** انظر إجابات الطلاب.

**34) تحد:**  $\frac{t^3}{3} + 2t$

**35) اكتب:** إجابة ممكنة: يُعطي المثلث تقريباً جيداً للمساحة، وذلك اعتماداً على شكل المنحنى كما هو مبين أدناه، أما إذا كان للدالة عدة نقاط حرجة، فإنه من الصعب استعمال المثلثات، أما الدوائر فيصعب استعمالها؛ وذلك لأنها تترك مساحات واسعة خارجها؛ لذا فإن المثلثات أسهل للاستعمال عند تقريب المساحة؛ بسبب مرونة التعامل معها مقارنة مع الدوائر.



## مراجعة تراكمية

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$j'(x) = (6x^2 + 11)(2x^8 - 12x^2) + (2x^3 + 11x)(16x^7 - 24x) \quad (36)$$

$$f'(k) = (15k^{14} + 2k + 2)(k - 7k^2) + (k^{15} + k^2 + 2k)(1 - 14k) \quad (37)$$

$$s'(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t}(3t^8 - 5t) + (\sqrt{t} - 7)(24t^7 - 5) \quad (38)$$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عندما  $x = 1$ :

3 (39)

- 7 (40)

1 (41)

3 (42)

- 1 (43)

$\frac{2}{9}$  (44)

تدريب على اختبار:

A (45)

D (46)

D (47)

# النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

4-6

تحقق

أوجد دالتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

(1A) إجابة ممكنة:  $x^2$ ,  $x^2 + 5$ ,  $x^2 - 7$ ,  $x^2 + 28$

(1B) إجابة ممكنة:  $x^{-3}$ ,  $x^{-3} + 33$ ,  $x^{-3} - 4$ ,  $x^{-3} + 9$

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

$$F(x) = \frac{6}{5}x^5 + C \quad (2A)$$

$$F(x) = \frac{-5}{x^2} + C \quad (2B)$$

$$F(x) = x^8 + 3x^2 + 2x + C \quad (2C)$$

(3) سقوط حر:

$$s(t) = -16t^2 + 120 \quad (A)$$

(B) تصل المحفظة إلى سطح الأرض بعد 2.74 s.

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

$$117 \quad (4A)$$

$$46 \quad (4B)$$

احسب كل تكامل مما يأتي:

$$2x^3 + 4x^2 - 3x + C \quad (5A)$$

$$15.6 \quad (5B)$$

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

$$116.62 \text{ J} \quad (6A)$$

$$501.76 \text{ J} \quad (6B)$$

# تدريب وحل المسائل:



$$F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C \quad (1)$$

$$F(z) = \frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} + C \quad (2)$$

$$Q(r) = \frac{15}{28}r^{\frac{7}{5}} + \frac{15}{32}r^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} + C \quad (3)$$

$$W(u) = \frac{1}{9}u^6 + \frac{1}{24}u^4 + \frac{1}{5}u^2 + C \quad (4)$$

$$U(d) = \frac{3}{d^4} - \frac{5}{2d^2} - 2d^3 + 3.5d + C \quad (5)$$

$$M(t) = 4t^4 - 4t^3 + 10t^2 - 11t + C \quad (6)$$

(7) سقوط حر:

$$s(t) = -16t^2 + C \text{ (a)}$$

$$s(t) = -16t^2 + 64 \text{ (b)}$$

28 ft (c)

احسب كل تكامل مما يأتي:

$$3m^2 + 3m^4 + C \text{ (8)}$$

127.5 (9)

46.5 (10)

7.99 (11)

$$0.68t^5 - 0.3t^4 + 1.15t^2 - 5.7t + C \text{ (12)}$$

$$2w^{7.1} - 3w^{6.7} + 4w^{3.3} + 3w + C \text{ (13)}$$

(14) حشرات:

$$s(t) = -16t^2 + 34t \text{ (a)}$$

$$2.125 \text{ s (b)}$$

$$264600 \text{ ft}^2 \text{ (15)}$$

احسب كل تكامل مما يأتي:

$$12 \text{ (16)}$$

$$27 \text{ (17)}$$

$$2.5 \text{ (18)}$$

$$16.4 \text{ (19)}$$

$$28.5 \text{ (20)}$$

(21) مقذوفات:

$$237 \text{ ft (a)}$$

$$\text{(b) تقريباً } -123.16 \text{ ft/s}$$

$$(22) -x^3 - 4x^2 + 24$$

$$(23) 2x^5 - 4x^3 + 5x - 5775$$

$$(24) -92$$

$$(25) -3x^3 - 2x^2 - 576$$

$$(26) 4x^8 - 5x^6 - 4x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 7x$$

