تم تحميل الملف
من موقع بداية

بداية
beadaya.com | موقع بداية التعليمي

للمزيد اكتب
في جوجل
Google

بداية التعليمي

موقع بداية التعليمي كل ما يحتاجه **الطالب والمعلم**
من ملفات تعليمية، حلول الكتب، توزيع المنهج،
بوربوينت، اختبارات، ملخصات، اختبارات إلكترونية،
أوراق عمل، والكثير...

حمل التطبيق

GET IN ON
Google Play

Download on the
App Store

المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات

الصف الثالث المتوسط

الفصل الدراسي الثاني

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

طبعة ١٤٤٥ - ٢٠٢٣

يُوزع مجانًا ولا يُباع
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ح وزارة التعليم ، ١٤٤٣هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
وزارة التعليم
الرياضيات – الصف الثالث المتوسط – التعليم العام – الفصل الدراسي الثاني /
وزارة التعليم – الرياض ، ١٤٤٣هـ .
١٤٣ص ؛ ٢١ X ٢٧,٥ سم
ردمك : ٥-٢٥٠-٥١١-٦٠٣-٩٧٨
١ ـ الرياضيات ـ تعليم – السعودية ٢ ـ التعليم المتوسط ـ السعودية
ـ كتب دراسية. أ.العنوان
ديوي ٥١٠,٧ **١٤٤٣/١٣١٢٢**

رقم الإيداع : ١٤٤٣/١٣١٢٢
ردمك :٥-٢٥٠-٥١١-٦٠٣-٩٧٨

حقوق الطبع والنشر محفوظة لوزارة التعليم
www.moe.gov.sa

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين الإثرائية"

ien.edu.sa

أعزاءنا المعلمين و المعلمات، والطلاب و الطالبات، وأولياء الأمور ، وكل مهتم بالتربية و التعليم:
يسعدنا تواصلكم؛ لتطوير الكتاب المدرسي، ومقترحاتكم محل اهتمامنا.

fb.ien.edu.sa

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

المقدمة

الحمدلله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية؛ وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية؛ سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، التي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملاً، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياتها المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوَّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، إضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم، وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الفهرس

الفصل ٥ أنظمة المعادلات الخطية

التهيئة للفصل ٥ ..... ١١

٥-١ حل نظام من معادلتين خطيتين بيانيًّا ١٢

معمل الحاسبة البيانية: حل نظام من معادلتين خطيتين ١٨

٥-٢ حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض ٢٠

٥-٣ حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الجمع أو الطرح ٢٥

اختبار منتصف الفصل ٣٢

٥-٤ حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الضرب ٣٣

٥-٥ تطبيقات على النظام المكون من معادلتين خطيتين ٣٩

اختبار الفصل ٤٤

الاختبار التراكمي ٤٥

الفصل ٦ كثيرات الحدود

التهيئة للفصل ٦ ..... ٤٩

٦-١ ضرب وحيدات الحد ٥٠

٦-٢ قسمة وحيدات الحد ٥٦

٦-٣ كثيرات الحدود ٦٢

معمل الجبر: جمع كثيرات الحدود وطرحها ٦٧

٦-٤ جمع كثيرات الحدود وطرحها ٦٩

اختبار منتصف الفصل ٧٤

٦-٥ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود ٧٥

معمل الجبر: ضرب كثيرات الحدود ٨١

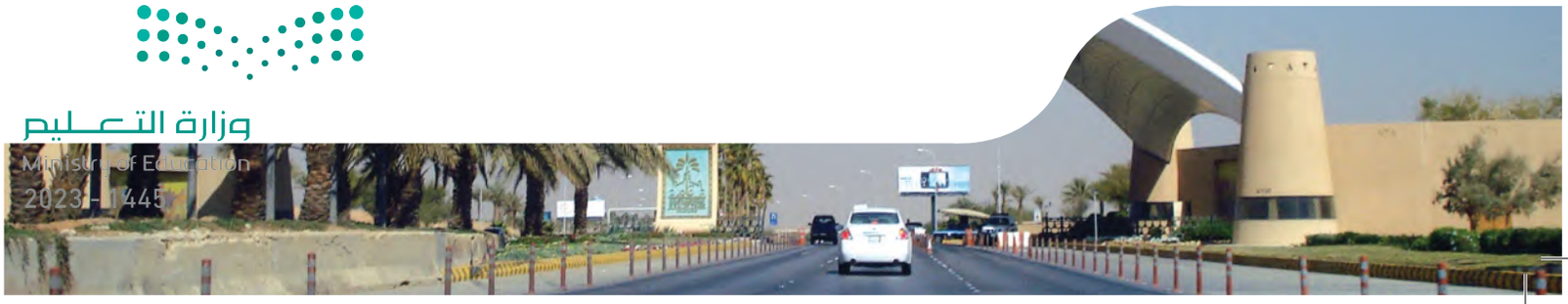
٦-٦ ضرب كثيرات الحدود ٨٣

٦-٧ حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود ٨٩

اختبار الفصل ٩٥

الاختبار التراكمي ٩٦

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445



الفهرس

الفصل ٧ التحليل والمعادلات التربيعية

التهيئة للفصل ٧ ..... ٩٩

٧-١ تحليل وحيدات الحد ١٠٠

٧-٢ استعمال خاصية التوزيع ١٠٤

معمل الجبر: تحليل ثلاثية الحدود ١١١

٧-٣ المعادلات التربيعية: س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ..... ١١٣

اختبار منتصف الفصل ١٢٠

٧-٤ المعادلات التربيعية: أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ..... ١٢١

٧-٥ المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين ١٢٧

٧-٦ المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة ١٣٣

اختبار الفصل ١٤١

الاختبار التراكمي ١٤٢

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إليك عزيزي الطالب

ستركز في دراستك هذا العام على عدة موضوعات رياضية، تشمل ما يأتي:

- **المعادلات الخطيّة والتربيعية.**
- **الدوال الخطيّة والتربيعية.**
- **كثيرات الحدود والعبارات الجذرية.**
- **الإحصاء والاحتمال.**

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الرياضية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- **اقرأ** فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد اقرأ فقرة **والآن** .
- **ابحث** عن **المفردات** المظللة **باللون الأصفر**، واقرأ تعريف كل منها.
- **راجع** المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.
- **ارجع** إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.
- **ارجع** إلى فقرة **قراءة الرياضيات** ؛ لتتذكر نُطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.
- **تذكَّر** بعض المفردات التي تعلَّمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات** .
- **ارجع** إلى فقرة **تنبيه!** دائماً لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم الرياضية فتجتنبها.
- **ارجع** إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدرب وحل المسائل** ليساعدك على حل هذه التمارين وما شابهها.
- **استعن** بأسئلة **تدريب على اختبار** لتتعرف بعض أنماط أسئلة الاختبارات.
- **ارجع** إلى **مراجعة تراكمية** لتراجع أفكار الدروس السابقة.
- **استعمل** أسئلة **استعد للدرس اللاحق** لمراجعة بعض المهارات والمفاهيم اللازمة للدرس التالي.
- **نفِّذ** **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تُراجع أفكار الدرس مستفيدًا مما دوَّنته من أفكار في **المطويات** .
- **نفذ** **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وماقبله من فصول.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الفصل ٥
أنظمة المعادلات الخطية

فيما سبق

درست حلّ المعادلات الخطية في متغير واحد.

والآن

- أحل نظام معادلتين خطيتين بيانيًا.
- أحل نظام معادلتين خطيتين بالتعويض.
- أحل نظام معادلتين خطيتين بالحذف.
- أحل مسائل لفظية من واقع الحياة تؤول إلى نظام من معادلتين خطيتين.

لماذا؟

حدائق: باعت حديقة الحيوانات بالرياض في أحد الأيام تذاكر دخول بقيمة ٣٥٠٠ ريال. فإذا كان سعر التذكرة ١٠ ريالات للكبير، ٥ ريالات للصغير ، فيمكنك استعمال نظام من معادلتين خطيتين لمعرفة عدد الكبار وعدد الصغار الذين اشتروا التذاكر عند معرفة إجمالي عدد التذاكر المبيعة.

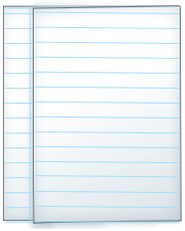
المفردات

- النظام المتسق ص (١٢)
- النظام المستقل ص (١٢)
- النظام غير المستقل ص (١٢)
- النظام غير المتسق ص (١٢)

المطويات منظم أفكار

أنظمة المعادلات الخطية اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك مبتدئًا بورقة A4 .

١ **اطو** الورقة طوليًّا من المنتصف.



٢ **قص** النصف العلوي خمسة أجزاء بالتساوي.

٣ **سم** الأجزاء الخمسة بأرقام الدروس وعناوينها.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

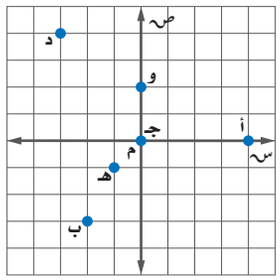
التهيئة للفصل ٥

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

سم الزوج المرتب الممثل لكل نقطة فيما يأتي: (مهارة سابقة)



١) أ　　٢) د

٣) ب　　٤) جـ

٥) هـ　　٦) و

حلّ كل معادلة فيما يأتي: (مهارة سابقة)

٧) ٢س + ٤ = ١٢.

٨) ٣س = − ٩.

٩) م + ٢ = ٦.

١٠) ٢ = م س + ب ، م ، ب ثابتان.

١١) ب = ٢ل + (−٤)، ب ثابت.

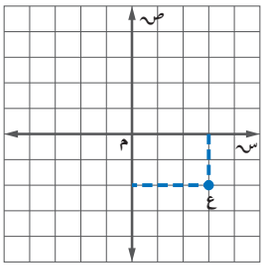
١٢) ٢٠ − ١٠ص = ٤٠.

١٣) **هندسة:** إذا كانت م = $\frac{١}{٢}$ ق × ع، تمثل صيغة مساحة المثلث، حيث م المساحة، ق قاعدة المثلث، ع ارتفاعه. فأوجد مساحة المثلث الذي طول قاعدته ١٠ سم، وارتفاعه ٥ سم.

مراجعة سريعة

مثال ١

سم الزوج المرتب الذي يمثل النقطة ع في المستوى الإحداثي.



ارسم خطًّا رأسيًّا من النقطة ع إلى محور السينات، لتّحدد الإحداثي السيني للنقطة وهو (٣).

ارسم خطًّا أفقيًّا من النقطة إلى محور الصادات، لتّحدد الإحداثي الصادي للنقطة وهو (−٢).

إذن الزوج المرتب للنقطة ع هو (٣، −٢).

مثال ٢

حل المعادلة −١٢ + ٣ ص = ٣٦ .

−١٢ + ٣ ص = ٣٦	المعادلة الأصلية
−١٢ + ٣ ص + ١٢ = ٣٦ + ١٢	أضف ١٢ إلى كل من الطرفين
٣ ص = ٤٨	بسّط
$\frac{٣ص}{٣} = \frac{٤٨}{٣}$	اقسم كلا الطرفين على ٣
ص = ١٦	بسّط

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

٥ ـ ١ حل نظام من معادلتين خطيتين بيانيًّا

فيما سبق

درست التمثيل البياني للمعادلات الخطية.

والآن

- أتعرف عدد حلول نظام مكون من معادلتين خطيتين.
- أحلّ نظامًا مكونًا من معادلتين خطيتين بيانيًا.

المفردات

نظام من معادلتين
النظام المتسق
النظام المستقل
النظام غير المستقل
النظام غير المتسق

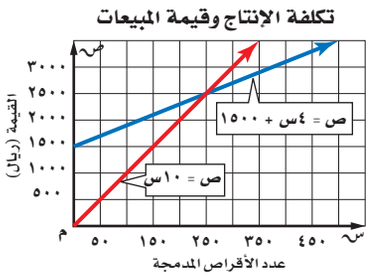
لماذا؟

بلغت تكاليف إعداد مادة أقراص مدمجة علمية ١٥٠٠ ريال، وكان تسجيل القرص الواحد يكلف ٤ ريالاتٍ ويباع بـ ١٠ ريالاتٍ، ويرغب مدير الإنتاج في معرفة عدد الأقراص المدمجة التي عليه بيعها حتى يحقق ربحًا.

إن التمثيل البياني لنظام المعادلات يساعد على معرفة الوضع الذي يحقق ربحًا، ويمكن التعبير عن تكاليف الإنتاج الكلية بالمعادلة ص = ٤س+١٥٠٠؛ حيث ص تمثل تكلفة الإنتاج، س عدد الأقراص المدمجة المنتجة.

يمكن تمثيل القيمة الكلية للمبيعات بالمعادلة ص = ١٠س، حيث تمثل ص القيمة الكلية للمبيعات، س عدد الأقراص المدمجة المبيعة.

يمكننا تمثيل هاتين المعادلتين بيانيًّا من معرفة متى يبدأ تحقيق الربح. وذلك بتحديد النقطة التي يتقاطع فيها المستقيمان، وهو ما يحدث عند بيع ٢٥٠ قرصًا مدمجًا؛ أيْ أن تحقيق الربح يبدأ عند بيع أكثر من ٢٥٠ قرصًا مدمجًا.

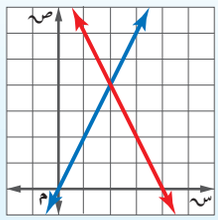
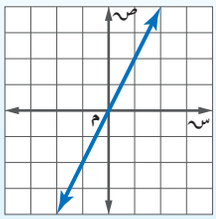
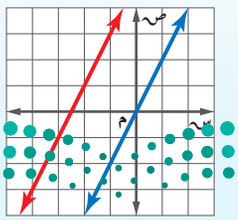


عدد الحلول الممكنة: تشكّل المعادلتان ص = ٤س+١٥٠٠، ص = ١٠ س **نظامًا من معادلتين**، ويُسمى الزوج المرتب الذي يمثل حلًّا لكلتا المعادلتين حلًّا للنظام.

- إذا كان للنظام حل واحد على الأقل، يسمى **نظامًا متسقًا**، وتتقاطع تمثيلاته البيانية في نقطة واحدة، أو تشكّل مستقيمًا واحدًا.
- إذا كان للنظام حل واحد فقط، يسمى **نظامًا مستقلًّا**، وإذا كان له عدد لا نهائي من الحلول يسمى **نظامًا غير مستقل**؛ وهذا يعني وجود عدد غير محدود من الحلول تحقق كلتا المعادلتين.
- إذا لم يكن للنظام أي حل، يسمى **نظامًا غير متسق**، وتشكل تمثيلاته البيانية مستقيمات متوازية.

مفهوم أساسي — الحلول الممكنة

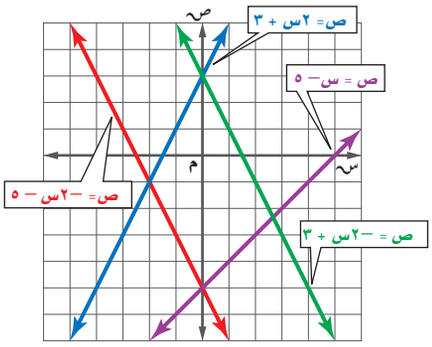
أضف إلى مطويتك

عدد الحلول	واحد فقط	عدد لا نهائي	لا يوجد حل
المصطلح	متسق ومستقل	متسق وغير مستقل	غير متسق
التمثيل البياني			

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال ١ عدد الحلول

استعمل التمثيل البياني المجاور لتحدد ما إذا كان النظام الآتي متسقًا أم غير متسق، ومستقلًّا أم غير مستقل.



أ) ص = −٢س + ٣

ص = س − ٥

بما أن المستقيمين اللذين يمثلان المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة، فهناك حل واحد للنظام، ويكون النظام متسقًا ومستقلًّا.

ب) ص = −٢س − ٥

ص = −٢س + ٣

بما أن المستقيمين اللذين يمثلان المعادلتين متوازيان فلا يوجد حل للنظام، ويكون النظام غير متسق.

تحقق من فهمك

١أ) ص = ٢س + ٣
ص = −٢س + ٣

١ب) ص = س − ٥
ص = −٢س − ٥

إرشادات للدراسة

عدد الحلول

عندما تُكتب كل من المعادلتين على الصيغة ص = م س + ب، فإن قيم م، ب تحدد عدد الحلول.

المقارنة بين قيم م، ب	عدد الحلول
قيمتا م مختلفتان	١
قيمتا م متساويتان، وقيمتا ب مختلفتان.	لايوجد
قيمتا م متساويتان، وقيمتا ب متساويتان.	لانهائي

الحل بالتمثيل البياني: من الطرائق المستعملة في حل نظام من معادلتين تمثيلهما بيانيًّا في المستوى البياني نفسه، وإيجاد النقطة التي يتقاطع عندها المستقيمان التي تمثل حل النظام.

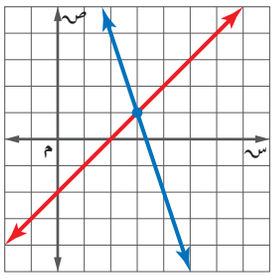
مثال ٢ الحل بالتمثيل البياني

مثِّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، وأوجد عدد حلوله، وإذا كان واحدًا فاكتبه:

أ) ص = −٣س + ١٠

ص = س − ٢

يظهر من التمثيل البياني أن المستقيمين يتقاطعان في النقطة (٣، ١)، ويمكن التحقق من ذلك بالتعويض عن س بـ ٣، وعن ص بـ ١.



تحقق ص = −٣س + ١٠ المعادلة الأصلية

١ ≟ −٣(٣) + ١٠ عوض

١ ≟ −٩ + ١٠ اضرب

١ = ١ ✓

ص = س − ٢ المعادلة الأصلية

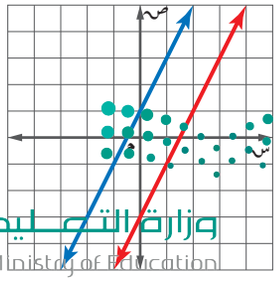
١ ≟ ٣ − ٢ عوض

١ = ١ ✓ اضرب

إذن للنظام حل واحد، هو (٣، ١).

ب) ٢س − ص = −١

٤س − ٢ص = ٦



بما أن للمعادلتين الميل نفسه، ومقطعاهما الصاديان مختلفان فالمستقيمان الممثلان للمعادلتين متوازيان، وبما أنهما لا يتقاطعان في أي نقطة فلا يوجد حلّ لهذا النظام.

مراجعة المفردات

المستقيمات المتوازية

لا تتقاطع أبدًا، ولها الميل نفسه.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - ١٤٤٥

تحقق من فهمك

مثِّل كل نظام مما يأتي بيانيًّا، وأوجد عدد حلوله، وإذا كان واحدًا فاكتبه:

٢أ) س − ص = ٢
٣ص + ٢س = ٩

٢ب) ص = −٢س − ٣
٦س + ٣ص = −٩

يمكننا استعمال أنظمة المعادلات لحل مسائل متنوعة من واقع الحياة تتضمن متغيرين أو أكثر.

مثال ٣ من واقع الحياة — كتابة نظام من معادلتين وحلّه

تُمور: يزداد إنتاج مزرعتي نخيل من التمور بانتظام تقريبًا عبر عدد من السنين. استعمل المعلومات الواردة في الجدول أدناه للتنبؤ بالسنة التي يصبح فيها إنتاج المزرعتين متساويًا على اعتبار أن معدل الزيادة يبقى ثابتًا خلال السنوات القادمة في كلتا المزرعتين.

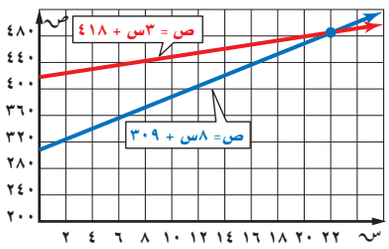
المزرعة	كمية الإنتاج عام ١٤٢٩هـ (طن)	معدل الزيادة السنوية (طن)
الأولى	٣٠٩	٨
الثانية	٤١٨	٣

التعبير اللفظي: كمية الإنتاج الكلية — تساوي — معدل الزيادة — ضرب — عدد السنوات بعد ١٤٢٩هـ — زائد — كمية الإنتاج عام ١٤٢٩هـ

المتغيرات: لتكن ص = كمية الإنتاج الكلية ، س = عدد السنوات بعد ١٤٢٩هـ .

المعادلات:
المزرعة الأولى ص = ٨ × س + ٣٠٩
المزرعة الثانية ص = ٣ × س + ٤١٨

بتمثيل الدالتين: ص = ٨س + ٣٠٩ ، ص = ٣ س + ٤١٨ بيانيًّا نجد أن المستقيمين يتقاطعان في النقطة (٢٢ ، ٤٨٥) تقريبًا.



تحقق استعمل التعويض للتحقق من صحة الإجابة.

ص = ٨س + ٣٠٩ ، ص = ٣س + ٤١٨

٤٨٥ ≟ ٨(٢٢) + ٣٠٩ ، ٤٨٥ ≟ ٣(٢٢) + ٤١٨

٤٨٥ = ٤٨٥ ✓ ، ٤٨٥ ≈ ٤٨٤ ✓

إذن سيكون إنتاج المزرعتين متساويًا بعد ٢٢ سنة من عام ١٤٢٩هـ؛ أيْ في عام ١٤٥١هـ ، إذا بقي معدل الزيادة ثابتًا في كلتا المزرعتين.

الربط مع الحياة

تعد التمور غذاءً صحيًّا مركزًا وطبيعيًّا ، ومنجمًا للفيتامينات؛ لكثرة ما بها من عناصر معدنية وفيتامينات.

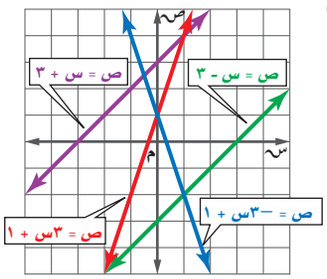
تحقق من فهمك

٣) ساعات: يرغب كل من محمود ورائد في شراء ساعة يدوية، فإذا كان مع محمود ١٤ ريالًا، ويوفر ٥ ريالات في الأسبوع، ومع رائد ٢٦ ريالًا ويوفر ٧ ريالات في الأسبوع، فبعد كم أسبوعًا يصبح معهما المبلغ نفسه؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

مثال ١ استعمل التمثيل البياني المجاور لتحدد ما إذا كان كلٌّ من أنظمة المعادلات الآتية متسقًا أم غير متسق، ومستقلًّا أم غير مستقل:



١) ص = -٣س + ١
ص = ٣س + ١

٢) ص = ٣س + ١
ص = س - ٣

٣) ص = س - ٣
ص = س + ٣

٤) ص = س + ٣
س - ص = -٣

مثال ٢ مثِّل كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية بيانيًّا، وأوجد عدد حلوله، وإن كان واحدًا فاكتبه:

٥) ص = س + ٤
ص = -س - ٤

٦) ص = س + ٣
ص = ٢س + ٤

مثال٣ ٧) **قراءة:** يقرأ كلٌّ من صالح وعبدالله قصة طويلة كما في الشكل المقابل.

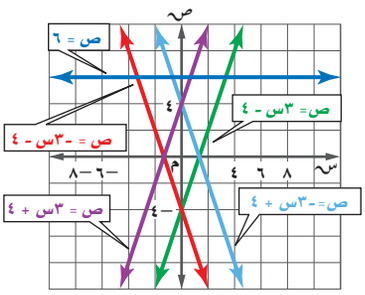
أ) اكتب معادلة تعبر عن عدد الصفحات التي يقرؤها كلٌّ منهما.

ب) مثّل كل معادلة بيانيًّا.

جـ) بعد كم يوم يصبح ما قرأه صالح أكثر مما قرأه عبدالله؟ تحقق من إجابتك وفسِّرها.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ استعمل التمثيل البياني المجاور لتحدد ما إذا كان كل نظام فيما يأتي متسقًا أم غير متسق، ومستقلًّا أم غير مستقل:



٨) ص = -٣س + ٤
ص = -٣س - ٤

٩) ص = -٣س - ٤
ص = ٣س - ٤

١٠) ٣س - ص = -٤
ص = -٣س + ٤

١١) ٣س - ص = ٤
٣س + ص = ٤

مثال ٢ مثِّل كل نظام فيما يأتي بيانيًّا، وأوجد عدد حلوله. وإن كان واحدًا فاكتبه:

١٢) ص = ٤س + ٢
ص = -٢س - ٣

١٣) ص = س - ٦
ص = س + ٢

١٤) س + ص = ٤
٣س + ٣ص = ١٢

١٥) س - ص = -٢
-س + ص = ٢

١٦) س + ٢ص = ٣
س = ٥

١٧) ٣س + ص = -٤
ص + ٢س = ٣

مثال٣ ١٨) **هوايات:** يتنافس خالد وسعود في جمع الطوابع التذكارية، فإذا كان لدى خالد ٣٠ طابعًا، ويضيف إليها أسبوعيًّا ٤٠ طابعًا، ولدى سعود ٥٠ طابعًا، ويضيف إليها ٣٠ طابعًا كل أسبوع.

أ) فاكتب معادلة تعبر عن عدد الطوابع التي جمعها كل منهما.

ب) مثِّل كل معادلة بيانيًّا.

جـ) بعد كم أسبوع يصبح لدى كل منهما العدد نفسه من الطوابع؟

مثِّل كل نظام فيما يأتي بيانيًّا، وأوجد عدد حلوله، وإن كان واحدًا فاكتبه:

١٩) ص = $\frac{١}{٢}$ س
ص = س + ٢

٢٠) ص = ٢س − ١٧
ص = س − ١٠

٢١) −٣س + ٤ص = ٢٤
٤س − ص = ٧

٢٢) ٢س − ٨ص = ٦
س − ٤ص = ٣

٢٣) ٤س − ٦ص = ١٢
−٢س + ٣ص = −٦

٢٤) ٢س + ٣ص = ١٠
٤س + ٦ص = ١٢

٢٥) ٣س + ٢ص = ١٠
٢س + ٣ص = ١٠

٢٦) $\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{١}{٢}$ ص = $\frac{١}{٤}$
$\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{١}{٦}$ ص = $\frac{١}{٢}$

الربط مع الحياة

تتيح آلات التصوير الرقمية للمصورين فرصة مشاهدة الصورة وإمكانية معالجتها وتعديلها ونقلها إلى الحاسوب وطباعتها.

٢٧) **تصوير:** افترض أن ص تمثل عدد آلات التصوير التي باعها متجر (بالمئات)، س تمثل عدد السنوات منذ عام ١٤٢٠هـ. إذا كانت المعادلة ص = ١٢,٥س + ١٠,٩ تعبر عن عدد آلات التصوير الرقمية المبيعة في كل عام منذ عام ١٤٢٠هـ، والمعادلة ص = −١,٩س + ٧٨,٨ تعبر عن عدد آلات التصوير العادية المبيعة.

أ) فمثّل كل معادلة بيانيًّا.

ب) ما العام الذي تتجاوز فيه مبيعات آلات التصوير الرقمية مبيعات آلات التصوير العادية ؟

جـ) في أي عام ستتوقف مبيعات آلات التصوير العادية؟

مثّل كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية بيانيًّا، وأوجد عدد حلوله، وإذا كان واحدًا فاكتبه:

٢٨) ٢ص = ١,٢س − ١٠
٤ص = ٢,٤س

٢٩) س = ٦ − $\frac{٣}{٨}$ ص
$\frac{٢}{٣}$س + $\frac{١}{٤}$ ص = ٤

٣٠) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في هذه المسألة طرائق متنوعة لإيجاد نقطة تقاطع تمثيلي معادلتين خطيتين.

أ) جبريًّا: حُلَّ المعادلة $\frac{١}{٢}$ س + ٣ = −س + ١٢ جبريًّا.

ب) تقنية: حل نظام المعادلتين: ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣، ص = −س + ١٢ بيانيًّا، وتحقق من صحَّة الحل باستخدام أحد البرامج الحاسوبيَّة.

جـ) تحليليًّا: ما علاقة المعادلة في الفرع (أ) والنظام في الفرع (ب)؟

د) لفظيًّا: وضِّح كيف تستعمل التمثيل البياني في الفرع (ب) لحل المعادلة في الفرع (أ).

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مسائل مهارات التفكير العليا

٣١) **تحدٍّ:** استعمل التمثيل البياني لحل النظام ٢س+٣ص= ٥، ٣س+٤ص= ٦، ٤س+٥ص= ٧.

٣٢) **تبرير:** بيّن هل النظام الذي يتكون من معادلتين وتشكّل كل من النقطتين (٠، ٠)، (٢، ٢) حلًّا له، تكون له حلول أخرى أحيانًا أم دائمًا أم ليس له أي حلول أخرى.

٣٣) **أيٌّ من أنظمة المعادلات الآتية يختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى؟ فسّر إجابتك:**

٣س − ٢ص = ١ ٢س + ٣ص = ١٨	٤س + ٢ص = ١٤ ١٢س + ٦ص = ١٨	−س + ٤ص = ٨ ٣س − ٦ص = ٦	٤س − ص = ٥ −٢س + ص = −١

٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث معادلات تشكّل مع المعادلة ص = ٥س−٣ أحد أنظمة المعادلات الآتية: غير متسق، متسق ومستقل، متسق وغير مستقل على الترتيب.

٣٥) **اكتب:** صف مزايا ومساوئ استعمال التمثيل البياني لحل أنظمة المعادلات الخطية.

تدريب على اختبار

٣٦) **إجابة قصيرة:** يمكن لأحد أنواع البكتيريا مضاعفة عدده كل ٢٠ دقيقة. فإذا كان عدد البكتيريا في الساعة ٠٠: ٩ صباحًا ٤٥٠٠ ، فكم يصبح عند الساعة ٠٠: ١٢ ظهرًا؟

٣٧) **هندسة:** قُصت قطعة من السلك طولها ٨٤ سنتمترًا إلى قطع متساوية، ثم ألصقت من نهاياتها لتشكّل أحرف مكعب. فما حجم هذا المكعب؟

أ) ٢٩٤ سم^{٣} ج) ١١٥٨ سم^{٣}

ب) ٣٤٣ سم^{٣} د) ٢٧٤٤ سم^{٣}

مراجعة تراكمية

٣٨) **اختبار:** يبيِّن الجدول المجاور درجات هيثم في ٣ اختبارات للرياضيات، وبقي له اختبار رابع، وهو بحاجة إلى معدل لا يقل عن ٩٢ حتى يحصل على التقدير أ. (مهارة سابقة)

الاختبار	الدرجة
١	٩١
٢	٩٥
٣	٨٨

أ) إذا كان م يمثل درجته في الاختبار الرابع، فاكتب المتباينة الممثلة لهذا الموقف.

ب) إذا أراد هيثم الحصول على التقدير أ في الرياضيات، فكم يجب أن تكون درجته في الاختبار الرابع؟

جـ) هل إجابتك معقولة؟ فسّر ذلك.

٣٩) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بالنقطة (−٣، ١)، والمعامد للمستقيم ص = $\frac{١}{٣}$س + ٢. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حُلَّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال مجموعة التعويض المعطاة:

٤٠) ١٥(ن + ٦) = ١٦٥ ؛ {٣، ٤، ٥، ٦، ٧}.

٤١) ٣٦ = $\frac{م - ٩}{٢}$ ؛ {٧٨، ٧٩، ٨٠، ٨١}.

إذا كانت أ = ٢ ، ب = −٣ ، جـ = ١١ ، فاحسب قيمة كل عبارة فيما يأتي:

٤٢) أ + ٦ب ٤٣) ٧ − أب ٤٤) (٢جـ + ٣أ) ÷ ٤

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

توسع

معمل الحاسبة البيانية

٥-١ حل نظام من معادلتين خطيتين

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI – nspire لتمثيل نظام من معادلتين وحله.

نشاط ١ حل نظام من معادلتين خطيتين

حل النظام الآتي مقربًا إلى أقرب جزء من مئة:

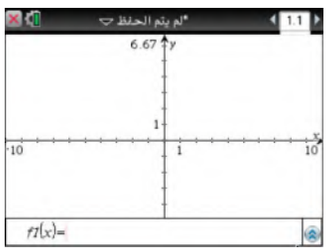
٥,٢٣ س + ص = ٧,٤٨

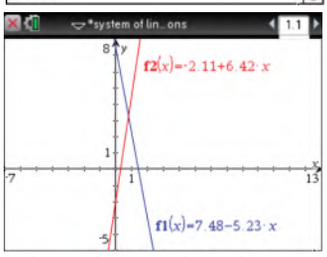
٦,٤٢ س – ص = ٢,١١

الخطوة ١: حل كل معادلة بالنسبة للمتغير ص لإدخالها في الحاسبة.

٥,٢٣س + ص = ٧,٤٨	المعادلة الأولى
٥,٢٣س + ص – ٥,٢٣ س = ٧,٤٨ – ٥,٢٣ س	اطرح ٥,٢٣ س من كلا الطرفين
ص = ٧,٤٨ – ٥,٢٣ س	بسّط
٦,٤٢ س – ص = ٢,١١	المعادلة الثانية
٦,٤٢ س – ص – ٦,٤٢ س = ٢,١١ – ٦,٤٢ س	اطرح ٦,٤٢ س من كلا الطرفين
– ص = ٢,١١ – ٦,٤٢ س	بسّط
(–١) (–ص) = (–١) (٢,١١ – ٦,٤٢ س)	اضرب كلا الطرفين في (–١)
ص = –٢,١١ + ٦,٤٢ س	بسّط

الخطوة ٢: مثّل كلًّا من المعادلتين بيانيًّا.

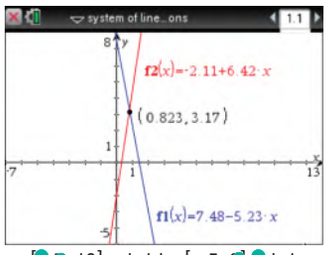




[–7, 13] scl: 1 by [–5, 8] scl: 1

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على on ، ثم اختر من الشاشة 1 مستند جديد .
- اختر 2: إضافة تطبيق الرسوم البيانية فتظهر الشاشة المجاورة.
- اكتب المعادلة الأولى $f1(x) = 7.48 - 5.23x$ ثم اضغط المفتاح enter فيظهر التمثيل البياني.
- اضغط المفتاح tab ثم اكتب المعادلة الثانية $f2(x) = -2.11 + 6.42x$ ثم اضغط enter ليظهر التمثيل البياني المجاور.
- أظهر الجزء المطلوب من التمثيل البياني على الشاشة، بالضغط على مفتاح menu ومنها اختر 4: تكبير/تصغير النافذة 1: إعدادات النافذة ؛ لتحديد التدريج المناسب لكلٍّ من س، ص.

الخطوة ٣: إيجاد نقاط التقاطع لإيجاد الحل.



[–7, 13] scl: 1 by [–5, 8] scl: 1

- استعمل ميزة **نقاط التقاطع** لإيجاد الحل.
- اضغط menu واختر منها 6: تحليل الرسم البياني ثم 4: نقاط التقاطع ، وقم بالضغط على المستقيم الأول ثم المستقيم الثاني فتظهر لك نقطة التقاطع (0.823, 3.17) التي هي حل النظام.

وعليه يكون حل النظام إلى أقرب جزء من مئة هو (٠,٨٢ ، ٣,١٧) .

من الطرق التي يمكنك استعمالها لحل معادلة بمتغير واحد، تمثيل نظام المعادلتين الذي نكوّنه من تلك المعادلة، ثم حله. ولإجراء ذلك، اكتب نظامًا من المعادلات باستعمال طرفي المعادلة، ثم استعمل الحاسبة البيانية لحله.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

نشاط ٢ استعمال نظام من معادلتين لحل معادلة خطية

حل المعادلة ٥س+٦= −٤ مستعملًا نظامًا من معادلتين.

الخطوة ١: اكتب نظامًا من معادلتين ، على أن يساوي كل طرف من طرفي المعادلة ص.

ص = ٥س + ٦ المعادلة الأولى

ص = −٤ المعادلة الثانية

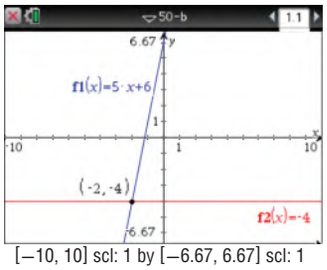
الخطوة ٢: مثِّل كلًّا من المعادلتين بيانيًّا.

- مثِّل كلًّا من هاتين المعادلتين بيانيًّا بالضغط على مفتاح on، ثم اختر الشاشة 1 مستند جديد واختر منها 2: إضافة تطبيق الرسوم البيانية .
- أدخل المعادلة الأولى $f1(x) = 5x + 6$ ثم اضغط enter ، اضغط مفتاح tab وأدخل المعادلة الثانية $f2(x) = -4$ ثم اضغط enter فيظهر التمثيل البياني التالي:

[−10, 10] scl: 1 by [−6.67, 6.67] scl: 1

الخطوة ٣: إيجاد نقاط التقاطع لإيجاد الحل.

- حدِّد نقطة التقاطع بالضغط على مفتاح menu، ثم اختر منها 6: تحليل الرسم البياني، ثم اختر 4: نقاط التقاطع وقم بالضغط في أي نقطةٍ على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، تظهر لك نقطة التقاطع (−٢، −٤).



[−10, 10] scl: 1 by [−6.67, 6.67] scl: 1

أي أن الحل هو س = −٢

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل من أنظمة المعادلات الآتية، وقرِّب الحل إذا كان كسرًا عشريًّا إلى أقرب جزء من مئة:

١) ص = ٢ س − ٣
ص = −٠,٤ س + ٥

٢) ص = ٦س + ١
ص = −٣,٢س − ٤

٣) ٧ س − ٢ ص = ١٦
١١س + ٦ص = ٣٢,٣

٤) ٣س + ٢ ص = ١٦
٥س + ص = ٩

٥) ٠,٦٢ س + ٠,٣٥ ص = ١,٦٠
−١,٣٨ س + ص = ٨,٢٤

٦) ٧٥ س − ١٠٠ ص = ٤٠٠
٣٣ س − ١٠ص = ٧٠

استعمل الآلة الحاسبة البيانية لحل كل من المعادلات الآتية، وقرِّب الحل إذا كان كسرًا عشريًّا إلى أقرب جزء من مئة:

٧) ٤س − ٢ = −٦

٨) $\frac{س}{٢}$ + ١ = ٣

٩) −٢ + ١٠س = ٨س − ١

١٠) **اكتب:** وضِّح لماذا يمكنك حل معادلة مثل ر= أ س + ب بحل نظام المعادلتين: ص = ر ، ص= أ س + ب .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٥-٢ حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بيانيًا.

والآن

- أحل نظامًا مكونًا من معادلتين بالتعويض.
- أحل مسائل من واقع الحياة (تتضمن نظامًا من معادلتين) باستعمال التعويض.

المفردات

التعويض

لماذا؟

في إحدى السنوات أنتجت مزرعة ناصر ١٦ طنًّا من التمور، بينما أنتجت مزرعة محمد ٢٠ طنًّا. ثم بدأ إنتاج المزرعتين يتناقص سنويًّا، فبلغ في السنة التالية ١٣ طنًّا لمزرعة ناصر و١٦ طنًّا لمزرعة محمد.

فإذا استمر تناقص إنتاج كل من المزرعتين وفق المعدل نفسه، فمتى يتساوى الإنتاج السنوي للمزرعتين؟

الحل بالتعويض: يمكنك استعمال نظام مكوّن من معادلتين لإيجاد متى يتساوى إنتاج المزرعتين، وإحدى طرائق إيجاد الحل الدقيق لنظام المعادلات **التعويض**.

مفهوم أساسي — الحل بالتعويض — مطويتك

الخطوة ١: حل إحدى المعادلتين على الأقل باستعمال أحد المتغيرين إذا كان ذلك ضروريًّا.

الخطوة ٢: عوِّض المقدار الناتج من الخطوة (١) في المعادلة الثانية، ثم حلها.

الخطوة ٣: عوِّض القيمة الناتجة من الخطوة (٢) في أي من المعادلتين وحلها لإيجاد قيمة المتغير الثاني، واكتب الحل في صورة زوج مرتب.

مثال ١ حل نظام من معادلتين بالتعويض

استعمل التعويض لحل النظام الآتي:

ص = ٢س + ١ ⟵ **الخطوة ١:** إحدى المعادلتين مكتوبة أساسًا بالنسبة إلى ص.

٣س + ص = −٩

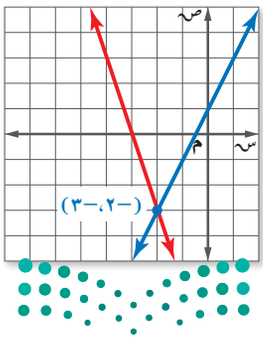
الخطوة ٢: عوض ٢س + ١ بدلًا من ص في المعادلة الثانية.

٣س + ص = −٩	المعادلة الثانية
٣س + ٢س + ١ = −٩	عوض عن ص بـ ٢س + ١
٥س + ١ = −٩	اجمع الحدود المتشابهة
٥س = −١٠	اطرح (١) من كلا الطرفين
س = −٢	اقسم كلا الطرفين على ٥

الخطوة ٣: عوض −٢ بدلًا من س في أي من المعادلتين لإيجاد قيمة ص.

ص = ٢س + ١	المعادلة الأولى
= ٢ (−٢) + ١	عوض عن س بـ (−٢)
= −٣	بسّط

إذن الحل هو: (−٢، −٣).



إرشادات للدراسة

تحقق من صحة حلك

بعد إيجاد قيم المتغيرين، عوض بهما في كلتا المعادلتين لتتحقق من صحة الحل.

تحقق من فهمك

١أ) ص = ٤س − ٦
٥س + ٣ص = −١

١ب) ٢س + ٥ص = −١
ص = ٣س + ١٠

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

وإذا لم يكن أحد المتغيرين مكتوبًا وحده في طرف إحدى المعادلتين في النظام، فحل إحدى المعادلتين أولًا بالنسبة لهذا المتغير، ثم عوّض لحل النظام.

مثال ٢ الحل ثم التعويض

استعمل التعويض لحل النظام الآتي:

س + ٢ص = ٦

٣س − ٤ص = ٢٨

الخطوة ١: حُلَّ المعادلة الأولى بالنسبة للمتغير س لأن معامل س= ١.

س + ٢ص = ٦	المعادلة الأولى
س + ٢ص − ٢ص = ٦ − ٢ص	اطرح ٢ص من كلا الطرفين.
س = ٦ − ٢ص	بسّط

الخطوة ٢: عوّض عن س بـ (٦−٢ص) في المعادلة الثانية لإيجاد قيمة ص.

٣ (٦ − ٢ص) − ٤ص= ٢٨	عوض عن س بـِ (٦−٢ص)
١٨ − ٦ص − ٤ص = ٢٨	خاصية التوزيع
١٨ − ١٠ص = ٢٨	اجمع الحدود المتشابهة
١٨ − ١٠ص − ١٨ = ٢٨ − ١٨	اطرح ١٨ من كلا الطرفين
−١٠ص = ١٠	بسّط
ص = −١	اقسم كلا الطرفين على −١٠

الخطوة ٣: أوجد قيمة س بالتعويض في المعادلة الأولى.

س + ٢ص = ٦	المعادلة الأولى
س + ٢ (−١) = ٦	عوض عن ص بـِ (−١)
س − ٢ = ٦	بسّط
س = ٨	أضف ٢ إلى كلا الطرفين

الحل هو (٨، −١)

تحقق من فهمك

٢أ) ٤س + ٥ص = ١١
ص − ٣س = −١٣

٢ب) س − ٣ص = −٩
٥س − ٢ص = ٧

إرشادات للدراسة

صيغة الميل والمقطع

إذا كُتبت كل من المعادلتين بصيغة الميل والمقطع (ص= م س+ب)، فيمكن مساواتهما معًا، ثم إيجاد قيمة س، وتعويضها لإيجاد قيمة ص.

وبصورة عامة، إذا كانت نتيجة حل نظام من معادلتين جملة خطأ مثل ٣= −٢، فلا يوجد حل للنظام في هذه الحالة، أما إذا كانت النتيجة متطابقة مثل ٣=٣ فهناك عدد لا نهائيّ من الحلول.

مثال ٣ عدد لا نهائي من الحلول، أو لا يوجد للنظام حل

حل النظام الآتي مستعملًا التعويض:

ص = ٢س − ٤

−٦س + ٣ص = −١٢

عوض عن ص بـ (٢س−٤) في المعادلة الثانية.

−٦س + ٣ص = −١٢	المعادلة الثانية
−٦س + ٣ (٢س − ٤) = −١٢	عوض عن ص بـِ (٢س−٤)
−٦س + ٦س − ١٢ = −١٢	خاصية التوزيع
−١٢ = −١٢	اجمع الحدود المتشابهة

بما أن الجملة الناتجة تشكل متطابقة، لذا يوجد عدد لا نهائي من الحلول.

إرشادات للدراسة

النظام غير المستقل

هناك عدد لا نهائي من الحلول للنظام في المثال ٣؛ لأنه عند كتابة المعادلتين بصيغة الميل والمقطع تكونان متكافئتين، ولهما التمثيل البياني نفسه.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحقق من فهمك

حل كلًّا من النظامين الآتيين مستعملًا التعويض.

٣أ) ٢س − ص = ٨
ص = ٢س − ٣

٣ب) ٤س − ٣ص = ١
٦ص − ٨س = −٢

حل مسائل من واقع الحياة: يمكنك استعمال التعويض لحل مسألة من واقع الحياة تتضمن نظامًا من معادلتين.

مثال ٤ من واقع الحياة — كتابة نظام من معادلتين وحله

أجهزة: باع متجر أجهزة تسجيل وسماعات عددها ١٢٥ جهازًا، بسعر ١٠٤,٩٥ ريالات لجهاز التسجيل الواحد، و ١٨,٩٥ ريالًا للسمّاعة الواحدة، فإذا كان ثمن مبيعاته من هذه الأجهزة ٦٩٢٦,٧٥ ريالًا، فكم جهازًا باع من كل نوع؟

لتكن جـ= عدد أجهزة التسجيل، ت= عدد السماعات.

عدد الوحدات المبيعة	جـ	ت	١٢٥
السعر	١٠٤,٩٥جـ	١٨,٩٥ت	٦٩٢٦,٧٥

فتكون المعادلتان هما: جـ + ت = ١٢٥ ، ١٠٤,٩٥جـ + ١٨,٩٥ت = ٦٩٢٦,٧٥.

الخطوة ١: حل المعادلة الأولى بالنسبة للمتغير جـ .

جـ + ت = ١٢٥ — المعادلة الأولى
جـ + ت − ت = ١٢٥ − ت — اطرح ت من كلا الطرفين
جـ = ١٢٥ − ت — بسّط

الخطوة ٢: عوض عن جـ بـ (١٢٥ − ت) في المعادلة الثانية.

١٠٤,٩٥جـ + ١٨,٩٥ت = ٦٩٢٦,٧٥ — المعادلة الثانية
١٠٤,٩٥ (١٢٥ − ت) + ١٨,٩٥ت = ٦٩٢٦,٧٥ — عوض عن جـ بـ (١٢٥ −ت)
١٣١١٨,٧٥ − ١٠٤,٩٥ت + ١٨,٩٥ت = ٦٩٢٦,٧٥ — خاصية التوزيع
١٣١١٨,٧٥ − ٨٦ت = ٦٩٢٦,٧٥ — اجمع الحدود المتشابهة
−٨٦ت = −٦١٩٢ — اطرح ١٣١١٨,٧٥ من كلا الطرفين
ت = ٧٢ — اقسم كلا الطرفين على −٨٦

الخطوة ٣: عوض عن ت بـ (٧٢) في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة جـ .

جـ + ت = ١٢٥ — المعادلة الأولى
جـ + ٧٢ = ١٢٥ — عوض عن ت بـ (٧٢)
جـ = ٥٣ — اطرح ٧٢ من كلا الطرفين

إذن باع المتجر ٥٣ جهاز تسجيل، ٧٢ سمّاعة.

تحقق من فهمك

٤) **رياضة:** مجموع النقاط التي سجلها فريقان في إحدى مباريات كرة اليد ٣١ نقطة. فإذا كان عدد نقاط الفريق الأول يساوي ٥,٢ أمثال عدد نقاط الفريق الثاني، فما عدد نقاط كل فريق؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

الأمثلة ١ - ٣ حل كلًّا من الأنظمة الآتية مستعملًا التعويض:

١) س = ص − ٢
٤س + ص = ٢

٢) ٢س + ٣ص = ٤
٤س + ٦ص = ٩

٣) س − ص = ١
٣س = ٣ص + ٣

مثال ٤ ٤) **هندسة:** إذا كان مجموع قياسي الزاويتين س، ص يساوي ١٨٠°، وقياس الزاوية س يزيد بمقدار ٢٤° على قياس الزاوية ص، فأجب عما يأتي:

أ) اكتب نظامًا من معادلتين لتمثيل هذا الموقف.

ب) أوجد قياس كل زاوية.

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣ حل كلًّا من الأنظمة الآتية مستعملًا التعويض:

٥) ص = ٤س + ٥
٢س + ص = ١٧

٦) ص = ٣س − ٣٤
ص = ٢س − ٥

٧) ص = ٣س − ٢
ص = ٢س − ٥

٨) ٢س + ص = ٣
٤س + ٤ص = ٨

٩) ٣س + ٤ص = −٣
س + ٢ص = −١

١٠) −١ = ٢س − ص
٨س − ٤ص = −٤

١١) س = ص − ١
− س + ص = −١

١٢) ص = −٤س + ١١
٣س + ص = ٩

١٣) ص = −٣س + ١
٢س + ص = ١

١٤) ٣س + ص = −٥
٦س + ٢ص = ١٠

١٥) ٥س − ص = ٥
−س + ٣ص = ١٣

١٦) −٥س + ٤ص = ٢٠
١٠س − ٨ص = −٤٠

الربط مع الحياة

السياحة في بلادنا متنفس في الإجازات للأسر والوافدين والسياح؛ لما حبا الله به البلاد من مظاهر طبيعية وآثار تاريخية، تمنح زائريها الراحة والتوازن الذهني والجسماني.

مثال ٤ ١٧) **سياحة:** يبيِّن الجدول أدناه العدد التقريبي لزوار منطقتين سياحيتين في المملكة خلال عام ١٤٣٥ هـ، ومعدل التغير بالآلاف خلال السنة الواحدة:

المنطقة	عدد الزوّار	معدل التغير (بالآلاف في السنة الواحدة)
أ	٤٠,٣ ألفًا	زيادة ٠,٨
ب	١٧,٠ ألفًا	زيادة ١,٨

أ) عرِّف المتغيرات، واكتب معادلة تمثل عدد زوار كل منطقة.

ب) إذا استمرت الزيادة بالمعدل نفسه، فبعد كم سنة تتوقع أن يصبح عدد الزوّار متساويًا في المنطقتين؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

العام	اللاعب أ	اللاعب ب
١٤٢٥هـ	١:٥١:٣٩	١:٥٤:٤٣
١٤٣٠هـ	١:٤٩:٣١	١:٥٨:٠٣

١٨) **رياضة:** يبيِّن الجدول المجاور الزمن المسجل للاعبين في سباقات الماراثون خلال عامي ١٤٢٥هـ، ١٤٣٠هـ.

أ) إذا سجل الزمن لكل منهما بالساعات والدقائق والثواني، فأعد كتابته إلى أقرب دقيقة.

ب) إذا اعتبرنا العام ١٤٢٥هـ صفرًا، وافترضنا ثبات معدل التغير بعد عام ١٤٢٥هـ، فاكتب معادلة تمثل الزمن المسجل (ص) لكلا اللاعبين في أي عام (س).

جـ) إذا استمر التغير في الاتجاه نفسه، فهل يسجلان الزمن نفسه؟ فسّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

١٩) **تحدٍّ:** كان عدد المتطوعين في العمل الخيري في إحدى القرى ٦٠ متطوعًا، فإذا كانت نسبة الرجال إلى النساء ٧: ٥، فأوجد عدد كل من الرجال والنساء المتطوعين.

٢٠) **تبرير:** قارن بين حل نظام من معادلتين بكل من: طريقة التمثيل البياني، وطريقة التعويض.

٢١) **مسألة مفتوحة:** أنشئ نظامًا من معادلتين له حل واحد، ووضح كيف يمكن أن يعبر عن مسألة من واقع الحياة، وصف دلالته.

٢٢) **اكتب:** وضِّح كيف تحدد الأفضل تعويضًا عند استعمال طريقة التعويض لحل نظام من معادلتين.

تدريب على اختبار

٢٣) أي الأنظمة الآتية له حل واحد؟

أ) ص = −٣س + ٤
−٦س − ٢ص = −٨

ب) س − ٢ص = ٨
٢س = ٤ص + ٩

جـ) ص = ٥س + ١
٤س + ص = ١٠

د) س + ص = ١
ص = ٣− س

٢٤) ما مجموعة حل المعادلة: ٢ |ف| = ١٦، إذا كان ف عددًا صحيحًا؟

أ) { ٠، ٨ }

ب) { −٨، ٠ }

جـ) { −٨، ٨ }

د) { −٨، ٠، ٨ }

مراجعة تراكمية

مثّل كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية بيانيًّا، ثم حدد ما إذا كان له حل واحد أم عدد لا نهائي من الحلول أم ليس له حل، وإن كان له حل واحد فاكتبه: (الدرس ٥-١)

٢٥) س = ١
٢س − ص = ٧

٢٦) ص = س + ٥
ص = س − ٢

٢٧) س + ص = ١
٣ص + ٣س = ٣

حلّ كل متباينة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)

٢٨) ٦ف + ١ ≤ −١١

٢٩) ٢٤ > ١٨ + ٢ن

٣٠) −١١ ≤ $\frac{٢}{٥}$ف + ٥

٣١) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٦، ١)، (١، ١). (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسِّط كلًّا من العبارات التالية بعد استعمال خاصية التوزيع:

٣٢) ١٠ ب + ٥(٣ + ٩ب)

٣٣) ٥(٣ن^{٢} + ٤) − ٨ن

٣٤) −٢(٧أ + ٥ب) + ٥(٢أ − ٧ب)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

٥-٣ حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الجمع أو الطرح

فيما سبق

درست حل نظام من معادلتين بالتعويض.

والآن

- أحل نظامًا من معادلتين باستعمال طريقة الحذف بالجمع.
- أحل نظامًا من معادلتين باستعمال طريقة الحذف بالطرح.

المفردات

الحذف

لماذا؟

يزيد عدد الأشهر (أ) التي ترتفع فيها درجة الحرارة العظمى في مدينة الرياض على ٣٠° س بمقدار شهرين على عدد الأشهر (ب) التي تنخفض فيها عن ٣٠° س. ويمثل النظام الآتي هذا الموقف:

أ + ب = ١٢

أ − ب = ٢

الحذف باستعمال الجمع: إذا جمعت هاتين المعادلتين فسوف يتم حذف المتغير (ب)، وتُسمى طريقة الجمع أو الطرح في حل النظام **الحذف**.

مفهوم أساسي — الحل بالحذف

أضف إلى مطويتك

الخطوة ١: اكتب النظام على أن يكون الحدان المتشابهان اللذان معامل أحدهما معكوس للآخر أو مساوٍ له بعضهما فوق بعض.

الخطوة ٢: اجمع المعادلتين أو اطرحهما للتخلص من أحد المتغيرين، ثم حل المعادلة.

الخطوة ٣: عوض القيمة الناتجة في الخطوة ٢ في إحدى المعادلتين وحلها لإيجاد المتغير الثاني، واكتب الحل كزوج مرتب.

مثال ١ الحذف باستعمال الجمع

استعمل الحذف لحل النظام:

٤س + ٦ص = ٣٢

٣س − ٦ص = ٣ ← **الخطوة ١:** كلا معاملي ٦ص، −٦ص معكوس للآخر

الخطوة ٢: اجمع المعادلتين.

٤س + ٦ص = ٣٢	
(+) ٣س − ٦ص = ٣	
٧س = ٣٥	حذف المتغير ص.
$\frac{٧س}{٧} = \frac{٣٥}{٧}$	اقسم كلا الطرفين على ٧ .
س = ٥	بسّط.

الخطوة ٣: عوِّض عن س بـ ٥ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة ص.

٤س + ٦ص = ٣٢	المعادلة الأولى
٤ (٥) + ٦ص = ٣٢	عوض عن س بـ ٥
٢٠ + ٦ص = ٣٢	اضرب
٢٠ + ٦ص − ٢٠ = ٣٢ − ٢٠	اطرح ٢٠ من كلا الطرفين
٦ص = ١٢	بسّط
$\frac{٦ص}{٦} = \frac{١٢}{٦}$	اقسم كلا الطرفين على ٦
ص = ٢	بسّط

إذن الحل هو (٥، ٢).

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحقق من فهمك

١أ) −٤س + ٣ص = −٣
٤س − ٥ص = ٥

١ب) ٤ص + ٣س = ٢٢
٣س − ٤ص = ١٤

يمكنك استعمال طريقة الحذف لإيجاد عددين محددين يرتبطان معًا بعلاقة.

مثال ٢ كتابة نظام من معادلتين وحله

عددان، سالب ثلاثة أمثال الأول مضافًا إليه خمسة أمثال الثاني يساوي −١١، وثلاثة أمثال الأول مضافًا إليه سبعة أمثال الثاني يساوي −١. فما العددان؟

سالب ثلاثة أمثال العدد الأول	زائد	خمسة أمثال العدد الثاني	يساوي	−١١.	
−٣س	+	٥ص	=	−١١	
ثلاثة أمثال العدد الأول	زائد	سبعة أمثال العدد الثاني	يساوي	−١.	
٣س	+	٧ص	=	−١	

الخطوتان ١، ٢: اكتب المعادلتين رأسيًّا، ثم اجمعهما.

−٣س + ٥ص = −١١
(+) ٣س + ٧ص = −١

١٢ص = −١٢ حذف المتغير الأول س.

$\frac{١٢ص}{١٢} = \frac{-١٢}{١٢}$ اقسم كلا الطرفين على ١٢

ص = −١ بسّط.

الخطوة ٣: عوِّض عن ص بـ −١ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة س.

٣س + ٧ص = −١ المعادلة الثانية

٣س + ٧(−١) = −١ عوض عن ص بـ −١

٣س + (−٧) = −١ بسّط.

٣س + (−٧) + ٧ = −١ + ٧ أضف ٧ إلى كلا الطرفين.

٣س = ٦ بسّط.

$\frac{٣س}{٣} = \frac{٦}{٣}$ اقسم كلا الطرفين على ٣.

س = ٢ بسّط.

العددان هما ٢، −١.

تحقق:

−٣س + ٥ص = −١١ المعادلة الأولى

−٣(٢) + ٥(−١) ≟ −١١ عوض عن س بـ ٢، وعن ص بـ −١

−١١ = −١١ ✓ بسّط

٣س + ٧ص = −١ المعادلة الثانية

٣(٢) + ٧(−١) ≟ −١ عوض عن س بـ ٢، وعن ص بـ −١

−١ = −١ ✓ بسّط

تحقق من فهمك

٢) أوجد العددين اللذين مجموعهما يساوي −١٠، وسالب ثلاثة أمثال العدد الأول ناقص العدد الثاني يساوي ٢.

قراءة الرياضيات

الحذف: إذا أدى جمع أو طرح معادلتين إلى أن يكون ناتج معاملي أحد المتغيرين صفرًا، يقال عندئذٍ إنه تم حذف هذا المتغير.

إرشادات للدراسة

معاملات: عندما يتساوى معاملا متغير، يؤدي طرح المعادلتين إلى حذفه، وعندما يكون أحد المعاملين معكوسًا للآخر، يؤدي جمع المعادلتين إلى حذفه أيضًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الحذف باستعمال الطرح: يمكنك أحيانًا حذف متغير بطرح معادلة من أخرى.

مثال ٣ من اختبار — الحذف باستعمال الطرح

حل النظام:

٥ر + ٢ت = ٦

٩ر + ٢ت = ٢٢

أ) (−٧، ١٥) ب) $\left(٧، \frac{٨}{٩}\right)$ جـ) (٤، −٧) د) $\left(٤، -\frac{٢}{٥}\right)$

اقرأ الفقرة:

بما أن كلتا المعادلتين تشتمل على ٢ ت، فيمكن حل النظام بالحذف باستعمال الطرح.

حل الفقرة:

الخطوة ١: اطرح المعادلتين.

٥ر + ٢ت = ٦	اكتب نظام المعادلتين على أن تكون الحدود
(−) ٩ر + ٢ت = ٢٢	المتشابهة بعضها تحت بعض.
−٤ر = −١٦	حذف المتغير ت
ر = ٤	بسّط

الخطوة ٢: عوِّض عن ر بـ ٤ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة ت.

٥ر + ٢ت = ٦	المعادلة الأولى
٥ (٤) + ٢ت = ٦	ر = ٤
٢٠ + ٢ت = ٦	بسّط
٢٠ + ٢ت − ٢٠ = ٦ − ٢٠	اطرح ٢٠ من كلا الطرفين
٢ت = −١٤	بسّط
ت = −٧	بسّط

فيكون الحل (٤، −٧)، والإجابة الصحيحة هي جـ.

تحقق من فهمك

٣) حل النظام:

٨ب + ٣جـ = ١١

٨ب + ٧جـ = ٧

أ) (١,٥، −١) ب) (١,٧٥، −١) جـ) (١,٧٥، ١) د) (١,٥، ١)

الربط مع الحياة

اهتم الإسلام بالعمل اليدوي المهني والتقني، فمارسه الرسول ﷺ والصحابة والتابعون بوصفه وسيلة إنتاجية وقيمة مهمة تؤدي إلى تطور البلاد وبناء حياة الإنسان والمجتمع.

مثال ٤ من واقع الحياة — كتابة نظام من المعادلات وحله

وظائف: يعمل كل من عبدالعزيز وعبدالرحمن في متجر، فيحصل عبدالعزيز على ٨,٥ ريالات في الساعة، وعبدالرحمن على ٧,٥ ريالات في الساعة، وبلغ مجموع ما حصلا عليه خلال يومين ٢٩٩,٥ ريالًا، وفي اليومين التاليين ضاعف عبدالرحمن عدد ساعات عمله فحصلا على ٤١٢ ريالًا، فما عدد الساعات التي عملها كل منهما في اليومين الأولين؟

افهم: أنت تعلم مقدار ما يحصل عليه كل منهما في الساعة ومجموع ما حصلا عليه معًا.

نريد معرفة عدد الساعات التي عملها كل منهما في اليومين الأولين.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

خطط: افترض أن جـ = عدد ساعات عمل عبدالعزيز ، د = عدد ساعات عمل عبدالرحمن.

أجرة عبد العزيز	زائد	أجرة عبد الرحمن	تساوي	٢٩٩,٥ ريالًا
٨,٥ جـ	+	٧,٥ د	=	٢٩٩,٥
أجرة عبد العزيز	زائد	أجرة عبد الرحمن	تساوي	٤١٢ ريالًا
٨,٥ جـ	+	٧,٥(٢) د	=	٤١٢

حل: اطرح المعادلتين للتخلص من أحد المتغيرين، ثم حل المعادلة الناتجة في المتغير الآخر.

٨,٥جـ + ٧,٥د = ٢٩٩,٥	اكتب المعادلتين رأسيًّا
٨,٥جـ + ٧,٥(٢)د = ٤١٢	
٨,٥جـ + ٧,٥٠د = ٢٩٩,٥	
(−) ٨,٥جـ + ١٥د = ٤١٢	بسّط.
−٧,٥د = −١١٢,٥	اطرح لحذف المتغير جـ.
$\frac{-٧,٥د}{-٧,٥} = \frac{-١١٢,٥}{-٧,٥}$	اقسم كلا الطرفين على −٧,٥.
د = ١٥	بسّط.

والآن عوض عن د بـ ١٥ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة جـ .

٨,٥ جـ + ٧,٥٠ د = ٢٩٩,٥	المعادلة الأولى
٨,٥ جـ + ٧,٥ (١٥) = ٢٩٩,٥	عوض عن د بـ ١٥
٨,٥ جـ + ١١٢,٥ = ٢٩٩,٥	بسّط
٨,٥ جـ = ١٨٧	اطرح ١١٢,٥ من كلا الطرفين
جـ = ٢٢	اقسم كلا الطرفين على ٨,٥

تحقق: عوض كلا المتغيرين في المعادلة الأخرى للتأكد من صحة الحل.

إذا كان جـ= ٢٢، د= ١٥، فإن ٨,٥ (٢٢)+ ١٥(١٥)= ٤١٢

وعليه ففي اليومين الأولين عمل عبدالعزيز ٢٢ ساعة، وعبدالرحمن ١٥ ساعة .

إرشادات للدراسة

طريقة أخرى: يمكنك ضرب إحدى المعادلتين في (−١)، ثم جمع المعادلتين بدلًا من طرحهما.

تحقق من فهمك

٤) **حفلات:** أقام مسفر ومحمود حفلًا بمناسبة نجاحهما، فإذا كان عدد الأصدقاء الذين دعاهم مسفر يقل بـ ٥ عن الذين دعاهم محمود ، وكان مجموع الأصدقاء المدعوين ٤٧ ، فكم شخصًا دعا كل منهما؟

تأكد

المثالان ١ ، ٣ حل كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا طريقة الحذف:

١) ٥م − ب = ٧
٧م − ب = ١١

٢) ٨س + ٥ص = ٣٨
−٨س + ٢ص = ٤

٣) ٧ف + ٣جـ = −٦
٧ف − ٢جـ = −٣١

مثال ٢ ٤) ما العددان اللذان مجموعهما ٢٤، وخمسة أمثال الأول ناقص الثاني يساوي ١٢؟

مثال ٤ ٥) **طلاب:** يزيد عدد طلاب المرحلة الابتدائية في مدينة ما على عدد طلاب المرحلة المتوسطة بـ ٩,٨ ألف طالب. فإذا علمت أن عدد الطلاب في المرحلتين ٤٤ ألف طالب، فما عدد الطلاب في كل مرحلة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدرب وحل المسائل

المثالان ١، ٣ حل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا طريقة الحذف:

٦) −ف + و = ٧
ف + و = ١

٧) ص + ز = ٤
ص − ز = ٨

٨) −٤س + ٥ص = ١٧
٤س + ٦ص = −٦

٩) أ + ٤ب = −٤
أ + ١٠ب = −١٦

١٠) ٩س + ٦ص = ٧٨
٣س − ٦ص = −٣٠

١١) ٦س − ٢ص = ١
١٠س − ٢ص = ٥

مثال ٢ ١٢) ما العددان اللذان مجموعهما ٢٢ والفرق بينهما ١٢؟

١٣) ما العددان اللذان مجموعهما ١١، وثلاثة أمثال أحدهما ناقص الآخر يساوي −٣؟

مثال ٤ ١٤) **شحن سيارات:** يمثل الجدول أدناه تكاليف شحن عدد من السيارات الصغيرة والكبيرة من مدينة إلى مدينة أخرى. أوجد أجرة شحن كل من السيارة الصغيرة والكبيرة.

عدد السيارات الصغيرة	عدد السيارات الكبيرة	الأجرة الكلية (ريال)
٢	٥	٣٨٠٠
٢	٣	٢٦٠٠

حل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا طريقة الحذف:

١٥) ٤(س + ٢ص) = ٨
٤س + ٤ص = ١٢

١٦) $\frac{١}{٢}$س + $\frac{٢}{٣}$ص = $٢\frac{٣}{٤}$
$\frac{١}{٤}$س − $\frac{٢}{٣}$ص = $٦\frac{١}{٤}$

١٧) ٤س + ٣ص = ٦
٣س + ٣ص = ٧

١٨) **فن العمارة:** يبلغ مجموع ارتفاعي برجي المملكة والفيصلية معًا ٥٦٧ مترًا، ويزيد ارتفاع برج المملكة على برج الفيصلية بـ ٣٣ مترًا.

أ) ما ارتفاع برج المملكة؟

ب) ما ارتفاع برج الفيصلية؟

الربط مع الحياة

افتُتح مهرجان جازان الشتوي الأول الذي تنظمه لجنة التنشيط السياحي بالمنطقة في عام ١٤٢٧ هـ، ويشتمل على ألعاب ترفيهية وعروض ومسابقات فنية ورياضية.

١٩) **سباق الدرجات:** شارك ٨٠ متسابقًا في سباق الدراجات الهوائية ضمن ملتقى روائع جازان الرابع من فئتي الكبار والصغار. وكان عدد المشاركين من فئة الصغار أكثر من عدد المشاركين من فئة الكبار بـ ١٠.

أ) افترض أن س يمثل عدد المشاركين في فئة الصغار، ص يمثل عدد المشاركين في فئة الكبار. ثم اكتب نظامًا من معادلتين يمثّل هذا الموقف.

ب) استعمل الحذف لحل هذا النظام.

جـ) فسِّر الحل في سياق هذا الموقف.

د) مثِّل هذا النظام بيانيًّا للتأكد من صحة الحل.

٢٠) **تمثيلات متعددة:** لديك ٩ قطع نقد، ٩ مشابك ورق، استعمل ٩ منها على الأكثر لإنشاء عدد معين من النقاط، وافترض أن كل مشبك قيمته نقطة واحدة وكل قطعة نقد قيمتها ٣ نقاط، وأن ن تمثل قطعة نقد، م تمثل مشبك ورق. فمثلًا:

٢ن + ٣ م = + = **٩ نقاط**

أ) **حسيًا:** كيف يمكنك أن تحصل على ١٥ نقطة مستعملًا كلا النوعين؟ قارن النمط الذي حصلت عليه بما حصل عليه زملاؤك.

ب) **تحليليًا:** مستعملًا ٩ قطع، اكتب نظامًا من معادلتين وحله لإيجاد عدد مشابك الورق وقطع النقد اللازمة للحصول على ١٥ نقطة.

جـ) **جدوليًا:** أنشئ جدولًا يبين عدد مشابك الورق المستعملة والعدد الكلي للنقاط إذا كان عدد قطع النقد ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥.

د) **لفظيًا:** هل تتطابق النتيجة في الجدول مع نتيجة (الإجابة عن الفرع ب)؟ فسّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

٢١) **مسألة مفتوحة:** أنشئ نظامًا من معادلتين يمكن حله بحذف أحد متغيريه باستعمال الجمع، ثم اكتب قاعدة عامة لإنشاء مثل هذه الأنظمة.

٢٢) **تبرير:** إذا كانت النقطة (−٣، ٢) تمثل حل نظام معادلتين، وكانت إحدى معادلتيه هي س+٤ص= ٥، فأوجد المعادلة الثانية لهذا النظام، وفسِّر كيف توصلت إليها.

٢٣) **تحدٍّ:** إذا كان ناتج ضرب عدد في ٧ يساوي ١٨٢، ومجموع رقميه يساوي ٨ ، فحدد المتغيرات، واكتب نظامًا من معادلتين يمكنك استعماله لإيجاد هذا العدد، ثم حل النظام وأوجد العدد.

٢٤) **اكتب:** بيِّن متى يكون من المفيد استعمال الحذف لحل نظام من معادلتين.

تدريب على اختبار

٢٥) إذا استمر النمط الآتي، فما العدد الثامن؟

$٢، ٣، \frac{٩}{٢}، \frac{٢٧}{٤}، \frac{٨١}{٨}، \ldots$

أ) $\frac{٢١٨٧}{٦٤}$

ب) $\frac{٢٢٤٥}{٦٤}$

جـ) $\frac{٢٢٨١}{٦٤}$

د) $\frac{٢٤٤٥}{٦٤}$

٢٦) ما حل نظام المعادلتين الآتيتين؟

س + ٤ص = ١

٢س − ٣ص = −٩

أ) (١، ٠)

ب) (−٣، ١)

جـ) ليس له حل

د) يوجد عدد لانهائي من الحلول

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مراجعة تراكمية

حل كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا التعويض، وبيّن ما إذا كان للنظام حل واحد، أم عدد لا نهائي من الحلول، أم ليس له حل: (الدرس ٥-٢)

٢٧) ص = ٦س
٢س + ٣ص = ٤٠

٢٨) س = ٣ص
٢س + ٣ص = ٤٥

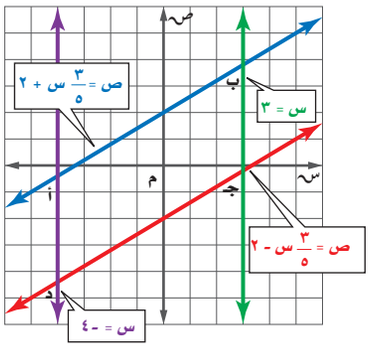
٢٩) س = ٥ص + ٦
س = ٥ص − ٢

٣٠) **توفير:** يرغب كل من وائل ورياض في شراء دراجة، وقد وفَّر وائل حتى الآن ٣٥ ريالًا ويخطط لتوفير ١٠ ريالات كل أسبوع. أما رياض فلديه الآن ٢٦ ريالًا ويخطط لتوفير ١٣ ريالًا في الأسبوع. (الدرس ٥-١)

أ) بعد كم أسبوع يصبح مجموع ما وفره كل منهما متساويًا؟

ب) ما مقدار ما يوفره كل منهما حتى ذلك الوقت؟

٣١) **هندسة:** بيِّن ما إذا كان الشكل أب جـ د متوازي أضلاع أم لا؟ وفسّر إجابتك. (مهارة سابقة)



حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحلّ: (مهارة سابقة)

٣٢) ٦جـ = −٤٨

٣٣) $\frac{٢}{٣}$أ = ٨

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كلًّا من العبارات الآتية:

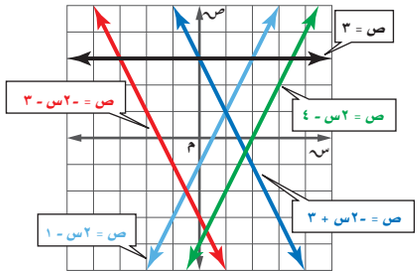
٣٤) ٦ل − ٣ + ٧ب + ١

٣٥) ٧س^{٢} − ٩س + ٤س^{٢}

٣٦) ١٠(٢ + ر) + ٣ر

٣٧) ٥ص − ٧(ص + ٥)

مستعملًا التمثيل البياني أدناه، حدد خصائص كل نظام فيما يأتي من حيث كونه متسقًا أم غير متسق، ومستقلًّا أم غير مستقل: (الدرس ٥-١)



١) ص = ٢س − ١
ص = −٢س + ٣

٢) ص = −٢س + ٣
ص = −٢س −٣

مثِّل كل نظام فيما يأتي بيانيًّا، وأوجد عدد حلوله. وإن كان واحدًا فاكتبه: (الدرس ٥-١)

٣) ص = ٢س − ٣
ص = س + ٤

٤) س + ص = ٦
س − ص = ٤

٥) س + ص = ٨
٣س + ٣ص = ٢٤

٦) س − ٤ص = −٦
ص = −١

٧) ٣س + ٢ص =١٢
٣س + ٢ص = ٦

٨) ٢س + ص = −٤
٥س + ٣ص = −٦

حُلَّ كلًّا من الأنظمة الآتية مستعملًا التعويض: (الدرس ٥-٢)

٩) ص = س + ٤
٢س + ص = ١٦

١٠) ص = −٢س − ٣
س + ص = ٩

١١) س + ص = ٦
س − ص = ٨

١٢) ص = −٤س
٦س − ص = ٣٠

١٣) **حديقة الحيوان:** الجدول الآتي يبيِّن، تكلفة دخول عائلتين لحديقة الحيوان في إحدى المدن. (الدرسان ٥-٢ ، ٥-٣)

العائلة	المجموعة	التكلفة الإجمالية
أ	٤ كبار وطفلان	١٨٤ ريالًا
ب	٤ كبار وَ٣ أطفال	٢٠٠ ريال

أ) عرّف المتغيرات التي تمثل ثمن التذكرة للكبار وثمن التذكرة للأطفال.

ب) اكتب نظامًا من معادلتين لإيجاد ثمن كلٍّ من تذكرتي الكبار والأطفال.

جـ) حل النظام، ووضح ماذا يعني الحل.

د) ما تكلفة دخول مجموعة مكونة من ٣ كبار وَ٥ أطفال لحديقة الحيوان؟

١٤) **اختيار من متعدد:** تريد أسماء شراء ١٢ قطعة من الشوكولاتة والمصاص؛ إذا كان مع أسماء ١٦ ريالًا، وكان ثمن قطعة الشوكولاتة ريالين، وثمن قطعة المصاص ريالًا، فكم قطعة من كل نوع ستشتري؟ (الدرسان ٥-٢ ، ٥-٣)

أ) ٦ قطع شوكولاتة، ٦ قطع مصاص.

ب) ٤ قطع شوكولاتة، ٨ قطع مصاص.

جـ) ٧ قطع شوكولاتة، ٥ قطع مصاص.

د) ٣ قطع شوكولاتة، ٩ قطع مصاص.

حُلَّ كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا طريقة الحذف: (الدرس٥-٣)

١٥) س + ص = ٩
س − ص = −٣

١٦) س + ٣ص = ١١
س + ٧ص = ١٩

١٧) ٩س − ٤ص = −٦
٣س + ٤ص = ١٠

١٨) −٥س + ٢ص = −١١
٥س − ٧ص = ١

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

٥ـ٤ حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستعمال الضرب

فيما سبق

درست حل نظام من معادلتين بالحذف باستعمال الجمع أو الطرح.

والآن

- أحل نظامًا من معادلتين بالحذف باستعمال الضرب.
- أحل مسائل من واقع الحياة تتضمن أنظمة من معادلتين.

لماذا؟

باعت مكتبة ٧٠ قلمًا بمبلغ ٢٦٠ ريالًا. وبناءً على القائمة أدناه يمكن كتابة المعادلتين الآتيتين لإيجاد عدد الأقلام المبيعة من كل نوع:

قلم حبر	٤ ريالات
قلم رصاص	ريالان

س + ص = ٧٠

٤س + ٢ص = ٢٦٠

الحذف باستعمال الضرب: لا يمكن حذف أي من المتغيرين بالجمع أو الطرح في النظام أعلاه، إلّا أنه يمكن حذف أحد المتغيرين باستعمال الضرب في مثل هذه الحالة.

مفهوم أساسي — الحل بالحذف

أضف إلى مطويتك

الخطوة ١: اضرب إحدى المعادلتين على الأقل في عددٍ ثابت للحصول على معادلتين فيهما حدان أحدهما معكوس للآخر.

الخطوة ٢: اجمع المعادلتين أو اطرحهما للتخلص من أحد المتغيرين، ثم حل المعادلة.

الخطوة ٣: عوِّض عن قيمة المتغير الناتجة في الخطوة (٢) في إحدى المعادلتين، وحلها لإيجاد قيمة المتغير الثاني، واكتب الحل في صورة زوج مرتب.

مثال ١ ضرب معادلة لحذف أحد المتغيرين

استعمل الحذف لحل النظام:

٥س + ٦ص = −٨

٢س + ٣ص = −٥

الخطوتان ١ و ٢:

٥س + ٦ص = −٨

٢س + ٣ص = −٥

اضرب كل حد في (−٢)

٥س + ٦ص = −٨

(+) −٤س − ٦ص = ١٠ اجمع

س = ٢ حذف ص

الخطوة ٣:

٢س + ٣ص = −٥ المعادلة الثانية

٢(٢) + ٣ص = −٥ عوض عن س بـ ٢

٤ + ٣ص = −٥ بسّط

٣ص = −٩ اطرح ٤ من كلا الطرفين

ص = −٣ اقسم كلا الطرفين على ٣

الحل هو (٢، −٣).

تحقق من فهمك

أ) ٦س − ٢ص = ١٠
٣س − ٧ص = −١٩

ب) ٩ر + ك = ١٣
٣ر + ٢ك = −٤

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - ١٤٤٥

أحيانًا نحتاج إلى ضرب كل معادلة في عدد مختلف لحل نظام المعادلتين.

مثال ٢ ضرب كلتا المعادلتين لحذف أحد المتغيرين

حل النظام الآتي مستعملًا الحذف:

٤س + ٢ص = ٨

٣س + ٣ص = ٩

الطريقة ١: حذف المتغير س.

٤س + ٢ص = ٨ | اضرب بـ ٣

٣س + ٣ص = ٩ | اضرب بـ −٤

١٢س + ٦ص = ٢٤

(+) −١٢س − ١٢ص = −٣٦ اجمع

−٦ص = −١٢ تم حذف المتغير س

$\frac{-٦ص}{-٦} = \frac{-١٢}{-٦}$ اقسم كلا الطرفين على −٦

ص = ٢ بسّط

الآن عوِّض عن ص بـ ٢ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة س.

٣س + ٣ص = ٩ المعادلة الثانية

٣س + ٣(٢) = ٩ عوض عن ص بـِ ٢

٣س + ٦ = ٩ بسّط

٣س = ٣ اطرح ٦ من كلا الطرفين

$\frac{٣س}{٣} = \frac{٣}{٣}$ اقسم كل طرف على ٣

س = ١ الحل (١، ٢)

الطريقة ٢: حذف المتغير ص.

٤س + ٢ص = ٨ | اضرب بـ ٣

٣س + ٣ص = ٩ | اضرب بـ −٢

١٢س + ٦ص = ٢٤

(+) −٦س − ٦ص = −١٨

٦س = ٦ تم حذف المتغير ص

$\frac{٦س}{٦} = \frac{٦}{٦}$ اقسم كلا الطرفين على ٦

س = ١ بسّط

والآن عوِّض عن س= ١ بإحدى المعادلتين لإيجاد قيمة ص.

٣س + ٣ص = ٩ المعادلة الثانية

٣(١) + ٣ص = ٩ عوض عن س بـ ١

٣ + ٣ص = ٩ بسّط

٣ص = ٦ اطرح ٣ من كلا الطرفين، ثم بسّط

$\frac{٣ص}{٣} = \frac{٦}{٣}$ اقسم كلا الطرفين على ٣

ص = ٢ بسّط

الحل هو (١، ٢) ويتطابق مع الحل الذي حصلنا عليه بالطريقة الأولى.

تحقق: عوِّض عن س بـ (١)، وعن ص بـ ٢ في المعادلة الأولى

٤س + ٢ص = ٨ المعادلة الأصلية

٤(١) + ٢(٢) ≟ ٨ عوِّض عن (س، ص) بِـ (١، ٢).

٤ + ٤ ≟ ٨ اضرب

٨ = ٨ ✓ اجمع

إرشادات للدراسة

اختيار المتغير الذي يجب حذفه: يمكنك حذف أي متغير في النظام إذا لم يطلب إليك إيجاد قيمة متغير محدد.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحقق من فهمك

٢أ) ٥س − ٣ص = ٦
٢س + ٥ص = −١٠

٢ب) ٦أ + ٢ب = ٢
٤أ + ٣ب = ٨

حل مسائل من واقع الحياة: قد يكون من الضروري استعمال الضرب قبل الحذف أحيانًا عند حل مسائل من واقع الحياة.

مثال ٣ من واقع الحياة — كتابة نظام من معادلتين وحله

طيران: **تطير طائرة في اتجاه الريح بمعدل ٥٢٠ ميلًا في ٤ ساعات، وفي رحلة العودة تستغرق ٥ ساعات لقطع المسافة نفسها، أوجد سرعة الطائرة في الأجواء الساكنة.**

ليكن أ = معدل سرعة الطائرة في الأجواء الساكنة.
و = معدل سرعة الريح.

	السرعة	الزمن	المسافة ف	السرعة × الزمن = ف
في اتجاه الريح	أ + و	٤	٥٢٠	(أ + و) × ٤ = ٥٢٠
في عكس اتجاه الريح	أ − و	٥	٥٢٠	(أ − و) × ٥ = ٥٢٠

فتكون المعادلتان هما: ٤ أ + ٤ و = ٥٢٠، ٥أ − ٥ و = ٥٢٠.

٤ أ + ٤ و = ٥٢٠ — اضرب في ٥ — ٢٠ أ + ٢٠ و = ٢٦٠٠
٥ أ − ٥ و = ٥٢٠ — اضرب في ٤ — (+) ٢٠ أ − ٢٠ و = ٢٠٨٠ — اجمع
٤٠ أ = ٤٦٨٠ — حذف المتغير و
$\frac{٤٠ أ}{٤٠} = \frac{٤٦٨٠}{٤٠}$ — اقسم كلا الطرفين على ٤٠
أ = ١١٧ — بسّط

وبذلك يكون معدل سرعة الطائرة في الأجواء الساكنة ١١٧ ميلًا في الساعة.

تحقق من فهمك

٣) زورق: يقطع زورق ٤ أميال في الساعة في اتجاه التيار، ويستغرق في رحلة العودة ١,٥ ساعة، أوجد معدل سرعة القارب في المياه الساكنة.

تأكد

المثالان ١، ٢ حُلّ كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا الحذف:

١) ٢س − ص = ٤
٧س + ٣ص = ٢٧

٢) ٢س + ٧ص = ١
س + ٥ص = ٢

٣) ٤س + ٢ص = −١٤
٥س + ٣ص = −١٧

مثال ٣ ٤) **صيد:** يقطع قارب صيد مسافة ١٠ أميال في ٣٠ دقيقة في اتجاه مجرى النهر، إلا أنه يقطع المسافة نفسها في رحلة العودة في ٤٠ دقيقة، أوجد معدل سرعته في المياه الساكنة بوحدة ميل/ ساعة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدرب وحل المسائل

المثالان ١ ، ٢ حُلّ كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا طريقة الحذف:

٥) س + ص = ٢
−٣س + ٤ص = ١٥

٦) س − ص = −٨
٧س + ٥ص = ١٦

٧) ٦س + ص = −٣٩
٣س + ٢ص = −١٥

٨) ٢س + ٥ص = ١١
٤س + ٣ص = ١

٩) ٣س + ٤ص = ٢٩
٦س + ٥ص = ٤٣

١٠) ٤س + ٧ص = −٨٠
٣س + ٥ص = −٥٨

١١) ١٢س − ٣ص = −٣
٦س + ص = ١

١٢) −٤س + ٢ص = ٠
١٠س + ٣ص = ٨

المثال ٣ ١٣) **نظرية الأعداد:** ما العددان اللذان سبعة أمثال أحدهما زائد ثلاثة أمثال الآخر يساوي سالب واحد، ومجموعهما يساوي سالب ثلاثة؟

١٤) **كرة قدم:** سجّل أحد لاعبي كرة القدم (١٢) هدفًا في الدوري الممتاز. فإذا علمت أن ضعف عدد الأهداف التي سجلها في مرحلة الذهاب تزيد على ثلاثة أمثال أهدافه في مرحلة الإياب بـ ٤، فما عدد أهدافه في كل من مرحلتي الذهاب والإياب؟

حُلّ كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا طريقة الحذف:

١٥) −٠,٤س + ٠,٢٥ص = −٢,١٧٥
٢س + ص = ٧,٥

١٦) $\frac{١}{٤}$س + ٤ص = $٢\frac{٣}{٤}$
٣س + $\frac{١}{٢}$ص = $٩\frac{١}{٤}$

١٧) **هندسة:** إذا علمت أن التمثيل البياني للمعادلتين س+٢ص= ٦، ٢س+ص= ٩ يشتمل على ضلعين من أضلاع مثلث، وأن نقطة تقاطع المستقيمين هي رأس المثلث، فأجب عن الأسئلة الآتية:

أ) ما إحداثيات رأس المثلث؟

ب) ارسم هذين المستقيمين، وعين رأس المثلث.

جـ) إذا كان التمثيل البياني للمعادلة س−ص= −٣ يشمل الضلع الثالث للمثلث، فارسم هذا المستقيم على الشكل نفسه.

د) أوجد إحداثيات الرأسين الآخرين للمثلث.

١٨) **اختبارات:** اكتشف معلم أنه عكس درجة أحد طلابه في أثناء رصدها مما أخّر ترتيبه بين الأوائل، فأخبر الطالب وبيّن له أن مجموع رقمي درجته يساوي ١٤، والفارق بين درجتيه الحالية والصحيحة ٣٦ درجة. وطلب إليه أن يعرف درجته الصحيحة وسوف يكافئه. فما الدرجة الصحيحة؟

تاريخ الرياضيات

الخوارزمي (١٦٤هـ – ٢٣٢هـ): هو أبوعبدالله محمد بن موسى الخوارزمي، عالم مسلم، وقد أسهم كثيرًا في تطور علوم الرياضيات، والجغرافيا، والفلك، ومن أشهر كتبه "الجبر والمقابلة".

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مسائل مهارات التفكير العليا

١٩) **تبرير:** وضح كيف يمكنك تعريف نظام المعادلتين الخطيتين الذي له عدد لا نهائي من الحلول.

٢٠) **اكتشف الخطأ:** حُلّ كل من سعيد وحسين نظامًا من معادلتين، فأيهما إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

سعيد

٢ر + ٧ت = ١١

ر − ٩ت = −٧

٢ر + ٧ت = ١١

(−) ٢ر − ١٨ت = −١٤

٢٥ت = ٢٥

ت = ١

٢ر + ٧ت = ١١

٢ر + ٧(١) = ١١

٢ر + ٧ = ١١

٢ر = ٤

$\frac{٢ر}{٢} = \frac{٤}{٢}$

ر = ٢

الحل (٢، ١)

حسين

٢ر + ٧ت = ١١

(−) ر − ٩ت = −٧

ر = ١٨

٢ر + ٧ت = ١١

٢(١٨) + ٧ت = ١١

٣٦ + ٧ت = ١١

٧ت = −٢٥

$\frac{٧ت}{٧} = -\frac{٢٥}{٧}$

ت = −٣,٦

الحل (١٨، −٣,٦)

٢١) **مسألة مفتوحة:** اكتب نظامًا من معادلتين يمكن حله بضرب إحدى معادلتيه في −٣، ثم جمع المعادلتين معًا.

٢٢) **تحدٍّ:** إذا كان حل النظام: ٤س+٥ص= ٢، ٦س−٢ص= ب هو (٣، أ)، فأوجد قيمة كل من: أ، ب موضحًا خطوات الحل التي استعملتها.

٢٣) **اكتب:** وضِّح كيف تحدِّد المتغير الذي ينبغي حذفه باستعمال الضرب.

تدريب على اختبار

٢٤) ما الزوج المرتب الذي يمثِّل حلَّ النظام الآتي؟

٢س − ٣ص = −٩

−س + ٣ص = ٦

أ) (٣، ٣)

ب) (−٣، ٣)

جـ) (−٣، ١)

د) (١، −٣)

٢٥) **احتمال:** يبيِّن الجدول أدناه نتائج رمي مكعب أرقام. فما الاحتمال التجريبي لظهور العدد ٣ ؟

الناتج	١	٢	٣	٤	٥	٦
التكرار	٤	٨	٢	٠	٥	١

أ) $\frac{٢}{٣}$

ب) $\frac{١}{٣}$

جـ) ٠,٢

د) ٠,١

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية مستعملًا طريقة الحذف: (الدرس ٥-٣)

٢٦) ٦ق + هـ = −٧
٦ق + ٣هـ = −٩

٢٧) ٥س + ٣ك = −٩
٣س + ٣ك = −٣

٢٨) ٢س − ٤ز = ٦
س − ٤ز = −٣

حُلّ كل متباينة فيما يأتي، ومثل مجموعة حلها بيانيًّا: (مهارة سابقة)

٢٩) |م − ٥| ≤ ٨

٣٠) |ك + ١١| < ٥

٣١) |٢و + ٩| > ١١

٣٢) |٢ر + ١| ≤ ٩

٣٣) إذا علمت أن د(س)=٣س−١، فما قيمة د(−٤)؟ (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

اكتب الصيغة التي تعبر عن الجملة في كلٍّ مما يأتي:

٣٤) مساحة المثلث (م) تساوي نصف حاصل ضرب طول القاعدة (ل) في الارتفاع (ع).

٣٥) محيط الدائرة (مح) يساوي حاصل ضرب ٢ في (ط) في نصف القطر (نق).

٣٦) حجم المنشور القائم (ح) يساوي حاصل ضرب الطول (ل) في العرض (ع) في الارتفاع (أ).

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

٥ ـ ٥ تطبيقات على النظام المكون من معادلتين خطيتين

فيما سبق

درست حل نظام من معادلتين بالتعويض أو بالحذف.

والآن

- أحدد أفضل الطرق لحل نظام من معادلتين.
- أحل مسائل تطبيقية على أنظمة المعادلات الخطية.

لماذا؟

قطع أحمد في طوافه حول الكعبة وسعيه بين الصفا والمروة أثناء أدائه العمرة مسافة ٣١٠٠ مترًا تقريبًا، وكانت مسافة طوافه كاملة مساوية لمسافة أحد أشواط السعي.

يعبر عن المسافة التي قطعها أحمد في طوافه وسعيه بالمعادلة: س + ص = ٣١٠٠، ويعبر عن العلاقة بين مسافة الطواف ومسافة السعي بالمعادلة ص = $\frac{١}{٧}$ س حيث س تمثل مسافة السعي، ص مسافة الطواف.

يمكنك حل هذا النظام لإيجاد المسافة التي قطعها في كل من السعي، والطواف.

تحديد أفضل طريقة: تعلمت سابقًا خمس طرائق لحل أنظمة المعادلات الخطية، والجدول أدناه يبين أفضل حالة لاستعمال كل منها.

مفهوم أساسي — **حل نظام مكون من معادلتين خطيتين** — مطويتك

الطريقة	أفضل حالةٍ لاستعمالها
التمثيل البياني	لتقدير الحلول؛ فالتمثيل البياني لا يعطي في الغالب حلًّا دقيقًا.
التعويض	إذا كان معامل أحد المتغيرين في إحدى المعادلتين ١ أو −١.
الحذف باستعمال الجمع	إذا كان كل من معاملي أحد المتغيرين في المعادلتين معكوسًا جمعيًّا للآخر.
الحذف باستعمال الطرح	إذا كان معاملا أحد المتغيرين في المعادلتين متساويين.
الحذف باستعمال الضرب	إذا لم يكن أي من المعاملات (١) أو (−١)، وليس من السهل التخلص من أحد المتغيرين بجمع المعادلتين أو طرحهما.

تعد طريقتا التعويض والحذف من الطرائق الجبرية لحل أنظمة المعادلات، والطريقة الجبرية عادةً تعدُّ أفضل الطرق للحصول على إجابة دقيقة. أما التمثيل البياني باستعمال التقنيات أو بدونها فمناسب لتقدير الحل.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال ١ اختيار أفضل طريقة

حدِّد أفضل طريقة لحل النظام الآتي، ثم حله:

٤س − ٤ص = ٨

−٨س + ص = ١٩

افهم: لتحديد أفضل طريقة لحل نظام من معادلتين، انظر إلى معاملي كل حد.

خطط: بما أن معامليْ كل من المتغيرين س، ص في المعادلتين ليسا متساويين أو متعاكسين، إذن لا يمكنك استعمال الجمع أو الطرح لحذف أحد المتغيرين، وبما أن معامل ص في المعادلة الثانية هو (١) إذن يمكنك استعمال التعويض.

حل: حل المعادلة الثانية بالنسبة إلى ص أولًا.

−٨س + ص = ١٩	المعادلة الثانية
−٨س + ص + ٨س = ١٩ + ٨س	أضف ٨ س إلى كلا الطرفين.
ص = ١٩ + ٨س	بسّط.

والآن، عوض عن المتغير ص في المعادلة الأولى بـ ١٩+٨س.

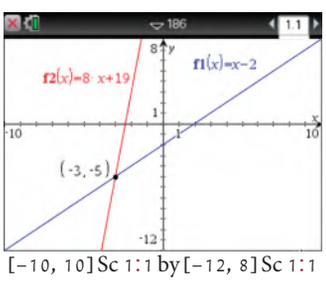
٤س − ٤ص = ٨	المعادلة الأولى
٤س − ٤(١٩ + ٨س) = ٨	عوّض
٤س − ٧٦ − ٣٢س = ٨	خاصية التوزيع
−٢٨س − ٧٦ = ٨	بسّط.
−٢٨س − ٧٦ + ٧٦ = ٨ + ٧٦	أضف ٧٦ إلى كلا الطرفين
−٢٨س = ٨٤	بسّط
$\frac{-٢٨س}{-٢٨} = \frac{٨٤}{-٢٨}$	اقسم كلا الطرفين على −٢٨
س = −٣	بسّط

والآن عوِّض عن المتغير س في المعادلة الثانية بـ −٣

−٨س + ص = ١٩	المعادلة الثانية
−٨(−٣) + ص = ١٩	س = −٣
ص = −٥	بسّط

فيكون حل هذا النظام هو (−٣، −٥).

تحقق: استعمل الحاسبة البيانية TI – nspire للتحقق من صحة الحل، وإن كانت طريقتك الجبرية في الحل صحيحة، فإن التمثيل البياني للمعادلتين سيتقاطع في النقطة (−٣، −٥).



[−10, 10] Sc 1:1 by [−12, 8] Sc 1:1

تحقق من فهمك

١أ) ٥س + ٧ص = ٢
−٢س + ٧ص = ٩

١ب) ٣س − ٤ص = −١٠
٥س + ٨ص = −٢

١جـ) س − ص = ٩
٧س + ص = ٧

١د) ٥س − ص = ٧
٣س + ٢ص = ٥

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

يمكن حل النظام في المثال (١)؛ بالحذف باستعمال الضرب، وذلك بضرب المعادلة الأولى في (٢)، ثم جمع المعادلتين لحذف المتغير س.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تطبيق أنظمة المعادلات الخطية: من الضروري تفسير كل حل في سياق الموقف الذي تعرضه المسألة، عند تطبيق أنظمة المعادلات الخطية في المسائل.

مثال ٢ من واقع الحياة — تطبيق أنظمة المعادلات الخطية

بطاريق: **هناك ١٧ نوعًا من البطاريق في العالم، أكبرها البطريق الإمبراطور، وأصغرها بطريق جالاباجوس، ويبلغ مجموع طولي هذين النوعين ١٦٩ سنتمترًا، ويزيد طول بطريق الإمبراطور على مثلي طول بطريق جالاباجوس بمقدار ٢٢ سنتمترًا. أوجد طول كل منهما.**

يعبر عن الطول الكلي للنوعين بالمعادلة جـ +ق = ١٦٩؛ حيث جـ طول البطريق الإمبراطور، ق طول بطريق جالاباجوس، والآن اكتب معادلة تمثل طول البطريق الإمبراطور.

التعبير اللفظي	طول بطريق الإمبراطور	=	٢٢ سم	زيادة على	مثلي طول جالاباجوس
المتغيرات	ليكن جـ= طول الإمبراطور، ق= طول جالاباجوس				
المعادلة	جـ	=	٢٢	+	٢ ق

أولاً: أعد كتابة المعادلة الثانية:

جـ = ٢٢ + ٢ق	المعادلة الثانية
جـ − ٢ق = ٢٢	اطرح ٢ق من كلا الطرفين

والآن، يمكنك استعمال الحذف بالطرح لحل نظام المعادلتين.

جـ + ق = ١٦٩	المعادلة الأولى
(−) جـ − ٢ق = ٢٢	اطرح المعادلة الثانية
٣ق = ١٤٧	احذف جـ.
$\frac{٣ق}{٣} = \frac{١٤٧}{٣}$	اقسم كلا الطرفين على ٣
ق = ٤٩	بسّط

والآن، عوِّض عن ق بِـ ٤٩ في إحدى المعادلتين.

جـ = ٢٢ + ٢ق	المعادلة الثانية
= ٢٢ + ٢(٤٩)	ق = ٤٩
= ١٢٠	بسّط.

وبذلك يكون طول البطريق الإمبراطور ١٢٠ سم، وطول البطريق جالاباجوس ٤٩ سم.

هل هذا الحل منطقي في سياق المسألة؟

تحقق من ذلك وفق المعطيات، مجموع طولي النوعين = ١٢٠+ ٤٩= ١٦٩ سم، ٢٢+ ٢ (٤٩)= ١٢٠ سم.

الربط مع الحياة

هنالك أربعة أنواع من البطاريق ضمن القائمة المعرضة لخطر الانقراض، وهي التي تعيش بالقرب من المناطق المعمورة.

تحقق من فهمك

٢) **تطوّع:** تطوع سعيد لعمل خيري مدة ٥٠ ساعة، ويخطط ليتطوع ٣ ساعات في كل أسبوع من الأسابيع القادمة، أما أسامة فهو متطوع جديد يخطط ليتطوع ٥ ساعات في كل أسبوع. اكتب نظامًا من المعادلات وحله لإيجاد بعد كم أسبوع يصبح عدد الساعات التي تطوع بها كل من سعيد وأسامة متساويًا.