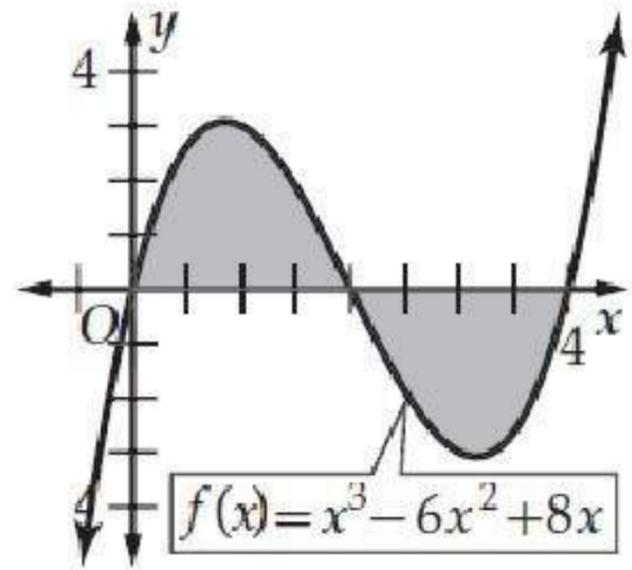
$$(27) -7x^3 + 44x + 57$$

$$(28) \text{حجم الكرة: } \frac{4}{3}\pi R^3$$

29) مساحات: 6 وحدات مربعة

30) تمثيلات متعددة:

(a)



(b) 4, - 4

(c) إجابة ممكنة: يظهر أن المساحة فوق المحور  $x$  موجبة، والمساحة تحت المحور  $x$  هي سالبة التكامل.

(d) 0, 8

(e) التكامل هو حاصل جمع التكاملين فوق وتحت المحور  $x$ .

أما المساحة الكلية فهي حاصل جمع القيم المطلقة للتكاملين.

## مسائل مهارات التفكير العليا:

(31) تحد:  $\frac{1}{2}\pi r^2$

تبرير: حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً.  
برّر إجابتك:

(32) أحياناً؛ إجابة ممكنة: يؤدي تغيير ترتيب حدود التكامل إلى تغيير إشارته ما لم تكن قيمة التكامل صفراً.

(33) أحياناً؛ إجابة ممكنة: إذا كانت  $f(x)$  دالة زوجية، فإن العبارة تكون صحيحة دائماً.

(34) أحياناً؛ إجابة ممكنة: إذا كان  $f(x)$  دالة زوجية وكل من  $a, b$  سالباً.

(35)

$$\int_a^b (n + m) dx = \int_a^b n dx + \int_a^b m dx$$

$$nx + mx \Big|_a^b = nx \Big|_a^b + mx \Big|_a^b$$

$$(nb + mb) - (na + ma) = (nb - na) + (mb - ma)$$
$$nb + mb - na - ma = nb + mb - na - ma$$

**(36)** بما أن التمثيل البياني للدالة  $f(x)$  يقع تحت المحور  $x$ ، فإن إشارة  $f(x)$  سالبة. وبما أن  $f(x)$

سالبة و  $\Delta x$  موجبة، فإن كل حد في  $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$  سالب.

وعليه فإن المجموع سالب؛ لأن  $\int_a^b f(x) dx$  هو نهاية مجاميع سالبة، لذا يكون سالباً.

**(37)** إجابة ممكنة: إذا احتوت الدالة  $F(x)$  على الثابت  $C$ ، فإنه سيظهر في كل من  $F(a)$  و  $F(b)$  ولأننا نطرح هاتين القيمتين، فإن  $C$  تحذف.