تأكد

مثال ١ حدِّد أفضل طريقة لحل كل نظام فيما يأتي، ثمّ حلّه:

١) ٢س + ٣ص = −١١ ٢) ٣س + ٤ص = ١١ ٣) ٣س − ٤ص = −٥ ٤) ٣س + ٧ص = ٤

−٨س − ٥ص = ٩ ٢س + ص = −١ −٣س + ٢ص = ٣ ٥س − ٧ص = −١٢

مثال ٢ ٥) **تسوّق:** اشترى عبدالله ٤ كراسات و ٣ حقائب بمبلغ ١٨١ ريالًا، واشترى عبدالرحمن كراسة وحقيبتين بمبلغ ٩٤ ريالاً.

أ) اكتب نظامًا من معادلتين يمكنك استعماله لتمثيل هذا الموقف.

ب) حدِّد أفضل طريقة لحل هذا النظام.

جـ) حل النظام.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حدِّد أفضل طريقة لحل كل نظام فيما يأتي، ثم حلّه:

٦) ٣س − ٤ص = −٥ ٧) ٥س + ٨ص = ١ ٨) ص + ٤س = ٣

−٣س − ٦ص = −٥ −٢س + ٨ص = −٦ ص = −٤س − ١

مثال ٢ ٩) **سكان:** بلغ مجموع عدد سكان محافظتي خميس مشيط وبيشة (في أحد الأعوام) نحو ٧٢٠ ألفًا، فإذا علمت أن عدد سكان خميس مشيط يقل بمقدار ٨٠ ألفًا عن ثلاثة أمثال عدد سكان بيشة، فاكتب نظامًا من معادلتين وحله لإيجاد عدد سكان كل محافظة منهما.

١٠) **آثار:** يبلغ مجموع مساحتي قصر ابن شعلان في القريات وقصر صاهود في الأحساء نحو ١٣٠٠٠ متر مربع، وتزيد مساحة قصر صاهود على مثلي مساحة قصر ابن شعلان بنحو ٤٠٠٠ متر مربع، أوجد مساحة كل قصر منهما.

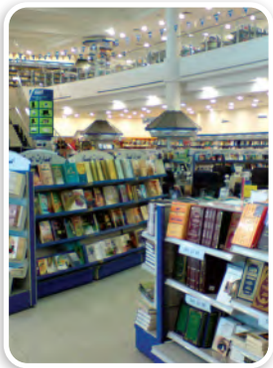
١١) تعرف نقطة التعادل بأنها النقطة التي يتساوى فيها الدخل مع المصاريف، فإذا دفعت دار النشر ١٣٢٠٠ ريال لإعداد كتاب و٢٥ ريالًا تكاليف طباعة النسخة الواحدة، فما عدد النسخ التي يتعين بيعها لتخطي نقطة التعادل، علمًا أنها تبيع النسخة الواحدة بمبلغ ٤٠ ريالاً؟ فسر إجابتك.

١٢) **تدوير:** يقوم محمد وصالح بتجميع الورق والبلاستيك المستعمل وبيعه من أجل إعادة تدويره كما في الجدول المقابل، وحصل محمد على ٣٣ ريالًا، وصالح على ٥٠ ريالًا مقابل ذلك.

المادة	الكتلة المعاد تدويرها (كجم)	
	محمد	صالح
البلاستيك	٩	٩
الورق	٣٠	١١٥

أ) عين المتغيرات، واكتب نظامًا من معادلتين خطيتين لهذا الموقف.

ب) ما سعر الكيلوجرام الواحد من البلاستيك؟



الربط مع الحياة

تعد المكتبات مراكز إشعاع معرفي، ومرافق مهمة للمعلومات تنتقي مصادرها وتنظمها وتتيحها لطالبها؛ سواء للدراسة، أو للبحث، أو للثقافة العامة.

١٣) **مكتبات:** تقدم إحدى المكتبات عرضًا؛ فتبيع الكتاب ذا الغلاف المقوى والمجلد بـ ٤٠ ريالًا والكتاب غير المجلد بـ ٣٠ ريالًا، فإذا دفع عبد الحكيم ٢٩٠ ريالًا ثمنًا لـ ٨ كتب، فما عدد الكتب المجلدة التي اشتراها؟

١٤) **قيادة سيارات:** قاد فارس سيارته مسافة ٩٠ كيلومترًا، وكان معدل سرعة السيارة (ر) كلم في الساعة، وفي رحلة العودة نقصت حركة السيارة، فأصبحت سرعة السيارة ($\frac{٣}{٤}$ ر) كلم في الساعة، فإذا استغرقت الرحلة كاملة ساعة و٤٥ دقيقة، فأوجد معدل سرعة السيارة في كل من رحلتي الذهاب والإياب.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مسائل مهارات التفكير العليا

١٥) **مسألة مفتوحة:** كوِّن نظامًا من معادلتين يمثّل موقفًا في الحياة، وصف الطريقة التي تستعملها لحل هذا النظام، ثم حله وفسِّر معناه.

١٦) **تبرير:** في نظام من معادلتين إذا كان س يمثل الزمن المستغرق في قيادة دراجة هوائية، ص تمثل المسافة المقطوعة، وحل النظام هو (−١، ٧)، فاستعمل هذه المسألة لمناقشة أهمية تحليل الحل وتفسيره في سياق المسألة.

١٧) **تحدٍّ:** حل نظام المعادلتين الآتي باستعمال ثلاث طرائق مختلفة، ووضح خطوات الحل:

٤س + ص = ١٣

٦س − ص = ٧

١٨) **اكتب سؤالًا:** يدّعي أحد الطلاب أن الحذف هو أفضل طريقة لحل أنظمة المعادلات، اكتب سؤالاً تبين فيه خطأ هذا الادّعاء.

١٩) أي أنظمة المعادلات الآتية يختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى؟

ص = س + ١ ص = ٣س	ص = س − ٤ ص = $\frac{٢}{س}$	−س + ص = ٠ ٥س = ٢ص	س − ص = ٣ س + $\frac{١}{٢}$ص = ١

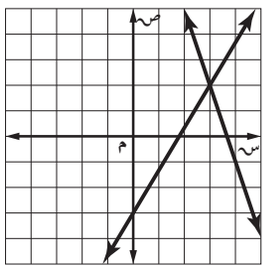
٢٠) **اكتب:** وضِّح متى يكون التمثيل البياني أفضل طريقة لحل نظام من معادلتين، ومتى تكون الطريقة الجبرية أفضل؟

تدريب على اختبار

٢١) إذا كان ٥س+٣ص= ١٢، ٤س−٥ص= ١٧ . فما قيمة ص؟

أ) −١ ب) ٣ جـ) ١ د) −٣

٢٢) أي أنظمة المعادلات الآتية يمثل الشكل المجاور حلًّا له؟



أ) ص= −٣س+١١
٣ص= ٥س−٩

ب) ص= −٣س+١١
٢ص= ٤س−٥

جـ) ص= ٥س−١٥
٢ص= س+٧

د) ص= ٥س−١٥
٣ص= ٢س+١٨

مراجعة تراكمية

حُلّ كل نظام فيما يأتي مستعملًا طريقة الحذف: (الدرس ٥-٤)

٢٣) س + ص = ٣
٣س − ٤ص = −١٢

٢٤) −٤س + ٢ص = ٠
٢س − ٣ص = ١٦

٢٥) ٤س + ٢ص = ١٠
٥س − ٣ص = ٧

٢٦) حل المتباينة: |س−٢| ≤ ٣. (مهارة سابقة)

حُلّ كل معادلة فيما يأتي: (مهارة سابقة)

٢٧) ٥ = ٤ت − ٧

٢٨) −٣س + ١٠ = ١٩

٢٩) حُلّ المعادلة: ٢س + ٤ = ٦ بيانيًّا. (مهارة سابقة)

اختبار الفصل

مثّل كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية بيانيًّا، وحدّد عدد حلوله، وإن كان له حل واحد فاكتبه:

١) ص = ٢س
ص = ٦ − س

٢) ص = س − ٣
ص = −٢س + ٩

٣) س − ص = ٤
س + ص = ١٠

٤) ٢س + ٣ص = ٤
٢س + ٣ص = −١

حُلَّ كلًّا من النظامين الآتيين بالتعويض:

٥) ص = س + ٨
٢س + ص = −١٠

٦) س = −٤ص − ٣
٣س − ٢ص = ٥

حُلَّ كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية بالحذف:

٧) س + ص = ١٣
س − ص = ٥

٨) ٣س + ٧ص = ٢
٣س − ٤ص = ١٣

٩) س + ص = ٨
س − ٣ص = −٤

١٠) **اختيار من متعدد:** ما الزوج المرتب الذي يمثل حلًّا للنظام الآتي؟

٦س − ٤ص = ٦
−٦س + ٣ص = ٠

أ) (٥، ٦) جـ) (١، ٠)

ب) (−٣، −٦) د) (٤، −٨)

١١) **تسوّق:** اشترى فيصل ٨ كتب ومجلات لأبنائه بقيمة ١٧٥ ريالًا. فإذا كان ثمن الكتاب ٢٥ ريالًا، وثمن المجلة ٢٠ ريالًا، فما عدد كل من الكتب والمجلات التي اشتراها؟

١٢) **حدائق:** لدى عبد الكريم ٤٢ مترًا من السياج لإحاطة حديقته، فإذا كانت مزرعته مستطيلة الشكل وطولها يساوي مثلي عرضها ناقص ٣ أمتار، فعرّف المتغيرات، واكتب نظامًا من معادلتين لإيجاد طول الحديقة وعرضها، ثم حل النظام باستعمال التعويض.

١٣) **مجلاّت:** اشترك أحمد في المجلتين الرياضية والعلمية، فإذا تلقى هذا العام ٢٤ نسخة من كلتا المجلتين، وكان عدد نسخ المجلة العلمية أقل من مثلي عدد نسخ المجلة الرياضية بمقدار ٦، فعرّف المتغيرات، واكتب نظامًا من معادلتين لإيجاد عدد المجلات من كل نوع.

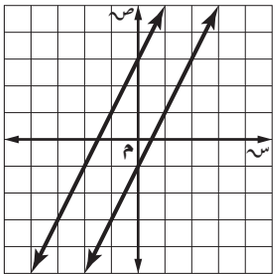
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الاختبار التراكمي

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة:

١) أي المصطلحات الآتية يصف نظام المعادلتين الممثل بيانيًّا؟



أ) متسق

ب) متسق ومستقل

جـ) متسق وغير مستقل

د) غير متسق

٢) ما الزوج المرتب الذي يمثل حلًّا للنظام الآتي:

ص=٤س−٧

٣س−٢ص= −١؟

أ) (٣، ٥)

ب) (٤، −١)

جـ) (٥، −٢)

د) (−٦، ٢)

٣) ما الزوج المرتب الذي يمثِّل حلًّا للنظام الآتي:

٣س − ٨ص = −٥٠

٣س − ٥ص = −٣٨؟

أ) $\left(\frac{٥}{٨}، \frac{٣}{٢}\right)$

ب) (−٦، ٤)

جـ) $\left(-\frac{٢}{٧}، \frac{٤}{٩}\right)$

د) (٤، −٩)

٤) ما حلُّ المتباينة: ٢س ≤ −٦؟

أ) س ≤ −٣

ب) س ≤ ٣

جـ) س ≥ ٣

د) س ≥ −٣

٥) ما الزوج المرتب الذي يمثل حلًّا للنظام الآتي:

٣س + ٢ص = −٢

٢س − ٢ص = −١٨؟

أ) (١، ٣)

ب) (٧، −٤)

جـ) (−٤، ٥)

د) (−٢، −٣)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٦) ما حل المتباينة ٥ < ٢س + ٥ < ٧ ؟

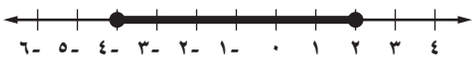
أ) ٠ < س < ٢

ب) ٥ < س < ٦

جـ) ٠ < س < ٤

د) ٠ < س < ١

٧) ما متباينة القيمة المطلقة للتمثيل البياني الآتي؟



أ) |س+١| < ٣

ب) |س+١| ≥ ٣

جـ) |س+١| ≤ ٣

د) |س+١| > ٣

٨) مع أحمد وشقيقه ١٥ ريالًا يريدان أن يشتريا بها دفترين وعددًا من أقلام الرصاص، فإذا كان ثمن الدفتر ٦ ريالات وثمن قلم الرصاص ٠,٧٥ ريال. فما أكبر عدد ممكن من أقلام الرصاص يمكنهما شراؤه؟

أ) ٣

ب) ٤

جـ) ٥

د) ٦

إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

٩) خرج سعيد بسيارته في رحلة، وبعد أن توقف عند إحدى الإشارات وجد أن عليه أن يقطع ١٢ كيلومترًا ليصبح ما قطعه مساويًا على الأقل لنصف المسافة الكلية البالغة ١٠٨ كيلومترات. فكم كيلومترًا على الأقل يكون قد قطع عند توقفه عند الإشارة؟

١٠) يقدم متجرٌ خصمًا قيمته ١٥ ريالًا على جميع السلع، فإذا أراد سالم شراء سلعة يتراوح ثمنها ما بين ٤٥ ريالًا وَ ٨٩ ريالًا، فكم يتوقع أن يدفع ثمنًا لها؟

١١) عددان مجموعهما ٤١ والفرق بينهما ٩، فما العددان؟

١٢) حُلَّ المتباينة ٢س ≤ ١٠، ثم مثِّل الحل بيانيًّا.

١٣) حُلَّ المتباينة |٣س-١| ≥ ٨، ثم مثِّل الحل بيانيًّا.

١٤) حُلَّ المتباينة ١ < ٢ك -٥ ≥ ١٣، ثم مثِّل الحل بيانيًّا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحًا خطوات الحل:

١٥) وجبات: يبيِّن الجدول أدناه ثمن وجبتي إفطار في أحد المطاعم.

الوجبة	الثمن (ريال)
٣ شطائر ، علبتا عصير	١٣
٤ شطائر ، علبة عصير	١٤

أ) اكتب نظامًا من معادلتين لتمثيل هذا الموقف.

ب) حُلَّ النظام الذي كتبته، وفسِّره في سياق المسألة.

جـ) ما المبلغ الذي يدفعه شخص اشترى شطيرتين وعلبة عصير؟

للمساعدة ..															
إذا لم تجب عن السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
فراجع الدرس ..	٥-١	٥-٢	٥-٣	مهارة سابقة	٥-٣	مهارة سابقة	مهارة سابقة	٥-٢	مهارة سابقة	مهارة سابقة	٥-٢	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	٥-٥

الفصل ٦
كثيرات الحدود

فيما سبق

درست إجراء العمليات على العبارات الأسية.

والآن

- أبسّط عبارات تتضمن وحيدات الحد.
- أجد درجة كثيرة حدود، وأكتب كثيرة حدود بالصورة القياسية، وأجمع، وأطرح، وأضرب كثيرات الحدود.

لماذا؟

سباق الجري: يمكن استعمال كثيرات الحدود لنمذجة العديد من مواقف الحياة الواقعية؛ مثل المسارات المنحنية التي يسلكها المتسابقون في سباق الجري.

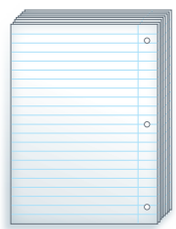
المفردات:

- وحيدة الحَد ص (٥٠)
- رُتبة المقدار ص (٥٩)
- كثيرة الحدود ص (٦٢)

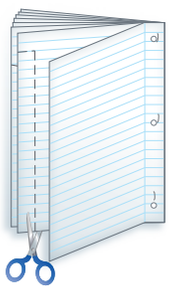
المطويات منظم أفكار

كثيرات الحدود: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول كثيرات الحدود، مبتدئًا بثماني أوراق A4.

١ **رتب** الأوراق الثماني بعضها فوق بعض؛ لتكوّن كتيبًا.



٢ **ثبّت** الأوراق من جانبها الأيمن، وقص شريطًا من طرف كل صفحة بحيث يزيد كل شريط بمقدار ٣ سم على سابقه، كما في الشكل.



٣ **سمِّ** غلاف المطوية "كثيرات الحدود"، وضعْ أرقام الدروس على الأشرطة، كما في الشكل.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل ٦

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل بدء الإجابة:

اختبار سريع

اكتب كل عبارة فيما يأتي بالصيغة الأسية: (مهارة سابقة)

١) ٤ × ٤ × ٤ × ٤ × ٤

٢) ب × ب × ب × ب × ب

٣) م × م × م × ب × ب × ب × ب × ب × ب

٤) $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣}$

٥) $\frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص} \times \frac{و}{ع} \times \frac{و}{ع}$

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي: (مهارة سابقة)

٦) $٢^{٣}$ ٧) $(-٥)^{٢}$ ٨) $٣^{٣}$

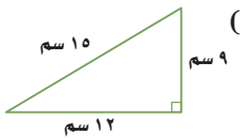
٩) $(-٤)^{٣}$ ١٠) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}$ ١١) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$

١٢) **مدرسة:** إذا كان احتمال تخمين الإجابة الصحيحة عن ٥ أسئلة من نوع الصواب والخطأ هو $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٥}$، فعبّر عن هذا الاحتمال في صورة كسر اعتيادي دون استعمال الأسس.

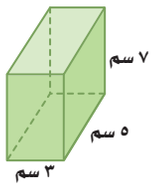
أوجد مساحة كل من الشكلين الآتيين: (مهارة سابقة)

١٣)

١٤)



١٥) أوجد حجم الشكل المجاور.



مراجعة سريعة

مثال ١

اكتب العبارة الآتية بالصيغة الأسية:

٥ × ٥ × ٥ × ٥ + س × س × س.

العدد ٥ أساس واستعمل كعامل ٤ مرات.

س أساس واستعمل كعامل ٣ مرات.

إذن ٥ × ٥ × ٥ × ٥ + س × س × س = $٥^{٤}$ + $س^{٣}$.

مثال ٢

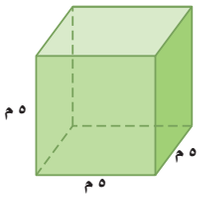
أوجد قيمة $\left(\frac{٥}{٧}\right)^{٢}$.

$\left(\frac{٥}{٧}\right)^{٢} = \frac{٥}{٧} \times \frac{٥}{٧}$ اكتب القوى في صورة حاصل ضرب

$= \frac{٢٥}{٤٩}$ اضرب

مثال ٣

أوجد حجم الشكل المجاور.



ح = ل ض ع حجم متوازي المستطيلات

= ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥ ل = ٥، ض = ٥، ع = ٥

الحجم ١٢٥ $م^{٣}$.

٦ - ١ ضرب وحيدات الحد

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست إجراء العمليات على العبارات الأسية.

والآن

- أضرب وحيدات الحد.
- أبسّط عبارات تتضمن وحيدات الحد.

المفردات

وحيدة الحد

الثابت

لماذا؟

تحتوي كثير من الصيغ على وحيدات حد، فمثلاً صيغة قوة محرك السيارة بالحصان هي $ق = ك \left(\frac{ع}{٢٣٤}\right)^{٣}$ ؛

حيث تمثِّل: ق قوة المحرك بالحصان، ك كتلة السيارة بركابها، ع سرعتها بعد مسيرها مسافة ربع ميل.

من الواضح أن قوة المحرك بالحصان تزداد كلما ازدادت السرعة.

وحيدات الحد: تكون **وحيدة الحد** عددًا أو متغيرًا أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة. وتتكون من حد واحد فقط.

فمثلاً الحد: $ك \left(\frac{ع}{٢٣٤}\right)^{٣}$ في صيغة حساب قوة محرك السيارة، هو وحيدة حد.

أما العبارة التي تتضمن القسمة على متغير مثل : $\frac{أ ب}{جـ}$ ، فليست وحيدة حد.

الثابت: هو وحيدة حد تمثل عددًا حقيقيًّا. ووحيدة الحد ٣ س هي مثال على عبارة خطية؛ لأن أس المتغير س فيها ١، أما وحيدة الحد $٢س^{٢}$ فليست عبارة خطية؛ لأن الأس عدد موجب أكبر من ١.

مثال ١ تمييز وحيدات الحد

حدِّد إذا كانت العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسّر إجابتك:

أ) ١٠ — نعم؛ العدد ١٠ ثابت، لذا فهو وحيدة حد.

ب) ف + ٢٤ — لا؛ تتضمن هذه العبارة عملية جمع، لذا فهي تحتوي على أكثر من حد.

جـ) $هـ^{٢}$ — نعم؛ تمثل هذه العبارة حاصل ضرب المتغير في نفسه.

د) ل — نعم؛ المتغيرات المنفردة وحيدات حد.

تحقق من فهمك

١أ) −س + ٥

١ب) $٢٣أ ب جـ د^{٢}$

١جـ) $\frac{س ص ع^{٢}}{٢}$

١د) $\frac{م ف}{ن}$

تذكَّر أن العبارة التي على الصورة $س^{ن}$ التي تعبر عن نتيجة ضرب س في نفسها ن مرة تُسمى قوة.

ويُطلق على س الأساس، وعلى ن الأس. وقد تستعمل كلمة قوة لتعني الأس أحيانًا.

$$٨١ = \overbrace{٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣}^{٤ \text{ عوامل}} = ٣^{٤}$$

أس

أساس

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ويمكنك إيجاد حاصل ضرب القوى في المثالين الآتيين بتطبيق تعريف القوة، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\underbrace{\overbrace{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}^{\text{٤ عوامل}} \times ٢}_{\text{٤ + ٢ = ٦ عوامل}} = ٢^{٤} \times ٢^{٢} \qquad \underbrace{\overbrace{٤ \times ٤ \times ٤}^{\text{٣ عوامل}} \times \overbrace{٤ \times ٤}^{\text{عاملان}}}_{\text{٢ + ٣ = ٥ عوامل}} = ٤^{٣} \times ٤^{٢}$$

يوضح المثالان السابقان خاصية ضرب القوى.

مفهوم أساسي — **ضرب القوى** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لضرب قوتين لهما الأساس نفسه، اجمع أُسَّيهما.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ ؛ وأي عددين صحيحين م ، ن فإن: $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م + ن}$.

أمثلة: $ب^{٣} \times ب^{٥} = ب^{٣+٥} = ب^{٨}$ $\qquad$ $جـ^{٤} \times جـ^{٦} = جـ^{٤+٦} = جـ^{١٠}$

مثال ٢ ضرب القوى

بسّط كل عبارة مما يأتي:

أ) $(٦ن^{٣})(٢ن^{٧})$

$(٦ن^{٣})(٢ن^{٧}) = (٦ \times ٢)(ن^{٣} \times ن^{٧})$ — جمِّع المعاملات والمتغيرات

$= (٦ \times ٢)(ن^{٣+٧})$ — اضرب القوى

$= ١٢ن^{١٠}$ — بسّط

ب) $(٣ب هـ^{٣})(ب^{٣}هـ^{٤})$

$(٣ب هـ^{٣})(ب^{٣}هـ^{٤}) = (٣ \times ١)(ب \times ب^{٣})(هـ^{٣} \times هـ^{٤})$ — جمِّع المعاملات والمتغيرات

$= (٣ \times ١)(ب^{١+٣})(هـ^{٣+٤})$ — اضرب القوى

$= ٣ب^{٤}هـ^{٧}$ — بسّط

تحقق من فهمك

٢أ) $(٣ص^{٤})(٧ص^{٥})$ $\qquad$ ٢ب) $(-٤ر س^{٢}ن^{٣})(-٦ر^{٥}س^{٢}ن)$

إرشادات للدراسة

العدد ١ معاملًا وقوة

عندما لا يظهر أس المتغير أو معامله، يمكن افتراض أن كليهما يساوي ١؛ أيْ أن $س = ١س^{١}$

يمكنك استعمال خاصية ضرب القوى لإيجاد قوة القوة، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\overbrace{(٣^{٢})(٣^{٢})(٣^{٢})(٣^{٢})}^{\text{٤ عوامل}} = (٣^{٢})^{٤} \qquad \overbrace{(ر^{٤})(ر^{٤})(ر^{٤})}^{\text{٣ عوامل}} = (ر^{٤})^{٣}$$

$$= ٣^{٢+٢+٢+٢} = ٣^{٨} \qquad = ر^{٤+٤+٤} = ر^{١٢}$$

يوضح المثالان السابقان خاصية قوة القوة.

مفهوم أساسي — **قوة القوة** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة القوة، اضرب الأسس.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ ؛ وأي عددين صحيحين م ، ن فإن: $(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$

أمثلة: $(ب^{٣})^{٥} = ب^{٣ \times ٥} = ب^{١٥}$ $\qquad$ $(جـ^{٦})^{٧} = جـ^{٦ \times ٧} = جـ^{٤٢}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال ٣ قوة القوة

بسّط العبارة : $\left[(٢^{٣})^{٢}\right]^{٤}$.

$\left[(٢^{٣})^{٢}\right]^{٤} = (٢^{٣\times٢})^{٤}$ قوة القوة

$= (٢^{٦})^{٤}$ بسّط

$= ٢^{٦\times٤}$ قوة القوة

$= ٢^{٢٤} = ١٦٧٧٧٢١٦$ بسّط

تحقق من فهمك

٣أ) $\left[(٢^{٢})^{٢}\right]^{٤}$ **٣ب)** $\left[(٣^{٢})^{٣}\right]^{٢}$

إرشادات للدراسة

قوانين القوة

إذا لم تكن متأكدًا متى تضرب الأسس أو تجمعها، فاكتب العبارة كحاصل ضرب.

ويمكنك استعمال خاصيتي ضرب القوى، وقوة القوة لإيجاد قوة حاصل الضرب. انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$(ن\,و)^{٣} = \overbrace{(ن\,و)(ن\,و)(ن\,و)}^{٣\text{ عوامل}}$

$= (ن\times ن\times ن)(و\times و\times و)$

$= ن^{٣}\,و^{٣}$

$\left(٢ص\,ع^{٢}\right)^{٣} = \overbrace{\left(٢ص\,ع^{٢}\right)\left(٢ص\,ع^{٢}\right)\left(٢ص\,ع^{٢}\right)}^{٣\text{ عوامل}}$

$= (٢\times٢\times٢)(ص\times ص\times ص)\left(ع^{٢}\times ع^{٢}\times ع^{٢}\right)$

$= ٢^{٣}ص^{٣}ع^{٦} = ٨ص^{٣}ع^{٦}$

ويبيِّن المثالان السابقان خاصية قوة حاصل الضرب.

مفهوم أساسي قوة حاصل الضرب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة حاصل الضرب، أوجد قوة كل عامل.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب وأي عدد صحيح ن، فإن: $(أب)^{ن} = أ^{ن}ب^{ن}$.

مثال: $(-٢س\,ص^{٣})^{٥} = (-٢)^{٥}س^{٥}\,(ص^{٣})^{٥} = -٣٢\,س^{٥}\,ص^{١٥}$.

مثال ٤ قوة حاصل الضرب

هندسة: عبّر عن مساحة الدائرة على صورة وحيدة حد.

المساحة= ط نق^{٢} مساحة الدائرة

$= ط(٢س\,ص^{٢})^{٢}$ عوّض عن نق بـ ٢س ص^{٢}

$= ط(٢^{٢}س^{٢}\,ص^{٤})$ قوة حاصل الضرب

$= ٤س^{٢}\,ص^{٤}ط$ بسّط

إذن، مساحة الدائرة تساوي ٤س^{٢} ص^{٤} ط وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

٤أ) عبّر عن مساحة المربع الذي طول ضلعه ٣س ص^{٢} على صورة وحيدة حد.

٤ب) عبّر عن مساحة المثلث الذي ارتفاعه ٤أ وطول قاعدته ٥أ ب^{٢} على صورة وحيدة حد.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تبسيط العبارات: يمكنك دمج الخصائص واستعمالها في تبسيط عبارات تتضمن وحيدات حد.

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات

عند تبسيط عبارات تتضمن أقواسًا متداخلة، ابدأ أولاً بالعبارات من الداخل ثم انتقل إلى الخارج.

مفهوم أساسي — تبسيط العبارات

أضف إلى مطويتك

لتبسيط عبارة تتضمن وحيدات حد، اكتب عبارة مكافئة لها على أن:

- يظهر كل متغير على صورة أساس مرة واحدة فقط.
- لا تتضمن العبارة قوة قوة.
- تكون جميع الكسور في أبسط صورة.

مثال ٥ — تبسيط العبارات

بسّط العبارة: $(٣س ص^{٤})^{٢}[(-٢ ص)^{٢}]^{٣}$.

$(٣س ص^{٤})^{٢}[(-٢ ص)^{٢}]^{٣} = (٣س ص^{٤})^{٢}(-٢ ص)^{٦}$ — قوة القوة

$= (٣)^{٢}س^{٢}(ص^{٤})^{٢}(-٢)^{٦}(ص)^{٦}$ — قوة حاصل الضرب

$= ٩س^{٢}ص^{٨}(٦٤)ص^{٦}$ — قوة القوة

$= ٩(٦٤)س^{٢}ص^{٨}ص^{٦}$ — خاصية الإبدال

$= ٥٧٦س^{٢}ص^{١٤}$ — ضرب القوى

تحقق من فهمك

٥) بسّط العبارة: $(\frac{١}{٢}أ^{٢}ب^{٢})^{٣}[(-٤ب)^{٢}]^{٢}$.

تأكد

مثال ١ حدد إذا كانت كل من العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسر إجابتك:

١) ١٥ ٢) ٢ − ٣أ ٣) $\frac{٥جـ}{د}$

٤) −١٥جـ^{٢} ٥) $\frac{ر}{٢}$ ٦) ٧ب + ٩

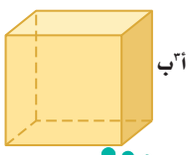
المثالان ٢، ٣ بسِّط كل عبارة مما يأتي:

٧) ك(ك^{٣}) ٨) م^{٤}(م^{٢}) ٩) ٢ك^{٢}(٩ك^{٤})

١٠) (٥م^{٤}ف)(٧م^{٤}ف^{٣}) ١١) $[(٣)^{٢}]^{٢}$ ١٢) (س ص^{٤})^{٦}

١٣) (−٢ف^{٢}جـ^{٣}هـ^{٢})^{٣} ١٤) (−٣ب^{٥}ن^{٦})^{٤} ١٥) (٤أ^{٤}ب^{٩}جـ)^{٢}

مثال ٤ ١٦) **هندسة:** مساحة سطح المكعب هي م = ٦ ض^{٢}، حيث م مساحة سطحه، ض طول حرفه.



أ) عبّر عن مساحة سطح المكعب المجاور على صورة وحيدة حد.

ب) ما مساحة سطح المكعب إذا كان أ = ٣، ب = ٤

مثال ٥ بسِّط كل عبارة مما يأتي:

١٧) (٥س^{٢}ص)^{٢}(٢س ص^{٣}ع)^{٣}(٤س ص ع) ١٨) (−٣د^{٢}ن^{٣}جـ)^{٢}[(−٣د^{٢}ن)^{٣}]^{٢}

١٩) (−٢جـ^{٣}هـ)(−٣جـ ل^{٤})^{٢}(−جـ هـ ل)^{٢} ٢٠) (−٧أ ب^{٤}جـ)^{٣}[(٢أ^{٢}جـ)^{٢}]^{٣}

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حدد إذا كانت كل من العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا" ، وفسر إجابتك:

٢١) ١٢٢ ٢٢) $٣أ^{٤}$ ٢٣) ٢جـ + ٢

٢٤) $\frac{-٢جـ}{٤هـ}$ ٢٥) $\frac{٥ك}{١٠}$ ٢٦) ٦م + ٣ن

المثالان ٢ ، ٣ بسِّط كل عبارة مما يأتي:

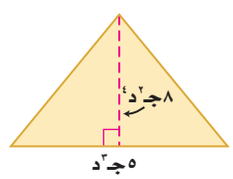
٢٧) $(ك^{٢})(٢ك^{٤})$ ٢٨) $(ص^{٦}ع^{٩})(٦ص^{٤}ع^{٢})$

٢٩) $(١٤ن جـ^{٢}هـ^{٢})(-٣ن^{٤}جـ^{٢}هـ^{٢})$ ٣٠) $[(٢^{٢})^{٢}]^{٢}$

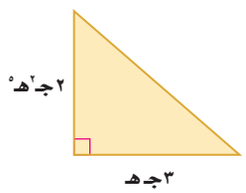
٣١) $[(-٢س ص^{٢})^{٣}]^{٢}$ ٣٢) $(ل^{٥}ك^{٧})^{٤}$

مثال ٤ **هندسة:** عبّر عن مساحة كل من المثلثين الآتيين على صورة وحيدة حد:

٣٣)



٣٤)



مثال ٥ بسِّط كل عبارة مما يأتي :

٣٥) $(٢أ^{٣})^{٤}(أ^{٣})^{٣}$ ٣٦) $(جـ^{٣})^{٢}(-٣جـ^{٥})^{٢}$

٣٧) $(٢جـ هـ^{٤})^{٣}[(-٢جـ^{٤}هـ)^{٣}]^{٢}$ ٣٨) $(٥ك^{٢}م)^{٣}[(٤ك م^{٤})^{٢}]^{٢}$

٣٩) $(ب^{٥}ر^{٢})^{٤}(-٧ب^{٣}ر^{٤})^{٢}(٦ب ر^{٣})$ ٤٠) $(٥أ^{٢}ب^{٣}جـ^{٤})^{٢}(٦أ^{٣}ب^{٤}جـ^{٢})$

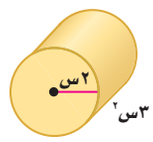
٤١) $(٥,٠س^{٣})^{٢}$ ٤٢) $(-\frac{٣}{٤}جـ)^{٣}$

٤٣) $(\frac{٤}{٥}أ^{٢})^{٢}$ ٤٤) $(\frac{٤}{٧}م)^{٢}(٤٩م)(١٧ب)(\frac{١}{٣٤}ب^{٥})$

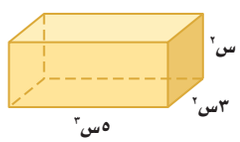
٤٥) $(٣أب^{٢}جـ)^{٢}(-٢أ^{٢}ب^{٤})^{٢}(أ^{٤}جـ^{٢})^{٣}(أ^{٢}ب^{٤}جـ^{٥})^{٢}(٢أ^{٣}ب^{٢}جـ^{٤})^{٣}$

هندسة: عبّر عن حجم كل مجسّم مما يأتي على صورة وحيدة حد:

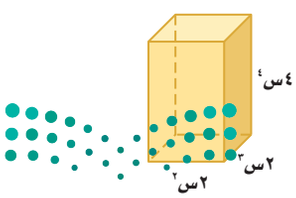
٤٦)



٤٧)



٤٨)



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٤٩) **طاقة:** يمكن تحويل الكتلة كاملة إلى طاقة باستعمال الصيغة ط = ك ع^{٢}. حيث: ط هي الطاقة بالجول وك الكتلة بالكيلوجرام وع سرعة الضوء تبلغ ٣٠٠ مليون مترٍ لكل ثانيةٍ تقريبًا.

أ) أكمل حسابات تحويل ٣ كيلوجرامات كاملة من البنزين إلى طاقة.

ب) ماذا يحدث للطاقة إذا أصبحت كمية البنزين مثليْ ما كانت عليه؟

٥٠) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة بعض نواتج القوى.

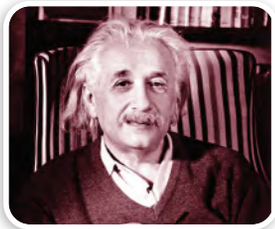
أ) جدوليًا: انقل الجدول الآتي واستعمل الآلة الحاسبة لإكماله:

القوة	٣^{٤}	٣^{٣}	٣^{٢}	٣^{١}	٣^{٠}	٣$^{-١}$	٣$^{-٢}$	٣$^{-٣}$	٣$^{-٤}$
القيمة						$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٨١}$

ب) تحليليًا: ما قيمتا ٥^{٠}، ٥$^{-١}$؟ تحقق من تخمينك باستعمال الآلة الحاسبة.

جـ) تحليليًا: أكمل: لأي عدد غير صفري أ، وأي عدد صحيح ن، أ$^{-ن}$ = _____ .

د) لفظيًا: ما قيمة عدد غير الصفر مرفوع للأس صفر؟



تاريخ الرياضيات

١٨٧٩م – ١٩٥٥م
يُعد ألبرت أينشتاين من أشهر العلماء في القرن العشرين. وقانونه ط= ك ع^{٢}، المعروف باسمه، حيث تمثل ط الطاقة، ك كتلة المادة، ع سرعة الضوء، يُظهر أن الكتلة قد تتحول إلى طاقة قابلة للاستعمال إذا تسارعت على نحوٍ كافٍ.

مسائل مهارات التفكير العليا

٥١) **تحدٍّ:** بسّط العبارة $\left(-\frac{أ^{م}}{ب^{ن}}\right)^{٢ن}$ موضحًا كل خطوة، علمًا بأن: أ، ب عددان حقيقيان غير صفريين، م ، ن عددان صحيحان.

٥٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث عبارات مختلفة يمكن تبسيطها إلى س٦.

٥٣) **اكتب:** اكتب صيغتين تحوي كل منهما وحيدة حد. وفسّر كيف تستعمل كلًّا منهما في مسائل من واقع الحياة.

تدريب على اختبار

٥٤) أي العبارات الآتية ليست وحيدة حد؟

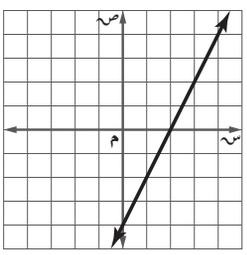
أ) −٦س ص

ب) $\frac{١}{٢}$أ^{٢}

جـ) $-\frac{١}{٢ب^{٣}}$

د) ٥جـ هـ^{٤}

٥٥) **إجابة قصيرة:** إذا كان ميل المستقيم موجبًا، ومقطعه الصادي سالبًا، فماذا يحدث للمقطع السيني إذا ضوعف كل من المقطع الصادي والميل؟



مراجعة تراكمية

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة المعطاة والموازي للمستقيم المعطاة معادلته في كل مما يأتي بصيغة الميل والمقطع: (مهارة سابقة)

٥٦) (−٣، ٢) ، ص = س−٦

٥٧) (٢، −١)، ص=٢س+٢

٥٨) (−٥، −٤)، ص = $\frac{١}{٢}$س +١

حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)

٥٩) ٧س = −٢٨

٦٠) −$\frac{٢}{٥}$ص = ١٠

٦١) $\frac{٢}{٣}$س = ٧

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: أوجد ناتج القسمة في كلٍّ مما يأتي:

٦٢) −٦٤ ÷ (−٨)

٦٣) −٧٨ ÷ ١,٣

٦٤) ٤٢,٣ ÷ (−٦)

٦٥) −٢٣,٩٤ ÷ ١٠,٥

٦٦) −٣٢,٥ ÷ (−٢,٥)

٦٧) −٩٨,٤٤ ÷ ٤,٦

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٦-٢ قسمة وحيدات الحد

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحد.

والآن

- أجد ناتج قسمة وحيدتي حد.
- أبسّط عبارات تحتوي أسسًا سالبة أو صفرية.

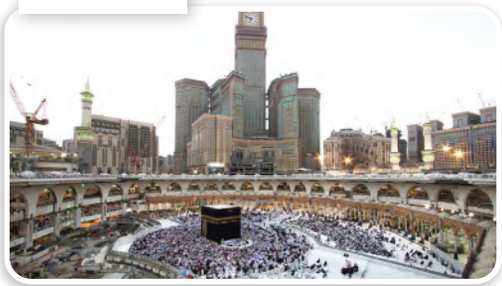
المفردات

الأس الصفري

الأسس السالبة

رتبة المقدار

لماذا؟



بلغ عدد سكان منطقة مكة المكرمة في عام ١٤٣٨ هـ ٨٣٢٥٣٠٤ نسمة أي عشرة مليون نسمة تقريباً أو $١٠^{٧}$، وبلغ عدد سكان منطقة القصيم في العام نفسه ١٣٨٧٩٩٦ نسمة أي مليون نسمة تقريباً أو $١٠^{٦}$ فتكون نسبة عدد سكان منطقة مكة المكرمة إلى عدد سكان منطقة القصيم في تلك السنة هي:

$\frac{١٠^{٧}}{١٠^{٦}} = ١٠^{١}$ وهذا يعني أن عدد سكان منطقة مكة المكرمة يساوي ١٠ أمثال عدد سكان منطقة القصيم.

قسمة وحيدات الحد: يمكنك استعمال مبادئ اختصار الكسور الاعتيادية؛ لإيجاد ناتج قسمة وحيدتي حد مثل $\frac{١٠^{٦}}{١٠^{٥}}$، انظر إلى نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\frac{٢^{٧}}{٢^{٤}} = \frac{\overbrace{\cancel{٢}\times\cancel{٢}\times\cancel{٢}\times\cancel{٢}\times٢\times٢\times٢}^{٧\text{ عوامل}}}{\underbrace{\cancel{٢}\times\cancel{٢}\times\cancel{٢}\times\cancel{٢}}_{٤\text{ عوامل}}} = ٢\times٢\times٢ = ٢^{٣}$$

$$\frac{ن^{٤}}{ن^{٣}} = \frac{\overbrace{\cancel{ن}\times\cancel{ن}\times\cancel{ن}}^{٤\text{ عوامل}}}{\underbrace{\cancel{ن}\times\cancel{ن}\times\cancel{ن}}_{٣\text{ عوامل}}} = ن$$

ويبيِّن المثالان السابقان خاصية قسمة القوى.

مفهوم أساسي — قسمة القوى

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: عند قسمة قوتين لهما الأساس نفسه اطرح أُسَّيهما (أس البسط – أس المقام).

الرموز: لأي عدد حقيقي أ ≠ ٠؛ وأي عددين صحيحين م، ن، فإن: $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$.

أمثلة: $\frac{جـ^{١١}}{جـ^{٨}} = جـ^{١١-٨} = جـ^{٣}$ $\qquad$ $\frac{ر^{٥}}{ر^{٢}} = ر^{٥-٢} = ر^{٣}$

مثال ١ قسمة القوى

بسّط العبارة $\frac{جـ^{٣}هـ^{٥}}{جـ هـ^{٢}}$ مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا .

$\frac{جـ^{٣}هـ^{٥}}{جـ هـ^{٢}} = \left(\frac{جـ^{٣}}{جـ}\right)\left(\frac{هـ^{٥}}{هـ^{٢}}\right)$ جمِّع القوى ذات الأساس نفسه

$= \left(جـ^{٣-١}\right)\left(هـ^{٥-٢}\right)$ اقسم القوى

$= جـ^{٢}هـ^{٣}$ بسّط

تحقق من فهمك

أ) $\frac{س^{٣}ص^{٤}}{س^{٢}ص}$ $\qquad$ ب) $\frac{ك^{٧}م^{١٠}ب}{ك^{٥}م^{٣}ب}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

يمكنك استعمال تعريف القوى لإيجاد ناتج قوى قسمة وحيدات الحد، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\frac{٣^{٣}}{٤^{٣}} = \frac{\overbrace{٣ \times ٣ \times ٣}^{٣\ \text{عوامل}}}{\underbrace{٤ \times ٤ \times ٤}_{٣\ \text{عوامل}}} = \overbrace{\left(\frac{٣}{٤}\right)\left(\frac{٣}{٤}\right)\left(\frac{٣}{٤}\right)}^{٣\ \text{عوامل}} = \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٣}$$

$$\frac{جـ^{٢}}{د^{٢}} = \frac{\overbrace{جـ \times جـ}^{\text{عاملان}}}{\underbrace{د \times د}_{\text{عاملان}}} = \overbrace{\left(\frac{جـ}{د}\right)\left(\frac{جـ}{د}\right)}^{\text{عاملان}} = \left(\frac{جـ}{د}\right)^{٢}$$

إرشادات للدراسة

قوانين القوة للمتغيرات

تطبق قوانين القوة على المتغيرات تمامًا كما تطبق على الأعداد. فمثلاً

$$\left(\frac{أ^{٣}}{٤ب}\right)^{٣} = \frac{(أ^{٣})^{٣}}{(٤ب)^{٣}} = \frac{٢٧أ^{٣}}{٦٤ب^{٣}}$$

مفهوم أساسي — قوى القسمة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة ناتج قسمة، أوجد كلًّا من قوة البسط وقوة المقام.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب ≠ صفر؛ وأي عدد صحيح م فإن: $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$

أمثلة: $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٤} = \frac{٣^{٤}}{٥^{٤}}$ $\left(\frac{ر}{ن}\right)^{٥} = \frac{ر^{٥}}{ن^{٥}}$

مثال ٢ قوى القسمة

بسّط العبارة: $\left(\frac{٣م^{٣}}{٧}\right)^{٢}$.

$\left(\frac{٣م^{٣}}{٧}\right)^{٢} = \frac{(٣م^{٣})^{٢}}{٧^{٢}}$ قوى القسمة

$= \frac{٣^{٢}(م^{٣})^{٢}}{٧^{٢}}$ قوة حاصل الضرب

$= \frac{٩م^{٦}}{٤٩}$ قوة القوة

تحقق من فهمك

٢أ) $\left(\frac{٣س^{٤}}{٤}\right)^{٣}$ ٢ب) $\left(\frac{٢ص^{٢}}{٣ع^{٣}}\right)^{٢}$ ٢جـ) $\left(\frac{٤س^{٣}}{٥ص^{٤}}\right)^{٣}$

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لاستكشاف عبارات مرفوعة **للأس الصفري** مثل: $٣^{٠}$، $س^{٠}$، ... ويوجد طريقتان لتفسير لماذا تعطي الآلة الحاسبة $٣^{٠} = ١$

الطريقة ١

$\frac{٣^{٥}}{٣^{٥}} = ٣^{٥-٥}$ ناتج قسمة القوى

$= ٣^{٠}$ بسّط

الطريقة ٢

$\frac{٣^{٥}}{٣^{٥}} = \frac{\cancel{٣} \times \cancel{٣} \times \cancel{٣} \times \cancel{٣} \times \cancel{٣}}{\cancel{٣} \times \cancel{٣} \times \cancel{٣} \times \cancel{٣} \times \cancel{٣}}$ تعريف القوى

$= ١$ بسّط

وبما أن للعبارة $\frac{٣^{٥}}{٣^{٥}}$ قيمة واحدة فقط، لذا نستنتج أن $٣^{٠} = ١$

أيْ أن الأس الصفري لأيِّ عددٍ لا يساوي الصفر هو الواحد.

مفهوم أساسي — خاصية الأس الصفري

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: أي عدد غير الصفر مرفوع للقوة صفر يساوي ١

الرموز: لأي عدد حقيقي أ لا يساوي صفرًا فإن: $أ^{٠} = ١$

أمثلة: $١٥^{٠} = ١$ ، $\left(\frac{ب}{جـ}\right)^{٠} = ١$ ، $\left(\frac{٢}{٧}\right)^{٠} = ١$

مثال ٣ — الأس الصفري

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

أ) $\left(-\frac{٤ن^{٢}ك^{٥}ر^{٢}}{٩ن^{٣}ك^{٢}ر}\right)^{٠}$

$\left(-\frac{٤ن^{٢}ك^{٥}ر^{٢}}{٩ن^{٣}ك^{٢}ر}\right)^{٠} = ١$ $\quad$ $أ^{٠} = ١$

ب) $\frac{س^{٥}ص^{٠}}{س^{٣}}$

$\frac{س^{٥}ص^{٠}}{س^{٣}} = \frac{س^{٥}(١)}{س^{٣}}$ $\quad$ $أ^{٠} = ١$

$= س^{٢}$ $\quad$ اقسم القوى

تحقق من فهمك

٣أ) $\frac{ب^{٤}جـ^{٢}د^{٠}}{ب^{٢}جـ}$

٣ب) $\left(\frac{٢ن^{٤}جـ^{٧}هـ^{٣}}{١٥ن^{٣}جـ^{٩}هـ^{٦}}\right)^{٠}$

إرشادات للدراسة

الأس الصفري

انتبه للأقواس عند تبسيط أي عبارة.

فالعبارة $(٥س)^{٠}$ تساوي ١ إلا أن العبارة $٥س^{٠} = ٥$

الأسس السالبة: قد تكون **الأسس سالبة** مثل: $٣^{-٢}$ ، $س^{-٣}$ ، ... ، ولاستقصاء معناها يمكنك تبسيط عبارات مثل $\frac{س^{٢}}{س^{٥}}$ باستعمال الطريقتين الآتيتين:

الطريقة ١

$\frac{س^{٢}}{س^{٥}} = س^{٢-٥}$ $\quad$ ناتج قسمة القوى

$= س^{-٣}$ $\quad$ بسّط

الطريقة ٢

$\frac{س^{٢}}{س^{٥}} = \frac{\cancel{س} \times \cancel{س}}{\cancel{س} \times \cancel{س} \times س \times س \times س}$ $\quad$ تعريف القوى

$= \frac{١}{س^{٣}}$ $\quad$ بسّط

بما أن للعبارة $\frac{س^{٢}}{س^{٥}}$ قيمة واحدة فقط، لذا نستنتج أن $س^{-٣} = \frac{١}{س^{٣}}$

مفهوم أساسي — خاصية الأس السالبة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأي عدد حقيقي أ لا يساوي الصفر، ولأي عدد صحيح ن، فإن مقلوب $أ^{ن}$ هو $أ^{-ن}$، ومقلوب $أ^{-ن}$ هو $أ^{ن}$.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ لا يساوي الصفر، وأي عدد صحيح ن، فإن: $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ ، $\frac{١}{أ^{-ن}} = أ^{ن}$.

أمثلة: $٢^{-٤} = \frac{١}{٢^{٤}} = \frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{جـ^{-٤}} = جـ^{٤}$

تُعد العبارة في أبسط صورة لها إذا احتوت على أسس موجبة فقط، وظهر كل أساس مرة واحدة فقط، ولا تتضمن قوى القوى، وأن تكون جميع الكسور الاعتيادية فيها في أبسط صورة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال ٤ الأسس السالبة

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

أ) $\frac{ن^{-٥}ف^{٤}}{ر^{-٢}}$

$\frac{ن^{-٥}ف^{٤}}{ر^{-٢}} = \left(\frac{ن^{-٥}}{١}\right)\left(\frac{ف^{٤}}{١}\right)\left(\frac{١}{ر^{-٢}}\right)$ اكتب العبارة على صورة حاصل ضرب كسور اعتيادية

$= \left(\frac{١}{ن^{٥}}\right)\left(\frac{ف^{٤}}{١}\right)\left(\frac{ر^{٢}}{١}\right)$ $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ ، $أ^{ن} = \frac{١}{أ^{-ن}}$

$= \frac{ف^{٤}ر^{٢}}{ن^{٥}}$ اضرب

ب) $\frac{٢د^{٢}ب^{٣}جـ^{-٥}}{١٠د^{-٣}ب^{-١}جـ^{-٤}}$

$\frac{٢د^{٢}ب^{٣}جـ^{-٥}}{١٠د^{-٣}ب^{-١}جـ^{-٤}} = \left(\frac{٢}{١٠}\right)\left(\frac{د^{٢}}{د^{-٣}}\right)\left(\frac{ب^{٣}}{ب^{-١}}\right)\left(\frac{جـ^{-٥}}{جـ^{-٤}}\right)$ جمّع القوى للأساس نفسه

$= \left(\frac{١}{٥}\right)\left(د^{٢-(-٣)}\right)\left(ب^{٣-(-١)}\right)\left(جـ^{-٥-(-٤)}\right)$ اقسم القوى، خاصية الأسس السالبة

$= \frac{١}{٥}د^{٥}ب^{٤}جـ^{-١}$ بسّط

$= \frac{١}{٥}\left(د^{٥}\right)\left(ب^{٤}\right)\left(\frac{١}{جـ}\right)$ خاصية الأسس السالبة

$= \frac{د^{٥}ب^{٤}}{٥جـ}$ اضرب

تحقق من فهمك

٤أ) $\frac{ف^{-٣}و س^{٢}}{و ص^{-٦}}$ ٤ب) $\frac{٣٢د^{-٨}ب^{٣}جـ^{-٤}}{٤د^{٣}ب^{٥}جـ^{-٢}}$ ٤جـ) $\frac{٥جـ^{-٣}ك^{٢}م^{-٦}}{٢٥ك^{-٤}م^{-٢}}$

إرشادات للدراسة

الإشارة السالبة

تأكد من موقع الإشارة السالبة. فمثلاً، $٥^{-١} = \frac{١}{٥}$، في حين أن $-٥^{١} \neq \frac{١}{٥}$

تستعمل **رتبة المقدار** لمقارنة المقادير وتقدير الحسابات وإجرائها بسرعة، وتعبر عن العدد مقرّبًا إلى أقرب قوى العشرة. فمثلاً العدد ٩٥٠٠٠٠٠٠٠٠٠ مقرَّبًا إلى أقرب قوى العشرة هو $١٠^{١١}$ أو ١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠، لذا فإن رتبة المقدار ٩٥٠٠٠٠٠٠٠٠٠ هي $١٠^{١١}$.

مثال ٥ من واقع الحياة تطبيق خواص الأسس

طول: افترض أن معدل طول الرجل ١,٧ متر، ومعدل طول النملة هو ٠,٠٠٠٨ متر. فكم مرة تقريبًا يساوي طول الرجل بالنسبة لطول النملة؟

افهم: علينا إيجاد رتبة طول كل من الرجل والنملة، ثم إيجاد النسبة بينهما.

خطّط: قرّب كل طول إلى أقرب قوة للعدد ١٠، ثم أوجد نسبة طول الرجل إلى طول النملة.

حل: بما أن معدل طول الرجل قريب من ١ متر؛ لذا تكون رتبة طوله هي ١٠ أمتار.
وبما أن معدل طول النملة يساوي ٠,٠٠١ متر تقريبًا؛ لذا فرتبة طول النملة هي $١٠^{-٣}$ أمتار.

الربط مع الحياة

يوجد أكثر من ١٤٠٠٠ نوع من النمل في الكرة الأرضية.

وبعضها يستطيع حمل أشياء كتلتها تعادل كتلة النملة ٥٠ مرة.

نسبة طول الرجل إلى طول النملة يساوي تقريبًا $\frac{١٠^{٠}}{١٠^{-٣}}$

$\frac{١٠^{٠}}{١٠^{-٣}} = ١٠^{٠-(-٣)}$ اقسم القوى

$= ١٠^{٣}$ $٠ - (-٣) = ٠ + ٣ = ٣$

$= ١٠٠٠$ بسّط

لذا فطول الرجل يساوي ١٠٠٠ مرة من طول النملة تقريبًا. أو نسبة طول الرجل إلى طول النملة تساوي تقريبًا القوة الثالثة للعشرة.

تحقق: نسبة طول الرجل إلى طول النملة هي $\frac{١,٧}{٠,٠٠٠٨} = ٢١٢٥$ وأقرب قوى العشرة للعدد ٢١٢٥ هي $١٠^{٣}$ ✓

تحقق من فهمك

٥) **علم الفلك:** رتبة مقدار كل من كتلة الأرض ودرب التبانة لأقرب قوى العشرة هي: $١٠^{٢٧}$، $١٠^{٤٤}$ على الترتيب. فكم مرة تساوي رتبة مقدار كتلة درب التبانة رتبة مقدار كتلة الأرض؟

تأكد

الأمثلة ١-٤ بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

١) $\frac{هـ^{٥}ل^{٤}}{هـ^{٢}ل}$ ٢) $\frac{م^{٦}ر^{٥}ب^{٣}}{م^{٥}ر^{٢}ب^{٣}}$ ٣) $\frac{ب^{٤}جـ^{٦}ن^{٨}}{ب^{٤}جـ^{٣}ن^{٥}}$ ٤) $\frac{جـ^{٨}هـ^{٢}م}{هـ جـ^{٧}}$

٥) $\frac{ر^{٤}ن^{٧}ف^{٢}}{ن^{٧}ف^{٢}}$ ٦) $\frac{س^{٣}ص^{٢}ع^{٦}}{ع^{٥}س^{٢}ص}$ ٧) $\frac{ن^{٤}ك^{٤}و^{٦}}{ك^{٢}ن^{٣}و}$ ٨) $\frac{ر^{٣}ف^{-٢}}{ن^{-٧}}$

٩) $\left(\frac{٢جـ^{٣}د^{٥}}{٥هـ^{٢}}\right)^{٥}$ ١٠) $\left(-\frac{٣س ص^{٤}ع^{٢}}{س^{٣}ص ع^{٤}}\right)^{٠}$ ١١) $\frac{٤ر^{٢}ف^{٠}هـ^{٥}}{٢ر هـ^{٣}}$ ١٢) $\frac{ف^{-٣}جـ^{٢}}{هـ^{-٤}}$

مثال ٥ ١٣) **إنترنت:** ارتفع عدد مستعملي الإنترنت في المملكة من ١١٠٠٠٠٠٠ شخص عام ١٤٣١ هـ إلى ٢٤٠٠٠٠٠٠ شخص عام ١٤٣٨ هـ. حدّد نسبة عدد مستعملي الإنترنت عام ١٤٣٨ هـ إلى مستعمليه عام ١٤٣١ هـ باستعمال رتبة المقدار للعامين.

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١-٤ بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

١٤) $\frac{م^{٤}ن^{٢}}{م^{٢}ن}$ ١٥) $\frac{جـ^{٤}د^{٤}هـ^{٣}}{جـ^{٢}د^{٤}هـ^{٣}}$ ١٦) $\left(\frac{٣س ص^{٤}}{٥ع^{٢}}\right)^{٢}$ ١٧) $\frac{س^{-٤}ص^{٩}}{ع^{-٢}}$

١٨) $\frac{أ^{٧}ب^{٨}جـ^{٨}}{أ^{٥}ب جـ^{٧}}$ ١٩) $\left(-\frac{٥ن^{٩}جـ^{٤}هـ^{٢}}{ن جـ^{٢}هـ^{٣}}\right)^{٠}$ ٢٠) $\frac{ل^{١٢}ن^{٧}ر^{٢}}{ل^{٢}ن^{٧}ر}$ ٢١) $\frac{٥جـ^{٢}د^{٥}}{٨جـ د^{٥}ن^{٠}}$

٢٢) $\frac{-٢ن^{٣}جـ^{٢}هـ^{٠}}{٨ن^{٢}جـ^{٢}}$ ٢٣) $\frac{١٢م^{-٤}ل^{٢}}{-١٥م^{٣}ل^{-٩}}$ ٢٤) $\left(\frac{أ^{-٢}ب^{٤}جـ^{٥}}{أ^{-٤}ب^{-٤}جـ^{٣}}\right)^{٢}$ ٢٥) $\frac{ر^{٣}ن^{-١}س^{-٥}}{ن س^{٥}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال ٥

٢٦) **حواسيب:** وصلت سرعة معالج الحاسوب عام ١٤١٤ هـ إلى $١٠^{٨}$ عملية في الثانية تقريبًا. وازدادت هذه السرعة إلى أكثر من $(١٠)^{١٠}$ عملية في الثانية عام ١٤٣٨هـ. فبكم مرة يكون الحاسوب الجديد أسرع من القديم؟

الربط مع الحياة

حواسيب: تتعدد أنواع الحواسيب من حيث طريقة عملها وحجمها وسرعتها. وكانت الحواسيب الإلكترونية في حجم غرفة كبيرة، وتستهلك طاقة مماثلة لما يستهلكه مئات الحواسيب الشخصية اليوم. بينما يمكن الآن صنع حواسيب داخل ساعة يد تأخذ طاقاتها من بطارية الساعة.

٢٧) **تمثيلات متعددة:** تستعمل الصيغة م = ط نق^{٢} لإيجاد مساحة الدائرة، وتستعمل الصيغة م = ل^{٢} لإيجاد مساحة المربع الذي طول ضلعه ل. استخدم الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة الآتية:

أ) جبريًا: أوجد نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع.

ب) جبريًا: إذا ضُرب كل من نصف قطر الدائرة وطول ضلع المربع في العدد ٢، فما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟

جـ) جدوليًا: أكمل الجدول المقابل.

د) تحليليًا: ما الاستنتاج الذي توصلت إليه؟

نصف القطر	مساحة الدائرة	مساحة المربع	النسبة
نق			
٢نق			
٣نق			
٤نق			
٥نق			

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٨) **تبرير:** هل المعادلة "س^{ص} × س^{ع} = س$^{ص ع}$" صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ فسّر إجابتك.

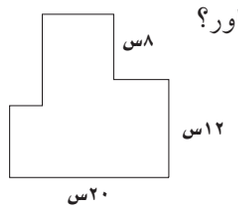
٢٩) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا لوحيدتي حد يكون ناتج قسمتهما ٢٤ أ^{٢} ب^{٣}

٣٠) **تحدٍّ:** استعمل خاصية قسمة القوى لتفسير المساواة س$^{-ن}$ = $\frac{١}{س^{ن}}$

٣١) **اكتب:** وضِّح كيف تستعمل خاصية قسمة القوى وخاصية قوى القسمة؟

تدريب على اختبار

٣٢) **هندسة:** ما محيط الشكل المجاور؟



أ) ٤٠س
ب) ٨٠س
جـ) ١٦٠س
د) ٤٠٠س

٣٣) بسِّط العبارة: $(٤^{-٢} \times ٥^{٠} \times ٦٤)^{٣}$

أ) $\frac{١}{٦٤}$
ب) ٦٤
جـ) ٣٢٠
د) ١٠٢٤

مراجعة تراكمية

٣٤) **علم الأرض:** موجة زلزال قوته ٦ أكبر من موجة زلزال قوته ٤ بـ $١٠^{٢}$ مرات. وموجة زلزال قوته ٤ تساوي ١٠ أمثال موجة زلزال قوته ٣ فكم مرة تساوي موجة زلزال قوته ٦ موجة زلزال قوته ٣؟ (الدرس ٦-٢)

حلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وتحقَّق من صحة الحل: (مهارة سابقة)

٣٥) ٥(٢هـ − ٦) > ٤هـ

٣٦) ٢٢ ≤ ٤(ب − ٨) + ١٠

٣٧) ٥(ب − ٨) ≥ ٣(ب + ١٠)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: بسّط كلَّ عبارةٍ فيما يأتي:

٣٨) ٣س + ١٠س

٣٩) ٥أ − ٢ + ٦أ

٤٠) ٤ص ٢ + ص + ١٥ص ٢

٤١) ١٣(٥ + ٤أ)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٦-٣ كثيرات الحدود

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درستُ تمييز وحيدات الحد وخصائصها.

والآن

- أجد درجة كثيرة الحدود.
- أكتب كثيرة حدود بالصورة القياسية.

المفردات

كثيرة حدود
ثنائية الحد
ثلاثية الحدود
درجة وحيدة الحد
درجة كثيرة الحدود
الصورة القياسية لكثيرة الحدود
المعامل الرئيس

لماذا؟

سجِّلت مبيعات الأجهزة الذكية عالميًا أرقامًا قياسية في المبيعات عام ٢٠١٧ م. ويمكن تمثيل عدد المبيعات بالمعادلة:

$$ع = -٢,٧ن^{٢} + ٤٩,٤ن + ١٢٨,٧$$

علمًا بأن ع تمثِّل عدد الأجهزة التي يتم بيعها بالملايين، ن تمثِّل عدد السنوات منذ عام ٢٠٠٥ م.

تمثّل العبارة $-٢,٧ن^{٢} + ٤٩,٤ن + ١٢٨,٧$ مثالاً على كثيرة حدود. ويمكن استعمال كثيرات الحدود لتمثيل بعض المواقف.

درجة كثيرة الحدود: **كثيرة الحدود** هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد. تُسمى كل وحيدة حد منها حدًّا في كثيرة الحدود. وبعض كثيرات الحدود تحمل أسماءً خاصة. **فثنائية الحد** هي مجموع وحيدتي حد في أبسط شكل، و**ثلاثية الحدود** هي مجموع ثلاث وحيدات حد في أبسط شكل.

مثال ١ تمييز كثيرات الحدود

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنفها إلى وحيدة حدّ، أو ثنائية حد ، أو ثلاثية حدود:

العبارة	هل هي كثيرة حدود؟	وحيدة حد / ثنائية حد / ثلاثية حدود
أ) ٤ص − ٥س ع	نعم؛ ٤ص −٥س ع هي مجموع وحيدتي حد هما: ٤ص، −٥س ع.	ثنائية حد
ب) −٦,٥	نعم؛ −٦,٥ عدد حقيقي.	وحيدة حد
جـ) ٧أ$^{-٣}$ + ٩ب	لا؛ ٧أ$^{-٣}$ = $\frac{٧}{أ^{٣}}$، وهي ليست وحيدة حد.	—
د) ٦س^{٣} + ٤س + س + ٣	نعم؛ ٦س^{٣} + ٤س + س+ ٣ = ٦س^{٣}+٥س +٣، مجموع ثلاثة حدود.	ثلاثية حدود

تحقق من فهمك

١أ) س

١ب) −٣ص^{٢} −٢ص +٤ص−١

١جـ) ٥ر س + ٧ ن ف ك

١د) ١٠س$^{-٤}$ −٨س^{أ}

درجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها. ودرجة الثابت غير الصفر تساوي صفرًا. وليس للصفر درجة. أما **درجة كثيرة الحدود** فهي أكبر درجة لأي حدٍّ من حدودها. ولإيجاد درجة كثيرة حدود، يتعين عليك أولاً إيجاد درجة كل حد فيها. ويمكن تسمية بعض كثيرات الحدود اعتمادًا على درجتها، فتسمى ذات الدرجة صفر: ثابتة، وذات الدرجة ١: خطية، وذات الدرجة ٢: تربيعية، وذات الدرجة ٣: تكعيبية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال ٢ درجة كثيرة الحدود

أوجد درجة كثيرة الحدود ٢د^{٣} – ٩جـ^{٥} د – ٧

الخطوة ١: أوجد درجة كل حد.

درجة الحد ٢د^{٣} = ٣، درجة الحد –٩جـ^{٥} د = ٥ + ١ = ٦،

درجة الحد –٧ هي صفر.

الخطوة ٢: درجة كثيرة الحدود هي أكبر درجة لأي حد من حدودها، وتساوي ٦

تحقق من فهمك

٢أ) ٧س ص^{٥} ع **٢ب)** ٢م ن – ٣ م ن^{٢} – ٧م^{٢} ن^{٢} – ١٣

كثيرات الحدود بالصورة القياسية: يمكنك كتابة كثيرة الحدود بأي ترتيب. ولاستخدام **الصورة القياسية لكثيرة الحدود** بمتغير واحد، اكتب الحدود بترتيب تنازلي بحسب درجتها. وعندما تُكتب كثيرة الحدود بالصورة القياسية، فإن معامل أول حد فيها يُسمى **المعامل الرئيس** .

المعامل الرئيس — أكبر درجة

الصورة القياسية: ٤س^{٣} – ٥س^{٢} + ٢س + ٧

مثال ٣ الصورة القياسية لكثيرة الحدود

اكتب كثيرة الحدود ٥ص –٩– ٢ص^{٤} –٦ ص^{٣} بالصورة القياسية، وحدِّد المعامل الرئيس فيها.

الخطوة ١: أوجد درجة كل حد .

الدرجة: ١ ٠ ٤ ٣

كثيرة الحدود: ٥ص – ٩ – ٢ص^{٤} – ٦ص^{٣}

الخطوة ٢: اكتب الحدود بترتيب تنازلي لدرجاتها: –٢ص^{٤} – ٦ص^{٣} + ٥ص –٩ فيكون المعامل الرئيس هو –٢

تحقق من فهمك

٣أ) ٨ – ٢س^{٢} + ٤س^{٤} – ٣س **٣ب)** ص + ٥ص^{٣} – ٢ص^{٢} – ٧ص^{٦} + ١٠

ويمكنك استعمال كثيرات الحدود لتقدير القيم بين سنتين، وللتنبؤ بقيم الحوادث قبل وقوعها أيضًا.

مثال ٤ من واقع الحياة استعمال كثيرات الحدود

مصانع: **تمثِّل المعادلة ع= ٣ن^{٢} – ٢ن + ١٠ عدد أطنان الأسمنت بمئات الألوف التي أنتجها أحد المصانع من عام ١٤٣٣ هـ إلى ١٤٣٨ هـ، حيث ن عدد السنوات منذ عام ١٤٣٣ هـ، فما عدد أطنان الأسمنت المنتجة حتى بداية عام ١٤٣٥ هـ؟**

أوجد قيمة ن وعوض بها في المعادلة لإيجاد عدد أطنان الأسمنت.

بما أن ن تمثِّل عدد السنوات منذ عام ١٤٣٣ هـ ، فإن: ن = ١٤٣٥ – ١٤٣٣ = ٢

الربط مع الحياة

تعتبر المملكة العربية السعودية أكبر منتج للأسمنت في منطقة الخليج، وصاحبة ثاني أكبر طاقة إنتاجية في الشرق الأوسط، وتُعد صناعة الأسمنت في المملكة من الأنشطة ذات الربحية العالية.

$ع = ٣ن^{٢} - ٢ن + ١٠$	المعادلة الأصلية
$= ٣(٢)^{٢} - ٢(٢) + ١٠$	ن = ٢
$= ٣(٤) - ٤ + ١٠$	بسطّ
$= ١٢ - ٤ + ١٠ = ١٨$	اضرب وبسّط

بما أن ع بمئات الألوف، فإن عدد الأطنان المنتجة كان ١٨ مئة ألفٍ، أو ١٨٠٠٠٠٠.

تحقق من فهمك

٤أ) كم طنًّا أُنتج عام ١٤٣٨ هـ؟

٤ب) إذا استمر هذا النمط، فكم طنًّا سيتم إنتاجه عام ١٤٤٨ هـ؟

تأكد

مثال ١ **حدّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنِّفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:**

١) $٢ص - ٥ + ٣ص^{٢}$ ٢) $٣س^{٢}$ ٣) $٥م^{٢}ن^{٣} + ٦$ ٤) $٥ك^{-٤} + ٦ك$

مثال ٢ **أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي:**

٥) -٣ ٦) $٦ن^{٣} - ن^{٤}$ ٧) $-٧ع$ ٨) $\frac{٣}{٤}$

٩) $١٢ - ٧ك^{٢}ن + ٨ن$ ١٠) $٢أ^{٢}ب^{٥} + ٥ - أب$ ١١) $٦دن^{٣} + ٣د^{٢}ن^{٢} + ٢د + ١$

مثال ٣ **اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصورة القياسية، وحدِّد المعامل الرئيس فيها:**

١٢) $-ص^{٣} + ٣ص - ٣ص^{٢} + ٢$ ١٣) $٤ع - ٢ع^{٢} - ٥ع^{٤}$ ١٤) $٢أ + ٤أ^{٣} - ٥أ^{٢} - ١$

مثال ٤ ١٥) **جامعات:** افترض أنه يمكن تمثيل عدد الطلاب المسجَّلين في جامعة من عام ١٤٣٠ هـ إلى ١٤٣٩ هـ بالمئات بالمعادلة $ن = س^{٢} + ٥,١ س + ٥,٠$، حيث س عدد السنوات منذ عام ١٤٣٠ هـ.

أ) ما عدد الطلاب الذين تم تسجيلهم في الجامعة في عام ١٤٣٥ هـ؟

ب) ما عدد الطلاب الذين تم تسجيلهم في الجامعة في عام ١٤٣٧ هـ؟

تدرب وحل المسائل

مثال ١ **حدِّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنّفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:**

١٦) $\frac{٥ص^{٣}}{س^{٢}} + ٤س$ ١٧) ٢١ ١٨) $جـ^{٤} - ٢جـ^{٢} + ٣$

١٩) $د + ٣د^{-جـ}$ ٢٠) $أ - أ^{٢}$ ٢١) $٥ن^{٣} + ن ك^{٣}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال ٢ أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي:

٢٢) $١٣ - ٤أب + ٥أ^{٣}ب$ ٢٣) $٣س - ٨$ ٢٤) -٤

٢٥) $١٧جـ^{٢}هـ$ ٢٦) $١٠ + ٢جـد^{٤} - ٦د^{٢}جـ$ ٢٧) $٢ع^{٢}ص^{٢} - ٧ + ٥ص^{٣}ن^{٤}$

مثال ٣ اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصورة القياسية، وحدِّد المعامل الرئيس فيها:

٢٨) $٥س^{٢} - ٢ + ٣س$ ٢٩) $٨ص + ٧ص^{٣}$ ٣٠) $٤ - ٣جـ - ٥جـ^{٢}$

٣١) $-٤د^{٤} + ١ - د^{٢}$ ٣٢) $\frac{١}{٢}س - ٣س^{٤} + ٧$ ٣٣) $-٩ب^{٢} + ١٠ب - ب^{٦}$

مثال ٤ ٣٤) **ألعاب نارية:** أطلق صاروخ ألعاب نارية من ارتفاع ١م من الأرض وبسرعة ١٥٠ م/ ث. ويمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ ع بعد ن ثانية بالمعادلة $ع = -٥ن^{٢} + ٥٠ن + ١$

أ) ما الارتفاع الذي يصله الصاروخ بعد ٣ ثوانٍ؟

ب) ما الارتفاع الذي يصله الصاروخ بعد ٥ ثوانٍ؟

٣٥) **مشروع:** يصمم طارق وعمر هيكل صاروخ، بحيث يكون الجزء العلوي منه على شكل مخروط، وجسمه على شكل أسطوانة نصف قطرها نق، كما في الشكل المجاور. إذا علمت أن حجم المخروط يساوي $\frac{١}{٣}$ ط × مربع نصف القطر (نق) × الارتفاع ($ع_{١}$)، وحجم الأسطوانة يساوي ط × مربع نصف القطر (نق) × الارتفاع ($ع_{٢}$).

أ) اكتب كثيرة حدود تمثل حجم الصاروخ.

ب) إذا كان ارتفاع جسم الصاروخ ٨سم، وارتفاع الجزء العلوي منه ٦سم، ونصف قطر القاعدة ٣سم، فما حجم الصاروخ؟

الربط مع الحياة

يتكون مكوك الفضاء من ثلاثة أجزاء: عربة مدارية للطاقم، وخزان خارجي للوقود، وجهازي دفع صاروخيين يعملان بالوقود الصلب. وتبلغ كتلة المكوك بالكامل ٤,٤ ملايين رطل عند انطلاقه.

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٦) **تحد:** إذا كان س عددًا صحيحًا، فاكتب كثيرة حدود تمثِّل العدد الصحيح الفردي، وفسّر ذلك.

٣٧) **تبرير:** وضِّح إذا كانت العبارة: "يمكن أن تكون درجة ثنائية الحد صفرًا" صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ وفسّر إجابتك.

٣٨) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالاً على ثلاثية حدود تكعيبية.

٣٩) **اكتب:** فسّر كيف تكتب كثيرة حدود على الصورة القياسية، وكيف تحدد المعامل الرئيس فيها؟

تدريب على اختبار

٤٠) **إجابة قصيرة:** إذا كان لديك بطاقة تخفيض بقيمة ٨ ريالات من أحد المتاجر، واشتريت أرزًا بـ ٥٩,٩٥ ريالًا، وعلبة جبن بـ ١٥,٩٥ ريالًا. فكم تدفع مقابل ذلك؟

٤١) ما قيمة ص التي تحقق نظام المعادلات أدناه؟

٢س + ص = ١٩، ٤س − ٦ص = −٢

أ) ٥ ب) ٨ جـ) ٧ د) ١٠

مراجعة تراكمية

بسِّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا: (الدرس ٦-٢)

٤٢) $أ^{٠}(أ^{٤})(أ^{-٨})$

٤٣) $\frac{(٤م^{-٣}جـ^{٦})^{٠}}{م جـ}$

٤٤) $\frac{(٣ن^{٢}جـ^{٦})^{٠}}{(١٨ن^{٦}جـ^{٢})^{٠}}$

٤٥) $\frac{(نك^{-١})^{٣}}{(ن^{٤}ك^{٨})^{-١}}$

٤٦) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ٣) والمعامد للمستقيم ص = س بصيغة الميل والمقطع. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كل عبارة فيما يأتي إن أمكن، وإلَّا فاكتب "في أبسط شكل":

٤٧) $٧ب^{٢} + ١٤ب - ١٠ب$

٤٨) $٥ت + ١٢ت^{٢} - ٨ت$

٤٩) $٣ص^{٤} + ٢ص^{٤} + ٢ص^{٥}$

٥٠) $٧هـ^{٥} - ٧س^{٥} + ٨ك^{٥}$

٥١) $ن + \frac{ن}{٣} + \frac{٢}{٣}ن$

٥٢) $٢ل + \frac{ل}{٢} + ل^{٢}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

جمع كثيرات الحدود وطرحها

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

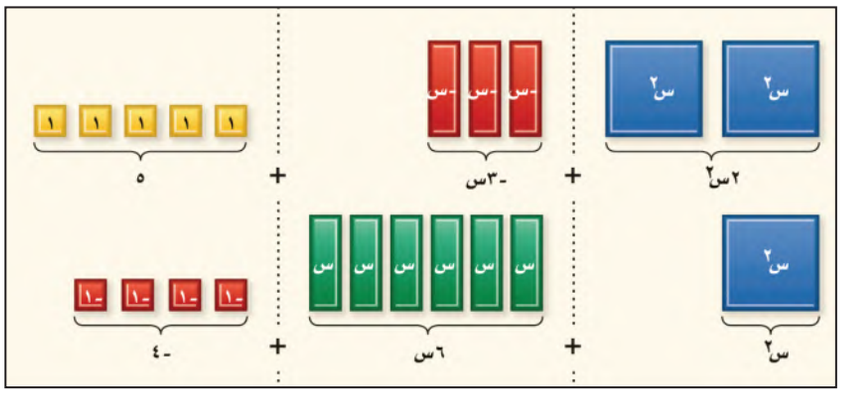
تُسمى وحيدات الحد مثل ٣س، −٢س حدودًا متشابهة؛ لأن لها المتغير والأس نفسيهما. ويمكنك تمييز الحدود المتشابهة عند استعمال بطاقات الجبر- انظر الجدول المجاور.

تمثيل كثيرات الحدود	
تمثل الحدود المتشابهة على صورة بطاقات لها نفس المساحة والشكل.	
يمكن تكوين الزوج الصفري بتجميع قطعة واحدة وَمعكوسها. ويمكنك حذف الزوج صفر أو إضافته دون تغيير كثيرة الحدود.	

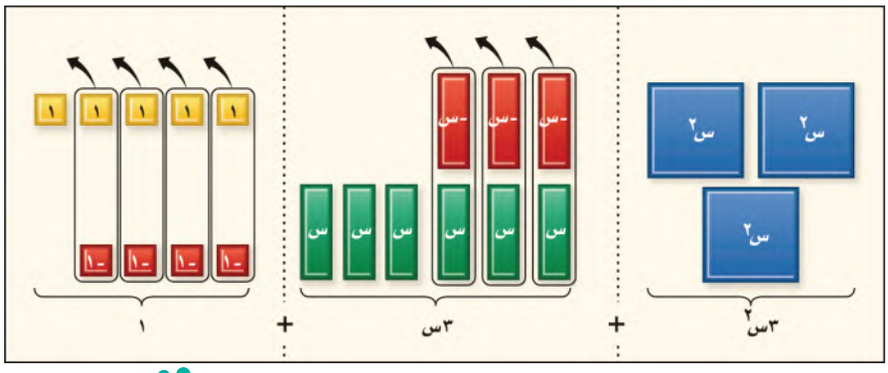
نشاط ١ جمع كثيرات الحدود

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج (٢س^{٢} − ٣س + ٥) + (س^{٢} + ٦س − ٤).

الخطوة ١: مثّل كلًّا من كثيرتي الحدود.



الخطوة ٢: جمّع الحدود المتشابهة، واحذف الأزواج الصفرية.

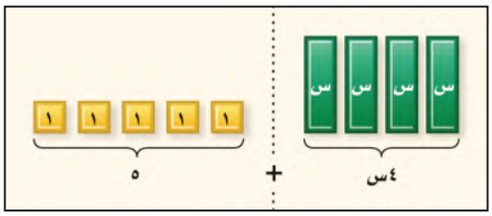


الخطوة ٣: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.

إذن (٢س^{٢} − ٣س + ٥) + (س^{٢} + ٦س − ٤) = ٣س^{٢} + ٣س + ١

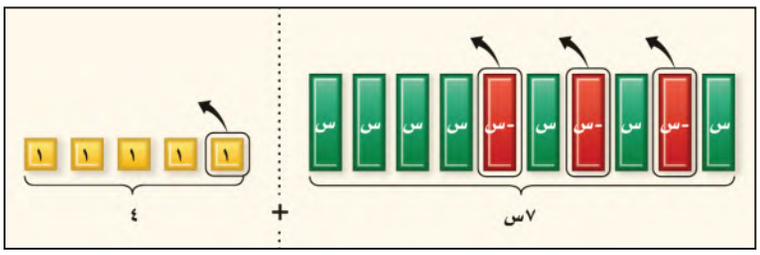
نشاط ٢ طرح كثيرات الحدود

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج (٤س + ٥) – (–٣س + ١).



الخطوة ١: مثّل كثيرة الحدود: ٤س + ٥

الخطوة ٢: لطرح –٣س + ١ عليك حذف ٣ بطاقات (– س) الحمراء، وبطاقة ١ صفراء. يمكنك حذف بطاقة ١، وَبما أنه لا توجد بطاقات (– س). أضف ٣ أزواج صفرية من البطاقات س وَ (– س)، ثم احذف ٣ بطاقات (– س).



الخطوة ٣: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.

إذن (٤س + ٥) – (–٣س + ١) = ٧س + ٤

تذكّر أنه يمكنك طرح عدد بإضافة نظيره الجمعي أو معكوسه. وبالمثل يمكنك طرح كثيرة حدود بإضافة معكوسها.

نشاط ٣ طرح كثيرات الحدود باستعمال النظير الجمعي

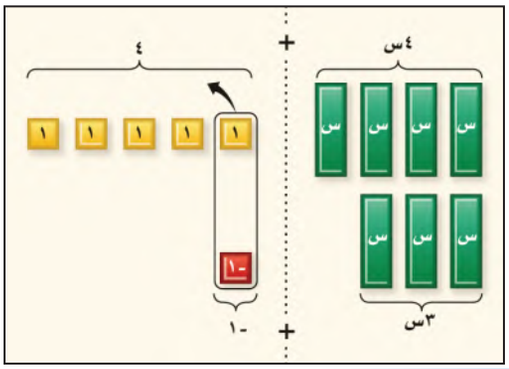
استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج: (٤س + ٥) – (–٣س + ١).

الخطوة ١: لإيجاد الفرق بين ٤س +٥، –٣س+١، أضف ٤س+٥ إلى معكوس –٣س +١ ← ٤س + ٥

الخطوة ٢: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية. ← معكوس –٣س+١ هو ٣س–١.

إذن (٤س + ٥) – (–٣س + ١) = ٧س + ٤.

لاحظ أن الناتج هذا هو نفسه ناتج النشاط ٢.



التمثيل والتحليل

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد المجموع أو الفرق لكلٍّ مما يأتي:

١) $(س^{٢} + ٥س - ٢) + (٣س^{٢} - ٢س + ٦)$

٢) $(٢س^{٢} + ٨س + ١) - (س^{٢} - ٤س - ٢)$

٣) $(-٤س^{٢} + س) - (س^{٢} + ٥س)$

٤) **اكتب:** أوجد ناتج (٤س ٢ – س + ٣) – (٢س + ١) باستعمال طريقتي النشاطين ٢ و٣. ومثّل ذلك بمخطط، ثم فسّر كيف تستعمل الأزواج الصفرية في كل حالة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٦ - ٤

فيما سبق

درستُ كتابة كثيرات الحدود بالصورة القياسية.

والآن

- أجمع كثيرات حدود.
- أطرح كثيرات حدود.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

جمع كثيرات الحدود وطرحها

لماذا؟

يمكن تمثيل العدد التقريبي لحجاج الداخل (ع١) وحجاج الخارج (ع٢) بمئات الألوف من عام ١٤٣٥هـ إلى ١٤٣٨ هـ بالمعادلتين:

ع١ = ٠,١٩٣١ س٣ − ٠,٢٨٤١ س٢ + ٠,١٨٠٨ س + ٦,٧

ع٢ = ٠,٢٦٧٥ س٣ − ١,٠٢ س٢ + ٠,٩٧ س + ١٧,٠٨

حيث س عدد السنوات منذ عام ١٤٣٥ هـ.

إن إجمالي عدد الحجاج تقريبًا يمثل بـ ع١ + ع٢

جمع كثيرات الحدود: يتم جمع كثيرتي حدود بجمع الحدود المتشابهة، ويمكن جمع كثيرتي حدود باستعمال الطريقة الأفقية أو الرأسية.

مثال ١ جمع كثيرات الحدود

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

أ) (٢س٢ + ٥س − ٧) + (٣ − ٤س٢ + ٦س)

الطريقة الأفقية

(٢س٢ + ٥س − ٧) + (٣ − ٤س٢ + ٦س)

= [٢س٢ + (−٤س٢)] + [٥س + ٦س] + [−٧ + ٣] جمّع الحدود المتشابهة

= −٢س٢ + ١١س − ٤ اجمع الحدود المتشابهة

الطريقة الرأسية

رتّب الحدود المتشابهة عموديًّا واجمع

٢س٢ + ٥س − ٧

(+) −٤س٢ + ٦س + ٣

−٢س٢ + ١١س − ٤

ب) (٣ص + ص٣ − ٥) + (٤ص٢ − ٤ص + ٢ص٣ + ٨)

الطريقة الأفقية

(٣ص + ص٣ − ٥) + (٤ص٢ − ٤ص + ٢ص٣ + ٨)

= [ص٣ + ٢ص٣] + ٤ص٢ + [٣ص + (−٤ص)] + [(−٥) + ٨] جمّع الحدود المتشابهة

= ٣ص٣ + ٤ص٢ − ص + ٣ اجمع الحدود المتشابهة

الطريقة الرأسية

أضف الحد ٠ص٢ للمساعدة على ترتيب الحدود المتشابهة تحت بعضها

ص٣ + ٠ص٢ + ٣ص − ٥

(+) ٢ص٣ + ٤ص٢ − ٤ص + ٨

رتّب الحدود المتشابهة عموديًّا واجمعها

٣ص٣ + ٤ص٢ − ص + ٣

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحقق من فهمك

١أ) $(٥س^{٢} - ٣س + ٤) + (٦س - ٣س^{٢} - ٣)$

١ب) $(ص^{٤} - ٣ص + ٧) + (٢ص^{٣} + ٢ص - ٢ص^{٤} - ١١)$

طرح كثيرات الحدود: تذكّر أنه يمكنك طرح عدد صحيح بإضافة معكوسه أو نظيره الجمعي. وبالمثل، يمكنك طرح كثيرة حدود بإضافة نظيرها الجمعي.

لإيجاد النظير الجمعي لكثيرة حدود، اكتب معكوس كل حد من حدودها.

$$-(٣س^{٢} + ٢س - ٦) = \underbrace{-٣س^{٢} - ٢س + ٦}_{\text{نظير جمعي}}$$

إرشادات للدراسة

النظير الجمعي

عند إيجاد النظير الجمعي أو المعكوس لكثيرة حدود، اضرب كل حد فيها في العدد −١.

مثال ٢ طرح كثيرات الحدود

أوجد ناتج: $(٧ك + ٤ك^{٣} - ٨) - (٣ك^{٢} + ٢ - ٩ك)$

الطريقة الأفقية

اطرح $٣ك^{٢} + ٢ - ٩ك$ بإضافة نظيرها الجمعي

$(٧ك + ٤ك^{٣} - ٨) - (٣ك^{٢} + ٢ - ٩ك)$

$= (٧ك + ٤ك^{٣} - ٨) + (-٣ك^{٢} - ٢ + ٩ك)$ النظير الجمعي لـ $(٣ك^{٢} + ٢ - ٩ك)$ هو $(-٣ك^{٢} - ٢ + ٩ك)$

$= [٧ك + ٩ك] + ٤ك^{٣} + (-٣ك^{٢}) + [(-٨) + (-٢)]$ جمّع الحدود المتشابهة.

$= ٤ك^{٣} - ٣ك^{٢} + ١٦ك - ١٠$ اجمع الحدود المتشابهة وَرتِّب.

الطريقة الرأسية

رتِّب الحدود المتشابهة عموديًّا واطرح بإضافة النظير الجمعي.

$$\begin{array}{rrrr} & ٤ك^{٣} & + ٠ك^{٢} & + ٧ك - ٨ \\ (-) & & ٣ك^{٢} & - ٩ك + ٢ \\ \hline \end{array} \quad \xrightarrow{\text{جمع النظير}} \quad \begin{array}{rrrr} & ٤ك^{٣} & - ٠ك^{٢} & + ٧ك - ٨ \\ (+) & & - ٣ك^{٢} & + ٩ك - ٢ \\ \hline & ٤ك^{٣} & - ٣ك^{٢} & + ١٦ك - ١٠ \end{array}$$

إذن: $(٧ك + ٤ك^{٣} - ٨) - (٣ك^{٢} + ٢ - ٩ك) = ٤ك^{٣} - ٣ك^{٢} + ١٦ك - ١٠$

إرشادات للدراسة

الطريقة الرأسية

لاحظ أن كثيرتي الحدود قد كتبتا بالصورة القياسية، وأن الحدود المتشابهة تُرتَّب عموديًّا بعضها فوق بعض.

تحقق من فهمك

٢أ) $(٤س^{٣} - ٣س^{٢} + ٦س - ٤) - (-٢س^{٣} + س^{٢} - ٢)$

٢ب) $(٨ص - ١٠ + ٥ص^{٢}) - (٧ - ص^{٣} + ١٢ص)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال ٣ من واقع الحياة — جمع كثيرات الحدود وطرحها

متجر إلكترونيات: تمثِّل المعادلتان أدناه عدد الهواتف المحمولة هـ، وعدد آلات التصوير الرقمية ك التي بيعت في ش شهر لمتجر بيع إلكترونيات: هـ = ٧ش + ١٣٧، ك = ٤ش + ٧٨

أ) اكتب معادلة تمثِّل المبيعات الكلية (ن) من الهواتف وآلات التصوير شهريًّا.

اجمع كثيرتي الحدود هـ، ك.

المبيعات الكلية = مبيعات الهواتف المحمولة + مبيعات آلات التصوير الرقمية

ن = ٧ش + ١٣٧ + ٤ش + ٧٨ — عوِّض

= ١١ ش + ٢١٥ — اجمع الحدود المتشابهة.

المعادلة هي: ن = ١١ ش + ٢١٥

ب) استعمل المعادلة للتنبؤ بعدد الهواتف المحمولة وآلات التصوير الرقمية التي ستُباع في ١٠ أشهر.

ن = ١١(١٠) + ٢١٥ — عوّض عن ش بـ ١٠

= ١١٠ + ٢١٥ = ٣٢٥ — بسّط

لذا فإنه سيتم بيع ٣٢٥ هاتفًا محمولاً وآلة تصوير رقمية في ١٠ أشهر.

تحقق من فهمك

٣) استعمل المعلومات السابقة لكتابة معادلة تمثل الفرق (ف) بين مبيعات الهواتف المحمولة وآلات التصوير شهريًّا ثم استعمل المعادلة للتنبؤ بالفرق في المبيعات الشهرية في ٢٤ شهرًا.

الربط مع الحياة

مع تطوُّر التقنيات السريعة، تشهد السوق ارتفاعًا كبيرًا في مبيعات آلات التصوير الرقمية والهواتف المحمولة.

تأكد

المثالان ١، ٢ أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

١) (٦س^{٣} − ٤) + (−٢س^{٣} + ٩)

٢) (جـ^{٣} − ٢جـ^{٢} + ٥جـ + ٦) − (جـ^{٢} + ٢جـ)

٣) (٨ص − ٤ص^{٢}) + (٣ص − ٩ص^{٢})

٤) (−٤ع^{٣} − ٢ع + ٨) − (٤ع^{٣} + ٣ع^{٢} − ٥)

٥) (−٣د^{٢} − ٨ + ٢د) + (٤د − ١٢ + د^{٢})

٦) (٣ن^{٣} − ٥ن + ن^{٢}) − (−٨ن^{٢} + ٣ن^{٣})

مثال ٣ ٧) **إجازة:** يتوزَّع العدد الكلي للطلاب (ك) الذين يسافرون خلال الإجازة إلى مجموعتين: مجموعة تسافر إلى المنطقة (ف) بالطائرة، والمجموعة الأخرى تسافر إلى المنطقة (د) بالسيارة، ويمكن تمثيل العدد الكلي بالآلاف للطلاب (ك) الذين سافروا خلال الإجازة، وعدد الطلاب (ع) الذين سافروا للمنطقة (ف) بالمعادلتين: ك = ١٤ن + ٢١، ع = ٨ن + ٧، حيث (ن) عدد السنوات منذ عام ١٤٢٥ هـ.

أ) اكتب المعادلة التي تمثِّل عدد الطلاب (ل) الذين توجَّهوا إلى المنطقة د في هذه الفترة.

ب) كم طالبًا يُتوقع أن يتوجهوا إلى المنطقة د في عام ١٤٤٢ هـ؟

جـ) كم طالبًا يُتوقع أن يسافروا في عام ١٤٤٥ هـ؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدرب وحل المسائل

المثالان ١، ٢ أوجد ناتج كل مما يأتي:

٨) $(ص + ٥) + (٢ص + ٤ص^{٢} - ٢)$

٩) $(٣جـ^{٣} - جـ + ١١) - (جـ^{٢} + ٢جـ + ٨)$

١٠) $(ع^{٢} + ع) + (ع^{٢} - ١١)$

١١) $(٢س - ٢ص + ١) - (٣ص + ٤س)$

١٢) $(٤أ - ٥ب^{٢} + ٣) + (٦ - ٢أ + ٣ب^{٢})$

١٣) $(س^{٢}ص - ٣س^{٢} + ص) + (٣ص - ٢س^{٢}ص)$

١٤) $(٦أب^{٢} + ٢أب) + (٣أ^{٢}ب - ٤أب + أب^{٢})$

١٥) $(جـد^{٢} + ٢جـد - ٤) + (-٦ + ٤جـد - ٢جـد^{٢})$

١٦) $(٣ن^{٣} + ٣ن - ١٠) - (٤ن^{٢} - ٥ن) + (٤ن^{٣} - ٣ن^{٢} - ٩ن + ٤)$

مثال ٣

١٧) **مبيعات:** يُقدّر متجر بيع إلكترونات أن تكلفة س وحدة من أجهزة التلفاز LCD بالريال تُعطى بالعبارة $-٤٢,١س^{٢} + ٢١٢٨س + ١٥٠٠$، وأن الربح من بيع س تلفازًا هو ٧٥س، حيث س بين صفر وَ ٨٠٠

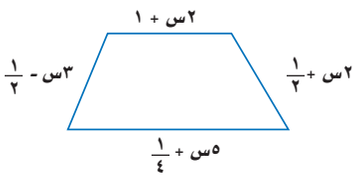
أ) اكتب كثيرة حدود تمثل سعر بيع س وحدة.

ب) ما سعر بيع ٧٥٠ تلفازًا؟

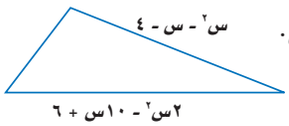
الربط مع الحياة

معدل العمر الافتراضي لجهاز التلفاز LCD هو ٦٠٠٠٠ ساعة. مما يعني استعماله مدة ٢٠ سنة أو أكثر إذا عمل أقل من ٨ ساعات يوميًّا.

١٨) **هندسة:** اكتب كثيرة حدود تمثِّل محيط الشكل المجاور.



١٩) **هندسة:** تمثِّل العبارة $٣س^{٢} - ٧س + ٢$ محيط الشكل المقابل. اكتب كثيرة حدود تمثِّل قياس الضلع الثالث.



مسائل مهارات التفكير العليا

٢٠) **اكتشف الخطأ:** يجد كل من ثامر وسلطان ناتج: $(٢س^{٢} - س) - (٣س + ٣س^{٢} - ٢)$. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

ثامر	سلطان
$(٢س^{٢} - س) - (٣س + ٣س^{٢} - ٢)$	$(٢س^{٢} - س) - (٣س + ٣س^{٢} - ٢)$
$= (٢س^{٢} - س) + (-٣س - ٣س^{٢} + ٢)$	$= (٢س^{٢} - س) + (-٣س + ٣س^{٢} - ٢)$
$= ٥س^{٢} - ٤س - ٢$	$= -س^{٢} - ٤س + ٢$

٢١) **مسألة مفتوحة:** اكتب كثيرتي حدود الفرق بينهما $٢س^{٣} - ٧س + ٨$.

٢٢) **تبرير:** أوجد مثالاً مضادًّا للعبارة الآتية: «طرح كثيرات الحدود عملية إبدالية».

٢٣) **اكتب:** صف كيف تجمع كثيرتي حدود وتطرحهما باستعمال الطريقتين الرأسية والأفقية. وأي الطريقتين هي الأسهل في نظرك؟ ولماذا؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدريب على اختبار

٢٤) يمكن التعبير عن ثلاثة أعداد صحيحة متتالية بالرموز: س، س +١، س+٢. ما مجموع هذه الأعداد الثلاثة؟

أ) س(س+١)(س+٢)　　جـ) ٣س + ٣

ب) س^{٣} +٣　　د) س + ٣

٢٥) **إجابة قصيرة:** ما محيط مربع طول ضلعه (٢س + ٣) وحدة؟

مراجعة تراكمية

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٦ – ٣)

٢٦) ٢٥　　٢٧) ن^{٣} + ٦و　　٢٨) ٢ + ٣أب^{٣} – أ^{٢}ب + ٤أ^{٦}　　٢٩) ٦ – ك^{٤} + ك^{٢}ع^{٣} + ٦ك^{٣}

بسِّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦ – ١)

٣٠) ن^{٣} (ن^{٢}) (–٢ن^{٣})　　٣١) (–٨و^{٤}ع^{٥})(٥وع^{٤})　　٣٢) (٦س ص^{٢})^{٢}(٢س^{٢}ص^{٢}ع^{٢})^{٣}

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كلًّا ممَّا يأتي:

٣٣) ل (ل^{٥}) (ل^{٧})　　٣٤) ن^{٣}(ن^{٢}) (–٢ ن^{٣})

٣٥) (٥ت^{٥} ف^{٢}) (١٠ت^{٣} ف^{٤})　　٣٦) (–٨و^{٤}هـ^{٥}) (٥و هـ^{٤})

٣٧) (٣^{٢})^{٣}　　٣٨) (٢^{٣})^{٢}

٣٩) (٢م^{٤} ك^{٣})^{٢} (–٣م ك^{٢})^{٣}　　٤٠) (٦ص ع)^{٢} (٢ص^{٢} ع^{٢} ز^{٢})^{٣}

الفصل ٦ اختبار منتصف الفصل

الدروس من ٦-١ إلى ٦-٤

بسِّط كل عبارةٍ مما يأتي: (الدرس ٦-١)

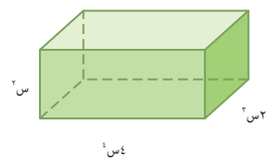
١) $(س^{٣})(٤ س^{٥})$

٢) $(م^{٢} ب^{٥})^{٣}$

٣) $[(٢س ص^{٣})^{٢}]^{٣}$

٤) $(٦أ ب^{٣} جـ^{٤})(-٣ أ^{٢} ب^{٣} جـ)$

٥) **اختيار من متعدد:** عبّر عن حجم المجسّم أدناه في صورة وحيدة حدٍّ: (الدرس ٦-١)



أ) $٦ س^{٩}$ جـ) $٨ س^{٢٤}$

ب) $٨ س^{٩}$ د) $٧ س^{٢٤}$

بسِّط كل عبارةٍ مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا: (الدرس ٦-٢)

٦) $\left(\frac{٢أ^{٤} ب^{٣}}{جـ^{٦}}\right)^{٣}$

٧) $\frac{٢ س ص^{٠}}{٦ س}$

٨) $\frac{م^{٧} ن^{٤} ب}{م^{٣} ن^{٣} ب}$

٩) $\frac{ب^{٤} هـ^{-٢}}{ر^{-٥}}$

١٠) **علم الفلك:** يُقَدِّر علماء الفلك رتبة عدد النجوم في الكون بـ $١٠^{٢١}$، ورتبة عدد النجوم في درب التبانة بحوالي ١٠٠ مليارٍ، فكم مرةً تساوي رتبة عدد النجوم في الكون من رتبة عدد نجوم درب التبانة؟ (الدرس ٦-٢)

حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنِّفها إلى وحيدة حدٍّ، أو ثنائية حدٍّ، أو ثلاثية حدودٍ: (الدرس ٦-٣)

١١) $٣ ص^{٢} - ٢$

١٢) $٤ ت^{٥} + ٣ ت^{٢} + ت$

١٣) $\frac{٣س}{٥ص}$

١٤) $ب س^{-٣}$

١٥) $٣ ب^{٢}$

١٦) $٢ س^{-٣} - ٤ س + ١$

١٧) **كثافة سكانية:** الجدول أدناه يبيِّن كثافة عدد السكان في إحدى المدن. (الدرس ٦-٣)

العام	عدد السنوات منذ عام ١٩٤٠م	الكثافة شخص/ميل مربع
١٩٤٠	٠	١
١٩٧٠	٣٠	١,٧
١٩٩٠	٥٠	٧,٢
٢٠٠٠	٦٠	١١,٤

أ) إذا كانت الدالة: $د(س) = ٠,٠٠٥ س^{٢} - ١٢٧,٠ س + ١$ تمثل الكثافة السكانية، حيث س عدد السنوات منذ عام ١٩٤٠م، فحدِّد نوع كثيرة الحدود.