## مراجعة تراكمية

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور  $x$  ، والمعطاة بالتكامل في كل مما يأتي:

512 (38)

30 (39)

استعمل قاعدة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$\frac{8k^{11} + 55k^{10} + 42k^4 + 154k^3}{(2k^4 + 11k^3)^2} \quad (40)$$

$$\frac{2n^4 + 2n^2 + 4}{(n^2 + 1)^2} \quad (41)$$

$a = 6$  (42)

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

$$m = 2x \quad (43)$$

$$m = 3x^2 \quad (44)$$

تدريب على اختبار:

C (45)

# دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك:

(1) معدل التغير اللحظي

(2) التكامل المحدد

(3) التعويض المباشر

(4) دالة أصلية

(5) الصيغة غير المحددة

(6) الاشتقاق

(7) المؤثر التفاضلي

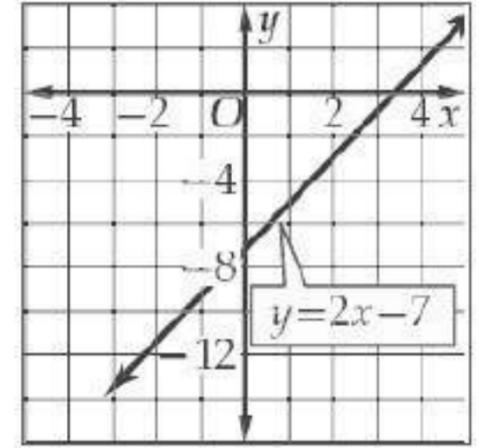
(8) السرعة المتجهة اللحظية

مراجعة الدروس:

1 - 4: تقدير النهايات بيانياً:

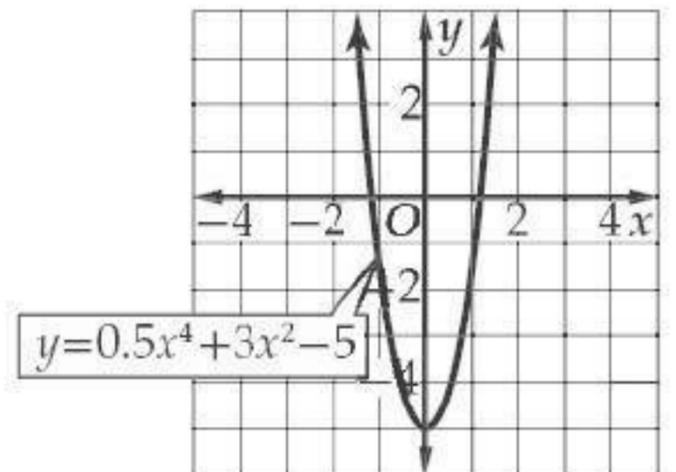
قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك باستعمال جدول قيم:

(9) - 1



|        |       |        |   |        |        |
|--------|-------|--------|---|--------|--------|
| $x$    | 2.99  | 2.999  | 3 | 3.001  | 3.01   |
| $f(x)$ | -1.02 | -1.002 |   | -0.998 | -0.998 |

(10) - 1.5



|        |        |        |   |        |        |
|--------|--------|--------|---|--------|--------|
| $x$    | 0.99   | 0.999  | 1 | 1.001  | 1.001  |
| $f(x)$ | -1.579 | -1.508 |   | -1.499 | -1.492 |

قَدْر كل نهاية مما يأتي:

5 (11)

(12) غير موجودة

$\infty$  (13)

(14) غير موجودة

2 - 4 : حساب النهايات جبرياً:

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

9 (15)

19 (16)

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكناً، وإلا فانكر السبب.

(17) ليس ممكناً؛ فالمقام يساوي صفراً عند  $x = 25$ .

- 17 (18)

احسب كل نهاية مما يأتي:

$-\frac{1}{6}$  (19)

$-\infty$  (20)

3 - 4: المماس والسرعة المتجهة:

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة :

$$(21) -1, -1$$

$$(22) 0, -2$$

$$(23) m = -2x + 3$$

$$(24) m = 3x^2 + 4$$

تمثل  $s(t)$  في كل مما يأتي موقع جسم بالأقدام بعد  $t$  ثانية . أوجد سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند الزمن المعطى:

$$(25) v(0.5) = -1 \text{ ft/s}$$

$$(26) v(3.5) = -147 \text{ ft/s}$$

$$(27) v(t) = 24t$$

$$(28) v(t) = -4t + 3$$

#### 4 - 4 : المشتقات :

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي باستعمال النهايات ، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة.