ب) حدِّد درجة كثيرة الحدود.

جـ) استعمل الدالة لتوقع الكثافة السكانية لعام ٢٠٣٠م مبينًا خطوات الحل.

أوجد ناتج كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس ٦-٤)

١٨) $(٨ ل^{٢} - ٩ ل + ٥ ل^{٣}) + (٢ ل^{٢} - ل + ٢ ل^{٣})$

١٩) $(٥س - ٣ س^{٢} + ٧ س^{٣}) - (٢ س^{٢} + ٣ س)$

٢٠) $(٧ هـ^{٤} - ٢ هـ^{٢}) - (هـ^{٣} + ٢ هـ)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٦ ـ ٥

فيما سبق

درستُ ضرب وحيدات الحد.

والآن

- أضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود.
- أحل معادلات تتضمن حاصل ضرب وحيدات حد في كثيرات حدود.

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا؟

يريد نادٍ رياضي بناء قاعة خاصة بالتمارين الرياضية، على أن يزيد طولها على ثلاثة أمثال عرضها بـ ٣ أمتار. ولمعرفة مساحة أرض القاعة لتغطيتها بسجاد خاص بالتمارين الرياضية نضرب عرض القاعة في طولها؛ أي أن مساحة أرض القاعة تعطى بالعبارة ض (٣ض + ٣).

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود: يمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

مثال ١ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

أوجد ناتج: $-٣س^{٢}(٧س^{٢} - س + ٤)$.

الطريقة الأفقية:

$-٣س^{٢}(٧س^{٢} - س + ٤)$	العبارة الأصلية
$= -٣س^{٢}(٧س^{٢}) - (-٣س^{٢})(س) + (-٣س^{٢})(٤)$	خاصية التوزيع
$= -٢١س^{٤} - (-٣س^{٣}) + (-١٢س^{٢})$	اضرب
$= -٢١س^{٤} + ٣س^{٣} - ١٢س^{٢}$	بسّط

الطريقة الرأسية:

$٧س^{٢} - س + ٤$	
$(\times)\ -٣س^{٢}$	خاصية التوزيع
$-٢١س^{٤} + ٣س^{٣} - ١٢س^{٢}$	اضرب

تحقق من فهمك

١أ) $٥أ^{٢}(-٤أ^{٢} + ٢أ - ٧)$

١ب) $-٦د^{٣}(٣د^{٤} - ٢د^{٣} - د + ٩)$

ويمكنك استعمال الطريقة نفسها أكثر من مرة لتبسيط عبارات تتكون من عدة حدود .

مثال ٢ تبسيط العبارات

بسِّط $٢ل(-٤ل^{٢} + ٥ل) - ٥(٢ل^{٢} + ٢٠)$.

$٢ل(-٤ل^{٢} + ٥ل) - ٥(٢ل^{٢} + ٢٠)$	العبارة الأصلية
$= (٢ل)(-٤ل^{٢}) + (٢ل)(٥ل) + (-٥)(٢ل^{٢}) + (-٥)(٢٠)$	خاصية التوزيع
$= -٨ل^{٣} + ١٠ل^{٢} - ١٠ل^{٢} - ١٠٠$	اضرب
$= -٨ل^{٣} + (١٠ل^{٢} - ١٠ل^{٢}) - ١٠٠$	خاصية التجميع
$= -٨ل^{٣} - ١٠٠$	اجمع الحدود المتشابهة

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحقق من فهمك

٢أ) $٣(٥س^{٢}+٢س - ٤) - س(٧س^{٢} + ٢س - ٣)$

٢ب) $١٥ن(١٠ص^{٣}ن^{٥} + ٥ص^{٢}ن) - ٢ص(ص ن^{٢} + ٤ص^{٢})$

ويمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود عند حل مسائل من واقع الحياة .

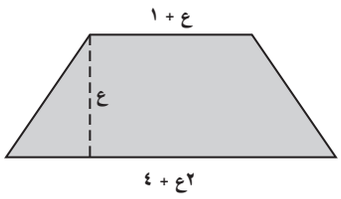
إرشادات للاختبار

الصيغ والقوانين

تزود بعض الاختبارات الوطنية والعالمية الطلاب بورقة تحتوي الصيغ والقوانين الأكثر استعمالاً. ويمكن الرجوع إليها قبل بدء حل المسألة عند عدم التأكد من الصيغة أو القانون المطلوب.

مثال ٣ من اختبار

لوحة جدارية: غُطيت لوحة جدارية على شكل شبه منحرف بورق ذهبي. فإذا كان ارتفاع اللوحة ٤٤سم. فكم سنتمترًا مربعًا من الورق الذهبي نحتاج إليه؟ ثم مثل الإجابة على نموذج الإجابة المعطى.



اقرأ الفقرة:

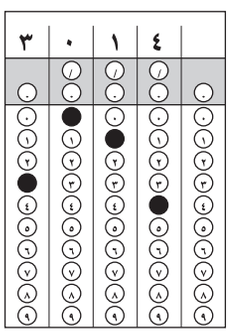
يطلب السؤال إيجاد مساحة شبه منحرف طولا قاعدتيه ع + ١، ٢ع + ٤ وارتفاعه ع.

حل الفقرة:

اكتب معادلة تمثِّل مساحة شبه المنحرف.

لتكن $ق_{١}$ = ع + ١، $ق_{٢}$ = ٢ع + ٤ ، ع = ارتفاع شبه المنحرف.

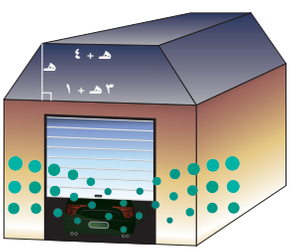
$م = \frac{١}{٢}ع(ق_{١} + ق_{٢})$	مساحة شبه المنحرف
$= \frac{١}{٢}ع[(ع + ١) + (٢ع + ٤)]$	$ق_{١}$ = ع + ١ ، $ق_{٢}$ = ٢ع + ٤
$= \frac{١}{٢}ع(٣ع + ٥)$	اجمع ثم بسّط
$= \frac{٣}{٢}ع^{٢} + \frac{٥}{٢}ع$	خاصية التوزيع
$= \frac{٣}{٢}(٤٤)^{٢} + \frac{٥}{٢}(٤٤)$	ع = ٤٤
= ٣٠١٤	بسّط



إذن نحتاج إلى ٣٠١٤ سم^{٢} من الورق الذهبي.

تحقق من فهمك

٣) مرآب: يمثل الجزء العلوي من الواجهة الأمامية للمرآب المجاور شكل شبه منحرف.إذا كان ارتفاع شبه المنحرف ١,٧٥ متر، فأوجد مساحة الجزء العلوي من الواجهة الأمامية للمرآب.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

حل معادلات تتضمن كثيرة حدود : تستطيع استعمال خاصية التوزيع لحل معادلات تتضمن حاصل ضرب وحيدة حد بكثيرة حدود.

إرشادات للدراسة

جمع الحدود المتشابهة
إذا أردت تبسيط عبارة تحوي الكثير من الحدود، فقد يساعدك على ذلك وضع دوائر حول أحد مجموعات الحدود المتشابهة ومستطيلات حول عناصر مجموعة أخرى، ومثلثات حول عناصر مجموعة ثالثة، وهكذا.

مثال ٤ معادلات تتضمن كثيرات حدود في طرفيها

حل المعادلة: ٢أ(٥أ − ٢) + ٣أ(٢أ + ٦) + ٨ = أ(٤أ + ١) + ٢أ(٦أ − ٤) + ٥٠

٢أ(٥أ − ٢) + ٣أ(٢أ + ٦) + ٨ = أ(٤أ + ١) + ٢أ(٦أ − ٤) + ٥٠	المعادلة الأصلية
١٠أ^{٢} − ٤أ + ٦أ^{٢} + ١٨أ + ٨ = ٤أ^{٢} + أ + ١٢أ^{٢} − ٨أ + ٥٠	خاصية التوزيع
١٦أ^{٢} + ١٤أ + ٨ = ١٦أ^{٢} − ٧أ + ٥٠	اجمع الحدود المتشابهة
١٤أ + ٨ = −٧أ + ٥٠	اطرح ١٦ أ^{٢} من كلا الطرفين
٢١أ + ٨ = ٥٠	أضف ٧أ إلى كلا الطرفين
٢١أ = ٤٢	اطرح ٨ من كلا الطرفين
أ = ٢	اقسم كلا الطرفين على ٢١

تحقق :

٢أ(٥أ − ٢) + ٣أ(٢أ + ٦) + ٨ = أ(٤أ + ١) + ٢أ(٦أ − ٤) + ٥٠	
٢(٢)[٥(٢) − ٢] + ٣(٢)[٢(٢) + ٦] + ٨ ≟ ٢[٤(٢) + ١] + ٢(٢)[٦(٢) − ٤] + ٥٠	
٤(٨) + ٦(١٠) + ٨ ≟ ٢(٩) + ٤(٨) + ٥٠	بسّط
٣٢ + ٦٠ + ٨ ≟ ١٨ + ٣٢ + ٥٠	اضرب
١٠٠ = ١٠٠ ✓	اجمع

تحقق من فهمك

٤أ) ٢س(س + ٤) + ٧ = (س + ٨) + ٢س(س + ١) + ١٢

٤ب) د(د + ٣) − د(د − ٤) = ٩د − ١٦

تأكد

مثال ١ أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

١) ٥ن(−٣ن^{٢} + ٢ن − ٤)

٢) ٦جـ^{٢}(٣جـ^{٣} + ٤جـ^{٢} + ١٠جـ − ١)

٣) −٣ل^{٤}ر^{٣}(٢ل^{٢}ر^{٤} − ٦ل^{٦}ر^{٣} − ٥)

٤) ٢أب(٧أ^{٤}ب^{٢} + أ^{٥}ب − ٢أ)

مثال ٢ بسِّط كل عبارة فيما يأتي :

٥) ن(٤ن^{٢} + ١٥ن + ٤) − ٤(٣ن − ١)

٦) س(٣س^{٢} + ٤) + ٢(٧س − ٣)

٧) −٢د (د^{٣}جـ^{٢} − ٤د جـ^{٢} + ٢د^{٢}جـ) + جـ^{٢}(د جـ^{٢} − ٣د^{٤})

مثال ٣ ٨) **تلفاز:** اشترى أحمد تلفازًا جديدًا. ارتفاع شاشته يساوي نصف عرضها، بالإضافة إلى ٥ بوصات، وعرضها ٣٠ بوصة. أوجد ارتفاع الشاشة بالبوصات.

مثال ٤ حلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

٩) −٦(١١ − ٢جـ) = ٧(−٢ − ٢جـ)

١٠) ن(٢ن + ٣) + ٢٠ = ٢ن(ن − ٣)

١١) أ(أ + ٣) + أ(أ − ٦) + ٣٥ = أ(أ − ٥) + أ(أ + ٧)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدرب وحل المسائل

مثال ١ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

١٢) ب(ب^{٢} − ١٢ب + ١)

١٣) ٢جـ^{٢}(٥جـ^{٣} − ١٥جـ^{٢} + ٢جـ + ٢)

١٤) ٢ب ر^{٢}(٢ب ر + ٥ب^{٢}ر − ١٥ب)

١٥) ٤ن^{٣}ل(٢ن^{٢}ل^{٢} − ١٠ن ل^{٤} + ٢)

مثال ٢ بسِّط كل عبارة فيما يأتي:

١٦) −٣(٥س^{٢} + ٢س + ٩) + س(٢س − ٣)

١٧) أ(−٨أ^{٢} + ٢أ + ٤) + ٣(٦أ^{٢} − ٤)

١٨) −٤د(٥د^{٢} − ١٢) + ٧(د + ٥)

١٩) −٩جـ(−٢جـ + جـ^{٢}) + ٣(جـ^{٢} + ٤)

٢٠) ٤ن(٢ن^{٣}ب^{٢} − ٣ن ب^{٢} + ٥ن) + ٤ب(٦ن^{٢}ب − ٢ن ب^{٢} + ٣ب)

مثال ٣

٢١) **سدود:** واجهة سد على شكل شبه منحرف. طول قاعدتها السفلية مِثْلا ارتفاعها. وقاعدتها العليا أقل من $\frac{١}{٥}$ ارتفاعها بـِ ١٠ أمتار.

أ) اكتب عبارة لإيجاد مساحة هذه الواجهة.

ب) إذا كان ارتفاع السد ٦٠ مترًا، فأوجد هذه المساحة.

مثال ٤ حلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

٢٢) ٧(ن^{٢} + ٥ن − ٩) + ن = ن(٧ن − ٢) + ١٣

٢٣) ٥(٤ع + ٦) − ٢(ع − ٤) = ٧ع(ع + ٤) − ع(٧ع − ٢) − ٤٨

٢٤) ٩جـ(جـ − ١١) + ١٠(٥جـ − ٣) = ٣جـ(جـ + ٥) + جـ(٦جـ − ٣) − ٣٠

٢٥) ٢ن(٥ن − ٢) − ١٠(ن^{٢} − ٣ن + ٦) = −٨ن(ن + ٤) + ٤(٢ن^{٢} − ٧ن)

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٢٦) $\frac{٢}{٣}$ن ب^{٢}(٣٠ب^{٢} + ٩ن^{٢}ب − ١٢)

٢٧) $\frac{٣}{٥}$ر^{٢}ل(١٠ر^{٣} + ٥رل^{٣} + ١٥ل^{٢})

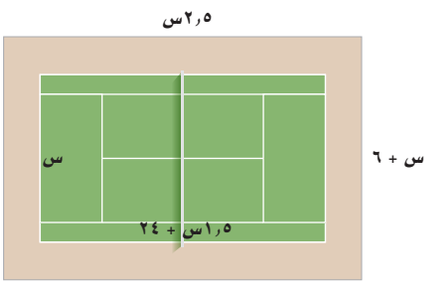
٢٨) − س^{٢}ع(٢ع^{٢} + ٤س ع^{٣}) + س ع^{٢}(س ع + ٥س^{٣}ع) + س^{٢}ع^{٣}(٣س^{٢}ع + ٤س ع)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الربط مع الحياة

يستخدم لاعبو التنس الأرضي مضارب لدفع أو صد كرة صغيرة مجوفة، فوق شبكة عرضية تنصِّف ملعبًا مستطيلًا. وتعتمد المهارة في هذه الرياضة، على التناسق بين حركات اليدين والعينين، وذكاء اللاعب في توقُّع اتجاه الكرة.

٢٩) تنس أرضي: يبني نادي التنس ملعبًا جديدًا يحيط به ممر منتظم، كما في الشكل المجاور.



أ) اكتب عبارة تمثِّل مساحة ملعب التنس.

ب) اكتب عبارة تمثِّل مساحة الممر.

٣٠) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذه المسألة درجة ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

أ) جدوليًّا: اكتب ثلاث وحيدات حد مختلفة الدرجات وثلاث كثيرات حدود مختلفة الدرجات، ثم حدد درجة كل وحيدة حد وكثيرة حدود، واضرب وحيدات الحد في كثيرات الحدود، وحدِّد درجة ناتج الضرب. وأخيرًا سجّل نتائجك في الجدول على النحو الآتي:

وحيدة الحد	الدرجة	كثيرة الحدود	الدرجة	ناتج ضرب وحيدة الحد في كثيرة الحدود	الدرجة

ب) لفظيًّا: خمِّن درجة ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود. ما درجة ناتج ضرب وحيدة حد من الدرجة أ، في كثيرة حدود من الدرجة ب؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٣١) تحدٍّ: أوجد قيمة ب التي تجعل $٣س^{ب}(٤س^{٢ب+٣} + ٢س^{٣ب-٢}) = ١٢س^{١٢} + ٦س^{١٠}$

٣٢) تبرير: هل توجد قيمة للمتغير س تجعل العبارة: $(س + ٢)^{٢} = س^{٢} + ٢^{٢}$ صحيحة؟ وإذا كان كذلك، فأوجد هذه القيمة. وفسِّر إجابتك.

٣٣) مسألة مفتوحة: اكتب وحيدة حد وكثيرة حدود باستعمال المتغير نفسه، وأوجد ناتج ضربهما.

٣٤) اكتب: صف خطوات ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

تدريب على اختبار

٣٥) يبيع محل ملابس م بنطالًا، ن قميصًا أسبوعيًّا، فإذا كان ثمن القميص ٨٠ ريالًا، والبنطال ١٢٠ ريالًا. فأي العبارات الآتية تمثِّل المبلغ الذي يحصل عليه المحل ثمنًا لذلك؟

أ) ٨٠م + ١٢٠ن

ب) ١٢٠م + ٨٠ن

جـ) ٢٠٠(م + ن)

د) ٩٦٠٠م ن

٣٦) إذا كانت أ = ٥س + ٧ص، ب = ٢ص − ٣س، فأوجد أ + ب

أ) ٢س − ٩ص

ب) ٣ص + ٤س

جـ) ٢س + ٩ص

د) ٢س − ٥ص

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس ٦- ٤)

٣٧) $(٣ع^{٢} + ٢ع - ١) + (ع^{٢} - ٦)$

٣٨) $(أ^{٣} - ٣أ^{٢} + ٤) - (٤أ^{٢} + ٧)$

٣٩) $(٨جـ^{٣} - ٣جـ^{٢} + جـ - ٢) - (٣جـ^{٣} + ٩)$

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٦- ٣)

٤٠) ١٢ص

٤١) -١٠

٤٢) $-٣ب^{٤}ر^{٥}ن^{٢}$

بسِّط كلًّا مما يأتي: (الدرس ٦- ١)

٤٣) $-ص^{٤}(-٢ص^{٣})$

٤٤) $٢م(-٤م^{٤}) - ٣(-٥م^{٣})$

٤٥) $٤ب^{٢}(-٢ب^{٣}) + ٢ب^{٤}(٥ب^{٦})$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كلًّا مما يأتي:

٤٦) $ب(ب^{٢})(ب^{٣})$

٤٧) $٢ص(٣ص^{٢})$

٤٨) $-ص^{٤}(-٢ص^{٣})$

٤٩) $-٣ع^{٣}(-٥ع^{٤} + ٢ع)$

٥٠) $٢م(-٤م^{٤}) - ٣(-٥م^{٣})$

٥١) $٤ب^{٢}(-٢ب^{٣}) + ٢ب^{٤}(٥ب^{٦})$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ضرب كثيرات الحدود

رابط الدرس الرقمي

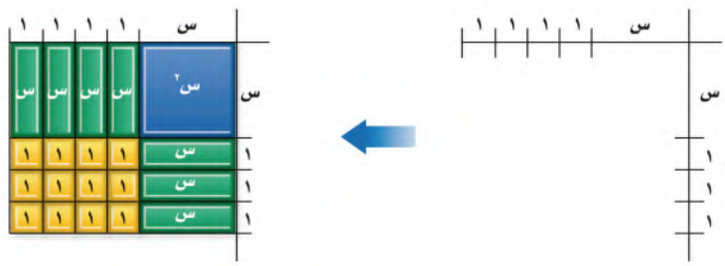
www.ien.edu.sa

يمكنك استعمال بطاقات الجبر لإيجاد ناتج ضرب ثنائيتي حد.

نشاط ١ ضرب ثنائيتي حد

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج (س + ٣) (س + ٤).

حدِّد بعدي المستطيل: س + ٣، س + ٤ كما في الشكل الأول أدناه، ثم استعمل بطاقات الجبر، لإكمال المستطيل كما في الشكل الثاني.



يحتوي المستطيل على بطاقة واحدة س^{٢}، ٧ بطاقات س، ١٢ بطاقة ١

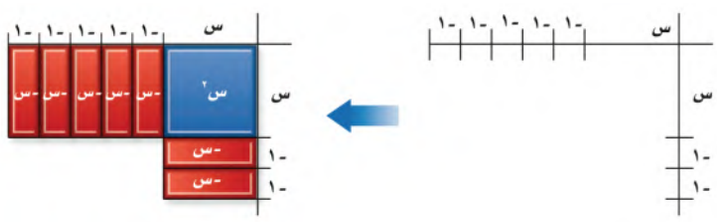
وعليه تكون مساحة المستطيل تساوي س^{٢} + ٧س + ١٢

إذن (س + ٣) (س + ٤)= س^{٢} + ٧س + ١٢

نشاط ٢ ضرب ثنائيتي حد

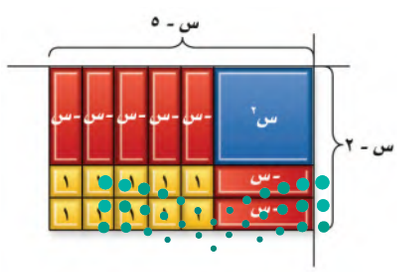
استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج (س – ٢) (س – ٥).

الخطوة ١: حدِّد بعدي المستطيل س – ٢، س – ٥ ثم استعمل بطاقات الجبر لتبدأ بتكوين المستطيل كما هو مُوضَّح في الشكل المقابل.



الخطوة ٢: حدِّد هل ستستعمل ١٠ بطاقات ١، أو ١٠ بطاقات –١ لتكملة المستطيل.
بما أن مساحة كل بطاقة ١ هو ناتج ضرب –١ في –١، لذا املأ الفراغ بـ ١٠ بطاقات ١ لتكملة المستطيل.

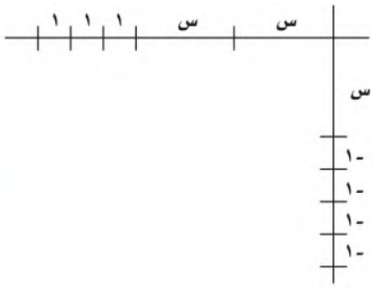
يحتوي المستطيل على بطاقة واحدة س^{٢}، ٧ بطاقات –س، ١٠ بطاقات ١
فتكون مساحة المستطيل س^{٢} – ٧س + ١٠.
لذا فإن (س– ٢) (س – ٥) = س^{٢} – ٧س + ١٠

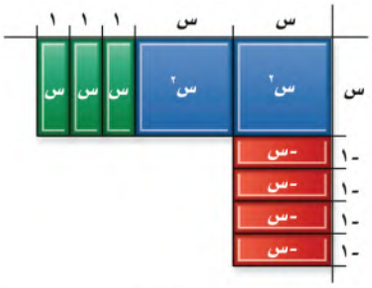


نشاط ٣ ضرب ثنائيتي حد

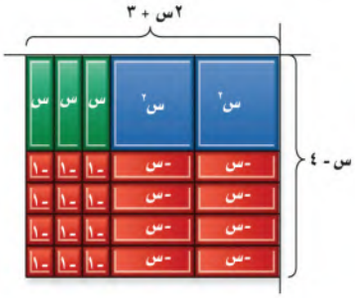
استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج (س – ٤) (٢س + ٣).

الخطوة ١: حدِّد بُعدي المستطيل س – ٤، ٢س + ٣. ثم استعمل بطاقات الجبر لتبدأ بتكوين المستطيل كما هو موضّح في الشكل المجاور.

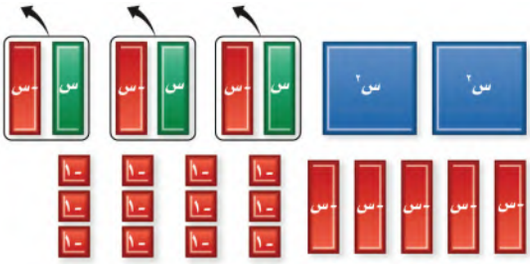




الخطوة ٢: حدّد أي بطاقات الجبر س أم – س ستستعمل. وأي البطاقات ١ أم –١ ستستعمل لتكملة المستطيل. البطاقة – س هي حاصل ضرب س في –١. والبطاقة –١ هي حاصل ضرب ١ في –١. استعمل للمستطيل ثماني بطاقات – س، وثلاث بطاقات س و١٢ بطاقة –١.



الخطوة ٣: أعد ترتيب البطاقات لتبسيط كثيرة الحدود التي كونتها، ولاحظ أن ٣ أزواج صفرية تشكَّلت من ٣ بطاقات س، و٣ بطاقات – س. وَ يوجد بطاقتان س^{٢}، و٥ بطاقات –س، و ١٢ بطاقة –١، إذن (س – ٤) (٢س + ٣)= ٢س^{٢} – ٥س – ١٢.



التمثيل والتحليل:

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج ضرب كلٍّ مما يأتي:

١) (س + ١) (س + ٤) ٢) (س –٣) (س – ٢) ٣) (س + ٥) (س – ١)

٤) (س + ٢) (٢س + ٣) ٥) (س –١) (٢س – ١) ٦) (س + ٤) (٢س – ٥)

٧) هل العبارة (س + ٣) (س+ ٥) = س^{٢}+ ١٥ صواب أم خطأ؟ تحقَّق من إجابتك باستعمال بطاقات الجبر.

٨) **اكتب:** يبيِّن الشكل المجاور تمثيلاً لِـ (س + ٤) (س + ٥) مقسمًا إلى ٤ أجزاء. فسِّر كيف يظهر هذا التمثيل استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج الضرب.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٦-٦

فيما سبق

درستُ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

والآن

- أضرب كثيرات الحدود باستعمال خاصية التوزيع.
- أضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

المفردات

طريقة التوزيع بالترتيب

العبارة التربيعية

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

ضرب كثيرات الحدود

لماذا؟

لخياطة ثوب نستعمل قطعة من القماش مستطيلة الشكل. ويُحدّد بُعداها بناءً على طول صاحب الثوب وعرضه.

فإذا كان طول قطعة القماش المراد تفصيلها كثوب لأيمن يساوي طول أيمن ع زائد ١٨٠ سم، أو ع + ١٨٠

وعرض القطعة يساوي نصف طول أيمن مضافًا إليه ٢٧ سم، أو $\frac{١}{٢}$ع + ٢٧. ولإيجاد المساحة التقريبية لقطعة القماش، فإنك تحتاج لإيجاد ناتج (ع + ١٨٠) ($\frac{١}{٢}$ع + ٢٧).

ضرب ثنائيتي حد: تستعمل خاصية التوزيع لضرب ثنائيتي حد مثل ع + ١٨٠، $\frac{١}{٢}$ع + ٢٧. ويمكن ضرب ثنائيتي الحد أفقيًّا أو رأسيًّا.

مثال ١ خاصية التوزيع

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

أ) (٢س + ٣) (س + ٥)

الطريقة الرأسية

اضرب في س	اضرب في ٥	اجمع الحدود المتشابهة
٢س + ٣	٢س + ٣	٢س + ٣
(×) س + ٥	(×) س + ٥	(×) س + ٥
٢س^{٢} + ٣س	٢س^{٢} + ٣س	٢س^{٢} + ٣س
	١٠س + ١٥	١٠س + ١٥

س(٢س + ٣) = ٢س^{٢} + ٣س ٥(٢س + ٣) = ١٠س + ١٥ ٢س^{٢} + ١٣س + ١٥

الطريقة الأفقية:

(٢س + ٣) (س + ٥) = ٢س(س + ٥) + ٣(س + ٥) اكتبها كمجموع ناتجي ضرب

= ٢س^{٢} + ١٠س + ٣س + ١٥ خاصية التوزيع

= ٢س^{٢} + ١٣س + ١٥ اجمع الحدود المتشابهة

ب) (س − ٢) (٣س + ٤)

الطريقة الرأسية:

اضرب في ٣س	اضرب في ٤	اجمع الحدود المتشابهة
س − ٢	س − ٢	س − ٢
(×) ٣س + ٤	(×) ٣س + ٤	(×) ٣س + ٤
٣س^{٢} − ٦س	٣س^{٢} − ٦س	٣س^{٢} − ٦س
	٤س − ٨	٤س − ٨
		٣س^{٢} − ٢س − ٨

٣س(س − ٢) = ٣س^{٢} − ٦س ٤(س − ٢) = ٤س − ٨

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الطريقة الأفقية:

(س − ٢)(٣س + ٤) = س(٣س + ٤) − ٢(٣س + ٤) — اكتبها كفرق بين حاصلي ضرب

= ٣س^{٢} + ٤س − ٦س − ٨ — خاصية التوزيع

= ٣س^{٢} − ٢س − ٨ — اجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١أ) (٣م + ٤)(م + ٥)

١ب) (٥ص − ٢)(ص + ٨)

وتُسمى الصيغة المختصرة لخاصية التوزيع في ضرب ثنائيتي حد **بطريقة التوزيع بالترتيب**.

قراءة الرياضيات

كثيرات الحدود كعوامل: تُقرأ العبارة (س+ ٤) (س−٢) على الصورة س زائد ٤ مضروبًا في س ناقص ٢

مفهوم أساسي — طريقة التوزيع بالترتيب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لضرب ثنائيتي حد، أوجد ناتج جمع كل من: ضرب الحدين الأولين، وضرب الحدين في الطرفين، وضرب الحدين الأوسطين، وضرب الحدين الأخيرين بالترتيب.

مثال

(س + ٤) (س − ٢) = (س) (س) + (س) (−٢) + (٤)(س) + (٤) (−٢)

ناتج ضرب الحدين الأولين — ناتج ضرب الحدين في الطرفين — ناتج ضرب الحدين الأوسطين — ناتج ضرب الحدين الأخيرين

أ خ و ط

= س^{٢} − ٢س + ٤س − ٨

= س^{٢} + ٢س − ٨

مثال ٢ — طريقة التوزيع بالترتيب

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

أ) (٢ص − ٧)(٣ص + ٥)

(٢ص − ٧)(٣ص + ٥) = (٢ص)(٣ص) + (٢ص)(٥) + (−٧)(٣ص) + (−٧)(٥) — طريقة التوزيع بالترتيب

= ٦ص^{٢} + ١٠ص − ٢١ص − ٣٥ — اضرب

= ٦ص^{٢} − ١١ص − ٣٥ — اجمع الحدود المتشابهة

ب) (٤ أ − ٥) (٢ أ − ٩)

(٤ أ − ٥) (٢ أ − ٩)

= (٤ أ)(٢ أ) + (٤ أ)(−٩) + (−٥)(٢ أ) + (−٥)(−٩) — طريقة التوزيع بالترتيب

= ٨ أ^{٢} − ٣٦ أ − ١٠ أ + ٤٥ — اضرب

= ٨ أ^{٢} − ٤٦ أ + ٤٥ — اجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

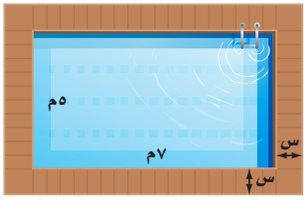
٢أ) (٤ب − ٥) (٣ب + ٢)

٢ب) (٢ص − ٥) (ص − ٦)

لاحظ أنه عند ضرب عبارتين خطيتين، تكون النتيجة عبارة تربيعية. **العبارة التربيعية** هي عبارة ذات متغير واحد من الدرجة الثانية. ونتيجة ضرب ثلاث عبارات خطية، هي عبارة من الدرجة الثالثة. ويمكنك استعمال طريقة التوزيع بالترتيب لإيجاد عبارة تمثل مساحة مستطيل أُعطي بعداه على صورة ثنائيتي حد.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال ٣ من واقع الحياة — التوزيع بالترتيب



بركة سباحة: يحيط ممر ببركة سباحة مستطيلة الشكل. إذا كان عرض الممر هو س متر. فاكتب عبارة تمثل مساحة سطح البركة والممر معًا.

افهم: المطلوب كتابة عبارة لمساحة سطح البركة والممر حولها.

خطّط: استعمل صيغة مساحة المستطيل بعد تحديد طول البركة وعرضها بالإضافة إلى عرض الممر.

حل: بما أن الممر منتظم من جميع جهات البركة، فإن طول المستطيل الممثل للبركة والممر يزيد على طول البركة بمقدار ٢س، وكذلك العرض؛ لذا يمكن تمثيل الطول بـِ ٢س+ ٧ والعرض بـِ ٢س+ ٥

المساحة = الطول × العرض — مساحة المستطيل

= (٢س+ ٧) (٢س+ ٥) — بالتعويض

= ٢س(٢س)+ ٢س(٥)+ (٧) (٢س)+ (٧) (٥) — طريقة التوزيع بالترتيب

= ٤س^{٢}+ ١٠س+ ١٤س+ ٣٥ — اضرب

= ٤س^{٢}+ ٢٤س+ ٣٥ — اجمع الحدود المتشابهة

لذا تكون المساحة الكلية للممر والبركة معًا هي ٤س^{٢}+ ٢٤س+ ٣٥

تحقق: اختر قيمة لِـ س وعوّضها في العبارتين (٢س+ ٧) (٢س+ ٥)، ٤س^{٢}+ ٢٤س + ٣٥ ستجد أن النتيجة هي نفسها لكلتا العبارتين.

تحقق من فهمك

٣) إذا كان طول البركة ٩ م وعرضها ٧ م. فأوجد مساحة سطح البركة والممر معًا.

الربط مع الحياة

تعتمد تكلفة بركة السباحة على عدة عوامل. منها: كون البركة فوق مستوى سطح الأرض، أو دون مستوى سطحها، ونوع المادة المستعملة في تبليطها.

ضرب كثيرات الحدود: يمكنك استعمال خاصية التوزيع أيضًا لإيجاد ناتج ضرب كثيرتي حدود.

مثال ٤ — خاصية التوزيع

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

أ) (٦س+ ٥) (٢س^{٢}− ٣س− ٥)

(٦س + ٥) (٢س^{٢} − ٣س − ٥)

= ٦س(٢س^{٢} − ٣س − ٥) + ٥(٢س^{٢} − ٣س − ٥) — خاصية التوزيع

= ١٢س^{٣} − ١٨س^{٢} − ٣٠س + ١٠س^{٢} − ١٥س − ٢٥ — اضرب.

= ١٢س^{٣} − ٨س^{٢} − ٤٥س − ٢٥ — اجمع الحدود المتشابهة

ب) (٢ص^{٢} + ٣ص − ١)(٣ص^{٢} − ٥ص + ٢)

(٢ص^{٢} + ٣ص − ١)(٣ص^{٢} − ٥ص + ٢)

= ٢ص^{٢}(٣ص^{٢}−٥ص+٢) +٣ص(٣ص^{٢}−٥ص + ٢) −١(٣ص^{٢}− ٥ص + ٢) — خاصية التوزيع

= ٦ص^{٤} − ١٠ص^{٣} + ٤ص^{٢} + ٩ص^{٣} − ١٥ص^{٢} + ٦ص − ٣ص^{٢} + ٥ص − ٢ — اضرب

= ٦ص^{٤} − ص^{٣} − ١٤ص^{٢} + ١١ص − ٢ — اجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

٤أ) (٣س − ٥)(٢س^{٢} + ٧س − ٨)

٤ب) (م^{٢} + ٢م − ٣)(٤م^{٢} − ٧م − ٩)

إرشادات للدراسة

ضرب كثيرات الحدود

عند ضرب كثيرة حدود تحوي م حدًّا في أخرى تحوي ن حدًّا، سيكون ناتج الضرب قبل التبسيط كثيرة حدود تحوي م × ن حدًّا، وفي المثال (٤أ) ناتج الضرب يحوي ٢×٣= ٦ حدود قبل التبسيط.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

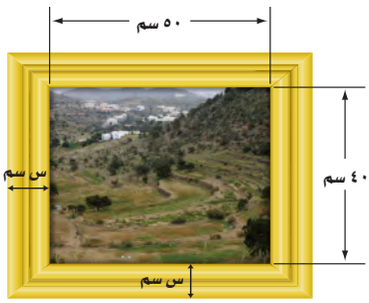
تأكد

المثالان ١ ، ٢ أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

١) (س + ٥)(س + ٢) ٢) (ص − ٢)(ص + ٤) ٣) (ب − ٧)(ب + ٣)

٤) (٤ن + ٣)(ن + ٩) ٥) (٨هـ − ١)(٢هـ − ٣) ٦) (٢أ + ٩)(٥أ − ٦)

مثال ٣ ٧) **إطار صورة:** صمّم خالد إطارًا لصورة كما في الشكل المجاور. فإذا كان الإطار منتظمًا من جميع جهاته، فاكتب عبارة تمثل المساحة الكلية للصورة والإطار معًا.



مثال ٤ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

٨) $(٤ص^{٢} - ٣)(٤ص^{٢} + ٧ص + ٢)$

٩) $(س^{٢} - ٤س + ٥)(٥س^{٢} + ٣س - ٤)$

تدرب وحل المسائل

المثالان ١ ، ٢ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

١٠) (٥ص − ٤)(٣ص − ١) ١١) (٦د − ٥)(٤د − ٧) ١٢) (٣م + ٥)(٢م + ٣)

١٣) (١٢ن − ٥)(١٢ن + ٥) ١٤) (٥ر + ٧)(٥ر − ٧) ١٥) (٨ل + ٤س)(٥ل − ٦س)

مثال ٣ ١٦) **حديقة:** يحيط ممر عرضه س بحديقة مستطيلة الشكل، طولها ٨ أمتار، وعرضها ٦ أمتار اكتب عبارة تمثل المساحة الكلية للحديقة والممر.

مثال ٤ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

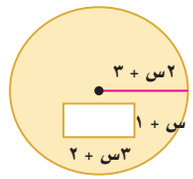
١٧) $(٢ص - ١١)(ص^{٢} - ٣ص + ٢)$ ١٨) $(٤أ + ٧)(٩أ^{٢} + ٢أ - ٧)$

١٩) $(س^{٢} + ٥س - ١)(٥س^{٢} - ٦س + ١)$ ٢٠) $(٦ع^{٢} - ٥ع - ٢)(٣ع^{٣} - ٢ع - ٤)$

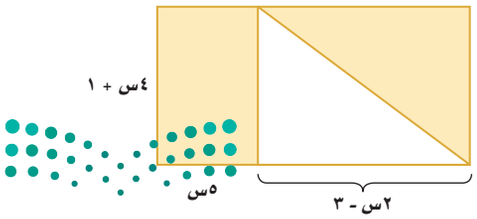
٢١) بسِّط العبارة: $(م + ٢)[(م^{٢} + ٣م - ٦) + (م^{٢} - ٢م + ٤)]$

هندسة: اكتب عبارة تمثل مساحة كل منطقة مظللة مما يأتي:

٢٢)



٢٣)



وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٢٤) **كرة طائرة:** تمثل العبارتان: (٧ص − ٥) متر، (٨ص + ٢) متر بعدي ملعب كرة طائرة.

أ) اكتب عبارة تمثل مساحة الملعب.

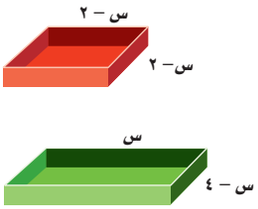
ب) إذا كان طول ملعب كرة طائرة ١٨ م، فأوجد مساحته.

الربط مع الحياة

فاز المنتخب السعودي العسكري ببطولة العالم العسكرية في كرة الطائرة التي استضافتها ألمانيا في عام ٢٠٠٨م.

٢٥) **هندسة:** اكتب عبارة تمثل مساحة مثلث طول قاعدته ٢س + ٣، وارتفاعه ٣س − ١

٢٦) **قوالب:** تسمح القوالب المختلفة بصنع ألواح شوكولاتة مربعة أو مستطيلة الشكل كما هو مبين جانبًا.



أ) ما قيم س الممكنة؟ فسِّر إجابتك.

ب) أيّ الشكلين مساحته أكبر؟

جـ) ما الفرق بين مساحتي القالبين؟

٢٧) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال قاعدة مربع مجموع حدين.

أ) **جدوليًا:** انقل الجدول الآتي وأكمله.

ب) **لفظيًا:** اكتب جملة توضح كيفية الحصول على مربع مجموع حدين.

جـ) **رمزيًا:** اكتب عبارة تمثل مربع مجموع الحدين أ + ب.

العبارة	(العبارة)^{٢}
س + ٥	
٣ص + ١	
ع + ك	

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٨) **تبرير:** وضِّح إذا كانت العبارة "يمكن *استعمال التوزيع بالترتيب لضرب ثنائية حد في ثلاثية حدود*" صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا، وَفسّر إجابتك.

٢٩) **تحدٍّ:** أوجد ناتج: $(س^{م} + س^{ن})(س^{م-١} - س^{١-ن} + س^{ن})$.

٣٠) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثنائية وثلاثية حدود تتضمن كل منهما متغيرًا واحدًا، ثم أوجد ناتج ضربهما.

٣١) **اكتب:** لخِّص الطرق التي يمكن استعمالها لضرب كثيرات الحدود.

تدريب على اختبار

٣٢) ما ناتج ضرب العبارتين: ٢س − ٥، ٣س + ٤؟

أ) ٥س − ١

ب) ٦س^{٢} − ٧س − ٢٠

جـ) ٦س^{٢} − ٢٠

د) ٦س^{٢} + ٧س − ٢٠

٣٣) **إجابة قصيرة:** أي نقطة على خط الأعداد تمثِّل عددًا مكعبه أكبر منه؟

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس ٦-٤)

٣٤) $(٧أ^{٢} - ٥) + (-٣أ^{٢} + ١٠)$

٣٥) $(٨ن - ٢ن^{٢}) + (٤ن - ٦ن^{٢})$

٣٦) $(٣أ + ٤أب + ٣ب) - (٢ب + ٥أ + ٨أب)$

بسِّط كلًّا من العبارات الآتية: (الدرس٦-١)

٣٧) $(-٢ن^{٤})^{٣} - ٣(-٢ن^{٣})^{٤}$

٣٨) $(-٣هـ^{٢})^{٣} - ٢(-هـ^{٣})^{٢}$

٣٩) $٢(-٥ص^{٣})^{٢} + (-٣ص^{٣})^{٣}$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كلًّا مما يأتي:

٤٠) $(-٢ت^{٤})^{٣} - ٣(-٢ت^{٣})^{٤}$

٤١) $٣(-٦ن^{٤})^{٢} + (-٢ن^{٢})^{٢}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٦-٧ حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درستُ ضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

والآن

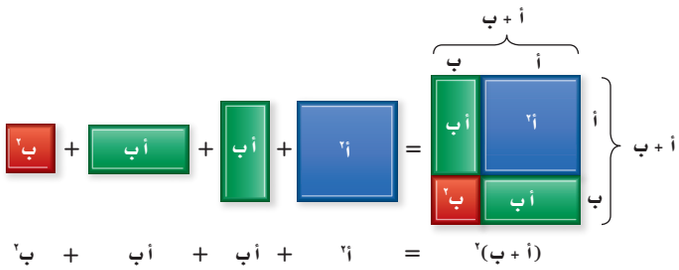
- أجد مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما.
- أجد ناتج ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما.

لماذا؟

يريد محمد تثبيت لوحة الرمي بالسهام إلى لوح خشبي مربع الشكل. فإذا كان نصف قطر لوحة السهام هو (نق + ١٢)، فما مساحة لوح الخشب الذي يحتاج إليه؟

يعرف محمد أن قطر لوحة السهام هو ٢ (نق + ١٢) = ٢نق + ٢٤. فيكون طول كل ضلع من أضلاع المربع يساوي ٢نق + ٢٤. ولإيجاد مساحة لوح الخشب الذي يحتاج إليه، فإن عليه إيجاد مساحة المربع. م= $(٢نق + ٢٤)^٢$

مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما: بعض أزواج ثنائيات الحد، كالمربعات مثل $(٢نق + ٢٤)^٢$ لها ناتج ضرب يتبع قاعدة معينة. واستعمال هذه القاعدة يسهل من عملية إيجاد ناتج الضرب. فمربع المجموع $(أ + ب)^٢ = (أ + ب)(أ + ب)$ هو أحد نواتج الضرب تلك.



مفهوم أساسي — مربع مجموع حدين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مربع (أ + ب) هو مربع أ زائد مثلي حاصل ضرب أ في ب مضافًا إليه مربع ب.

الرموز: $(أ + ب)^٢ = (أ + ب)(أ + ب) = أ^٢ + ٢أب + ب^٢$

مثال: $(س + ٤)^٢ = (س + ٤)(س + ٤) = س^٢ + ٨س + ١٦$

مثال ١ مربع مجموع حدين

أوجد ناتج: $(٣س + ٥)^٢$.

$(أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢أب + ب^٢$ — مربع المجموع

$(٣س + ٥)^٢ = (٣س)^٢ + ٢(٣س)(٥) + ٥^٢$ — أ = ٣س، ب = ٥

$= ٩س^٢ + ٣٠س + ٢٥$ — بسّط. باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، وتحقق من حلك

تحقق من فهمك

أوجد ناتج كل ممّا يأتي:

١أ) $(٨جـ + ٣د)^٢$

١ب) $(٣س + ٤ص)^٢$

ولإيجاد قاعدة مربع الفرق بين حدين، اكتب أ− ب على صورة أ + (− ب)، وربّع الناتج باستعمال قاعدة مربع مجموع حدين.

$(أ - ب)^٢ = [أ + (-ب)]^٢ = أ^٢ + ٢(أ)(-ب) + (-ب)^٢$ مربع مجموع حدين

$= أ^٢ - ٢أب + ب^٢$ بسّط

مفهوم أساسي — مربع الفرق بين حدين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مربع (أ − ب) هو مربع أ ناقص مثلي حاصل ضرب أ في ب مضافًا إليه مربع ب.

الرموز: $(أ - ب)^٢ = (أ - ب)(أ - ب) = أ^٢ - ٢أب + ب^٢$

مثال: $(س - ٣)^٢ = (س - ٣)(س - ٣) = س^٢ - ٦س + ٩$

تنبيه !

مربع الفرق بين حدين

تذكّر أن ناتج $(س - ٧)^٢$ لا يساوي $س^٢ - ٧^٢$ أو $س^٢ - ٤٩$، وأن

$(س - ٧)^٢ =$

$(س - ٧)(س - ٧) =$

$س^٢ - ١٤س + ٤٩$

مثال ٢ مربع الفرق بين حدين

أوجد ناتج: $(٢س - ٥ص)^٢$.

$(أ - ب)^٢ = أ^٢ - ٢أب + ب^٢$ مربع الفرق

$(٢س - ٥ص)^٢ = (٢س)^٢ - ٢(٢س)(٥ص) + (٥ص)^٢$ أ = ٢س ، ب = ٥ص

$= ٤س^٢ - ٢٠س ص + ٢٥ص^٢$ بسّط

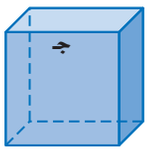
تحقق من فهمك

٢أ) $(٦ب - ١)^٢$ **٢ب)** $(أ - ٢ب)^٢$

يُسمى ناتج مربع المجموع أو مربع الفرق بين حدين بالمربع الكامل أو ثلاثي الحدود الذي يشكل مربعًا كاملًا. ويمكنك استعمال هذه القواعد لإيجاد أنماط لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال ٣ من واقع الحياة — مربع الفرق بين حدين

فيزياء: **طول ضلع مكعب ألمنيوم أقل من طول ضلع مكعب نحاس بـ ٤سم. اكتب معادلة تمثل مساحة سطح مكعب الألمنيوم بدلالة طول ضلع مكعب النحاس.**



ليكن جـ طول ضلع مكعب النحاس، إذن طول ضلع مكعب الألمنيوم جـ − ٤

مساحة السطح = $٦ل^٢$ مساحة سطح المكعب

مساحة السطح = $٦(جـ - ٤)^٢$ عوِّض عن ل بـ (جـ − ٤)

مساحة السطح = $٦[جـ^٢ - ٢(٤)(جـ) + ٤^٢]$ مربع الفرق

مساحة السطح = $٦(جـ^٢ - ٨جـ + ١٦)$ بسّط

تحقق من فهمك

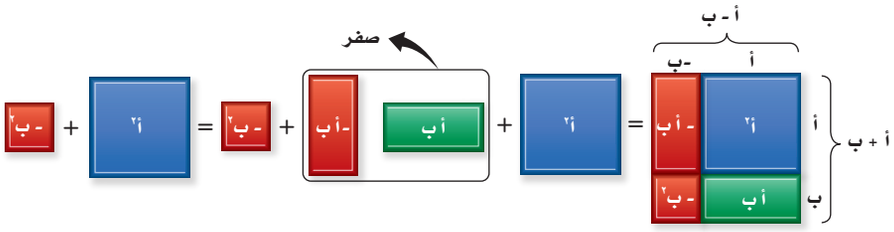
٣) حديقة: لدى عماد حديقة، طولها وعرضها ل مترًا، ويريد إضافة ٣ أمتار إلى كل من الطول والعرض.

أ) بيِّن كيف يمكن التعبير عن مساحة الحديقة الجديدة بمربع ثنائية حد.

ب) أوجد مربع ثنائية الحد السابقة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما: سنرى الآن ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما، (أ+ ب) (أ– ب). تذكر أنه يمكن كتابة أ – ب على الصورة أ + (– ب).