$$g'(t) = -2t + 5, g'(-4) = 13, g'(-1) = 3 \quad (29)$$

$$m'(j) = 10; m'(5) = 10, m'(-3) = 10 \quad (30)$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$p'(v) = -9 \quad (31)$$

$$z'(n) = 8n + 9 \quad (32)$$

$$t'(x) = -\frac{18}{5}x^{\frac{1}{5}} \quad (33)$$

$$g'(h) = 3h^{\frac{1}{4}} - 4h^{-\frac{1}{2}} \quad (34)$$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة؛ لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$f'(m) = \frac{-25}{(5+2m)^2} \quad (35)$$

$$m'(q) = \frac{4q^5 - 96q^3 + 6q}{(q^2 - 12)^2} \quad (36)$$

5 - 4 : المساحة تحت المنحنى والتكامل:

قرب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى كل دالة مما يأتي باستعمال الأطراف اليمنى و  
5 مستطيلات:

(37) 5.16 وحدة مربعة

(38) 11.28 وحدة مربعة

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور  $x$  ، والمعطى  
بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

(39) 4.67 وحدات مربعة تقريباً

(40) 37.5 وحدة مربعة تقريباً

(41) 4.67 وحدات مربعة تقريباً

(42) 55.5 وحدة مربعة تقريباً

6-4: النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل:

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

$$G(n) = \frac{5}{2}n^2 - 2n + C \quad (43)$$

$$R(q) = -q^3 + \frac{9}{2}q^2 - 2q + C \quad (44)$$

$$M(t) = \frac{3}{2}t^4 - 4t^3 + t^2 - 11t + C \quad (45)$$

$$p(h) = h^7 + \frac{2}{3}h^6 - 3h^4 - 4h + C \quad (46)$$

احسب كل تكامل مما يأتي:

$$\frac{8}{3}x^3 + C \quad (47)$$

$$\frac{2}{3}x^3 - 4x + C \quad (48)$$

(49) 2466.53 وحدة مربعة

50 (3294 وحدة مربعة

تطبيقات ومسائل:

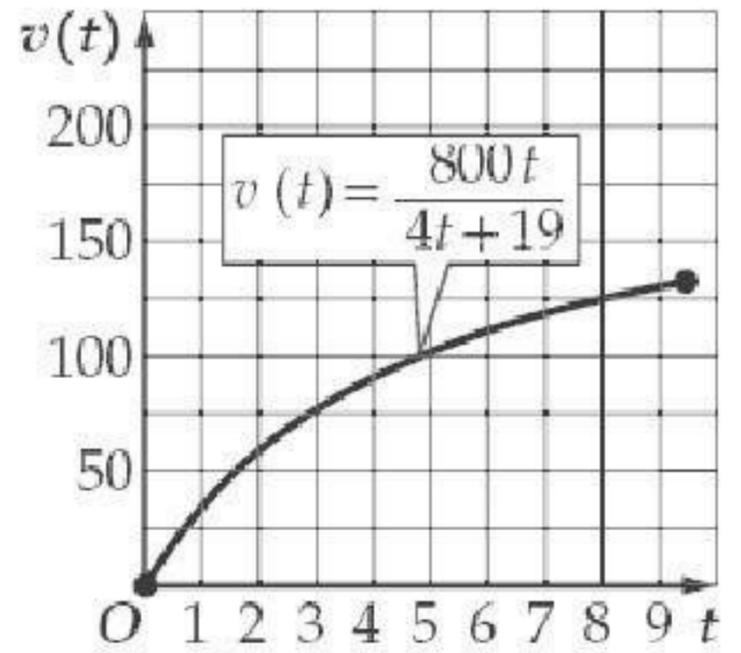
(51) حيوانات:

(a) 2966 حيواناً

(b) 800

(52) تحف فنية:

(a)



(b) 7674, 11114, 13524

(c) 20000

(d) لن تزيد قيمة التحفة عن 20000 ريال.