لاحظ أن كلًّا من الحدين الأوسطين هو معكوسٌ جمعي للآخر، ومجموعهما صفر.
لذا فإن (أ + ب)(أ – ب) = أ² – أب + أب – ب² = أ² – ب².

إرشادات للدراسة

أنماط: عند استعمال أي من هذه القواعد فإن أ، ب قد يكونان عددين، أو متغيرين، أو عبارتين بأعداد ومتغيرات.

مفهوم أساسي — ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: ناتج ضرب (أ + ب)، (أ – ب) هو مربع أ ناقص مربع ب.

الرموز: (أ + ب)(أ – ب) = (أ – ب)(أ + ب) = أ² – ب²

مثال ٤ — ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما

أوجد ناتج: (٢س² + ٣)(٢س² – ٣).

(أ + ب)(أ – ب) = أ² – ب² — حاصل ضرب المجموع في الفرق

(٢س² + ٣)(٢س² – ٣) = (٢س²)² – (٣)² — أ = ٢س²، ب = ٣

= ٤س⁴ – ٩ — بسّط

تحقق من فهمك

٤أ) (٣ن + ٢)(٣ن – ٢)

٤ب) (٤جـ – ٧د)(٤جـ + ٧د)

تأكد

المثالان ١، ٢ أوجد ناتج كل مما يأتي:

١) (س + ٥)²

٢) (١١ – أ)²

٣) (٢س + ٧ص)²

٤) (٣م – ٤)(٣م – ٤)

٥) (جـ – ٤هـ)(جـ – ٤هـ)

٦) (٣جـ + ٦د)²

مثال ٣ ٧) **ألعاب:** تحوي لعبة القرص الطائر قرصًا على شكل دائرة نصف قطرها (س + ٤) سم.

أ) اكتب عبارة تمثل مساحة القرص الطائر.

ب) إذا كان قطر القرص الطائر ٢٤ سم، فما مساحته؟ (ط ≈ ٣,١٤).

مثال ٤ أوجد ناتج كل مما يأتي:

٨) (أ – ٣)(أ + ٣)

٩) (س + ٥)(س – ٥)

١٠) (٦ص – ٧)(٦ص + ٧)

تدرب وحل المسائل

المثالان ١ ، ٢ أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

١١) (أ + ١٠)(أ + ١٠)

١٢) (ب − ٦)(ب − ٦)

١٣) $(\text{هـ} + ٧)^{٢}$

١٤) $(\text{س} + ٦)^{٢}$

١٥) $(٨ - \text{م})^{٢}$

١٦) $(٩ - ٢\text{ص})^{٢}$

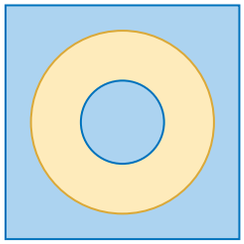
١٧) $(٢\text{ب} + ٣)^{٢}$

١٨) $(٥\text{ن} - ٢)^{٢}$

١٩) $(٨\text{هـ} - ٤\text{ن})^{٢}$

مثال ٣

٢٠) **مصارعة:** تكون سجادة المصارعة في العادة مربعة الشكل، طول ضلعها ١٢ مترًا تقريبًا، وتحتوي على دائرتين كما في الشكل المجاور. افترض أن نصف قطر الدائرة الداخلية (ر) متر، وأن نصف قطر الدائرة الخارجية يزيد على نصف قطر الدائرة الداخلية بِـ ٣ أمتار.



١٢ م

أ) اكتب عبارة تمثِّل مساحة الدائرة الكبرى.

ب) اكتب عبارة تمثِّل مساحة جزء المربع خارج الدائرة الكبرى.

مثال ٤ أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

٢١) (ل + ٣)(ل − ٣)

٢٢) (٤ − س)(٤ + س)

٢٣) (٢ك + ٥ر)(٢ك − ٥ر)

٢٤) $(٣\text{أ}^{٢} + ٧\text{ب})(٣\text{أ}^{٢} - ٧\text{ب})$

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

٢٥) $(٥\text{ص} + ٧)^{٢}$

٢٦) $(٨ - ١٠\text{أ})^{٢}$

٢٧) (٣ن + ١٢)(٣ن − ١٢)

٢٨) $(\text{أ} + ٤\text{ب})^{٢}$

٢٩) $(٣\text{ك} - ٥\text{ر})^{٢}$

٣٠) $(٢\text{جـ} - ٩\text{د})^{٢}$

٣١) $(٣\text{أ}^{٤} - \text{ب})(٣\text{أ}^{٤} + \text{ب})$

٣٢) $(٥\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢})^{٢}$

٣٣) $(٨\text{أ}^{٢} - ٩\text{ب}^{٣})(٨\text{أ}^{٢} + ٩\text{ب}^{٣})$

٣٤) $\left(\frac{٣}{٤}\text{ك} + ٨\right)^{٢}$

٣٥) $\left(\frac{٢}{٥}\text{ص} - ٤\right)^{٢}$

٣٦) $(٧\text{ع}^{٢} + ٥\text{ص}^{٢})(٧\text{ع}^{٢} - ٥\text{ص}^{٢})$

٣٧) (٢م + ٣)(٢م − ٣)(م + ٤)

٣٨) (ر + ٢)(ر − ٥)(ر − ٢)(ر + ٥)

٣٩) **هندسة:** اكتب كثيرة حدود تمثِّل مساحة الشكل أدناه.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

٤٠) (جـ + د)(جـ + د)(جـ + د)

٤١) $(٢أ - ب)^{٣}$

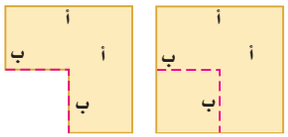
٤٢) (ف + جـ)(ف − جـ)(ف + جـ)

٤٣) (ك − م)(ك + م)(ك − م)

٤٤) $(ن - ب)^{٢}(ن + ب)$

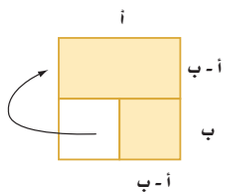
٤٥) $(ك + ر)^{٢}(ك - ر)$

٤٦) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في هذه المسألة قاعدة تمثل حاصل ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما، ابدأ بورقة مربعات. وارمز إلى طول كل ضلع في المربع بالرمز أ، ثم ارسم مربعًا صغيرًا في إحدى زواياه، وارمز إلى طول ضلعه بالرمز ب.

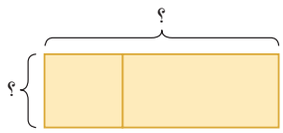


أ) عدديًا: أوجد مساحة كل مربع.

ب) حسيًا: قص المربع الصغير من الزاوية. ما مساحة الشكل المتبقية؟



جـ) تحليليًا: افصل المستطيل الصغير السفلي، ثم دوّره واسحبه إلى جوار المستطيل العلوي. ما طول المستطيل في التمثيل الجديد؟ وما عرضه؟ وما مساحته؟



د) تحليليًا: ما القاعدة التي توصلت إليها من الفقرتين ب، جـ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٧) حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى فيما يأتي:

(٢جـ − د)(٢جـ − د)	(٢جـ + د)(٢جـ − د)	(٢جـ + د)(٢جـ + د)	(جـ + د)(جـ + د)

٤٨) **تحدّ:** هل يوجد قاعدة لمكعب المجموع $(أ + ب)^{٣}$؟

أ) استقصِ إجابة هذا السؤال بإيجاد ناتج: (أ+ ب) (أ+ ب) (أ+ ب).

ب) استعمل القاعدة التي وجدتها في الفرع أ لإيجاد ناتج: $(س + ٢)^{٣}$.

٤٩) **تبرير:** أوجد قيمة جـ التي تجعل من العبارة $٢٥س^{٢} - ٩٠س + جـ$ مربعًا كاملاً.

٥٠) **اكتب:** صف كيف تجد مربع مجموع حدّين ومربع الفرق بين حدّين، وكيف تجد ناتج ضرب مجموع حدّين في الفرق بينهما.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدريب على اختبار

٥١) ما ناتج ضرب (٢أ– ٣) (٢أ– ٣)؟

أ) ٤أ^{٢} + ١٢أ + ٩

ب) ٤أ^{٢} + ٩

جـ) ٤أ^{٢} – ١٢أ – ٩

د) ٤أ^{٢} – ١٢أ + ٩

٥٢) يقطع مروان مسافة ٦كلم في م دقيقة بسيارته. كم دقيقة سيحتاج إليها لقطع ٣٠ كلم بهذا المعدل؟

أ) $\frac{٣}{١٥}$ م

ب) ١٨٠م

جـ) ٥م

د) $\frac{م}{٥}$

مراجعة تراكمية

٥٣) أوجد ناتج (٤هـ – ٣)(٢هـ – ٧): (الدرس ٦-٦)

٥٤) بسِّط العبارة ٣ب(٦ب – ٤) + ٢$\left(\frac{١}{٢}ب^{٢} – ٣ب\right)$: (الدرس ٦-٥)

٥٥) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١، ١)، (٤، ٧). (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلل كلًّا من الأعداد التالية إلى عواملها الأولية:

٥٦) ٤٠

٥٧) ١٢٠

٥٨) ٩٠٠

٥٩) ١٦٥

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

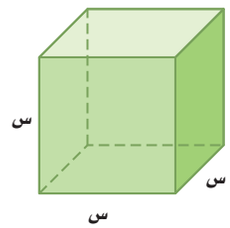
اختبار الفصل

بسِّط كل عبارة فيما يأتي:

١) $(س^{٢})(٧ س^{٨})$

٢) $(٥ أ^{٧} ب جـ^{٢})(-٦ أ^{٢} ب جـ^{٥})$

٣) **اختيار من متعدد:** عبّر عن حجم المجسّم أدناه كوحيدة حد:



أ) $س^{٣}$ ب) ٦ س

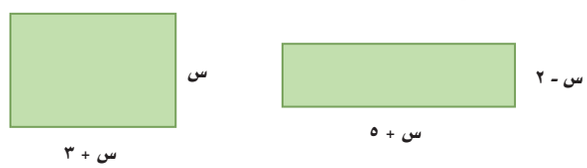
جـ) $٦ س^{٣}$ د) $س^{٦}$

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي:

٤) $(س + ٥) + (س^{٢} - ٣ س + ٧)$

٥) $(٧ م - ٨ ن^{٢} + ٣ ن) - (-٢ن^{٢} + ٤ م - ٣ ن)$

٦) **اختيار من متعدد:** ترغب نوال في شراء سجاد لغرفتين في منزلها أبعادهما مبينة أدناه. فما المساحة الكلية للمنطقة التي ستُغطى بالسجاد؟



أ) $س^{٢} + ٣س$

ب) $س^{٢} + ٣ س - ٥$

جـ) $٢ س^{٢} + ٦ س - ١٠$

د) $٨ س + ١٢$

بسِّط كل عبارة فيما يأتي، مفترضًا أن أي مقام لا يساوي صفرًا:

٧) $\frac{س^{٦} ص^{٨}}{س^{٢}}$

٨) $\left(\frac{٢ أ^{٤} ب^{٣}}{جـ^{٦}}\right)^{٠}$

٩) $\frac{٢ س ص^{-٧}}{٨ س}$

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

١٠) $أ(أ^{٢} + ٢ أ - ١٠)$

١١) $(٢ أ - ٥)(٣ أ + ٥)$

١٢) $(س - ٣)(س^{٢} + ٥ س - ٦)$

١٣) $(س + ٣)^{٢}$

١٤) $(٢ب - ٥)(٢ب + ٥)$

١٥) **هندسة:** منشور رباعي قاعدته مستطيلة وأبعاده هي: س، س + ٣، ٢ س + ٥

أ) أوجد حجم المنشور بدلالة س.

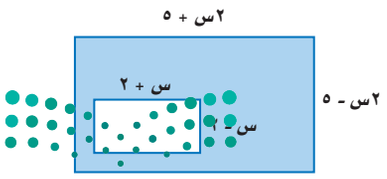
ب) أوجد حجم المنشور بتعويض قيمتين لِـ س، وكيف تقارن بين الحجمين؟

حل كل معادلة فيما يأتي:

١٦) $٥(ن^{٢} - ٣ ن + ٢) = ن(٥ ن - ٢)$

١٧) $٣ س (س + ٢) = ٣(س^{٢} - ٢)$

١٨) **هندسة:** اكتب عبارةً تمثل مساحة المنطقة المظلَّلة في الشكل الآتي:



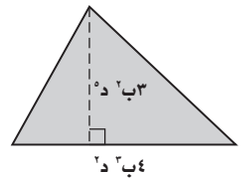
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الاختبار التراكمي

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) عبِّر عن مساحة المثلث أدناه في صورة وحيدة حد؟



أ) ١٢ ب^{٥} د^{٧} جـ) ٦ ب^{٦} د^{١٠}

ب) ١٢ ب^{٦} د^{١٠} د) ٦ ب^{٥} د^{٧}

٢) بسِّط العبارة $\left(\frac{٢ع^{٢}ل^{٥}}{٣س^{٤}}\right)^{٣}$

أ) $\frac{٢ع^{٥}ل^{٨}}{٣س^{٧}}$ جـ) $\frac{٨ع^{٥}ل^{٨}}{٢٧س^{٧}}$

ب) $\frac{٨ع^{٦}ل^{١٥}}{٢٧س^{١٢}}$ د) $\frac{٢ع^{٦}ل^{١٥}}{٣س^{١٢}}$

٣) إذا كانت مساحة المستطيل أدناه س^{٢} − ٩ وحدة مربعة، فكم وحدة عرضه؟

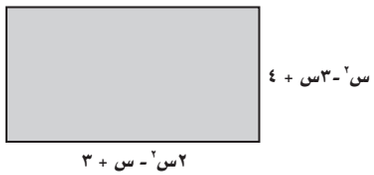
أ) س + ٣ جـ) س − ٩

ب) س + ٩ د) س − ٣

إرشادات للاختبارات

سؤال ٢ : استعمل قوانين الأسس لتبسيط العبارة، وتذكر أنه لإيجاد أس الأس، نضرب الأسس.

٤) عبِّر عن محيط المستطيل أدناه بصورة كثيرة حدود.



أ) ٣س^{٢} − ٤س + ٧

ب) ٣س^{٢} + س + ٧

جـ) ٦س^{٢} − ٨س + ١٤

د) ٦س^{٢} − ٤س + ٧

٥) أوجد ناتج طرح: (٧أ^{٢} + ٦أ − ٢) − (−٤أ^{٣} + ٣أ^{٢} + ٥)

أ) ٤أ^{٣} + ٤أ^{٢} + ٦أ − ٧

ب) ١١أ^{٢} + ٣أ − ٧

جـ) ٤أ^{٣} + ١٠أ^{٢} + ٦أ + ٣

د) ٤أ^{٣} + ٧أ^{٣} − ٣أ

٦) بسّط العبارة: $\frac{هـ^{-٣}ل^{٢}}{هـ^{٣}ل^{-٤}}$

أ) $\frac{هـ^{٦}}{ل^{٦}}$ جـ) ل^{٢}

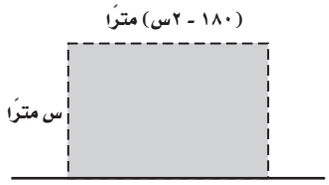
ب) $\frac{ل^{٦}}{هـ^{٦}}$ د) هـ^{٦} ل^{٦}

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

٧) يريد مزارعٌ زراعة قطعة الأرض المستطيلة المبيَّنة في الشكل:



أ) اكتب كثيرة حدود تعبِّر عن مساحة الأرض.

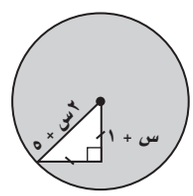
ب) أوجد مساحة قطعة الأرض، إذا كان عرضها ٤٠ مترًا.

٨) **اكتشف المختلف:** أي العبارات التالية مختلفة؟ فسِّر إجابتك.

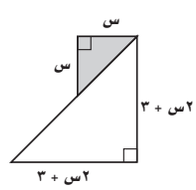
(٣ م − ٢ ن) (٣ م + ٢ ن)
(٣ م + ٢ ن) (٣ م + ٢ ن)
(٣ م + ٢ ن) (٣ م − ٢ ن)

اكتب عبارةً تمثِّل مساحة كل منطقة مظلَّلةٍ ممَّا يأتي:

٩)



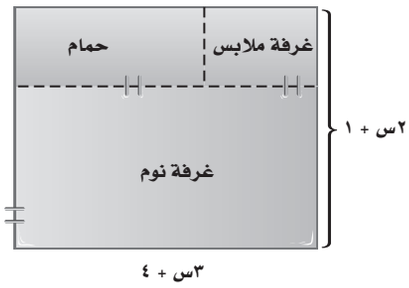
١٠)



إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحًا خطوات الحل:

١١) المخطط التالي يبيِّن تفاصيل جناح نوم:



أ) أوجد مساحة الجناح كاملًا.

ب) إذا كان عرض غرفة الملابس س ، وطولها س + ١ ، فأوجد مساحة غرفة الملابس.

جـ) أوجد مساحة الحمام.

د) أوجد مساحة غرفة النوم.

للمساعدة ..											
إذا لم تجب عن السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
فراجع الدرس ..	٦-١	٦-٢	٦-٧	٦-٤	٦-٤	٦-٢	٦-٥	٦-٧	٦-٦	٦-٧	٦-٦

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

الفصل ٧
التحليل والمعادلات التربيعية

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحدّ وكثيرات الحدود.

والآن

- أحلّل وحيدات الحدّ.
- أحلّل ثلاثيات الحدود.
- أحلّل الفرق بين مربعين.
- أحلّ معادلات تربيعية.

لماذا؟

هندسة عمارة: يمكن استعمال المعادلات التربيعية لنماذج إنشاءات هندسية كأقواس مداخل بعض المباني الضخمة مثل مدخل مطار الملك خالد الدولي في الرياض.

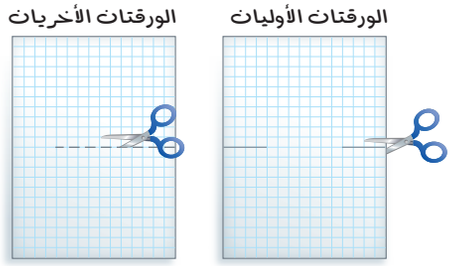
المفردات:

- الصيغة التحليلية ص (١٠٠)
- تحليل كثيرة الحدود ص (١٠٤)
- المعادلة التربيعية ص (١١٥)
- كثيرة الحدود الأولية ص (١٢٣)

المطويات منظم أفكار

التحليل والمعادلات التربيعية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول التحليل والمعادلات التربيعية، مبتدئًا بأربع أوراق مربعات.

١ **اطو** الأوراق الأربعة من المنتصف عرضيًّا، وقصَّ ٥سم بدءًا من طرفي خط الطي لأول ورقتين، وقصّ الورقتين الأخريين من المركز، وتوقّف على بعد ٥سم من طرفيها.



٢ **أدْخل** الورقتين الأوليين خلال الورقتين الأخريين، وسمِّ الورَقة الأولى "التحليل والمعادلات التربيعية"، وسمِّ الصفحات الأخرى بأرقام الدروس، وخصص الصفحة الأخيرة للمفردات الجديدة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل ٧

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦ - ٥)

١) أ(أ + ٥) ٢) ٢(٣ + س)

٣) ن(ن − ٣ن^{٢} + ٢) ٤) −٦(س^{٢} − ٥س + ٦)

٥) **مال:** ذهب خمسة أصدقاء إلى متنزه ترفيهي، فاشترى كل منهم بطاقة دخول بِـ ٩ ريالات، وعلبة عصير بـ ٣ ريالات، وشطيرة بـ ٦ ريالات. فاكتب عبارة تمثّل المبلغ الإجمالي الذي دفعوه جميعًا.

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس ٦ - ٦)

٦) (س + ٢)(س − ٥)

٧) (س + ٤)(س − ١)

٨) (٢أ − ٣)(٥أ + ٤)

٩) (٣س − ٤)(س + ٥)

١٠) (س + ٤)(س + ٧)

١١) (٦أ − ٢ب)(٩أ + ب)

١٢) **مِفْرش مائدة:** مِفْرش مائدة مستطيل الشكل إذا كان طوله (٢س+ ٣)، وعرضه (س+ ١)، فاكتب عبارة تُمثلُ مساحته.

أوجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس ٦ - ٧)

١٣) (٣ − أ)^{٢}

١٤) (س + ٥)^{٢}

١٥) (٣س − ٢ص)^{٢}

١٦) (٢س + ٥ص)(٢س − ٥ص)

١٧) **تصوير:** صورة بُعداها: (س+ ٦) سم، (س− ٦) سم. فما مساحتها؟

مراجعة سريعة

مثال ١

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة العبارة:
٦س(−٣س − ٥س − ٥س^{٢} + س^{٣})، ثم بسّطها.

٦س(−٣س − ٥س − ٥س^{٢} + س^{٣})

= ٦س(−٣س)+٦س(−٥س)+٦س(−٥س^{٢})+٦س(س^{٣})

= −١٨س^{٢} − ٣٠س^{٢} − ٣٠س^{٣} + ٦س^{٤}

= −٤٨س^{٢} − ٣٠س^{٣} + ٦س^{٤}

مثال ٢

أوجد ناتج الضرب: (س + ٣)(٢س − ١).

(س + ٣)(٢س − ١) — العبارة الأصلية

= س(٢س) + س(−١) + ٣(٢س) + ٣(−١) — طريقة التوزيع بالترتيب

= ٢س^{٢} − س + ٦س − ٣ — اضرب

= ٢س^{٢} + ٥س − ٣ — اجمع الحدود المتشابهة

مثال ٣

أوجد ناتج: (ص + ٨)^{٢}.

(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢} — مربّع مجموع حدّين

(ص + ٨)^{٢} = (ص)^{٢} + ٢(ص)(٨) + ٨^{٢} — أ = ص ، ب = ٨

= ص^{٢} + ١٦ص + ٦٤ — بسّط

٧-١ تحليل وحيدات الحد

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحدّ وقسمة كثيرة حدود على وحيدة حدّ.

والآن

- أحلّل وحيدة الحدّ إلى عواملها.
- أجد القاسم المشترك الأكبر لوحيدات الحدّ.

المفردات

الصيغة التحليلية

القاسم المشترك الأكبر (ق. م. أ)

لماذا؟

تعمل هند قلائد خرز، فإذا كان لديها ٦٠ خرزة فضية اللون، و١٥ خرزة ذهبية اللون، وترغب في أن تحتوي القلادة الواحدة على نوع واحد من الخرز، وفي كلٍّ منها العدد نفسه، وتحوي كلٌّ منها أكبر عدد من الخرز، فستحتاج هند إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر للعددين ٦٠ وَ ١٥

تحليل وحيدات الحدّ: تحليل وحيدات الحدّ يشبه تحليل الأعداد الكلية. وتكون وحيدة الحدّ **بالصيغة التحليلية** إذا عُبّر عنها بحاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات بأُسّ ١

عند كتابة وحيدة الحد بالصيغة التحليلية نقول: إننا حللنا وحيدة الحد تحليلاً تامًّا.

مثال ١ تحليل وحيدة الحدّ

حلّل: $-٢٠س^٣ص^٢$ تحليلًا تامًّا.

$-٢٠س^٣ص^٢ = -١ \times ٢٠س^٣ص^٢$ — $-٢٠ = -١ \times ٢٠$

$= -١ \times ٢ \times ١٠ \times س \times س \times س \times ص \times ص$ — $٢٠ = ٢ \times ١٠$، $س^٣ = س \times س \times س$، $ص^٢ = ص \times ص$

$= -١ \times ٢ \times ٢ \times ٥ \times س \times س \times س \times ص \times ص$ — $١٠ = ٢ \times ٥$

لذا، فإن التحليل للعوامل لوحيدة الحد $-٢٠ س^٣ص^٢$ هو: $-١ \times ٢ \times ٢ \times ٥ \times س \times س \times س \times ص \times ص$.

تحقق من فهمك

حلّل كل وحيدة حدّ فيما يأتي تحليلًا تامًّا:

أ١) $٣٤س^٤ص^٣$ **ب١)** $-٥٢أ^٢ب$

القاسم المشترك الأكبر: قد يكون لعددين كليين أو أكثر بعضُ العوامل الأولية المشتركة. ويُسمّى حاصل ضرب العوامل الأولية المشتركة القاسمَ (العامل) المشتركَ الأكبرَ لها.

القاسم المشترك الأكبر (ق. م. أ) لعددين أو أكثر هو أكبر عدد يكون عاملًا لكلٍّ من هذه الأعداد، ويمكن إيجاد القاسم المشترك الأكبر لوحيدتي حدٍّ أو أكثر بطريقة مشابهة.

مثال ٢ القاسم المشترك الأكبر لمجموعة من وحيدات الحدّ

أوجد (ق.م.أ) لوحيدتي الحدّ $١٢أ^٢ب^٢جـ$، $١٨أب^٣$.

$١٢أ^٢ب^٢جـ = ٢ \times ٢ \times ٣ \times أ \times أ \times ب \times ب \times جـ$ — حلّل كلّ وحيدة حد تحليلًا تامًّا

$١٨أب^٣ = ٢ \times ٣ \times ٣ \times أ \times ب \times ب \times ب$ — ضع دائرة حول العوامل الأولية المشتركة

إذن، (ق.م.أ) لوحيدتي الحد $١٢أ^٢ب^٢جـ$، $١٨أب^٣$ هو $٢ \times ٣ \times أ \times ب \times ب = ٦أب^٢$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحقق من فهمك

أوجد (ق. م. أ) لكل زوج من وحيدات الحدّ الآتية:

٢أ) ٦س ص^{٣}، ١٨ص ع **٢ب)** ١١أ^{٢}ب، ٢١أ ب^{٢} **٢جـ)** ٣٠ك^{٣}ر^{٢}ن، ٥٠ك^{٢}ر ن

مثال ٣ من واقع الحياة إيجاد (ق.م.أ)

زهور: لدى نورة ٢٠ وردة و٣٠ زنبقةً لعمل باقات زهور. فما أكبر عدد من الباقات المتماثلة يمكن عملها دون ترك أي زهرة؟ وما عدد زهور كل نوع في كل باقة؟

أوجد (ق .م. أ) للعددين ٢٠ وَ ٣٠

٢٠ = ٢^{٢} × ٥ اكتب تحليل كل عدد إلى عوامله الأولية

٣٠ = ٢ × ٣ × ٥ العاملان الأوليان المشتركان هما: ٢، ٥

(ق .م. أ) للعددين ٢٠ وَ ٣٠ هو ٢ × ٥ = ١٠؛ لذا يمكن لنورة عمل ١٠ باقات.

بما أن ٢ × ١٠ = ٢٠، ٣ × ١٠ = ٣٠؛ لذا فستحتوي كل باقة على وردتين و٣ زنابق.

تحقق من فهمك

٣) ما أكبر قيمة يمكن أن تمثّل الطول المشترك لكل من المستطيلين اللذين مساحتاهما ٨٤سم^{٢}، ٧٠سم^{٢}، علمًا بأن بُعديْ كل منهما عددان كليان؟

تأكد

مثال ١ حلّل كلَّ وحيدة حد فيما يأتي تحليلاً تامًّا:

١) ١٢جـ^{٢}هـ^{٤} **٢)** −٣٨ر ب^{٢}ن^{٢}

٣) −١٧س^{٣}ص^{٢}ع **٤)** ٢٣أ ب^{٣}

المثالان ٢ ، ٣ أوجد (ق. م. أ) لكل زوج من وحيدات الحدّ الآتية:

٥) ٢٤جـ د^{٣}، ٤٨جـ^{٢}د **٦)** ٧جـ هـ، ١١م ب

٧) ٨س^{٢}ص^{٥}، ٣١س ص^{٣} **٨)** ١٠أ ب، ٢٥أ

٩) **هندسة:** ما أكبر قيمة يمكن أن تمثِّل العرض المشترك لكل من المستطيلين اللذين مساحتاهما ١٥سم^{٢}، ١٦سم^{٢}، علمًا بأن بُعديْ كلٍّ منهما عددان كليان.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حلِّل كل وحيدة حدٍّ فيما يأتي تحليلًا تامًّا:

١٠) ٩٥س ص^{٢} **١١)** −٣٥أ^{٣}جـ^{٢} **١٢)** ٤٣جـ^{٣}هـ^{٣}

١٣) ٨١ن^{٥}ب **١٤)** −١٠٠ك^{٤}ر **١٥)** ١٢١أ ب جـ^{٢}

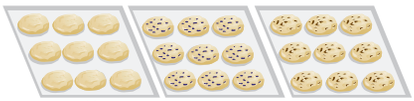
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

المثالان ٢ ، ٣ أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حد مما يأتي:

١٦) ٢٥س^{٣}، ٤٥س^{٤}، ٦٥س^{٢} ١٧) ٢٦ع^{٢}، ٣٢ع، ٤٤ع^{٤} ١٨) ٣٠جـ هـ^{٢}، ٤٢جـ^{٢}هـ، ٦٦جـ

١٩) ١٢ك ر، ٨ر^{٢}، ١٦ر ن ٢٠) ٤٢أ^{٢}ب، ٦أ^{٢}، ١٨أ^{٣} ٢١) ١٥ر^{٢}ن، ٣٥ن^{٢}، ٧٠ر ن

٢٢) **كعك:** يريد حامد وضع العدد نفسه من كل نوع من الكعك في كلّ كيس، بحيث يحتوي الكيس على أنواع الكعك جميعها. ما أكبر عدد ممكن من الأكياس يلزمه؟



٥٤	٤٠	٣٠
برقائق الشوكولاتة	بالشوفان والزبيب	بزبدة الفول السوداني

٢٣) **هندسة:** مساحة مثلث ٢٨سم^{٢}، كم يمكن أن يكون طول كلّ من قاعدته وارتفاعه بالأعداد الكلية؟

٢٤) **كتب:** بكم طريقة تستطيع أسماء تنظيم ٣٦ كتابًا على رفين على الأقل، بحيث يوضع على كلّ رفّ العدد نفسه من الكتب، ولا يقل عن ٤؟

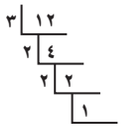
٢٥) **معلبات:** بكم طريقة يستطيع سعيد ترتيب ٨٠ علبة على أربعة رفوف على الأقل، بحيث يكون عدد العلب متساويًا على كل رفٍّ ولا يقل عن ٥؟

٢٦) **تبرّع:** اشترى صقر مجموعة اللوازم المدرسية التالية: ٢٠ قلم رصاص، ١٥٠ ورقة ملونة، ١٢٠ ملف أوراق، ويريد وضعها في حزم متماثلة؛ ليتبرع بها لأكبر عدد ممكن من الطلاب. كم حزمة يمكنه عملها؟ وكم قطعة من كل نوع ستكونُ في كل حزمة؟

٢٧) **نظرية الأعداد:** العددان الأوليان التوأمان هما عددان أوليان فرديّان متتاليان. أول زوجين منهما هما: ٣ وَ٥، ٥ وَ٧. اكتب الأزواج الخمسة التالية لهما.

٢٨) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال طريقة تحليل عدد إلى عوامله الأولية.

أ) تحليليًّا: انسخ مخطط السلم المُبيِّن جانبًا ٦ مرات، وسجِّل في الجزء العلوي الأيمن من كل شكل عددًا كليًّا، بحيث يكون اثنان منها أوليين.



العدد ١٢ يكتب على الشكل $٢^{٢} \times ٣$ عند تحليله لعوامله الأولية

ب) تحليليًّا: اختر عاملاً أوليًّا لأحد الأعداد. وسجّل العامل إلى يسار هذا العدد في الشكل، ثم قسّم العددين واكتب الناتج تحت العدد، كرر الخطوات السابقة حتى يصبح ناتج القسمة ١. وأضف أو احذف أجزاءً من الشكل إذا تطلّب الأمر ذلك، ثم كرّر هذه العملية مع جميع الأعداد.

جـ) لفظيًّا: ما التحليل للعوامل الأولية لكل عدد من الأعداد الستة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٩) **تحدّ:** أوجد أصغر زوج من الأعداد يحقّق الشروط الآتية:(ق. م .أ) للعددين يساوي ١١، أحدهما زوجي والآخر فردي، وأحدهما ليس من مضاعفات الآخر.

٣٠) **تبرير:** المضاعف المشترك الأصغر (م. م. أ) لعددين أو أكثر هو أصغر عدد يكون مضاعفًا لكل عدد منها. اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين(ق .م .أ) وَ (م. م. أ) لعددين أو أكثر.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٣١) **تبرير:** هل العبارة "القاسم المشترك الأكبر لأي وحيدتي حد لا يساوي ١ أبدًا" صحيحة أم خاطئة؟ ادعم إجابتك بمثال أو مثال مضاد.

٣٢) **تحدّ:** يُسمّى العددان الصحيحان أو وحيدتا الحدّ أوليين فيما بينهما، إذا كان (ق. م .أ) لهما هو العدد ١ . انقل الجدول المجاور، ثم أكمله لتحدّد أزواج وحيدات الحدّ التي تكون أولية فيما بينها.

وحيدة الحد	التحليل إلى العوامل الأولية
١٥أ^{٢}ب جـ^{٣}	
٦ب^{٣} جـ^{٣} د	
١٢جـ د^{٢} ف	
٢٢د^{٣} ف ل^{٢}	
٣٠ف^{٢} ل هـ^{٢}	

٣٣) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث وحيدات حد على أن يكون (ق. م. أ) لها ٦ص^{٣}. فسّر إجابتك.

٣٤) **اكتب:** عرّف التحليل إلى العوامل الأولية بكلماتك الخاصة، وفسّر كيف تحلّل وحيدة الحدّ إلى عواملها الأوليَّة، وكيف يساعدك هذا التحليل على تحديد (ق. م .أ) لوحيدتي حدّ أو أكثر.

تدريب على اختبار

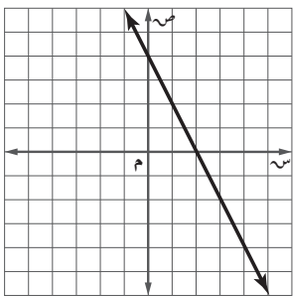
٣٥) ما قيمة هـ في المعادلة ٤هـ−٢٧= ١٩+ ٢هـ ؟

أ) −٤ جـ) ٢٣

ب) ٤ د) ٤٦

٣٦) **إجابة قصيرة:** أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢،−١) ، (−٥،١).

٣٧) ما معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم المُبيَّن في الشكل؟



أ) ص = ٢س + ٤

ب) ص = −٢س − ٥

جـ) ص = $\frac{١}{٢}$ س − ٦

د) ص = − $\frac{١}{٢}$ س + ٣

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلّ ممّا يأتي: (الدرس ٦-٧)

٣٨) (أ − ٤)^{٢} ٣٩) (جـ + ٦)^{٢} ٤٠) (ع − ٥)^{٢}

٤١) (ن − ٣)(ن + ٣) ٤٢) (ص + ٢)^{٢} ٤٣) (د − ٧)(د + ٧)

أوجد ناتج الضرب في كلّ ممّا يأتي: (الدرس ٦-٦)

٤٤) (٢م − ٣)(م + ٤) ٤٥) (هـ − ٢)(٣هـ − ٥) ٤٦) (ن + ٢)(ن + ٩)

٤٧) (٨ر − ١)(ر − ٦) ٤٨) (ف + ٣ك)(ف + ٣ك) ٤٩) (ن − ٤)(ن + ٢)(ن + ١)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة ممَّا ياتي:

٥٠) ٢ (٤س − ٧) ٥١) $\frac{١}{٢}$ د (٢ د + ٦) ٥٢) −هـ (٦ هـ − ١)

٥٣) ٩ م − ٩ ب ٥٤) ٥ ص − ١٠ ٥٥) ٣ ع − ٦ س

٧-٢ استعمال خاصية التوزيع

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست إيجاد (ق .م. أ) لمجموعة من وحيدات الحدّ.

والآن

- أستعمل خاصيّة التوزيع لتحليل كثيرة حدود.
- أحلّ معادلات تربيعيّة على الصورة: أس^{٢} + ب س = ٠

المفردات

تحليل كثيرة حدود

التحليل بتجميع الحدود

خاصية الضرب الصفري

لماذا؟

تُحدَّد أجرة متجر حسب مساحته. ويمكن تمثيل مساحة المتجر بالمعادلة م= ٦ , ١ض^{٢} + ٦ض، حيث تمثِّل ض عرض المتجر بالأمتار، ويمكننا استعمال التحليل إلى العوامل وخاصية الضّرب الصفري لإيجاد أبعاد المتجر الممكنة.

استعمال خاصيّة التوزيع في التحليل: استعملت خاصية التوزيع في الفصل السابق لضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود كما في المثال الآتي:

٥ع (٤ع + ٧) = ٥ع (٤ع) + ٥ع (٧)

= ٢٠ع^{٢} + ٣٥ع

ويمكنك الإفادة من ذلك في العمل عكسيًّا للتعبير عن كثيرة الحدود بصورة حاصل ضرب عاملين: وحيدة الحد، وكثيرة الحدود.

٦ , ١ض^{٢} + ٦ ض= ٦ , ١ض (ض) + ٦(ض) = ض (٦ , ١ض + ٦)

كذلك ٥ع (٤ع + ٧) يمثِّل تحليل ثنائية الحدّ ٢٠ع^{٢} + ٣٥ع. ويشتمل **تحليل كثيرة الحدود** تحليلها إلى عواملها الأوليّة.

مثال ١ استعمال خاصيّة التوزيع في التحليل

استعمل خاصيّة التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

أ) ٢٧ص^{٢} + ١٨ص

أوجد (ق .م. أ) لجميع الحدود.

٢٧ص^{٢} = ٣ × ٣ × ٣ × ص × ص — حلّل كل حد.

١٨ص = ٢ × ٣ × ٣ × ص — ضع دائرة حول العوامل المشتركة.

(ق .م. أ) = ٣ × ٣ × ص = ٩ص

اكتب كل حدّ على صورة حاصل ضرب (ق .م. أ) في باقي العوامل. واستعمل خاصيّة التوزيع لإخراج (ق .م. أ).

٢٧ص^{٢} + ١٨ص = ٩ص(٣ص) + ٩ص(٢) — أعد كتابة كلّ حدّ باستعمال (ق .م. أ).

= ٩ص(٣ص + ٢) — خاصية التوزيع.

ب) −٤أ^{٢}ب − ٨أب^{٢} + ٢أب

−٤أ^{٢}ب = −١ × ٢ × ٢ × أ × أ × ب — حلّل كلّ حدّ.

−٨أب^{٢} = −١ × ٢ × ٢ × ٢ × أ × ب × ب — ضع دائرة حول العوامل المشتركة .

٢أب = ٢ × أ × ب

(ق .م. أ) = ٢ × أ × ب = ٢أب

−٤أ^{٢}ب − ٨أب^{٢} + ٢أب = ٢أب(−٢أ) − ٢أب(٤ب) + ٢أب(١) — أعد كتابة كلّ حدّ باستعمال (ق.م. أ)

= ٢أب(−٢أ − ٤ب + ١) — خاصيّة التوزيع

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحقق من فهمك

١أ) ١٥و − ٣ف

١ب) ٧ل^{٢}ن^{٢} + ٢١ل ن^{٢} − ل ن

تُسمّى الطريقة التي تُستعمل فيها خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود تتكوّن من أربعة حدود أو أكثر **التحليل بتجميع الحدود**؛ لأن الحدود تُجمع بطريقة معينة، ثم يحلِّل كل تجميع، ثم تطبق خاصية التوزيع لإخراج عامل مشترك.

مفهوم أساسي — التحليل بتجميع الحدود

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يمكن تحليل كثيرة الحدود بتجميع الحدود ، إذا توافرت جميع الشروط الآتية:

- تتكوّن كثيرة الحدود من أربعة حدود أو أكثر.
- يوجد للحدود التي يمكن تجميعها معًا عوامل مشتركة.
- يوجد عاملان مشتركان متساويان أو أن أحدهما نظير جمعيّ للآخر.

الرموز: أس + ب س + أص + ب ص = (أس + ب س) + (أص + ب ص)

= س(أ + ب) + ص(أ + ب)

= (س + ص)(أ + ب)

مثال ٢ — التحليل بتجميع الحدود

حلّل: ٤ ك ر + ٨ ر + ٣ ك + ٦

٤ك ر + ٨ ر + ٣ ك + ٦	العبارة الأصلية
= (٤ك ر + ٨ ر) + (٣ ك + ٦)	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة
= ٤ ر(ك + ٢) + ٣(ك + ٢)	حلّل كل تجميع بإخراج (ق.م.أ)
= (٤ر + ٣) (ك + ٢)	خاصية التوزيع

لاحظ أنّ (ك+ ٢) عامل مشترك لِـ ٤ ر (ك+٢) وَ ٣ (ك+٢).

تحقق من فهمك

حلّل كلاًّ من كثيرات الحدود الآتية :

٢أ) رن + ٥ن − ر − ٥

٢ب) ٣ن ك + ١٥ك − ٤ن − ٢٠

من المفيد معرفة متى تكون إحدى ثنائيتي الحد نظيرًا جمعيًّا للأخرى. فمثلاً ٦− أ = −١ (أ − ٦)

مثال ٣ — التحليل بتجميع الحدود (العوامل نظائر جمعية)

حلّل: ٢م ك − ١٢ م + ٤٢ − ٧ ك

٢م ك − ١٢م + ٤٢ − ٧ ك	العبارة الأصلية
= (٢م ك − ١٢م) + (٤٢ − ٧ ك)	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة.
= ٢م(ك − ٦) + ٧(٦ − ك)	حلّل كلّ تجميع بإخراج (ق. م. أ).
= ٢م(ك − ٦) + ٧[(−١)(ك − ٦)]	٦− ك = −١ (ك− ٦)
= ٢م(ك − ٦) − ٧(ك − ٦)	خاصيّة التجميع
= (٢م − ٧)(ك − ٦)	خاصيّة التوزيع

إرشادات للدراسة

تحقق

تحقق من صحة التحليل بضرب العوامل الناتجة بعضها في بعض؛ للحصول على العبارة الأصلية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية :

٣أ) جـ − ٢جـ د + ٨ د − ٤ **٣ب)** ٣ف − ٢ف^{٢} − ١٨ف + ٢٧

حلّ المعادلات بالتحليل: يمكنك حلّ بعض المعادلات بالتحليل .

انظر إلى الجمل الآتية: ٣(٠) = ٠ ٠(٢ − ٢) = ٠ −٣١٢(٠) = ٠ ٠(٠,٢٥) = ٠

لاحظ أن أحد العاملين على الأقل في كلّ حالة يساوي صفرًا. وتبيِّن هذه الأمثلة **خاصيّة الضّرب الصفري**.

مفهوم أساسي **خاصية الضرب الصفري**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان حاصل ضرب عاملين يساوي صفرًا، فيجب أن يكون أحدهما على الأقل صفرًا.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب، إذا كان أ ب = ٠، فإنّ أ = ٠، أو ب = ٠، أو أن كليهما يساوي صفرًا.

سبق أن تعلمت أن حلّ المعادلة أو جذرها هو أيّ قيمة للمتغير تجعلها صحيحة.

تنبيه !

قيمة غير معروفة

قد تجد أنه من الأسهل حلّ معادلة بقسمة كلّ طرف منها على متغير. وبما أن قيمة المتغير غير معروفة، لذا قد تقسم في هذه الحالة على صفر، والقسمة على صفر غير معرّفة.

مثال ٤ حل المعادلات

حلّ كلاًّ من المعادلات الآتية وتحقق من صحة الحل:

أ) (٢د + ٦)(٣د − ١٥) = ٠

(٢د + ٦)(٣د − ١٥) = ٠	المعادلة الأصلية
٢د + ٦ = ٠ أو ٣د − ١٥ = ٠	خاصية الضرب الصفري
٢د = −٦ ٣د = ١٥	حلّ كل معادلة
د = −٣ د = ٥	اقسم

الجذران هما −٣ ، ٥

تحقّق: عوّض عن د بكلٍّ من −٣، ٥ في المعادلة الأصلية.

(٢د + ٦)(٣د − ١٥) = ٠	(٢د + ٦)(٣د − ١٥) = ٠
[٢(−٣) + ٦][٣(−٣) − ١٥] ≟ ٠	[٢(٥) + ٦][٣(٥) − ١٥] ≟ ٠
(−٦ + ٦)(−٩ − ١٥) ≟ ٠	(١٠ + ٦)(١٥ − ١٥) ≟ ٠
(٠)(−٢٤) ≟ ٠	١٦(٠) ≟ ٠
٠ = ٠ ✓	٠ = ٠ ✓

ب) جـ^{٢} = ٣جـ

جـ^{٢} = ٣جـ	المعادلة الأصلية
جـ^{٢} − ٣جـ = ٠	اطرح ٣ جـ من كل طرف للحصول على صفر في أحد طرفي المعادلة.
جـ(جـ − ٣) = ٠	حلّل باستعمال (ق.م.أ) للحصول على الصورة أ ب = ٠
جـ = ٠ أو جـ − ٣ = ٠	خاصيّة الضرب الصفري
جـ = ٣	حلّ كلّ معادلة
الجذران هما ٠ ، ٣	تحقّق بتعويض كل من صفر، ٣ بدلاً من جـ

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحقق من فهمك

٤أ) ٣ن(ن + ٢) = ٠ ٤ب) ٨ب^{٢} − ٤٠ب = ٠ ٤جـ) س^{٢} = −١٠س

مثال ٥ من واقع الحياة استعمال التحليل

رمي السهم: يمكن تمثيل ارتفاع سهم بالمعادلة ع = −٥ ن^{٢} + ٢٠ ن، حيث (ع) الارتفاع بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني. إذا أهمل ارتفاع رامي السهام، بعد كم ثانية يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه؟

عندما يصل السهم إلى الأرض ع = ٠

ع = −٥ن^{٢} + ٢٠ ن	المعادلة الأصلية
٠ = −٥ن^{٢} + ٢٠ ن	عوّض عن ع بـ ٠
٠ = ٥ ن (− ن + ٤)	حلّل بإخراج (ق .م.أ)
٥ ن = ٠ أو − ن + ٤ = ٠	خاصيّة الضرب الصفري
ن = ٠ أو −ن = −٤	حلّ كلّ معادلة
ن = ٤	اقسم كل حد على −١

يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه بِـ ٤ ثوانٍ.

الربط مع الحياة

يتطلب رمي السهم أو الرمي بالقوس تركيزًا عاليًا ومهارة ودقة في التصويب؛ لضمان إصابة الهدف.

تحقق من فهمك

٥) **قفز الأرنب:** يمكن تمثيل قفزة الأرنب بالمعادلة ع = ٥,٢ن − ٥ن^{٢}؛ حيث تمثل (ع) ارتفاع القفزة بالمتر، و(ن) الزمن بالثواني. أوجد قيمة ن عندما ع = صفرًا.

تأكد

مثال ١ استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

١) ٢١ب − ١٥أ ٢) ١٤جـ^{٢} + ٢جـ ٣) ١٢ل ك^{٢} + ٦ل^{٢}ك + ٢ل^{٢}ك^{٢}

المثالان ٢، ٣ حلّل كلاًّ من كثيرات الحدود الآتية:

٤) ن م + ٢ن + ٨م + ١٦ ٥) س ص − ٧س + ٧ص − ٤٩ ٦) ٣ب جـ − ٢ب − ١٠ + ١٥جـ

مثال ٤ حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٧) ٣ك(ك + ١٠) = ٠ ٨) (٤م + ٢)(٣م − ٩) = ٠ ٩) ر^{٢} = ١٤ر

مثال ٥ ١٠) **صواريخ:** أُطلق صاروخ إلى أعلى بشكل مستقيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٢ م/ ثانية. وتمثّل المعادلة ع = ٤٢ ن − ٥ن^{٢} ارتفاع الصاروخ (ع) بالأمتار فوق مستوى سطح الأرض بعد ن ثانية.

أ) ما ارتفاع الصاروخ عند عودته إلى الأرض؟

ب) حلّ المعادلة ٤٢ ن − ٥ ن^{٢} = ٠

جـ) كم ثانية يحتاج إليها الصاروخ كي يعود إلى الأرض؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدرب وحل المسائل

مثال ١ استعمل خاصية التوزيع لتحليل كلّ من كثيرات الحدود الآتية:

١١) ١٦ن − ٤٠ص

١٢) ٣٠ف + ٥٠س

١٣) ٢ك^{٢} + ٤ك

١٤) ٥ع^{٢} + ١٠ع

١٥) ٤أ^{٢}ب^{٢} + ٢أ^{٢}ب − ١٠أب^{٢}

١٦) ٥جـ^{٢}ف − ١٥جـ^{٢}ف^{٢} + ٥جـ^{٢}ف^{٣}

المثالان ٢ ، ٣ حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

١٧) أ^{٢} − ٤أ − ٢٤ + ٦أ

١٨) هـل − ٢هـ + ٥ل − ١٠

١٩) س ص − ٢س − ٢ + ص

٢٠) ٢٤ن ص − ١٨ن + ٤ص − ٣

٢١) ٣د ن − ٢١د + ٣٥ − ٥ن

٢٢) ٨ر^{٢} + ١٢ر

٢٣) ٢١ن هـ − ٣ن − ٣٥هـ + ٥

٢٤) ل ف + ١٢ل + ٨ف + ٩٦

٢٥) ٥ب ر − ٢٥ب + ٢ر − ١٠

٢٦) ٢ن و − ٨و + ٣ن − ١٢

٢٧) ٥جـ ف^{٢} + جـ^{٢}ف + ١٥جـ ف

٢٨) رف − ٩ر + ٩ف − ٨١

٢٩) ١٨ر^{٣}ن^{٢} + ١٢ر^{٢}ن^{٢} − ٦ر^{٢}ن

٣٠) ١٦جـ هـ + ٢٤جـ − ٢هـ − ٣

مثال ٤ حلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٣١) ٣ب(٩ب − ٢٧) = ٠

٣٢) ٢ن(٣ن + ٣) = ٠

٣٣) (٨ع + ٤)(٥ع + ١٠) = ٠

٣٤) (٧س + ٣)(٢س − ٦) = ٠

٣٥) ب^{٢} = −٣ب

٣٦) أ^{٢} = ٤أ

مثال ٥

٣٧) **فروسية:** يمكن تمثيل ارتفاع قفزة فرس في سباق الحواجز بالمعادلة ع = −٥ن^{٢} + ٥ن؛ حيث (ن) تمثل الزمن بالثواني.