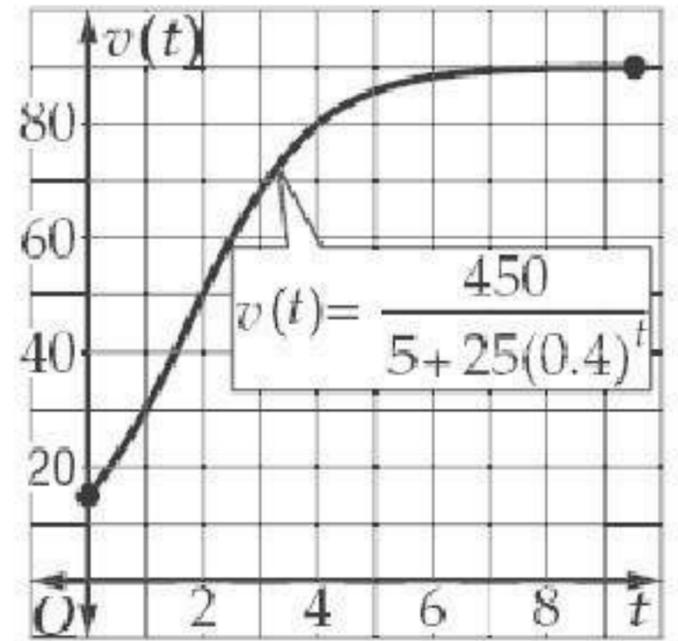
(e) نعم؛ العرض أفضل من قيمة التحفة.

**(53 مبيعات:**

(a)

|     |    |    |    |      |
|-----|----|----|----|------|
| $t$ | 0  | 1  | 2  | 3    |
| $v$ | 15 | 30 | 50 | 68.2 |

(b)



90 (c)

(d) إجابة ممكنة: أقصى سعر يمكن أن تصله السلعة هو 90 ريالاً.

**(54) صواريخ:**

$$-32t + 150 \text{ (a)}$$

$$102 \text{ ft/s (b)}$$

$$\approx 4.69 \text{ s (c)}$$

$$\approx 359.8 \text{ ft (d)}$$

**(55) رماية:**

$$-32t + 35 \text{ (a)}$$

$$19 \text{ ft/s (b)}$$

$$\approx 1.09 \text{ s (c)}$$

$$\approx 20.64 \text{ ft (d)}$$

607.5 in<sup>2</sup> : تصميم (56)

(57) ضفادع:

$$s(t) = -16t^2 + 26t \text{ (a)}$$

1.63 s (b)

(58) طيور:

$$s(t) = -16t^2 + 20 \text{ (a)}$$

1.12 s (b)

# اختبار الفصل

قدر كل نهاية مما يأتي:

(1) 6 -

(2) 8

(3) غير موجودة

(4)  $\infty$

(5) إلكترونيات:

(a) 100

(b) إجابة ممكنة: رغم تقلب متوسط تكلفة الجهاز الإلكتروني، إلا أن متوسط التكلفة سيقترب من 100 ريال لكل جهاز.

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكناً، وإلا فذكر السبب:

(6) 25 –

(7) 1353

(8) ناد رياضي:

(a) 4

(b) 200

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

(9)  $\infty$

(10)  $\infty$

(11) 0

(12) 0

(13) اختيار من متعدد: A

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة:

$$(14) -8, -2$$

$$(15) -12, -\frac{3}{4}$$

$$(16) -20, 4$$

أوجد السرعة المتجهة اللحظية  $v(t)$  لجسم يعطى موقعه عند أي زمن بالدالة  $h(t)$  في كل مما يأتي:

$$(17) h(t) = 9 + 6t$$

$$(18) v(t) = 20t - 21t^2$$

$$(19) v(t) = 9t^2 + 4$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$(20) f'(x) = -3$$

$$b'(c) = \frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{16}{3c^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{c^{\frac{1}{5}}} \quad (21)$$

$$w'(y) = 4y^{\frac{1}{3}} + 3y^{-\frac{1}{2}} \quad (22)$$

$$g'(x) = 6x^2 - 10x - 8 \quad (23)$$

$$h'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2} \quad (24)$$

(25) صناعة:

$$C(x) = 15x - 0.0025x^2 \quad (a)$$

(b) 3125 ريالاً

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور  $x$ ، والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

(26) 10.5 وحدات مربعة تقريباً

(27) 65050 وحدة مربعة تقريباً

(28) وحدة مربعة تقريباً

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

$$D(a) = a^4 + 3a^3 - a^2 + 8a + C \quad (29)$$

$$W(z) = \frac{3}{20}z^5 + \frac{1}{18}z^3 - \frac{2}{5}z + C \quad (30)$$

احسب كل تكامل مما يأتي:

$$\frac{5}{4}x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + C \quad (31)$$

45 (32)

(33) مساحات: C