أ) اكتب عبارة تمثّل الارتفاع على صورة حاصل ضرب عوامل.

ب) أوجد قيم ن عندما ع = ٠؟

جـ) ما الارتفاع الذي يكون عليه الفارس بعد ٣ ثوانٍ من بداية القفز؟ وهل هذا ممكن؟ فسِّر إجابتك.

٣٨) **هندسة عمارة:** يمكن تمثيل إطار قوس بوابة بالمعادلة ص = −١,٠س^{٢} + ١٢س؛ حيث س، ص بالسنتمتر. ومحور السينات يمر بطرفي القوس على الأرض.

أ) كوّن جدولًا لارتفاع القوس إذا كان س = ٠، ٢٠، ٤٠، ٦٠، ٨٠، ١٠٠ سم.

ب) مثّل نقاط الجدول في المستوى الإحداثي، وصِل بين النقاط لتكوّن منحنى يمثل القوس.

جـ) ما أقصى ارتفاع لقوس البوابة؟

الربط مع الحياة

حقق فريق الفروسية في المملكة المركز الثاني في بطولة العالم للفروسية للفردي قفز الحواجز عام ٢٠١٠م.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٣٩) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة طريقة الصندوق للتحليل، ممثلاً لتحليل س^{٢} + س − ٦، اكتب أول حد في الزاوية اليمنى العليا من الصندوق، ثم اكتب آخر حد في الزاوية السفلى اليسرى.

	؟	؟
؟	س^{٢}	؟
؟	؟	٦-

أ) تحليليًا: حدّد عددين ناتج ضربهما −٦، وناتج جمعهما ١.

ب) رمزيًا: اكتب كل عامل منهما في المربع الفارغ، متضمنًا المتغير وإشارته الموجبة أو السالبة.

جـ) تحليليًا: أوجد عوامل كل صف وعمود في الصندوق، ثم أوجد عوامل س^{٢} + س − ٦.

د) لفظيًا: صف كيف تستعمل طريقة الصندوق لتحليل س^{٢} − ٣س − ٤٠.

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٠) **اكتشف الخطأ:** يحلّ كل من حمد وراشد المعادلة ٢م^{٢} = ٤م. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسِّر ذلك.

راشد

٢م^{٢} = ٤م

٢م^{٢} − ٤م = ٠

٢م(م − ٢) = ٠

٢م = ٠ أو م − ٢ = ٠

م = ٠ أو م = ٢

حمد

٢م^{٢} = ٤م

$\frac{٢م^{٢}}{٢م} = \frac{٤م}{٢م}$

م = ٢

٤١) **مسألة مفتوحة:** اكتب كثيرة حدود بأربعة حدود، يمكن تحليلها بتجميع الحدود، ثم حلّلها.

٤٢) **تبرير:** في المعادلة جـ = أ^{٢} − أ ب، ما قيم أ، ب التي تجعل جـ = ٠؟

٤٣) **اكتب:** وضِّح كيف تحل معادلة تربيعية باستعمال خاصيّة الضرب الصفري.

تدريب على اختبار

٤٤) أي مما يأتي يمثِّل عاملاً لكثيرة الحدود: ٦ع^{٢} − ٣ع − ٢ + ٤ع؟

أ) ٢ع + ١ **جـ)** ع + ٢

ب) ٣ع − ٢ **د)** ٢ع − ١

٤٥) **هندسة:** إذا كانت مساحة المثلث القائم الزاوية المبين أدناه ٥ س سم^{٢}، فما ارتفاعه؟

أ) ٢ سم **جـ)** ٨ سم

ب) ٥ سم **د)** ١٠ سم

مراجعة تراكمية

أوجد (ق.م. أ) لكل مجموعة وحيدات حدود مما يأتي: (الدرس ٧-١)

٤٦) ٣٠أ^{٢}، ٥٠أب^{٢} ٤٧) ٨جـ^{٢}د^{٣}، ١٦جـ^{٣}د ٤٨) ٤ص، ١٨ص^{٢}، ٦ص^{٣}

بسّط كلّ عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦-١)

٤٩) (أب^{٤})(أب^{٢}) ٥٠) (−٧جـ^{٣}د^{٤})(٤جـ د^{٣}) ٥١) (٩س ص^{٧})^{٢} ٥٢) [(٤^{٢})^{٣}]^{٢}

٥٣) حلّ المتباينة ٣ص − ٤ > −٣٧، وتحقق من صحة الحل. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

٥٤) (ب + ٢) (ب + ٥) ٥٥) (د + ٤) (د + ١٠) ٥٦) (ع − ١) (ع − ٨)

٥٧) (جـ + ٩) (جـ − ٣) ٥٨) (س − ٧) (س − ٦) ٥٩) (هـ − ٢) (هـ + ١١)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحليل ثلاثية الحدود

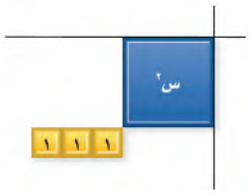
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

يمكنك استعمال بطاقات الجبر لتحليل ثلاثية الحدود. فإذا مثّلت كثيرة الحدود مساحة مستطيل مُكوّن من بطاقات الجبر، فإن بعديه يمثّلان عاملين لكثيرة الحدود، أما إذا لم يكن بالإمكان تكوين مستطيل يمثّل ثلاثية الحدود، فإن ثلاثية الحدود تكون غير قابلة للتحليل.

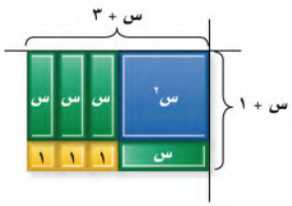
نشاط ١ تحليل العبارة: س^{٢} + ب س + جـ

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: س^{٢} + ٤س + ٣

الخطوة ١: مثّل س^{٢} + ٤س + ٣ ببطاقات الجبر.



الخطوة ٢: ضع البطاقة س^{٢} في زاوية لوحة الضرب، ورتّب بطاقات العدد ١ كما في الشكل المجاور، لتكوّن مستطيلاً. بما أن ٣ عدد أولي، فإنه يمكن ترتيب البطاقات الثلاث بمستطيل بطريقة واحدة، هي ١ في ٣.

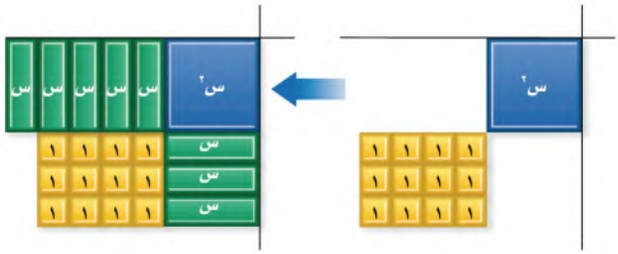


الخطوة ٣: أكمل تكوين المستطيل ببطاقات س، فيكون بذلك عرض المستطيل س+ ١، وطوله س+ ٣
إذن: س^{٢} + ٤س + ٣ = (س+ ١) (س+ ٣).

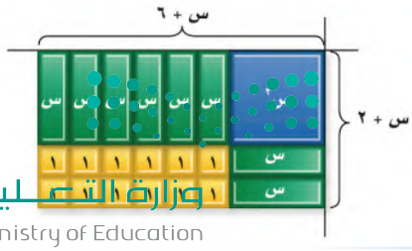
نشاط ٢ تحليل العبارة: س^{٢} + ب س + جـ

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: س^{٢} + ٨س + ١٢

الخطوة ١: مثّل س^{٢} + ٨س + ١٢ ببطاقات الجبر.



الخطوة ٢: ضع بطاقة س^{٢} في زاوية لوحة الضرب، ورتّب بطاقات العدد ١ لتكوّن مستطيلاً. وبما أن ١٢ = ٣ × ٤، فحاول إنشاء مستطيل أبعاده ٣ وَ ٤، وحاول إكمال الشكل العام لمستطيل باستعمال بطاقات س، ثم لاحظ أن هناك بطاقات إضافية.



الخطوة ٣: رتّب بطاقات العدد ١ بمستطيل أبعاده ٢ وَ ٦ ثم أكمل المستطيل، وفي هذه الحالة تكون قد استعملت جميع بطاقات س لتكوين المستطيل. ويكون عرض المستطيل س+ ٢، وطوله س+ ٦
إذن س^{٢} + ٨س + ١٢ = (س + ٢) (س + ٦).

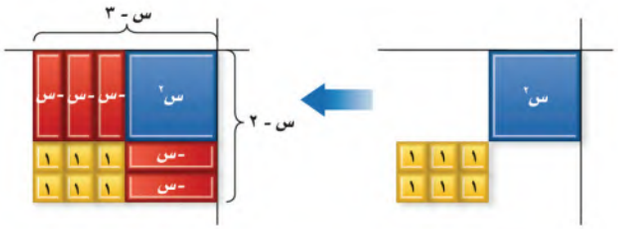
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

نشاط ٣ تحليل العبارة: س^{٢} - ب س + جـ

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: س^{٢} – ٥س + ٦

الخطوة ١: مثّل س^{٢} – ٥س + ٦

الخطوة ٢: ضع بطاقة س^{٢} في زاوية لوحة الضرب.
ورتّب البطاقات ١ لتكوّن مستطيلاً أبعاده ٢ وَ ٣



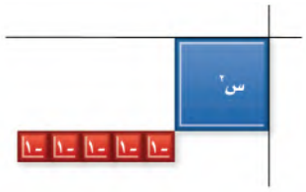
الخطوة ٣: أكمل تكوين المستطيل ببطاقات –س. فيكون بذلك عرضه س– ٢، وطوله س–٣
إذن س^{٢} – ٥س + ٦ = (س – ٢) (س –٣)

نشاط ٤ تحليل العبارة: س^{٢} - ب س - جـ

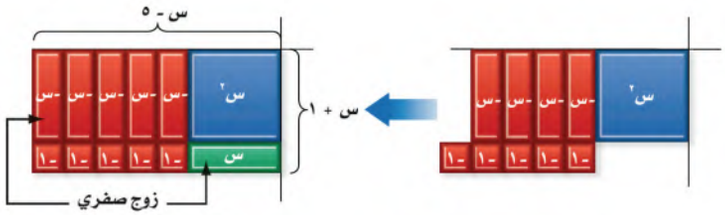
استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: س^{٢} – ٤س – ٥.

الخطوة ١: مثل س^{٢} – ٤س – ٥

الخطوة ٢: ضع بطاقة س^{٢} في زاوية لوحة الضرب،
ورتّب بطاقات العدد –١ لتكوّن مستطيلاً أبعاده
١ وَ ٥



الخطوة ٣: ضع البطاقات –س كما في الشكل. وتذكّر أنه يمكنك إضافة أزواج صفرية دون تغيير قيمة كثيرة الحدود. وفي هذه الحالة، أضف زوجًا صفريًّا من البطاقات س، –س.
لذا فإن س^{٢} – ٤س – ٥ = (س + ١) (س – ٥)



التمثيل والتحليل:

استعمل بطاقات الجبر لتحليل كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

١) س^{٢} + ٣س + ٢ ٢) س^{٢} + ٦س + ٨ ٣) س^{٢} + ٣س – ٤ ٤) س^{٢} – ٧س + ١٢

استعمل الرسم بمخطط لتبيّن إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي قابلة للتحليل أم لا :

٥) س^{٢} + ٣س + ٦ ٦) س^{٢} – ٥س – ٦ ٧) س^{٢} – ٤ ٨) س^{٢} – س – ٤

٩) **اكتب** كيف يمكنك استعمال بطاقات الجبر لتحدد إذا كانت ثلاثية حدود قابلة للتحليل؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٧-٣

فيما سبق

درستُ ضرب ثنائيات الحد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

والآن

- أحلّل ثلاثية حدود على الصورة: $س^٢ + ب س + جـ$.
- أحلّ المعادلات على الصورة: $س^٢ + ب س + جـ = ٠$

المفردات

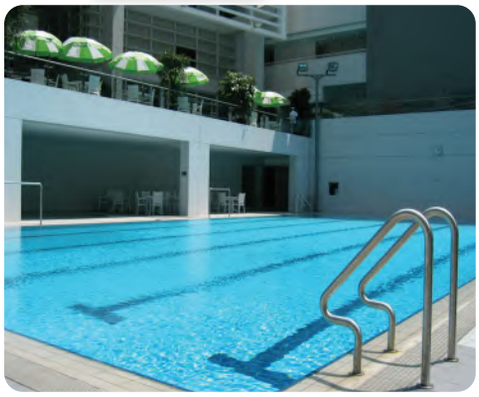
المعادلة التربيعية

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

المعادلات التربيعية: $س^٢ + ب س + جـ = ٠$

لماذا؟



بركة سباحة سطحها مستطيل الشكل، يُراد وضع سياج حولها طوله ٢٤ م. إذا كانت مساحة سطح البركة ٣٦ م^٢، فما بعداها؟

لحل هذه المسألة يجب إيجاد عددين حاصل ضربهما ٣٦ وَمجموعهما يساوي ١٢ (نصف محيط البركة).

تحليل $س^٢ + ب س + جـ$: تعلمت كيف تضرب ثنائيتي حدّ باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، على أن تكون كل ثنائية حد منهما عاملاً لناتج الضرب. ويمكن استعمال نمط ضرب ثنائيتي الحد لتحليل أنواع معينة من ثلاثيات الحدود.

$(س + ٣)(س + ٤) = س^٢ + ٤س + ٣س + ٣ \times ٤$ طريقة التوزيع بالترتيب

$= س^٢ + (٤ + ٣)س + ٣ \times ٤$ خاصية التوزيع

$= س^٢ + ٧س + ١٢$ بسّط.

لاحظ أن معامل الحدّ الأوسط ٧ هو مجموع العددين ٣ و٤، والحد الأخير ١٢ هو ناتج ضربهما.

لاحظ القاعدة الآتية في الضرب:

$(س + ٣)(س + ٤) = س^٢ + (٤ + ٣)س + (٣ \times ٤)$

$(س + م)(س + ن) = س^٢ + (ن + م)س + م ن$ لتكن م = ٣، ن = ٤

$= س^٢ + \underbrace{(م + ن)س} + \underbrace{م ن}$ الإبدال (+)

$س^٢ + ب س + جـ$ ب = م + ن، جـ = م ن

لاحظ أن معامل الحد الأوسط هو مجموع م وَ ن، والحدّ الأخير هو ناتج ضربهما.

تستعمل هذه القاعدة لتحليل ثلاثيات الحدود على الصورة $س^٢ + ب س + جـ$.

مفهوم أساسي — تحليل $س^٢ + ب س + جـ$

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لتحليل ثلاثية حدود على الصورة $س^٢ + ب س + جـ$، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما ب، وناتج ضربهما جـ، ثم اكتب $س^٢ + ب س + جـ$ على الصورة (س + م) (س + ن).

الرموز: $س^٢ + ب س + جـ = (س + م)(س + ن)$، حيث م + ن = ب، م ن = جـ

مثال: $س^٢ + ٦س + ٨ = (س + ٢)(س + ٤)$. لأن ٢ + ٤ = ٦، ٢ × ٤ = ٨

يكون لعاملي جـ الإشارة نفسها عندما تكون موجبة. ويعتمد كون العاملين موجبين أو سالبين على إشارة ب. فإذا كانت ب موجبة فالعاملان موجبان، وإذا كانت سالبة فالعاملان سالبان.

مثال ١ تحليل س^{٢} + ب س + جـ عندما يكون ب، جـ موجبين

حلّل : س^{٢} + ٩س + ٢٠.

بما أن جـ ، ب موجبان في ثلاثية الحدود، ب = ٩، جـ = ٢٠. لذا يجب إيجاد عاملين موجبين مجموعهما ٩، وناتج ضربهما ٢٠. كوّن قائمة عوامل العدد ٢٠، و أوجد العاملين اللذين مجموعهما ٩.

عوامل العدد ٢٠	مجموع العاملين
١، ٢٠	٢١
٢، ١٠	١٢
٤، ٥	٩

العاملان الصحيحان هما ٤، ٥

س^{٢} + ٩س + ٢٠ = (س + م)(س + ن) اكتب القاعدة

= (س + ٤)(س + ٥) م = ٤، ن = ٥

تحقق: يمكنك التحقق من هذه النتيجة بضرب العاملين لتحصل على العبارة الأصلية.

(س + ٤)(س + ٥) = س^{٢} + ٥س + ٤س + ٢٠ طريقة التوزيع بالترتيب

= س^{٢} + ٩س + ٢٠ ✓ بسّط.

تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

١أ) د^{٢} + ١١د + ٢٤ **١ب)** ٩ + ١٠ن + ن^{٢}

إذا كانت ب سالبة، وجـ موجبة في ثلاثية الحدود، استعمل ما تعرفه عن ضرب ثنائيتي الحد؛ لتقليص قائمة العوامل الممكنة.

مثال ٢ تحليل س^{٢} + ب س + جـ عندما تكون ب سالبة، جـ موجبة

حلّل: س^{٢} − ٨س + ١٢

بما أن جـ موجبة، و ب سالبة في ثلاثية الحدود ، ب= −٨، جـ = ١٢ لذا يجب إيجاد عاملين سالبين مجموعها −٨ وحاصل ضربهما ١٢

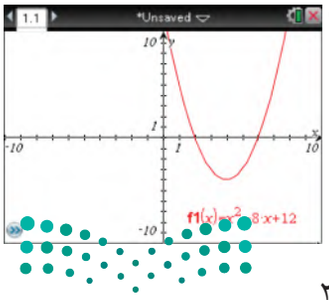
عوامل العدد ١٢	مجموع العاملين
−١، −١٢	−١٣
−٢، −٦	−٨
−٣، −٤	−٧

العاملان الصحيحان هما −٢، −٦

س^{٢} − ٨س + ١٢ = (س + م)(س + ن) اكتب القاعدة

= (س − ٢)(س − ٦) م = −٢، ن = −٦

تحقق: مثّل المعادلتين: ص= س^{٢} − ٨س+ ١٢، ص= (س−٢) (س− ٦) بيانيًّا على الشاشة نفسها. بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية الحدود حُللت بصورة صحيحة. ✓



تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

٢أ) ٢١ − ٢٢م + م^{٢} **٢ب)** و^{٢} − ١١و + ٢٨

إرشادات لحل المسألة

خمّن وتحقّق

عند تحليل ثلاثية حدود، اعمل تخمينًا مدروسًا، وتحقق من المعقولية، ثم عدّل التخمين حتى تصل إلى الإجابة الصحيحة.

إرشادات للدراسة

إيجاد العوامل

عندما تجد العوامل الصحيحة فليس هناك ضرورة لاختبار العوامل الأخرى. فمثلاً، العاملان الصحيحان في المثال٢ هما: −٢ وَ −٦، لذا فلا داعي لاختبار العاملين: −٣ وَ −٤

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

عندما تكون جـ سالبة، يكون لعامليها إشارتان مختلفتان. ولتحدد أي عامل منهما موجب وأيهما سالب، انظر إلى إشارة ب؛ فالعامل الذي له القيمة المطلقة الكبرى له إشارة ب نفسها.

مراجعة المفردات

القيمة المطلقة

تمثل القيمة المطلقة للعدد ن المسافة بين العدد والصفر على خط الأعداد. وتُكتب على الصورة | ن |.

مثال ٣ تحليل س^{٢} + ب س + جـ عندما تكون جـ سالبة

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

أ) س^{٢} + ٢س − ١٥

في ثلاثية الحدود هذه ب = ٢، جـ = −١٥ وبما أن جـ سالبة. فإن م وَ ن عددان مختلفان في الإشارة. وبما أن ب موجبة، فالعامل الذي قيمته المطلقة أكبر يكون موجبًا.

اكتب أزواجًا من عوامل العدد −١٥، على أن يكون أحد العاملين في كل زوج سالبًا والآخر موجبًا، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما ٢.

عوامل العدد −١٥	مجموع العاملين
−١، ١٥	١٤
−٣، ٥	٢

العاملان الصحيحان هما −٣، ٥

س^{٢} + ٢س − ١٥ = (س + م)(س + ن) اكتب القاعدة

= (س − ٣)(س + ٥) م = −٣، ن = ٥

تحقق: (س − ٣) (س + ٥) = س^{٢} + ٥س − ٣س − ١٥ طريقة التوزيع بالترتيب

= س^{٢} + ٢س − ١٥ ✓ بسّط

ب) س^{٢} − ٧س − ١٨

في ثلاثية الحدود هذه ب = −٧، جـ = −١٨ . ، إذن م أو ن سالبة، وليس كلاهما. وبما أن ب سالبة، فالعامل ذو القيمة المطلقة الكبرى يكون سالبًا.

اكتب أزواجًا من عوامل −١٨، على أن يكون أحد العاملين في كلّ زوج سالبًا والآخر موجبًا، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما −٧.

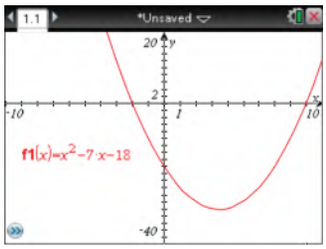
عوامل العدد −١٨	مجموع العاملين
١، −١٨	−١٧
٢، −٩	−٧
−٦، +٣	−٣

العاملان الصحيحان هما ٢، −٩

س^{٢} − ٧س − ١٨ = (س + م)(س + ن) اكتب القاعدة

= (س + ٢)(س − ٩) م = ٢، ن = −٩

تحقق: مثّل المعادلتين ص = س^{٢} − ٧س − ١٨ ، ص = (س + ٢) (س − ٩) بيانيًّا على الشاشة نفسها، بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية الحدود حُلّلت بصورة صحيحة. ✓



تحقق من فهمك

٣أ) ص^{٢} + ١٣ص − ٤٨

٣ب) ر^{٢} − ٢ ر − ٢٤

حلّ المعادلات بالتحليل: يمكن كتابة **المعادلات التربيعية** على الصورة القياسية: أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠ ويمكن حل بعض المعادلات على هذه الصورة بالتحليل، ثم استعمال خاصية الضرب الصفري

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال ٤ حل المعادلة بالتحليل

حل المعادلة: $س^٢ + ٦ س = ٢٧$، وتحقَّق من صحة الحل.

$س^٢ + ٦س = ٢٧$	المعادلة الأصلية
$س^٢ + ٦س - ٢٧ = ٠$	اطرح ٢٧ من كلا الطرفين
$(س - ٣)(س + ٩) = ٠$	حلِّل إلى العوامل
$س - ٣ = ٠$ أو $س + ٩ = ٠$	خاصية الضرب الصفري
$س = ٣$ ، $س = -٩$	حل كل معادلة

تحقق: عوّض عن س بكل من ٣، −٩ في المعادلة الأصلية.

$س^٢ + ٦س = ٢٧$	$س^٢ + ٦س = ٢٧$
$(٣)^٢ + ٦(٣) \stackrel{؟}{=} ٢٧$	$(-٩)^٢ + ٦(-٩) \stackrel{؟}{=} ٢٧$
$٩ + ١٨ = ٢٧$ ✓	$٨١ - ٥٤ = ٢٧$ ✓

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٤أ) $ع^٢ - ٣ع = ٧٠$

٤ب) $س^٢ + ٣س - ١٨ = ٠$

مثال ٥ من واقع الحياة حل المسألة بالتحليل

تصميم: يصمّم سعيد لوحة إعلان لبيع أقراص مدمجة لتعلم الرياضيات. إذا كان ارتفاع الجزء العلوي من اللوحة ٤ بوصات، ويزيد طول باقي اللوحة عن عرضها بِـ ٢ بوصة. وَمساحة اللوحة ٦١٦ بوصة مربّعة، فأوجد عرض اللوحة.

افهم: يجب إيجاد عرض اللوحة.

خطّط: بما أن اللوحة على شكل مستطيل فالمساحة = العرض× الطول

حلّ: بما أن ض = عرض اللوحة، فيكون طول اللوحة = ض+ ٢ + ٤ = ض+ ٦

$ض (ض + ٦) = ٦١٦$	اكتب المعادلة
$ض^٢ + ٦ض = ٦١٦$	اضرب
$ض^٢ + ٦ض - ٦١٦ = ٠$	اطرح ٦١٦ من كل طرف
$(ض + ٢٨)(ض - ٢٢) = ٠$	حلل
$ض + ٢٨ = ٠$ أو $ض - ٢٢ = ٠$	خاصية الضّرب الصفري
$ض = -٢٨$ ، $ض = ٢٢$	حل كل معادلة

بما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة، فإن العرض = ٢٢ بوصة.

تحقق: إذا كان العرض ٢٢ بوصة فإن المساحة = ٢٢(٢٢ + ٦) = ٦١٦ بوصة مربعة، وهي مساحة اللوحة. ✓

تحقق من فهمك

٥) هندسة: متوازي أضلاع ارتفاعه أقل من قاعدته بِـ ١٨ سم، ومساحته ١٧٥ سم^٢. فما ارتفاعه؟

الربط مع الحياة

تُصمَّم بعض اللوحات الإعلانية لاستخدامها مرة واحدة لمناسبة معينة، وإن كان الغرض من اللوحة الاستخدام لفترة طويلة، فيجب مراعاة المواد المصنوعة منها لتقاوم عوامل الجو.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

الأمثلة ١ - ٣ حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

١) $س^٢ + ١٤س + ٢٤$ ٢) $ص^٢ - ٧ص - ٣٠$

٣) $ن^٢ + ٤ن - ٢١$ ٤) $م^٢ - ١٥م + ٥٠$

مثال ٤ حُلَّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٥) $س^٢ - ٤س - ٢١ = ٠$ ٦) $ن^٢ - ٣ن + ٢ = ٠$ ٧) $س^٢ - ١٥س + ٥٤ = ٠$

٨) $س^٢ + ١٢س = -٣٢$ ٩) $س^٢ - س - ٧٢ = ٠$ ١٠) $س^٢ - ١٠س = -٢٤$

مثال ٥ ١١) **إطار صورة:** اشترت لطيفة إطارًا لصورة، إلا أن الصورة كانت أكبر من الإطار، لذا فإنها بحاجة إلى تصغير طول الصورة وعرضها بالمقدار نفسه، على أن تصبح مساحتها نصف مساحتها الأصلية. فإذا كان بُعدا الصورة الأصلية ١٢، ١٦ سم. فما بُعدا الصورة المصغَّرة؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣ حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

١٢) $س^٢ + ١٧س + ٤٢$ ١٣) $ص^٢ - ١٧ص + ٧٢$ ١٤) $أ^٢ + ٨أ - ٤٨$

١٥) $ن^٢ - ٢ن - ٣٥$ ١٦) $٤٤ + ١٥هـ + هـ^٢$ ١٧) $٤٠ - ٢٢س + س^٢$

مثال ٤ حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

١٨) $س^٢ - ٧س + ١٢ = ٠$ ١٩) $ص^٢ + ص = ٢٠$ ٢٠) $س^٢ - ٦س = ٢٧$

٢١) $جـ^٢ + ١٠جـ + ٩ = ٠$ ٢٢) $ن^٢ - ١٢٠ = ٧ن$ ٢٣) $هـ^٢ + ٤٨ = ١٦هـ$

مثال ٥ ٢٤) **هندسة:** مساحة مثلث ٣٦سم^٢، ويزيد ارتفاعه ٦سم على طول قاعدته. فما ارتفاعه؟ وما طول قاعدته؟

٢٥) **هندسة:** تمثّل العبارة $(س^٢ - ٤س - ١٢)$ سم^٢ مساحة مستطيل طوله $(س + ٢)$ سم. فما عرضه؟

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

٢٦) $ك^٢ + ١١ك ر + ١٨ر^٢$ ٢٧) $س^٢ - ٦س ص + ٥ص^٢$ ٢٨) $أ^٢ + ١٠أب - ٣٩ب^٢$

٢٩) **سباحة:** يزيد طول حوض سباحة دولي مستطيل الشكل ٢٩ مترًا عن عرضه، ومساحة سطحه ١٠٥٠ م^٢.

أ) عرّف متغيرًا، واكتب معادلة تمثل مساحة سطحه.

ب) حل المعادلة.

جـ) فسّر الإجابتين، وهل هناك معنى لكلٍّ منهما؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٣٠) **هندسة:** اكتب عبارة تمثّل محيط المستطيل الذي مساحته م = س^{٢} + ١٣س − ٩٠ .

٣١) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال، طريقة التحليل عندما يكون المعامل الرئيس للعبارة التربيعية لا يساوي ١ .

أ) **جدوليًّا:** انقل الجدول الآتي، ثمّ أكمله:

ضرب ثنائيتي حد	ناتج ضرب ثنائيتي الحد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب	أ س^{٢} + ب س + جـ	م × ن	أ × جـ
(٢ س+٣) (س+٤)	٢س٢+٨س+٣س+١٢	٢س٢+١١س+١٢	٢٤	٢٤
(س+١) (٣س+٥)				
(٢س−١) (٤س+١)				
(٣س+٥) (٤س−٢)				

ب) **تحليليًّا:** كيف يرتبط العددان م، ن بالعددين أ ، جـ؟

جـ) **تحليليًّا:** كيف يرتبط العددان م، ن بالعدد ب؟

د) **لفظيًّا:** صف إجراءً يمكن استعماله لتحليل كثيرة حدود على الصورة أس^{٢} + ب س + جـ .

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٢) **اكتشف الخطأ:** حلّل كلٌّ من خليل وماجد العبارة: س^{٢} + ٦س − ١٦ . فأيهما إجابته صحيحة؟ فسِّر ذلك.

ماجد	خليل
س^{٢} + ٦س − ١٦ = (س+٢) (س−٨)	س^{٢} + ٦س − ١٦ = (س−٢) (س+٨)

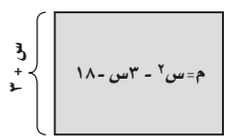
تحد: أوجد جميع قيم هـ التي تجعل كل كثيرة حدود في كلّ مما يأتي قابلة للتحليل باستعمال الأعداد الصحيحة:

٣٣) س^{٢} + هـ س − ١٩ ٣٤) س^{٢} + هـ س + ١٤ ٣٥) س^{٢} − ٨ س + هـ ، هـ > ٠

٣٦) **تحدّ:** حلّل العبارة: (٤ص − ٥)^{٢} + ٣(٤ص − ٥) − ٧٠.

تدريب على اختبار

٣٧) **هندسة:** ما العبارة التي تمثّل طول المستطيل في الشكل المجاور؟



أ) س + ٥ جـ) س − ٦

ب) س + ٦ د) س − ٥

٣٨) إذا كان الفرق بين ٢١ والعدد ن هو ٦، فما المعادلة التي تبين هذه العلاقة؟

أ) ٢١ − ن = ٦ جـ) ٢١ + ن = ٦

ب) ٢١ن = ٦ د) ٦ن = −٢١

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مراجعة تراكمية

حلّل كلَّ كثيرة حدودٍ ممَّا يأتي: (الدرس ٧ - ٢)

٣٩) ٢م^{٣}ل^{٢} – ١٦م ل^{٢} + ٨ م ل

٤٠) ٢أ س + ٦س جـ + ب أ + ٣ب جـ

٤١) س^{٢} – س ص – س ص + ص^{٢}

٤٢) **تبليط:** يريد خالد تبليط غرفة معيشة بُعداها ٤٢٠ سم ، ٣٣٠ سم، ولديه قطع بلاط أبعادها ٢٠ سم × ٢٠ سم ، ٣٠ سم × ٣٠ سم ، ٢٠ سم × ١٥ سم ، ٢٢ سم × ٣٠ سم. فأيّ الأنواع يمكنه استعمالها دون قص أي قطعة؟ فسّر إجابتك. (الدرس ٧-١)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلل كلَّ كثيرة حدودٍ مما يأتي:

٤٣) ٦م س–٤م + ٣ر س – ٢ر

٤٤) ٣أس – ٦ ب س + ٨ ب – ٤ أ

٤٥) ٢ د^{٢} جـ + ٢ ف جـ + ٤ د^{٢} هـ + ٤ ف هـ

اختبار منتصف الفصل

الدروس ٧-١ إلى ٧-٣

حلّل كل وحيدة حدٍّ فيما يأتي تحليلًا تامًّا: (الدرس ٧-١)

١) $١٦س^{٣}ص^{٢}$

٢) $٣٥ب جـ^{٤}$

٣) $-٢٠م^{٥}ن^{٢}$

٤) $-١٣س ص^{٣}$

٥) **مساحة ممرٍّ:** تبلغ مساحة ممرٍّ $١٢م^{٢}$، أوجد جميع أزواج الأعداد الكلية التي يمكن أن تمثل طولًا وعرضًا للممرِّ. (الدرس ٧-١)

أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حدٍّ فيما يأتي:

٦) $١٠ب$، $٢٠ب^{٢}$، $٢٥ب$

٧) $١٣جـ$، $٢٥د$

٨) $٢١ب جـ$، $٣٥ب$، $٥٦ب جـ^{٣}$

٩) **ترتيبٌ:** يريد عامل ترتيب ٢٤ زوجًا من الأحذية على أرفف محلٍّ، بحيث يضع نفس عدد الأزواج على كل رفٍّ، ويضع على الأقل ٤ أزواج على كل رفٍّ، ويستخدم رفين على الأقل، اذكر عدد الأزواج الممكنة على كل رفٍّ، وعدد الأرفف. (الدرس ٧-١)

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود التالية: (الدرس ٧-٢)

١٠) $٣س ص - ٩س$

١١) $٦ب جـ + ١٢ب جـ^{٢} + ١٨جـ$

١٢) **اختيار من متعدد:** إذا كانت مساحة المستطيل أدناه تساوي $٣س^{٢} + ٦س - ١٢$ وحدةً مربعةً، فكم وحدةً عرضه؟ (الدرس ٧-٢)

$س^{٢} + ٢س - ٤$

أ) وحدتان
ب) ٣ وحداتٍ
جـ) ٤ وحداتٍ
د) ٦ وحدات

حلّل كلَّ كثيرة حدودٍ ممَّا يأتي: (الدرس ٧-٢)

١٣) $٥هـ + ٤٠جـ$

١٤) $٣س^{٢} + ٦س + س + ٢$

١٥) $٥ب^{٢} - ٢٥ب - ب + ٥$

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٣)

١٦) $٢س (س - ٥) = ٠$

١٧) $٦ب^{٢} - ٣ب = ٠$

١٨) $جـ^{٢} = ١٥جـ$

حلّل كلَّ كثيرة حدودٍ ممَّا يأتي: (الدرس ٧-٣)

١٩) $س^{٢} - ٤س - ٢١$

٢٠) $س^{٢} - ١٠س + ٢٤$

٢١) $س^{٢} + ٤س - ٢١$

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٣)

٢٢) $س^{٢} - ٥س = ١٤$

٢٣) $س^{٢} - ٣س - ١٨ = ٠$

٢٤) $٢٤ + س^{٢} = ١٠س$

٢٥) **اختيار من متعدد:** يزيد طول مستطيل على عرضه بمقدار ٢سم، فما طول المستطيل، إذا كانت مساحته $٤٨سم^{٢}$؟

أ) ٤٨سم
ب) ٨سم
جـ) ٦سم
د) ٢سم

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٧-٤

فيما سبق

درستُ تحليل ثلاثية حدود على الصورة $س^٢ + ب س + جـ$.

والآن

- أحلّل ثلاثية حدود على الصورة: $أس^٢ + ب س + جـ$.
- أحلّ معادلات على الصورة: $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$

المفردات

كثيرة الحدود الأولية

المعادلات التربيعية: $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا؟

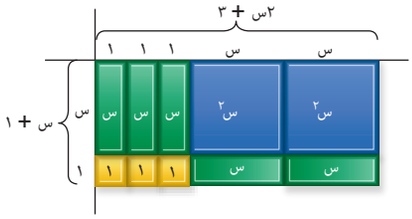
يمكن تمثيل مسار الأرجوحة في مدينة الألعاب بالعبارة $٥ن^٢ - ٢ن + ٣٠$؛ حيث (ن) زمن الحركة. وتحليل هذه العبارة إلى عواملها يساعد المسؤول عن التشغيل على معرفة الوقت الذي تستغرقه أرجحتها في المرة الأولى.

تحليل $أ س^٢ + ب س + جـ$: حللت في الدرس السابق عبارات تربيعية على الصورة: $أ س^٢ + ب س + جـ$، $أ = ١$.

ستطبق في هذا الدرس طرق تحليل عبارات تربيعية فيها $أ \neq ١$.

في الشكل المجاور بعدا المستطيل المكوّن من بطاقات الجبر هما $(س + ١)$، $(٢س + ٣)$، وهما عاملا $٢س^٢ + ٥س + ٣$.

يمكنك استعمال طريقة التحليل بتجميع الحدود لتحليل هذه العبارة.



الخطوة ١: طبِّق القاعدة:

$٢س^٢ + ٥س + ٣ = ٢س^٢ + م س + ن س + ٣$.

الخطوة ٢: أوجد عددين ناتج ضربهما $٢ \times ٣ = ٦$ ومجموعهما ٥.

عوامل العدد ٦	مجموع العاملين
١، ٦	٧
٢، ٣	٥

الخطوة ٣: استعمل التجميع لإيجاد العوامل.

$٢س^٢ + ٥س + ٣ = ٢س^٢ + م س + ن س + ٣$	اكتب القاعدة
$= ٢س^٢ + ٢س + ٣س + ٣$	م = ٢، ن = ٣
$= (٢س^٢ + ٢س) + (٣س + ٣)$	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة
$= ٢س(س + ١) + ٣(س + ١)$	حلّل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)
$= (٢س + ٣)(س + ١)$	(س+١) عامل مشترك

إذن: $٢س^٢ + ٥س + ٣ = (٢س + ٣)(س + ١)$.

مفهوم أساسي — تحليل $أ س^٢ + ب س + جـ$

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لتحليل ثلاثية حدود على الصورة $أ س^٢ + ب س + جـ$، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما يساوي ب، وناتج ضربهما أ جـ، ثم اكتب $أ س^٢ + ب س + جـ$ على الصورة $أ س^٢ + م س + ن س + جـ$، ثم حلّل بتجميع الحدود.

مثال: $٥س^٢ - ١٣س + ٦ = ٥س^٢ - ١٠س - ٣س + ٦$ م = −١٠، ن = −٣

$= ٥س(س - ٢) + (-٣)(س - ٢)$

$= (٥س - ٣)(س - ٢)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال ١ تحليل أس^{٢} + ب س + جـ

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

أ) ٧س^{٢} + ٢٩س + ٤

في ثلاثية الحدود أعلاه، أ = ٧، ب = ٢٩، جـ = ٤. أوجد عددين ناتج ضربهما ٧ × ٤ = ٢٨، ومجموعهما ٢٩. كوّن قائمة بأزواج من عوامل العدد ٢٨، وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما ٢٩.

عوامل العدد ٢٨	مجموع العوامل
١، ٢٨	٢٩

العوامل الصحيحة ١ ، ٢٨

٧س^{٢} + ٢٩س + ٤ = ٧س^{٢} + م س + ن س + ٤ — استخدم القاعدة.

= ٧س^{٢} + ١ س + ٢٨س + ٤ — م = ١، ن = ٢٨

= (٧س^{٢} + ١ س) + (٢٨س + ٤) — جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

= س(٧س + ١) + ٤(٧س + ١) — حلّل بإخراج (ق. م. أ)

= (س + ٤)(٧س + ١) — (٧س+١) عامل مشترك

ب) ٣س^{٢} + ١٥س + ١٨

(ق.م.أ) للحدود ٣س^{٢}، ١٥س، ١٨، هو ٣. حلّل بإخراج العامل ٣.

٣س^{٢} + ١٥س + ١٨ = ٣(س^{٢} + ٥س + ٦) — خاصية التوزيع

= ٣(س + ٣)(س + ٢) — أوجد عاملين للعدد ٦ مجموعهما ٥

تحقق من فهمك

١أ) ٥س^{٢} + ١٣س + ٦ **١ب)** ٦س^{٢} + ٢٢س − ٨

مثال ٢ تحليل أ س^{٢} - ب س + جـ

حلل كثيرة الحدود ٣س^{٢} − ١٧س + ٢٠.

في ثلاثية الحدود أعلاه أ = ٣، ب = −١٧، جـ = ٢٠. وبما أن ب سالبة، فإن م + ن ستكون سالبة أيضًا، وبما أن جـ موجبة، فإن م ن ستكون موجبة.

لتحديد م، ن كوّن قائمة بالعوامل السالبة لـ أ جـ = ٦٠ وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما −١٧

عوامل العدد ٦٠	مجموع العاملين
−٢، −٣٠	−٣٢
−٣، −٢٠	−٢٣
−٤، −١٥	−١٩
−٥، −١٢	−١٧

العاملان الصحيحان هما −٥، −١٢

٣س^{٢} − ١٧س + ٢٠ = ٣س^{٢} − ١٢س − ٥س + ٢٠ — م = −١٢، ن = −٥

= (٣س^{٢} − ١٢س) + (−٥س + ٢٠) — جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

= ٣س(س − ٤) + (−٥)(س − ٤) — حلل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)

= (٣س − ٥)(س − ٤) — خاصية التوزيع

تحقق من فهمك

٢أ) ٢ن^{٢} − ن − ١ **٢ب)** ١٠ص^{٢} − ٣٥ص + ٣٠

إرشادات للدراسة

القاسم المشترك الأكبر

ابحث عن القاسم المشترك الأكبر لحدود كثيرة الحدود قبل تحليلها.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تُسمّى كثيرة الحدود التي لا يمكن كتابتها على صورة ناتج ضرب كثيرتي حدود بمعاملات صحيحة **كثيرة حدود أولية.**

مثال ٣ تحديد كثيرة الحدود الأولية

حلّل العبارة: ٤س^{٢}−٣س+ ٥ إن أمكن باستعمال الأعداد الصحيحة، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب"أولية".

في ثلاثية الحدود السابقة أ = ٤، ب = −٣، جـ = ٥

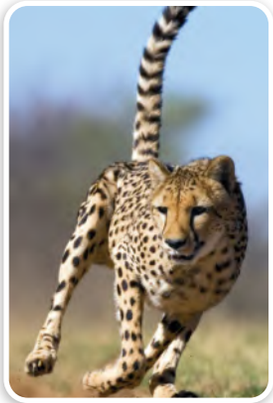
وبما أن ب سالبة، فإن م + ن سالبة. وبما أن جـ موجبة فإن م ن موجبة، لذا يكون كلّ من م وَ ن سالبًا. كوّن قائمة بأزواج عوامل العدد٢٠ . وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما −٣.

عوامل العدد ٢٠	مجموع العاملين
−٢٠، −١	−٢١
−٤، −٥	−٩
−٢، −١٠	−١٢

لا يوجد عاملان مجموعهما −٣. لذا لا يمكن تحليل العبارة التربيعية باستعمال الأعداد الصحيحة. لذا فالعبارة التربيعية ٤س^{٢}−٣س + ٥ أولية.

تحقق من فهمك

٣أ) ٤ر^{٢} − ر + ٧ **٣ب)** ٢س^{٢} + ٣س − ٥



الربط مع الحياة

الفهد هو أسرع حيوان في العالم؛ حيث تبلغ سرعته ١١٢ كلم / ساعة، ويمكن أن تصل سرعته من صفر إلى ٦٤ كلم / ساعة في ٣ خطوات واسعة خلال ثوانٍ فقط.

حل معادلات بالتحليل: تمثّل المعادلة ل = −٥ن^{٢} + ع ن + ل$_{٠}$ ارتفاع جسم مقذوف لأعلى، حيث تمثل (ل) الارتفاع بالمتر، وَ (ن) الزمن بالثواني، وَ (ع) السرعة الابتدائية م/ ثانية، و(ل$_{٠}$) الارتفاع الابتدائي بالمتر. ويمكن حل هذه المعادلة بعد كتابتها على الصورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ بالتحليل واستعمال خاصية الضرب الصفري.

مثال ٤ من واقع الحياة حل المعادلات بالتحليل إلى العوامل

حياة برية: افترض أن فهدًا يقفز نحو فريسته بسرعة ابتدائية رأسية مقدارها ١١ مترًا/ ثانية. فكم يبقى الفهد في الهواء قبل وصوله إلى فريسته التي ترتفع عن الأرض ٢ متر؟

ل = −٥ن^{٢} + ع ن + ل$_{٠}$	معادلة الارتفاع
٢ = −٥ن^{٢} + ١١ن + ٠	عوّض ل = ٢، ع = ١١، ل$_{٠}$ = ٠
٠ = −٥ن^{٢} + ١١ن − ٢	اطرح ٢ من كلا الطرفين
٠ = ٥ن^{٢} − ١١ن + ٢	اضرب كلا الطرفين في −١
٠ = (٥ن − ١) (ن − ٢)	حلّل
٥ن − ١ = ٠ أو ن = ٢	خاصية الضرب الصفري
٥ن = ١	حل كل معادلة
ن = $\frac{١}{٥}$	

الإجابتان $\frac{١}{٥}$ وَ ٢ ثانية، يحتاج الفهد إلى $\frac{١}{٥}$ ثانية للوصول إلى ارتفاع ٢م في أثناء صعوده، وإلى ثانيتين في الهواء للوصول إلى الفريسة.

تنبيه!

إشارة السالب

حافظ على (العدد −١) معامل ن^{٢} ، الذي تم إخراجه خلال التحليل، أو اضرب كلا الطرفين في −١ بدلًا من ذلك.

تحقق من فهمك

٤) فيزياء: قذف شخص كرة إلى الأعلى من سطح بناية ارتفاعها ٢٠م، والمعادلة ع= −٥ن^{٢}+ ١٦ن+٢٠ تمثل ارتفاع الكرة (ع) بالأمتار بعد (ن) ثانية. فإذا سقطت الكرة على شرفة ارتفاعها ٤ م عن الأرض، فكم ثانية بقيت الكرة في الهواء؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تأكد

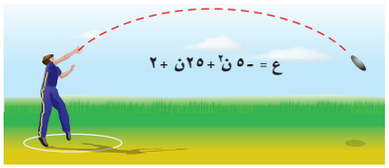
الأمثلة ١ - ٣ حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

١) $٢س^٢ + ٢٢س + ٥٦$ ٢) $٥س^٢ - ٣س + ٤$ ٣) $٣س^٢ - ١١س - ٢٠$

مثال ٤ حُلَّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٤) $٢س^٢ + ٩س + ٩ = ٠$ ٥) $٣س^٢ - ١٠س + ٨ = ٠$ ٦) $٢س^٢ - ١٧س + ٣٠ = ٠$

٧) **رمي القرص:** يرمي خالد القرص المعدني كما في الشكل المجاور.



أ) ما الارتفاع الابتدائي للقرص؟

ب) بعد كم ثانية يصل القرص إلى الارتفاع نفسه الذي قذف منه؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣ حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

٨) $٥س^٢ + ٣٤س + ٢٤$ ٩) $٤س^٢ + ٣٨س + ٧٠$ ١٠) $٢س^٢ - ٣س - ٩$

١١) $٤س^٢ - ١٣س + ١٠$ ١٢) $٢س^٢ + ٣س + ٦$ ١٣) $١٢س^٢ + ٦٩س + ٤٥$

١٤) $٤س^٢ - ٥س + ٧$ ١٥) $٥س^٢ + ٢٣س + ٢٤$ ١٦) $٣س^٢ - ٨س + ١٥$

مثال ٤ ١٧) **صيد:** أطلق صياد طلقة نارية ارتفاعها تمثِّله المعادلة $ع = -٥ن^٢ + ٩ن + ٢$. بعد كم ثانية تصل الطلقة إلى الأرض؟

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

١٨) $٢س^٢ + ٩س - ١٨ = ٠$ ١٩) $٤س^٢ + ١٧س + ١٥ = ٠$ ٢٠) $-٣س^٢ + ٢٦س = ١٦$

٢١) $-٢س^٢ + ١٣س = ١٥$ ٢٢) $-٣س^٢ + ٥س = -٢$ ٢٣) $-٤س^٢ + ١٩س = -٣٠$

٢٤) **نظرية الأعداد:** ستة أمثال مربّع العدد س مضافًا إليها ١١ مِثْلًا للعدد يساوي ٢. ما القيم الممكنة لـ س؟

حلّ كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

٢٥) $-٦س^٢ - ٢٣س - ٢٠$ ٢٦) $-٤س^٢ - ١٥س - ١٤$ ٢٧) $-٥س^٢ - ١٨س + ٨$

٢٨) $-٦س^٢ + ٣١س - ٣٥$ ٢٩) $-٤س^٢ + ٥س - ١٢$ ٣٠) $-١٢س^٢ + س + ٢٠$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٣١) **تخطيط:** خططت بلدية إحدى المدن لبناء متنزّه جديد مستطيل الشكل، يمكن التعبير عن مساحته بالعبارة: ٦٦٠س^{٢} + ٥٢٤س + ٨٥. حلّل هذه العبارة لإيجاد ثنائيتي حدّ بمعاملات أعداد صحيحة تمثّل البعدين الممكنين للمتنزّه. وإذا كانت س = ٨، فما محيط المتنزّه؟

الربط مع الحياة

هيَّأت أمانة منطقة الرياض ٣٦٢ مشروعًا بيئيًّا وترفيهيًّا موزَّعة على مختلف أحياء مدينة الرياض على مساحة تتجاوز نصف مليار متر مربع.

٣٢) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة. تحليل أنواعٍ خاصة من كثيرات الحدود.

أ) **هندسيًّا:** ارسم مربّعًا طول ضلعه أ. ثم ارسم داخله مربعًا أصغر يشترك معه في أحد الرؤوس، طول ضلعه ب. ما مساحة كل من المربعين؟

ب) **هندسيًّا:** قصَّ المربع الصغير. ما مساحة المنطقة الباقية؟

جـ) **تحليليًّا:** ارسم خطًّا قطريًّا بين رأس المربع الكبير ورأس المربع الصغير في الشكل المتبقي. وقصّ على طول هذا الخط للحصول على قطعتين متطابقتين، ثم أعد ترتيب القطعتين لتشكّلا مستطيلاً. ما بُعدا المستطيل الناتج؟

د) **تحليليًّا:** اكتب مساحة المستطيل على صورة ناتج ضرب ثنائيتي حد.

هـ) **لفظيًّا:** أكمل العبارة أ^{٢} – ب^{٢} = ... لماذا هذه العبارة صحيحة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٣) **اكتشف الخطأ:** حلّ كلّ من زكريا وسامي المعادلة ٦س^{٢} – س = ١٢. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسِّر ذلك.

زكريا	سامي
٦س^{٢} – س = ١٢	٦س^{٢} – س = ١٢
٦س^{٢} – س – ١٢ = ٠	س(٦س – ١) = ١٢
(٢س – ٣)(٣س + ٤) = ٠	س = ١٢ أو ٦س – ١ = ١٢
٢س – ٣ = ٠ أو ٣س + ٤ = ٠	٦س = ١٣ أو س = $\frac{١٣}{٦}$
س = $\frac{٣}{٢}$ أو س = $-\frac{٤}{٣}$	

٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة تربيعية معاملات حدودها أعداد صحيحة على أن يكون: $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-٣}{٥}$ حلين لها. فسّر ذلك.

٣٥) **اكتب:** فسّر كيف تحدد القيم التي يجب اختيارها لِـ م وَ ن عند تحليل كثيرة الحدود على الصورة أس^{٢} + ب س + جـ

تدريب على اختبار

٣٦) **إجابة قصيرة:** لدى سلمى أختان: إحداهما أكبر منها بـ ٨سنوات، والأخرى أصغر منها بسنتين، وناتج ضرب عمري أختيها ٥٦. فكم سنة عمر سلمى؟

٣٧) ما مجموعة حل المعادلة س^{٢}+٢س−٢٤=٠؟

أ) {−٤، ٦}　　ب) {٣، −٨}

جـ) {−٣، ٨}　　د) {٤، −٦}

مراجعة تراكمية

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٧-٣)

٣٨) س^{٢} − ٩س + ١٤　　٣٩) س^{٢} − ٥س − ٢٤　　٤٠) ع^{٢} + ١٥ع + ٣٦

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٢)

٤١) أ(أ − ٩) = ٠　　٤٢) (٢ص + ٦)(ص − ١) = ٠　　٤٣) ١٠س^{٢} − ٢٠س = ٠

٤٤) حلّ المتباينة المركبة ك + ٢ > ١٢ وَ ك + ٢ ≤ ١٨ ، ثم مثّل مجموعة الحل على خط الأعداد. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج كلٍّ ممَّا يأتي:

٤٥) $\sqrt{١٦}$　　٤٦) $\sqrt{٦٤}$　　٤٧) $\sqrt{١٢١}$　　٤٨) $\sqrt{١٠٠}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٧-٥ المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست تحليل ثلاثية حدود إلى ثنائيتي حد.

والآن

- أحلّل ثنائية حدّ على صورة فرق بين مربعين.
- أحل معادلات باستعمال الفرق بين مربعين.

المفردات

الفرق بين مربعين

لماذا؟

يستعمل مصمِّمو الجرافيك الفن والرياضيات لتصميم صور وأشرطة فيديو. ويستعملون المعادلات لتكوين أشكال وخطوط على الحاسوب. ويساعد التحليل إلى العوامل على تحديد أبعاد الأشكال وطريقة ظهورها.

تحليل الفرق بين مربعين: تذكّر أنك تعلمت ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما، ويشير ناتج الضرب هذا إلى **الفرق بين المربعين**. لذا فالصورة المحلّلة للفرق بين مربعين تسمى ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما.

مفهوم أساسي — الفرق بين مربعين

أضف إلى مطويتك

الرموز: $أ^٢ - ب^٢ = (أ + ب)(أ - ب)$ أو $(أ - ب)(أ + ب)$

أمثلة: $س^٢ - ٢٥ = (س + ٥)(س - ٥)$ أو $(س - ٥)(س + ٥)$

$ن^٢ - ٦٤ = (ن + ٨)(ن - ٨)$ أو $(ن - ٨)(ن + ٨)$

مثال ١ تحليل الفرق بين مربعين

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

أ) $١٦هـ^٢ - ٩أ^٢$

$١٦هـ^٢ - ٩أ^٢ = (٤هـ)^٢ - (٣أ)^٢$ — اكتب العبارة على صورة $أ^٢ - ب^٢$

$= (٤هـ + ٣أ)(٤هـ - ٣أ)$ — تحليل الفرق بين مربعين

ب) $١٢١ - ٤ب^٢$

$١٢١ - ٤ب^٢ = (١١)^٢ - (٢ب)^٢$ — اكتب العبارة على صورة $أ^٢ - ب^٢$

$= (١١ - ٢ب)(١١ + ٢ب)$ — تحليل الفرق بين مربعين

جـ) $٢٧جـ^٣ - ٣جـ$

بما أنه يوجد عامل مشترك بين الحدود، لذا حلّل بإخراج (ق .م .أ) أولاً، ثم أكمل بطرق التحليل الأخرى.

$٢٧جـ^٣ - ٣جـ = ٣جـ(٩جـ^٢ - ١)$ — حلّل بإخراج (ق .م .أ)

$= ٣جـ[(٣جـ)^٢ - (١)^٢]$ — اكتب على الصورة $أ^٢ - ب^٢$

$= ٣جـ(٣جـ - ١)(٣جـ + ١)$ — تحليل الفرق بين مربعين.

تحقق من فهمك

أ) $٨١ - جـ^٢$ ب) $٦٤جـ^٢ - هـ^٢$

جـ) $٩س^٣ - ٤س$ د) $-٤ص^٣ + ٩ص$

قد تحتاج إلى تحليل كثيرة حدود تحليلاً تامًّا، باستعمال التحليل أكثر من مرة. وهذا ينطبق أيضًا على الفرق بين مربعين.

تنبيه !

مجموع مربعين: لا يمكن تحليل مجموع المربعين $أ^٢ + ب^٢$ إلى (أ+ب)(أ+ب). فمجموع المربعين هو كثيرة حدود أولية لا يمكن تحليلها.

مثال ٢ تطبيق التحليل أكثر من مرة

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

أ) $ب^٤ - ١٦$

$ب^٤ - ١٦ = (ب^٢)^٢ - (٤)^٢$ — اكتب $ب^٤ - ١٦$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.

$= (ب^٢ + ٤)(ب^٢ - ٤)$ — تحليل الفرق بين مربعين

لاحظ أن العامل $ب^٢ - ٤$ هو فرق بين مربعين أيضًا.

$= (ب^٢ + ٤)(ب^٢ - ٢^٢)$ — اكتب $ب^٢ - ٤$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.

$= (ب^٢ + ٤)(ب + ٢)(ب - ٢)$ — تحليل الفرق بين مربعين

ب) $٦٢٥ - س^٤$

$٦٢٥ - س^٤ = (٢٥)^٢ - (س^٢)^٢$ — اكتب $٦٢٥ - س^٤$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.

$= (٢٥ + س^٢)(٢٥ - س^٢)$ — تحليل الفرق بين مربعين

$= (٢٥ + س^٢)(٥^٢ - س^٢)$ — اكتب $٢٥ - س^٢$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.

$= (٢٥ + س^٢)(٥ - س)(٥ + س)$ — تحليل الفرق بين مربعين

تحقق من فهمك

٢أ) $ص^٤ - ١$ **٢ب)** $٤أ^٤ - ب^٤$ **٢جـ)** $٨١ - س^٤$

وتطبق أحيانًا أكثر من طريقة لتحليل كثيرة حدود تحليلاً تامًّا.

مثال ٣ تطبيق طرق مختلفة

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

أ) $٥س^٥ - ٤٥س$

$٥س^٥ - ٤٥س = ٥س(س^٤ - ٩)$ — حلل بإخراج (ق. م .أ)

$= ٥س[(س^٢)^٢ - (٣)^٢]$ — اكتب $س^٤ - ٩$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.

$= ٥س(س^٢ - ٣)(س^٢ + ٣)$ — تحليل الفرق بين مربعين

لاحظ أن $س^٢ - ٣$ ليس فرقًا بين مربعين؛ لأن ٣ ليس مربعًا كاملًا.

ب) $٧س^٣ + ٢١س^٢ - ٧س - ٢١$

$٧س^٣ + ٢١س^٢ - ٧س - ٢١$ — العبارة الأصلية

$= ٧(س^٣ + ٣س^٢ - س - ٣)$ — التحليل بإخراج (ق. م. أ)

$= ٧[(س^٣ + ٣س^٢) - (س + ٣)]$ — جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

$= ٧[س^٢(س + ٣) - (س + ٣)]$ — حلل كل تجمّع

$= ٧(س + ٣)(س^٢ - ١)$ — س+٣ عامل مشترك

$= ٧(س + ٣)(س + ١)(س - ١)$ — تحليل الفرق بين مربعين

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تحقق من فهمك

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

٣أ) $٢ص^{٤} - ٥٠$ **٣ب)** $٦س^{٤} - ٩٦$

٣جـ) $٢م^{٣} + م^{٢} - ٥٠م - ٢٥$ **٣د)** $ر^{٣} + ٦ر^{٢} + ١١ر + ٦٦$

حل معادلات بالتحليل: يمكنك بعد التحليل تطبيق خاصية الضرب الصفري على المعادلة المكتوبة على صورة ناتج ضرب عدة عوامل يساوي صفرًا.

مثال ٤ من اختبار

ما القيمة الموجبة لـ س التي تحقق المعادلة $ص = س^{٢} - \frac{٩}{١٦}$، إذا كانت ص = ٠؟

أ) $\frac{-٩}{٤}$ **ب)** صفر **جـ)** $\frac{٣}{٤}$ **د)** $\frac{٩}{٤}$

اقرأ الفقرة:

عوّض عن ص بـ صفر، ثم حل المعادلة.

حل الفقرة:

$ص = س^{٢} - \frac{٩}{١٦}$	المعادلة الأصلية
$٠ = س^{٢} - \frac{٩}{١٦}$	عوِّض عن ص بـ صفر
$٠ = س^{٢} - (\frac{٣}{٤})^{٢}$	اكتب على صورة $أ^{٢} - ب^{٢}$
$٠ = (س + \frac{٣}{٤})(س - \frac{٣}{٤})$	تحليل الفرق بين مربعين
$٠ = س + \frac{٣}{٤}$ أو $٠ = س - \frac{٣}{٤}$	خاصية الضرب الصفري
$س = \frac{-٣}{٤}$ $س = \frac{٣}{٤}$	الإجابة الصحيحة جـ

إرشادات للدراسة

استعمال طريقة أخرى

يمكن استعمال طريقة أخرى للحل بتعويض البدائل في المعادلة.

تحقق من فهمك

٤) حُلَّ المعادلة: $١٨س^{٣} = ٥٠س$؟

أ) $٠، \frac{٥}{٣}$ **ب)** $\frac{-٥}{٣}، \frac{٥}{٣}$ **جـ)** $\frac{-٥}{٣}، ٠، \frac{٥}{٣}$ **د)** $\frac{-٥}{٣}، \frac{٥}{٣}، ١$

تأكد

الأمثلة ١-٣ حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

١) $س^{٢} - ٩$ ٢) $٤أ^{٢} - ٢٥$ ٣) $٢ل^{٣} - ١٦٢ل$

٤) $و^{٤} - ٨١$ ٥) $٢د^{٤} - ٣٢ف^{٤}$ ٦) $٢٠ر^{٤} - ٤٥ن^{٤}$

٧) $٢٥٦ن^{٤} - جـ^{٤}$ ٨) $٢جـ^{٣} + ٣جـ^{٢} - ٢جـ - ٣$ ٩) $٣ن^{٣} + ٢ن^{٢} - ٤٨ن - ٣٢$

مثال ٤ ١٠) **سيارات:** قد يكون الأثر الذي تتركه عجلات السيارة ناجمًا عن وقوفها المفاجئ. والمعادلة $\frac{١}{٢٤}ع^{٢} = ف$ تعبِّر عن سرعة السيارة التقريبية (ع) بالميل/ ساعة، علمًا بأن (ف) هو طول الأثر الذي تتركه العجلات بالقدم على سطح جاف. إذا كان طول أثر العجلات ٥٤ قدمًا، فكم كانت سرعة السيارة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١-٣ حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

١١) $ل^{٢} - ١٢١$

١٢) $ر^{٤} - ك^{٤}$

١٣) $٦ن^{٤} - ٦$

١٤) $ر^{٢} - ٩ن^{٢}$

١٥) $٢جـ^{٢} - ٣٢د^{٢}$

١٦) $هـ^{٣} - ١٠٠هـ$

١٧) $هـ^{٤} - ٢٥٦$

١٨) $٢ن^{٣} - ن^{٢} - ١٦٢ن + ٨١$

١٩) $س^{٢} - ٤ص^{٢}$

٢٠) $٧هـ^{٤} - ٧ل^{٤}$

٢١) $٦ك^{٢}هـ^{٤} - ٥٤ك^{٤}$

٢٢) $٥هـ^{٣} - ٢٠هـ$

٢٣) $ف^{٣} + ٢ف^{٢} - ٦٤ف - ١٢٨$

٢٤) $٣ر^{٣} - ١٩٢ر$

٢٥) $١٠ك^{٣} - ١٢١٠ك$

٢٦) $٣س ن^{٤} - ٢٧س^{٣}$

٢٧) $ل^{٣}ر^{٥} - ل^{٣}ر$

٢٨) $٨جـ^{٣} - ٨جـ$

٢٩) $ر^{٣} - ٥ر^{٢} - ١٠٠ر + ٥٠٠$

٣٠) $٣ن^{٣} - ٧ن^{٢} - ٣ن + ٧$

٣١) $٤م^{٣} + ٩م^{٢} - ٣٦م - ٨١$

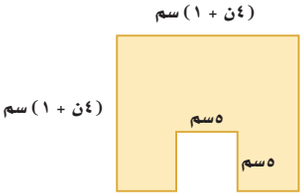
٣٢) $٣م^{٤} + ٢٤٣$

٣٣) $س^{٤} + ٦س^{٣} - ٣٦س^{٢} - ٢١٦س$

٣٤) $١٥م^{٣} + ١٢م^{٢} - ٣٧٥م - ٣٠٠$

مثال ٤

٣٥) **هندسة:** يمثّل الشكل المجاور مربعًا قُطِعَ منه مربع آخر.



أ) اكتب عبارة تمثّل مساحة المنطقة المظللة.

ب) أوجد بُعدي مستطيل له مساحة المنطقة المظللة نفسها، مفترضًا أنهما يُمثّلان بثنائيتي حد.

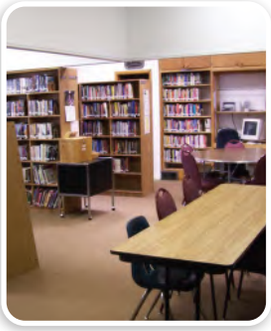
٣٦) **مبانٍ:** أراد زياد بناء ملحق في باحة منزله الخلفية، بُعداه ٨م ، ٨م .
ثم قرَّر تقليص طول أحد البعدين وزيادة البعد الآخر بالعدد نفسه من الأمتار. فإذا كانت مساحة الملحق بعد تقليصه تساوي ٦٠م^{٢}، فما بُعداه ؟

٣٧) **كتب:** نشرت إحدى دور النشر كتابًا جديدًا، وتمثّل المعادلة ع = −٢٥م^{٢} + ١٢٥م مبيعات الكتاب، حيث (ع) تمثّل عدد النسخ المبيعة، و (م) عدد الأشهر التي بيع فيها الكتاب.

أ) في أي شهر يُتوقَّع أن تنفذ النسخ المعروضة من الكتاب؟

ب) متى وصلت المبيعات إلى ذروتها؟

جـ) ما عدد النسخ المبيعة في الذروة؟



الربط مع الحياة

على الرغم من انتشار الإنترنت في معظم المنازل وأماكن العمل ليكون وسيلة للبحث والاطلاع، إلا أن البعض لايزال يفضل تكوين معلوماته من قراءة الكتب وارتياد المكتبات.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إرشادات للدراسة

حل المعادلات بالتحليل

تذكّر أن تجعل أحد طرفي المعادلة صفرًا قبل حل المعادلة بالتحليل .

حل كلّ معادلة مما يأتي بالتحليل، ثمُ تحقق من صحة الحل:

٣٨) $٣٦ل^{٢} = ١٢١$

٣٩) $١٠٠ = ٢٥س^{٢}$

٤٠) $٤ص^{٢} - \frac{٩}{١٦} = ٠$

٤١) $\frac{١}{٤}ب^{٢} = ١٦$

٤٢) $٨١ - \frac{١}{٢٥}س^{٢} = ٠$

٤٣) $٩د^{٢} - ٨١ = ٠$

٤٤) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة ثلاثية الحدود التي تمثّل مربعًا كاملاً.

أ) **جدوليًا:** انسخ الجدول أدناه وأكمله بتحليل كل ثلاثية حدود، ثم اكتب أول وآخر حد في كثيرة الحدود على صورة مربعات كاملة.

كثيرة الحدود	تحليل كثيرة الحدود	الحد الأول	الحد الأخير	الحد الأوسط
$٤س^{٢}+١٢س+٩$	$(٢س+٣)(٢س+٣)$	$٤س^{٢}=(٢س)^{٢}$	$٩=٣^{٢}$	
$٩س^{٢}-٢٤س+١٦$				
$٤س^{٢}-٢٠س+٢٥$				
$١٦س^{٢}+٢٤س+٩$				

ب) **تحليليًا:** اكتب الحد الأوسط في كل كثيرة حدود باستعمال الجذور التربيعية للمربعات الكاملة للحدين الأول والأخير.

جـ) **جبريًا:** اكتب قاعدة لثلاثية الحدود التي تمثّل مربعًا كاملاً.

د) **لفظيًا** ما الشروط الواجب توافرها في ثلاثية حدود لتصنَّف على أنها مربع كامل؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٥) **اكتشف الخطأ:** حلَّلت كلٌّ من هلا ومنى العبارة الآتية، فأيهما إجابتها صحيحة؟ فسِّر ذلك.

هلا	منى
$١٦س^{٤} - ٢٥ص^{٢} =$	$١٦س^{٤} - ٢٥ص^{٢} =$
$(٤س - ٥ص)(٤س + ٥ص)$	$(٤س^{٢} - ٥ص)(٤س^{٢} + ٥ص)$

٤٦) **تحدٍّ:** بسِّط العبارة: $٩ - (ك+٣)^{٢}$ بتحليلها بالفرق بين مربعين.

٤٧) **تحدٍّ:** حلّل: $س^{١٦} - ٨١$

٤٨) **تبرير:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. وأعطِ مثالاً مضادًّا للتحقق من إجابتك: "أي ثنائية حد جميع حدودها مربعات كاملة قابلة للتحليل".

٤٩) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا لثنائية حد نحتاج عند تحليلها تحليلاً تامًّا إلى تكرار قاعدة الفرق بين مربعين، ثم حلّلها.

٥٠) **اكتب:** لماذا لا تتضمن قاعدة الفرق بين مربعين حدًّا متغيرًا في الوسط؟

تدريب على اختبار

٥١) إذا كان أحد جذري المعادلة ٢س^{٢}+١٣س=٢٤ هو −٨ فما الجذر الآخر؟

أ) $-\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٣}{٢}$ جـ) $\frac{٢}{٣}$ د) $-\frac{٢}{٣}$

٥٢) أي ممّا يأتي يمثّل مجموع حليّ المعادلة س^{٢}+٣س=٥٤؟

أ) −٣ ب) −٢١ جـ) ٣ د) ٢١

مراجعة تراكمية

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي، وإذا لم يمكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة، فاكتب "أولية": (الدرس ٧-٤)

٥٣) ٥س^{٢} − ١٧س + ١٤

٥٤) ٥أ^{٢} − ٣أ + ١٥

٥٥) ١٠س^{٢} − ٢٠س ص + ١٠ص^{٢}

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلِّك: (الدرس ٧-٣)

٥٦) ن^{٢} − ٩ن = −١٨

٥٧) ١٠ + أ^{٢} = −٧أ

٥٨) ٢٢س − س^{٢} = ٩٦

أوجد ناتج كلًّا ممّا يأتي: (الدرس ٧-٦)

٥٩) (س + ٣)(س + ٣)

٦٠) (٢س − ٥)^{٢}

٦١) (٦س − ١)^{٢}

٦٢) (٤س + ٥)(٤س + ٥)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ ممَّا يأتي:

٦٣) (س − ٦)^{٢}

٦٤) (س − ٢) (س − ٢)

٦٥) (س + ٣) (س + ٣)

٦٦) (٢س − ٥)^{٢}

٦٧) (٦س − ١)^{٢}

٦٨) (٤س + ٥) (٤س + ٥)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٧-٦ المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست إيجاد ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما.

والآن

- أحلّل ثلاثية الحدود التي على صورة مربع كامل.
- أحلّ معادلات تتضمن مربعات كاملة.

المفردات

المربع الكامل لثلاثية حدود

لماذا؟

يسقط الحجر والكيس بالسرعة نفسها؛ لذا ستحتاج إلى حل المعادلة ٠ = −٥ن^{٢} + ل٠، لمعرفة الزمن الذي يحتاج إليه الجسم كي يصل إلى الأرض إذا سقط من ارتفاع ابتدائي (ل٠) مترًا فوق الأرض، حيث (ن) تمثّل الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم.

تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل: تعلمت قاعدة مفكوك ثنائيتي الحد (أ + ب)^{٢}، (أ − ب)^{٢}. تذكّر بأن تلك نواتج ضرب خاصة تتبع قاعدة معينة.

(أ + ب)^{٢} = (أ + ب)(أ + ب)
= أ^{٢} + أب + أب + ب^{٢}
= أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}

(أ − ب)^{٢} = (أ − ب)(أ − ب)
= أ^{٢} − أب − أب + ب^{٢}
= أ^{٢} − ٢أب + ب^{٢}

تكون نواتج الضّرب هذه على صورة **مربع كامل لثلاثية الحدود**؛ لأنها مربعات ثنائيات حد. وتساعدك القواعد أعلاه على تحليل ثلاثية الحدود التي تشكّل مربعًا كاملًا.

ولتكون ثلاثية حدود قابلة للتحليل على صورة مربع كامل، يجب أن يكون الحدان الأول والأخير مربعين كاملين، وأن يكون الحد الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي للحدين الأول والأخير بإشارة موجبة أو سالبة.

فمثلاً ثلاثية الحدود ١٦س^{٢} + ٢٤س + ٩ تشكّل مربعًا كاملًا، كما هو موضح أدناه.

١٦س^{٢} + ٢٤س + ٩

هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم؛ لأن ١٦س^{٢} = (٤س)^{٢}.

هل الحدّ الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي لكل من الحدين الأول والأخير؟ نعم؛ لأن ٢٤س = ٢(٤س)(٣).

هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم؛ لأن ٩ = ٣^{٢}.

مفهوم أساسي — تحليل ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملًا

أضف إلى مطويتك

الرموز:

أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢} = (أ + ب)(أ + ب) = (أ + ب)^{٢}

أ^{٢} − ٢أب + ب^{٢} = (أ − ب)(أ − ب) = (أ − ب)^{٢}

أمثلة:

س^{٢} + ٨س + ١٦ = (س + ٤)(س + ٤) = (س + ٤)^{٢}

س^{٢} − ٦س + ٩ = (س − ٣)(س − ٣) = (س − ٣)^{٢}

مثال ١ تمييز ثلاثية الحدود التي تشكّل مربعًا كاملاً وتحليلها

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملًا أم لا، و إذا كانت كذلك فحلِّلها.

أ) $٤ص^٢ + ١٢ص + ٩$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٤ص^٢ = (٢ص)^٢$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٩ = ٣^٢$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي $٢(٢ص)(٣)$؟ نعم، $١٢ص = ٢(٢ص)(٣)$.

بما أن الشروط الثلاثة متوفرة، فإن العبارة $٤ص^٢ + ١٢ص + ٩$ ثلاثية حدود تشكّل مربعًا كاملاً.

$٤ص^٢ + ١٢ص + ٩ = (٢ص)^٢ + ٢(٢ص)(٣) + ٣^٢$ اكتب العبارة على صورة $أ^٢ + ٢أب + ب^٢$

$= (٢ص + ٣)^٢$ حلّل باستعمال القاعدة

ب) $٩س^٢ - ٦س + ٤$

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، $٩س^٢ = (٣س)^٢$.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، $٤ = ٢^٢$.

٣ هل الحد الأوسط يساوي $-٢(٣س)(٢)$؟ لا، $-٦س \neq -٢(٣س)(٢)$.

بما أن الحد الأوسط لا يحقق الشرط، لذا فإن ثلاثية الحدود $٩س^٢ - ٦س + ٤$ لا تشكّل مربعًا كاملاً.

تحقق من فهمك

أ١) $٩ص^٢ + ٢٤ص + ١٦$ ب١) $٢أ^٢ + ١٠أ + ٢٥$

إرشادات للدراسة

تمييز ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملاً

إذا كان الحد الثابت في ثلاثية الحدود سالبًا، فإن ثلاثية الحدود لا تشكّل مربعًا كاملاً، لذا ليس من الضروري التحقق من الشروط الأخرى.

يكون تحليل ثلاثية الحدود تحليلاً تامًّا إذا كتب على صورة ناتج ضرب كثيرات حدود أولية. وقد تستعمل أكثر من طريقة لتحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا. ويساعدك ملخص المفهوم الآتي لتقرر من أين تبدأ عند تحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا، وإذا لم يناسب كثيرة الحدود أي نمط، أو لايمكن تحليلها فإنها تكون أوليّة.

ملخص المفهوم طرق التحليل

أضف إلى مطويتك

الخطوات	عدد الحدود	أمثلة
الخطوة ١: حلّل بإخراج (ق . م . أ)	أي عدد	$٤س^٣ + ٢س^٢ - ٦س = ٢س(٢س^٢ + س - ٣)$
الخطوة ٢: تحقق هل كثيرة الحدود تشكل فرقًا بين مربعين أم أنها ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.	٢ أو ٣	$٩س^٢ - ١٦ = (٣س + ٤)(٣س - ٤)$ $١٦س^٢ + ٢٤س + ٩ = (٤س + ٣)^٢$
الخطوة ٣: طبّق أنماط التحليل لـ $س^٢ + ب س + جـ$ أو $أ س^٢ + ب س + جـ$ أو حلّل بتجميع الحدود.	٣ أو ٤	$س^٢ - ٨س + ١٢ = (س - ٢)(س - ٦)$ $١٢ص^٢ + ٩ص + ٨ص + ٦$ $= (١٢ص^٢ + ٩ص) + (٨ص + ٦)$ $= ٣ص(٤ص + ٣) + ٢(٤ص + ٣)$ $= (٤ص + ٣)(٣ص + ٢)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال ٢ التحليل التام

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب "أولية":

أ) $٥س^٢ - ٨٠$

الخطوة ١: (ق. م. أ) للحدين $٥س^٢$، -٨٠ هو ٥، حلّل بإخراج (ق. م. أ).

الخطوة ٢: بما أن عدد الحدود اثنان، لذا تحقق من أن كثيرة الحدود تشكّل فرقًا بين مربعين.

$٥س^٢ - ٨٠ = ٥(س^٢ - ١٦)$ (ق. م. أ) للحدين ٥

$= ٥(س^٢ - ٤^٢)$ $س^٢ = س \times س$ ، $١٦ = ٤ \times ٤$

$= ٥(س - ٤)(س + ٤)$ تحليل الفرق بين مربعين

ب) $٩س^٢ - ٦س - ٣٥$

الخطوة ١: (ق. م. أ) للحدود: $٩س^٢$، $-٦س$، -٣٥ هو ١.

الخطوة ٢: بما أن ٣٥ ليس مربعًا كاملاً، فثلاثية الحدود لا تشكّل مربعًا كاملاً.

الخطوة ٣: حلّل باستعمال النمط $أ س^٢ + ب س + جـ$. هل يوجد عددان ناتج ضربهما $٩(-٣٥)$، أو -٣١٥ ومجموعهما -٦؟ نعم، -٢١ وَ ١٥ ناتج ضربهما -٣١٥. ومجموعهما -٦.

$٩س^٢ - ٦س - ٣٥ = ٩س^٢ + م س + ن س - ٣٥$ استخدم القاعدة

$= ٩س^٢ + ١٥س - ٢١س - ٣٥$ م = ١٥ ، ن = -٢١

$= (٩س^٢ + ١٥س) + (-٢١س - ٣٥)$ جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

$= ٣س(٣س + ٥) - ٧(٣س + ٥)$ حلّل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)

$= (٣س + ٥)(٣س - ٧)$ (٣س+٥) عامل مشترك

تحقق من فهمك

٢أ) $٢س^٢ - ٣٢$

٢ب) $١٢س^٢ + ٥س - ٢٥$

إرشادات للدراسة

تحقق من إجابتك: يمكنك التحقق من إجابتك من خلال:
- استعمال طريقة التوزيع بالترتيب.
- استعمال خاصية التوزيع
- تمثيل كلٍّ من العبارة الأصلية وتحليلها بالرسم والمقارنة بينهما.

حل معادلات تتضمن مربعات كاملة: عند استخدام خاصية الضرب الصفري في حل معادلات تتضمن عوامل متكررة يكفي مساواة أحد هذه العوامل بالصفر.

مثال ٣ حل معادلات تتضمن عوامل متكررة

حل المعادلة: $٩س^٢ - ٤٨س = -٦٤$.

$٩س^٢ - ٤٨س = -٦٤$ المعادلة الأصلية

$٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤ = ٠$ أضف ٦٤ إلى الطرفين

$(٣س)^٢ - ٢(٣س)(٨) + (٨)^٢ = ٠$ تحقق إن كانت ثلاثية الحدود $٩س^٢ - ٤٨س + ٦٤$ تمثّل مربعًا كاملاً

$(٣س - ٨)^٢ = ٠$ حلّل ثلاثية الحدود على صورة مربع كامل

$(٣س - ٨)(٣س - ٨) = ٠$ اكتب $(٣س - ٨)^٢$ كحاصل ضرب عاملين

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

٣س − ٨ = ٠	ضع أحد العوامل المتكررة = ٠
٣س = ٨	أضف ٨ إلى كلا الطرفين
س = $\frac{٨}{٣}$	اقسم كلا الطرفين على ٣

تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل :

٣أ) أ^{٢} + ١٢أ + ٣٦ = ٠ **٣ب)** ص^{٢} − $\frac{٤}{٣}$ ص + $\frac{٤}{٩}$ = ٠

قراءة الرياضيات

الجذر التربيعي

يقرأ ± $\sqrt{١٦}$ موجب أو سالب الجذر التربيعي لـ ١٦

سبق أن حللت معادلات مثل س^{٢}−١٦=٠ بالتحليل إلى العوامل. ويمكنك أيضًا استعمال الجذر التربيعي لحل المعادلة.

س^{٢} − ١٦ = ٠	المعادلة الأصلية
س^{٢} = ١٦	أضف ١٦ إلى كلا الطرفين
س = ± $\sqrt{١٦}$	خاصية الجذر التربيعي

تذكّر أنه يوجد جذران تربيعيان لـ ١٦، هما ٤ وَ −٤. لذا فإن مجموعة الحل هي {−٤، ٤}. ويمكنك التعبير عن ذلك بـ {±٤}.

مفهوم أساسي — خاصية الجذر التربيعي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لحل المعادلة التربيعية على الصورة س^{٢}= ن، خُذ الجذر التربيعي لكل طرف.

الرموز: لأي عدد حقيقي ن ≥ ٠، إذا كان س^{٢} = ن فإنَّ س = ± $\sqrt{ن}$.

مثال: س^{٢} = ٢٥

س = ± $\sqrt{٢٥}$ = ± ٥

إذا كانت ن في المعادلة س^{٢}= ن، ليست مربعًا كاملاً، فتحتاج إلى تقريب الجذر التربيعي، لذا استعمل الآلة الحاسبة. أما إذا كانت ن مربعًا كاملاً فستحصل على إجابة دقيقة.

مثال ٤ استعمال خاصية الجذر التربيعي

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) (ص − ٦)^{٢} = ٨١

(ص − ٦)^{٢} = ٨١	المعادلة الأصلية
ص − ٦ = ± $\sqrt{٨١}$	خاصية الجذر التربيعي
ص − ٦ = ±٩	٩ × ٩ = ٨١
ص = ٦ ± ٩	أضف ٦ إلى كلا الطرفين
ص = ٦ + ٩ أو ص = ٦ − ٩	افصل المعادلة إلى معادلتين
= ١٥ = −٣	بسّط
الجذران هما ١٥ وَ −٣	تحقق بالتعويض في المعادلة الأصلية

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

ب) $(س + ٦)^٢ = ١٢$

$(س + ٦)^٢ = ١٢$	المعادلة الأصلية
$س + ٦ = \pm\sqrt{١٢}$	خاصية الجذر التربيعي
$س = -٦ \pm \sqrt{١٢}$	اطرح ٦ من كلا الطرفين

الجذران هما $-٦ + \sqrt{١٢}$ ، $-٦ - \sqrt{١٢}$.

باستعمال الآلة الحاسبة، $-٦ + \sqrt{١٢} \approx -٢,٥٤$ ، $-٦ - \sqrt{١٢} \approx -٩,٤٦$

تحقق من فهمك

٤أ) $(أ - ١٠)^٢ = ١٢١$

٤ب) $(ع + ٣)^٢ = ٢٦$

مثال ٥ من واقع الحياة — حل المعادلة

فيزياء: أُسقطت كرة من ارتفاع ٦٨ مترًا. إذا كانت المعادلة $ع = -٥ن^٢ + ع_٠$ تُستعمل لإيجاد عدد الثواني (ن) التي تحتاج إليها الكرة للوصول إلى الارتفاع (ع) من الارتفاع الابتدائي ($ع_٠$) بالمتر، فأوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض.

عند مستوى الأرض، ع = ٠ والارتفاع الابتدائي ٦٨ ، إذن $ع_٠ = ٦٨$

$ع = -٥ن^٢ + ع_٠$	المعادلة الأصلية
$٠ = -٥ن^٢ + ٦٨$	عوض عن ع بـ صفر، وعن $ع_٠$ بـ ٦٨
$-٦٨ = -٥ن^٢$	اطرح ٦٨ من كلا الطرفين
$١٣,٦ = ن^٢$	اقسم على -٥
$ن \approx \pm ٣,٧$	خاصية الجذر التربيعي

بما أن العدد السالب هنا ليس منطقيًّا، لذا تستغرق الكرة ٣,٧ ثوانٍ تقريبًا للوصول إلى الأرض.

تحقق من فهمك

٥) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض إذا أُسقطت من سطح مبنى ارتفاعه نصف الارتفاع المذكور أعلاه.

تاريخ الرياضيات

جاليليو جاليلي
(١٥٦٤م-١٦٤٢م)
كان جاليليو أول من أثبت أن الأجسام المختلفة الكتل تسقط بالسرعة نفسها، وذلك بإسقاط جسمين مختلفي الكتلة من قمة برج بيزا المائل في إيطاليا عام ١٥٨٩ ميلادية.

تأكد

مثال ١ حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١) $٢٥س^٢ + ٦٠س + ٣٦$ ٢) $٦س^٢ + ٣٠س + ٣٦$

مثال ٢ حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية ، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية" :

٣) $٢س^٢ - س - ٢٨$ ٤) $٤س^٢ + ٦٤$ ٥) $٤س^٢ + ٩س - ١٦$

المثالان ٣ ، ٤ حل كلًّا من المعادلات الآتية ، وتحقق من صحة الحل:

٦) $٤س^٢ = ٣٦$ ٧) $٦٤ص^٢ - ٤٨ص + ١٨ = ٩$ ٨) $(ع + ٥)^٢ = ٤٧$

مثال ٥ ٩) **طلاء:** سقطت فرشاة الدهان من نايف أثناء قيامه بطلاء غرفة نومه، من ارتفاع ٢م. استعمل المعادلة $ع = -٥ ن^٢ + ع_٠$ لإيجاد العدد التقريبي للثواني التي تستغرقها الفرشاة للوصول إلى الأرض.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعًا كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١٠) $٤س^٢ - ٤٢س + ١١٠$ ١١) $١٦س^٢ - ٥٦س + ٤٩$ ١٢) $٨١س^٢ - ٩٠س + ٢٥$

مثال ٢ حلل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب " أولية ":

١٣) $٢٤د^٢ + ٣٩د - ١٨$ ١٤) $٨س^٢ + ١٠س - ٢١$

١٥) $٢ب^٢ + ١٢ب - ٢٤$ ١٦) $١٦أ^٢ - ١٢١ب^٢$

١٧) $١٢م^٣ - ٢٢م^٢ - ٧٠م$ ١٨) $٨جـ^٢ - ٨٨جـ + ٢٤٢$

١٩) $و^٤ - و^٢$ ٢٠) $١٢ل^٣ - ٣ل$

٢١) $١٦ك^٣ - ٤٨ك^٢ + ٣٦ك$ ٢٢) $٤ن^٣ + ١٠ن^٢ - ٨٤ن$

٢٣) $٢أ^٢ب^٢ - ٢أ^٢ - ٢أب^٣ + ٢أب$ ٢٤) $٢ر^٣ - ر^٢ - ٧٢ر + ٣٦$

٢٥) $٣ك^٣ - ٢٤ك^٢ + ٤٨ك$ ٢٦) $جـ^٢ + ٢جـ - ٣هـ^٢ + ٤هـ$

٢٧) $٨ص^٢ - ٢٠٠ع^٢$

المثالان ٣ ، ٤ حلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٢٨) $٤م^٢ - ٢٤م + ٣٦ = ٠$ ٢٩) $(ص - ٤)^٢ = ٧$

٣٠) $أ^٢ + \frac{١٠}{٧}أ + \frac{٢٥}{٤٩} = ٠$ ٣١) $س^٢ - \frac{٣}{٢}س + \frac{٩}{١٦} = ٠$

٣٢) $س^٢ + ٨س + ١٦ = ٢٥$ ٣٣) $٥س^٢ - ٦٠س = -١٨٠$

٣٤) $٤س^٢ = ٨٠س - ٤٠٠$ ٣٥) $٩ - ٥٤س = -٨١س^٢$

٣٦) $٤جـ^٢ + ٤جـ + ١ = ١٥$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مثال ٥ ٣٧) **فيزياء:** أُسقط بالون ماء في تجربة من نافذة في المدرسة. ارتفاعها ٩م. ما الزمن الذي يستغرقه البالون ليصل إلى الأرض؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

٣٨) **هندسة:** مُثِّلتْ مساحة مربع بالعبارة ٩س^{٢} − ٤٢س + ٤٩. أوجد طول ضلع المربع.

٣٩) **هندسة** إذا كانت العبارة ٨ص^{٣}+٤٠ص^{٢}+٥٠ص تمثّل حجم منشور رباعي قاعدته مستطيلة. فأوجد أبعاد المنشور الممكنة على صورة كثيرات الحدود بمعاملات أعداد صحيحة.

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٠) **اكتشف الخطأ:** حلّل منصور وفيصل العبارة س^{٨}− س^{٤} تحليلاً تامًّا، فأيهما إجابته صحيحة ؟ فسّر ذلك.

منصور	فيصل
س^{٨} − س^{٤} = س^{٤}(س^{٢} + ١)(س^{٢} − ١)	س^{٨} − س^{٤} = س^{٤}(س^{٢}+١)(س − ١)(س+١)

٤١) **تحدّ:** حلّل س$^{ن+٦}$ + س$^{ن+٢}$ + س^{ن} تحليلاً تامًّا.

٤٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة ثلاثية حدود تشكل مربعًا كاملاً يكون معامل الحد الأوسط سالبًا والحد الأخير كسرًا اعتياديًّا، ثم حلّ المعادلة.

٤٣) **تبرير:** اكتب مثالاً مضادًّا للعبارة:

"لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة ثلاثة حلول حقيقية دائمًا".

٤٤) **اكتب:** فسّر كيف تحلّل كثيرة حدود تحليلاً تامًّا.

٤٥) حدّد ثلاثية الحدود التي تختلف عن كثيرات الحدود الأخرى فيما يأتي، وفسّر إجابتك:

٩س^{٢} − ٢٤س + ١٦	٤س^{٢} + ١٠س + ٤	٢٥س^{٢} + ١٠س + ١	٤س^{٢} − ٣٦س + ٨١

٤٦) **اكتب:** فسّر كيف تحدّد إذا كانت ثلاثية الحدود تشكل مربعًا كاملاً.

تدريب على اختبار

٤٧) حُلَّ المعادلة (س − ٣)^{٢} = ٢٥.

أ) −٨، ٢ ج) ٤، ١٤

ب) −٢، ٨ د) −٤، ١٤

٤٨) **هندسة** إذا كان محيط دائرة $\frac{٦ط}{٥}$ وحدة، فما مساحتها؟

أ) $\frac{٣ط}{٥}$ وحدة مربعة

ب) $\frac{١٢ط}{٥}$ وحدة مربعة

ج) $\frac{٩ط}{٢٥}$ وحدة مربعة

د) $\frac{٣٠ط}{٢٥}$ وحدة مربعة

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

مراجعة تراكمية

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية": (الدرس ٧- ٥)

٤٩) $٤س^٢ - ٨١ص^٢$ ٥٠) $١ - ١٠٠ل^٢$ ٥١) $٣أ^٢ - ٢٠$ ٥٢) $٢٥ن^٢ - ١$

حلّ كلًّا من المعادلات الآتية، و تحقق من صحة الحل: (الدرس ٧- ٤)

٥٣) $٦س^٢ - ٤٨س + ٩٠ = ٠$ ٥٤) $١٤س^٢ + ١٤س = ٢٨$ ٥٥) $٢س^٢ - ١٠س = ٤٨$

٥٦) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٥، ٧) (−٢، −٣). (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ميل المستقيم المارّ بكلِّ زوجٍ من النقاط في كلٍّ ممّا يأتي:

٥٧) (٢ ، −١) (٥ ، −٣)

٥٨) (−٥ ، ٤) (−٥ ، −١)

٥٩) (−٢ ، ٣) (٨ ، ٣)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

اختبار الفصل

حلّل كل وحيدة حد فيما يأتي تحليلاً تامًّا:

١) ٢٥س^{٢}ص^{٤} ٢) ١٧أب^{٢}

٣) −١٨جـ^{٥}د^{٣}

٤) **حديقة:** زرع مالك ١٤٠ نبتة مرتبة على صورة مستطيل في حديقة منزله. فبكم طريقة يمكنه ترتيبها ليكون لديه على الأقل ٤ صفوف، وعدد النبتات نفسه في كل صف، على ألا يقل عن ٦ نبتات.

أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حد فيما يأتي:

٥) ٢أ، ٨أ^{٢}، ١٦أ^{٣} ٦) ٧جـ، ٢٤د

٧) ٥٠جـ^{٢}هـ، ١٢٠جـ هـ ٨) ٨ك^{٢}ر^{٢}، ٣٦ك ر

٩) **اختيار من متعدد:** إذا كانت مساحة المستطيل أدناه ٢س^{٢} − س − ١٥ وحدة مربعة، فما عرضه؟

٢س + ٥

أ) س − ٥ جـ) س − ٣

ب) س + ٣ د) ٢س − ٣

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرتي الحدود الآتيتين:

١٠) ٥س ص − ١٠س

١١) ٧أب + ١٤أب^{٢} + ٢١أ^{٢}ب

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

١٢) ٤س^{٢} + ٨س + س + ٢

١٣) ١٠أ^{٢} − ٥٠أ − أ + ٥

حل كلَّ معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

١٤) ص (ص − ١٤) = ٠

١٥) ٣س (س + ٦) = ٠

١٦) أ^{٢} = ١٢أ

١٧) **اختيار من متعدد:** ترغب نوال في فرش غرفةٍ مساحتها (س^{٢} − ٩) متر مربع بالسجاد، إذا كان عرض الغرفة (س − ٣) مترًا، فما طولها بالأمتار؟

أ) س − ٣ جـ) س + ٣

ب) س − ٩ د) ٣

حلّل كلًّا من ثلاثيات الحدود الآتية:

١٨) س^{٢} + ٧س + ٦ ١٩) س^{٢} − ٣س − ٢٨

٢٠) ١٠س^{٢} − س − ٣ ٢١) ١٥س^{٢} + ٧س − ٢

٢٢) س^{٢} − ٢٥ ٢٣) ٤س^{٢} − ٨١

٢٤) ٩س^{٢} − ١٢س + ٤ ٢٥) ١٦س^{٢} + ٤٠س + ٢٥

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٢٦) س^{٢} − ٤س = ٢١ ٢٧) س^{٢} − ٢س − ٢٤ = ٠

٢٨) ٦س^{٢} − ٥س − ٦ = ٠ ٢٩) ٢س^{٢} − ١٣س + ٢٠ = ٠

٣٠) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يُعدُّ عاملاً من عوامل س^{٤} − ١ عند تحليلها تحليلاً تامًّا؟

أ) س^{٢} − ١ جـ) س

ب) س − ١ د) ١

الاختبار التراكمي

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) جهَّز زياد الأعداد المدوَّنة في الجدول لكل نوعٍ من أنواع الكعك، إذا أراد وضع العدد نفسه من كل نوعٍ من الكعك في كل سلةٍ، بحيث تحوي السلة أكبر عددٍ ممكن من كل نوع من أنواع الكعك جميعها، فما عدد السلال اللَّازمة؟
"تلميح: لا يشترط استخدام جميع قطع الكعك".

نوع الكعك	العدد
بالشوكولاتة	٥٤
بالفراولة	٤٥
بالفواكة	٣٦
بالكراميل	٦٠

أ) ١٨ **جـ)** ١٢
ب) ١٦ **د)** ١٠

٢) باستعمال المعلومات في السؤال ١، كم قطعة كعكٍ من كل نوعٍ ستحوي كلُّ سلةٍ؟

أ) ٢ **جـ)** ٤
ب) ٣ **د)** ٦

٣) حلّل: م ن + ٥ م − ٣ ن − ١٥

أ) (م ن − ٣) (٥) **جـ)** (م − ٥) (ن + ٣)
ب) (ن − ٣) (م + ٥) **د)** (م − ٣) (ن + ٥)

٤) أيٌّ ممَّا يأتي يمثل حلًّا للمعادلة: س^{٢} + ٦س − ١١٢ = ٠ ؟

أ) −١٤ **جـ)** ٦
ب) −٨ **د)** ١٢

إرشادات للاختبارات

سؤال ٤: يمكن التحقق من الحل بتعويض العدد في المعادلة؛ للحصول على جملةٍ رياضيةٍ صحيحةٍ.

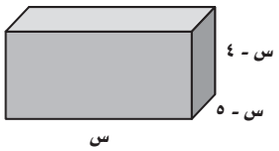
٥) أيٌّ من كثيرات الحدود الآتية، كثيرة حدود أولية؟

أ) ٥س^{٢} + ٣٤س + ٢٤
ب) ٤س^{٢} + ٢٢س + ١٠
جـ) ٤س^{٢} + ٣٨س + ٧٠
د) ٥س^{٢} + ٣س + ٤

٦) أيٌّ ممَّا يأتي لا يُعدُّ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود ٤٥ب^{٢} − ٨٠ جـ^{٢}؟

أ) ٥ **جـ)** ٢ب − ٥جـ
ب) ٣ب − ٤جـ **د)** ٣ب + ٤جـ

٧) إذا كان حجم متوازي المستطيلات أدناه يساوي ٥٦س سنتمترًا مكعبًا،



فأيٌّ من الأعداد التالية، لا يمثل بُعدًا لمتوازي المستطيلات؟

أ) ٦سم **جـ)** ٨سم
ب) ٧سم **د)** ١٢سم

٨) عند تحليل كثيرة الحدود: ص^{٢} − ٩ص + ٢٠، نحصل على:

أ) (ص − ٢) (ص − ١٠)
ب) (ص − ٤) (ص − ٥)
جـ) (ص − ٢) (ص − ٧)
د) (ص − ٥) (ص + ٢)

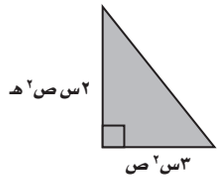
وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

إجابات قصيرة

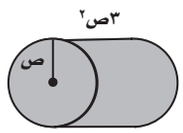
أجب عن الأسئلة الآتية:

عبِّر عن كلٍّ ممَّا يأتي في صورة وحيدة حدٍّ.

٩) مساحة المثلث:



١٠) حجم الأسطوانة:



بسِّط كلَّ عبارةٍ ممَّا يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

١١) $\frac{م^{٣} ن^{٢}}{م ن}$

١٢) $\left(\frac{٣جـ^{٢} هـ^{٣}}{٢س}\right)^{٣}$

١٣) $\left(\frac{٩س^{٢} ص^{٣}}{٥هـ^{٣} س^{٢} ص^{٢}}\right)^{٠}$

١٤) المعادلة: ع = −١٦ن^{٢} + ٤٠ن + ٣ تمثِّل ارتفاع بالون فوق سطح الأرض بالقدم بعد ن ثانيةً من إطلاقه، أوجد ارتفاعه بعد ثانيتين من إطلاقه.

إجابات مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضِّحًا خطوات الحل:

١٥) المعادلة: ع = −١٦ن^{٢} + ٢٠٠ن تمثِّل ارتفاع كرة تمَّ ركلها من الأرض لأعلى.

أ) عبِّر عن الارتفاع بصورة كثيرة حدودٍ بعد تحليلها تحليلًا تامًّا.

ب) في أي وقت يكون ارتفاع الكرة عن الأرض مساويًا للصفر؟ وضِّح معنى ذلك.

جـ) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ ومتى يكون ذلك؟

أتدرب

من خلال الإجابة عن الأسئلة؛ حتى أعزِّز ما اكتسبته من مهارات، وأسعى إلى توظيفها في الحياة اليومية، وتوجيهها نحو اكتساب الخبرات وتوسيع المدارك، مما يزيد من فرص التعلم مدى الحياة.

أنا طالبٌ معدٌّ للحياةِ، ومنافسٌ عالميًّا.

للمساعدة ..															
إذا لم تجب عن السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
فراجع الدرس ..	٧-١	٧-١	٧-٢	٧-٣	٧-٤	٧-٥	٧-٦	٧-٣	٦-١	٦-١	٦-٢	٦-٢	٦-٢	مهارة سابقة	٧-٤

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445